P.F.I.E.V

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán - Tập 1

GIẢI TÍCH 1

Giáo trình và
300 bài tập có lời giải

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

DUNOD

Giáo trình Toán - Tập 1

GIẢI TÍCH 1

Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

Cours de mathématiques - 1

ANALYSE 1

Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam, bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République Socialiste du Vietnam.

Jean - Marie Monier

Giáo trình Toán

Tập 1

GIẢI TÍCH 1

Giáo trình và 300 bài tập có lời giải

(Tái bản lần thứ tư)

Người dịch :

LÝ HOÀNG TÚ

Hiệu đính :

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Cours de mathématiques - 1

ANALYSE 1

Cours et 300 exercices corrigés

1re année MPSI. PCSI. PTSI

Jean-Marie Monier
Professeur en classe de Spéciales
au lycée la Martinière-Monplaisir à Lyon

Lời tựa

Thuở còn là một học sinh trung học trẻ tuổi, tôi vẫn mang một sự tôn kính gần như thần thánh đối với các cuốn sách giáo khoa. Khi đó, đối với tôi, các cuốn sách giáo khoa, mà cứ đầu năm học lại được một bàn tay mẫn cán bọc lại cẩn thận, có ý nghĩa như thế nào thì tôi cũng không thể nói lên chính xác được : điều chắc chắn là chúng chứa đựng Chân lý. Chẳng hạn, tôi cho rằng chỉ có thể phát biểu một định lý theo đúng từng câu chữ như trong sách giáo khoa. Lúc đó các giáo sư chưa sử dụng thường xuyên các tờ sao chụp (ôn tập và bổ sung lý thuyết, đề bài tập...) ; ngày nay thì tôi nghĩ rằng tình hình đó là do những khó khăn về sao chụp hơn là vì các giáo sư đó lại không muốn để lại dấu ấn cá nhân qua việc lựa chọn những bài tập độc đáo. Các giáo sư khi đó thường xuyên tham chiếu đến các sách giáo khoa, tuân thủ trung thành trình tự của sách giáo khoa, lấy bài tập từ sách giáo khoa. Tuy nhiên tôi vẫn còn nhớ đã rất lúng túng khi thày giáo Toán, ở lớp cuối cấp Trung học phổ thông, mà tôi cũng rất tôn sùng, đôi khi lại phát biểu một số lời phê phán đối với một cuốn sách mà chính ông ta đã khuyên chúng tôi sử dụng! Còn các tác giả của các cuốn sách đó thì lại càng bí ẩn : họ là ai, các vị thần linh nắm giữ Tri thức đó? Sau này, tất nhiên là các mối quan hệ của tôi với tư cách sinh viên đối với các cuốn giáo trình đã thay đổi dần, nhưng hình như tôi vẫn giữ lại cách tiếp cận vừa ham thích vừa tôn kính đó, chắc là do ngây thơ, cách nhìn vốn đã ngăn cản tôi không làm những việc chẳng hạn như ghi nhận xét ở lề trang sách - tôi sẽ không nhại việc làm của một Pierre de Fermat! - và cả cái định kiến tôn trọng sẽ khiến cho tôi khó mà soạn thảo được một bản nhận xét khách quan.

Không một giáo sư nào, dù cho là một tác giả đã viết giáo trình, lại nghĩ đến việc thay việc giảng dạy sống động bằng một cuốn sách. Nhưng một giáo trình được xuất bản, nếu trung thành với nội dung và tinh thần của chương trình của một lớp, có thể giúp ích rất nhiều cho những sinh viên chăm chỉ. Người sinh viên, nhất là các sinh viên mới bắt đầu học, sẽ cảm thấy yên tâm khi có được một lược đồ sáng sủa, chính xác, chặt chẽ, một cách trình bày thật chau chuốt, với các kiểu chữ khác nhau được xen kẽ một cách hợp lí, một cách nhìn toàn cục đối với các vấn đề được khảo sát trong cuốn sách. Người sinh viên sẽ tin chắc là sẽ tìm được trong cuốn sách đó một phép chứng minh chưa thấu hiểu, một thí dụ hay phản thí dụ giúp cho việc nắm vững hơn một khái niệm, câu giải đáp cho một câu hỏi mà anh ta không dám nêu ra...

Để cuốn sách có thể hoàn thành vai trò trợ lý đó - tuy thụ động nhưng luôn luôn có mặt - tôi cho rằng cuốn sách phải thật gần gũi với những khúc mắc trực tiếp của người sinh viên, không đòi hỏi những hiểu biết chưa thấu hiểu, không làm cho người sinh viên chán nản do thường xuyên đưa ra những khái niệm quá tinh tế ; tuy nhiên cuốn sách đó vẫn phải chứa đựng một nội dung đủ để có thể tạo nên được những cơ sở chắc chắn làm nền tảng cho tri thức khoa học.

Như thế chúng ta dễ hình dung được rằng việc biên soạn một bộ giáo trình dành cho sinh viên các lớp dự bị hay sinh viên học phần 1 bậc đại học, sẽ đòi hỏi, cùng với sự hiểu biết chuyên môn cần thiết, một trình độ sư phạm chắc chắn, được rèn luyện qua kinh nghiệm giảng dạy lâu năm ở các cấp học đó, một đức tính kiên trì và tỷ mỉ to lớn.

Jean-Marie Monier đã đủ dũng cảm để thực hiện công việc lớn lao đó, và những cuốn sách mà ông ta cho ra mắt chúng ta hôm nay - nối tiếp các tập bài tập vốn đã gặt hái thành công mà chúng ta đều biết - đã chứng tỏ rằng ông ta đã đi đúng hướng; tôi nghĩ rằng ông ta đã đạt được mục tiêu đề ra, tức là biên soạn những giáo trình hoàn chỉnh dành cho tất cả các sinh viên, chứ không riêng cho những sinh viên tương lai của Trường Bách khoa. Tất nhiên sau này họ sẽ đọc và thưởng thức những cuốn sách chuyên sâu..., những người sẽ tiếp tục học lên. Trước mắt, sau khi học xong lớp cuối cấp, họ cần phải thấu hiểu đầy đủ những khái niệm cơ sở mới (tính liên tục, sự hội tụ, cấu trúc tuyến tính...) ; người đọc sẽ được một bàn tay chắc chắn dẫn dắt từng bước, bàn tay đó sẽ là chỗ tựa vững chắc mỗi khi xuất hiện nguy cơ : những đoạn nhận xét đối với một số sai lầm chính là kết quả của sự quan sát nhiều lần các sai lầm mà sinh viên mắc phải.

Suốt trong quá trình học, thường xuyên có những bài tập để người sinh viên tập dượt : vài chục trang sau đó, anh ta sẽ cảm thấy hài lòng khi nhận ra rằng mình đã đạt được kết quả đúng đắn do đi đúng hướng, hoặc thu lượm được một chỉ dẫn quý báu để tiếp tục nghiên cứu thêm : thật vậy cuốn sách đã tạo nên một cái gì hoàn chỉnh, có hiệu quả và chặt chẽ.

Tôi đã nói về vai trò cơ bản mà một cuốn giáo trình, được sử dụng trong một thời gian dài như một công cụ tra cứu, có thể có trong việc hình thành một trí tuệ khoa học trẻ trung. Như vậy cấu trúc, cách biên soạn và trình bày một cuốn giáo trình là những yếu tố cơ bản : ở đây chúng ta chỉ được phép tạo ra một cái gì hoàn hảo. Đó chính là ý nghĩa của công việc mà J-M. Monier đã hoàn thành, với một trình độ hiểu biết, một cách lựa chọn và sự kiên trì tuyệt vời, từ bản thảo đầu tiên tới những công việc sửa chữa cuối cùng, tới từng chi tiết, trước khi hoàn chỉnh. Các tập sách này đáp ứng đúng một nhu cầu thực sự hiện có, và tôi tin chắc rằng chúng sẽ được đón chào nồng nhiệt từ đối tượng của chúng là các sinh viên - và chắc chắn là cả những người khác nữa - những người sau này sẽ nói rằng : "Tôi đã học được nền tảng Toán học trong các cuốn Monier !"

H.DURAND
Giáo sư Toán đặc biệt
Trường Trung học
La Martinière
Montplaisir – Lyon

Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán mới này, với nhiều bài tập có lời giải, được biên soạn dành cho sinh viên giai đoạn I các trường đại học công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và thứ 2, mọi chuyên ngành), cho sinh viên giai đoạn I đại học khoa học, và cho các thí sinh dự thi tuyển giáo sư trung học phổ thông.

Bố cục của bộ giáo trình như sau:

Tập1 : Giải tích 1 Tập2 : Giải tích 2	***Giải tích***	năm thứ 1
Tập 3 : Giải tích 3 Tập4 : Giải tích 4	***Giải tích***	năm thứ 2
Tập 5: Đại số 1:	***Đại số***	năm thứ 1
Tập 6: Đại số 2:	***Đại số***	năm thứ 2
Tập 7: Hình học:	***Hình học***	năm thứ 1và thứ 2.

Để kiểm chứng mức độ lĩnh hội kiến thức, trong mỗi chương độc giả sẽ thấy nhiều bài tập có lời giải in ở cuối sách. Trừ một vài trường hợp đặc biệt, các bài tập này đều khác với những bài đã có trong bộ bài tập có lời giải gồm tám tập mới xuất bản.

Nhiều vấn đề ở ranh giới của chương trình được đề cập ở cuối chương, dưới dạng các bổ sung có giải.

Tác giả rất mong nhận được những lời phê bình và gợi ý của độc giả. Xin vui lòng gửi các ý kiến đến Nhà xuất bản Dunod, 5, phố Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ tại đây lòng biết ơn đến rất nhiều bạn đồng nghiệp đã vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy, là: Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Gilles CHAFFARD, Jean-Yves **CHEVROLAT,** Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole **GAILLARD**, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, Alain **GOURET**, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Jean-Paul **MARGIRIER,** Annie **MICHEL**, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ và Gérard SIBERT.

Cuối cùng, tôi cảm ơn sâu sắc Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic, mà trình độ chuyên môn và tính kiên trì đã tạo điều kiện hoàn thành các tập sách này.

Jean-Marie Monier

Mục lục Tập 1

PHẦN THỨ NHẤT - GIÁO TRÌNH

Phần thứ nhất

GIÁO TRÌNH

Chương 1

Số thực

1.1 Mở đầu

Tập hợp $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$ các số tự nhiên thuộc về cơ sở của phép đếm. Do trong $\mathbb{N}$ không có các phần tử mà tổng với 1 hoặc với 2,... bằng 0, nên người ta đã xây dựng tập hợp các số nguyên (tương đối) $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2,...\}$. Sau đó, do trong $\mathbb{Z}$ không có các phần tử mà tích với 2 hoặc 3 bằng 1, nên người ta đã xây dựng tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập này được trang bị một cấu trúc thể giao hoán sắp thứ tự toàn phần, nghĩa là có hai luật hợp thành trong $+, \cdot$, và một quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$ sao cho:

$$\begin{cases} (\mathbb{Q},+,\cdot) \text{ là một thể giao hoán:} \\ \forall (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3, \begin{cases} a \leq b \quad \Rightarrow a+c \leq b+c \\ \left.\begin{matrix} a \leq b \\ 0 \leq c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \end{cases} \end{cases}$$

Ta thấy ngay, chẳng hạn là không tồn tại số hữu tỷ nào mà bình phương bằng 2. Thật vậy, nếu tồn tại $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ sao cho $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ thì các số mũ của 2 trong các dạng phân tích (thành thừa số) nguyên tố của m^2 và $2n^2$ sẽ có tính chẵn lẻ khác nhau.

Những "số" có ích khác trong Giải tích cổ điển như e, π cũng không phải là số hữu tỷ.

Do đó cần phải xây dựng một thể số rộng hơn $\mathbb{Q}$: đó sẽ là thể các số thực.

Bài tập

◊ **1.1.1 Chứng minh tính vô tỉ của $\sqrt{2}$ theo bốn phương pháp**

Ta giả thiết tồn tại $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ sao cho $m^2 = 2n^2$, và ta tìm cách dẫn đến mâu thuẫn.

a) Chứng minh rằng tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m = n + p$, rồi tồn tại $q \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n = p + q$; suy ra $q^2 = 2p^2$, sau đó suy ra mâu thuẫn bằng cách lặp lại thủ tục này.

b) Chứng minh rằng 2 chia hết m, rồi 2 chia hết n, từ đó dẫn đến mâu thuẫn nếu ta giả thiết ƯCLN$(m, n) = 1$

c) Giả thiết ƯCLN$(m, n) = 1$. Chứng minh rằng n chia hết $(m - n)(m + n)$, và mặt khác ƯCLN$(n, m - n)$ bằng ƯCLN$(n, m + n) = 1$, từ đó dẫn đến mâu thuẫn.

d) Giả thiết m và n nguyên tố cùng nhau, chứng minh rằng $m^2 \neq 2n^2$ [3].

1.2 Số thực

1.2.1 Sự tồn tại và duy nhất của R

Ta thừa nhận sự tồn tại và duy nhất, không kể đến cách ký hiệu, của tập hợp R được trang bị hai luật hợp thành trong +, · và một quan hệ ≤ sao cho:

$$\begin{cases} 1)\ (\mathbb{R},+,\cdot)\ \text{là một thể giao hoán} \\ 2)\ \leq\ \text{là một quan hệ thứ tự toàn phần trong } \mathbb{R} \\ 3)\ \forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} a\leq b \ \Rightarrow a+c\leq b+c \\ \left.\begin{matrix} a\leq b \\ 0\leq c\end{matrix}\right\} \Rightarrow a\cdot c\leq b\cdot c \end{cases} \\ 4)\ \text{Mọi bộ phận không rỗng và bị chặn trên của } \mathbb{R} \\ \quad \text{đều có một biên trên (hoặc cận trên đúng) thuộc } \mathbb{R} \end{cases}$$

Ta nhắc lại rằng:

(R, +, ·) là một *thể giao hoán*, nghĩa là:

+ có tính kết hợp: $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a + b) + c = a + (b + c)$

+ có tính giao hoán: $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b = b + a$

R có phần tử trung lập đối với phép +, ký hiệu là 0:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a + 0 = 0 + a = a$$

mọi phần tử a thuộc R đều có phần tử đối, ký hiệu là $-a$:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

· có tính kết hợp: $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

· có tính giao hoán: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a\cdot b = b\cdot a$

$\mathbf{R}$ có phần tử trung lập đối với phép $\cdot$, ký hiệu là 1:

$$\forall a \in \mathbf{R},\ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$$

mọi phần tử a thuộc $\mathbf{R} - \{0\}$ đều có phần tử nghịch đảo, ký hiệu a^{-1}:

$$\forall a \in \mathbf{R} - \{0\},\ a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$$

$\cdot$ phân phối đối với phép cộng: $\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \begin{cases} a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \\ (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a \end{cases}$

$\leq$ là một *quan hệ thứ tự toàn phần* trong $\mathbf{R}$ nghĩa là:

$\leq$ có tính phản xạ: $\forall a \in \mathbf{R},\ a \leq a$

$\leq$ có tính phản đối xứng: $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \left(\begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow a = b\right)$

$\leq$ có tính bắc cầu: $\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \left(\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c\right)$

$\leq$ là thứ tự toàn phần: $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ (a \leq b \text{ hoặc } b \leq a)$.

Cho một bộ phận A của R và một phần tử x của R

- Ta nói x là một **chặn trên** (hay **cận trên**) **của** A **trong** R khi và chỉ khi

$$\forall a \in A, \qquad a \leq x$$

- Ta nói x là một **chặn dưới** (hay **cận dưới**) **của** A **trong** R khi và chỉ khi:

$$\forall a \in A, \qquad x \leq a$$

- Ta nói x là **phần tử lớn nhất của** A khi và chỉ khi $x \in A$ và x là một chặn trên của A trong R

- Ta nói x là **phần tử bé nhất của** A khi và chỉ khi $x \in A$ và x là một chặn dưới của A trong R.

Nếu A có phần tử lớn nhất x, thì A có một và chỉ một phần tử lớn nhất (vì $\leq$ có tính phản đối xứng) khi đó ta ký hiệu $x = \text{ptln}(A)$ hay $x = \text{Max}(A)$.

Tương tự, nếu A có phần tử bé nhất x thì ta ký hiệu $x = \text{ptbn}(A)$ hay $x = \text{Min}(A)$.

Khi A là một tập hữu hạn không rỗng, gồm các phần tử $a_1,...,a_n$, ta thường ký hiệu Max $(a_1,...,a_n)$ hay $\underset{1\leq i\leq n}{\text{Max}}\, a_i$ thay cho $\text{Max}\{a_1,...,a_n\}$; cũng ký hiệu tương tự đối với phần tử bé nhất.

Một bộ phận A của R được gọi là **bị chặn trên** (tương ứng: **bị chặn dưới**) trong R khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một chặn trên (tương ứng: chặn dưới) của A trong $\mathbb{R}$. Ta nói A **bị chặn** khi và chỉ khi A bị chặn trên và bị chặn dưới.

Cho một bộ phận A của $\mathbb{R}$:

- Ta gọi phần tử bé nhất trong các chặn trên của A, nếu tồn tại, là **biên trên** (hay: **cận trên đúng**) của A trong $\mathbb{R}$; phần tử này được ký hiệu là $\mathrm{Sup}\,(A)$ hay $\mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(A)$.
- Ta gọi phần tử lớn nhất trong các chặn dưới của A, nếu tồn tại, là **biên dưới** (hay : **cận dưới đúng**). Phần tử này được ký hiệu $\mathrm{Inf}(A)$ hay $\mathrm{Inf}_{\mathbb{R}}(A)$.

Với $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ có nghĩa: $a \le b$ và $a \ne b$. Ta có thể viết $b \ge a$ (tương ứng: $b > a$) thay cho $a \le b$ (tương ứng: $a < b$).

Các phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là các **số thực.**

Ký hiệu 1 là phần tử trung lập của phép nhân trong $\mathbb{R}$. Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta ký hiệu số thực xác định bởi:

$$n \cdot 1 = \begin{cases} 1 + 1 + \ldots + 1 & (n \text{ lần}) \quad \text{nếu } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{nếu } n = 0 \\ (-1) + (-1) + \ldots + (-1) & (-n \text{ lần}) \quad \text{nếu } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$$

là $n \cdot 1$.

Với mọi $q \in \mathbb{Q}$, tồn tại $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ sao cho $q = \dfrac{m}{n}$, và ta ký hiệu $q \cdot 1 = (m \cdot 1)(n \cdot 1)^{-1}$; định nghĩa này là hợp lệ vì nếu $q = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ với (m, n), (m', n') đều thuộc $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, thì $m \cdot n' = m' \cdot n$, từ đó: $(m \cdot 1)(n' \cdot 1) = (m' \cdot 1)(n \cdot 1)$ và $(m \cdot 1)(n \cdot 1)^{-1} = (m' \cdot 1)(n' \cdot 1)^{-1}$

Với mọi $q \in \mathbb{Q}$, ta có thể đồng nhất q với $q \cdot 1$, và đồng nhất $\mathbb{Q}$ với $\{q \cdot 1;\, q \in \mathbb{Q}\}$ và như vậy ta coi $\mathbb{Q}$ là một bộ phận của $\mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}^*$ ta thường ký hiệu $\dfrac{1}{x}$ thay cho x^{-1}.

Ta ký hiệu $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\ x \ge 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R};\ x \le 0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- - \{0\}$.

Với $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$; ta định nghĩa trong $\mathbb{R}$ chín loại **khoảng:**

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$ được gọi là **khoảng đóng bị chặn** hay còn gọi là **đoạn.**

$[a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}$, $]a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\}$

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ $]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$

$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R}; x \le a\}$ $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$

$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \le x\}$ $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Các khoảng $[a; b]$, $]-\infty; a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ được gọi là **đóng**.

Các khoảng $]a; b[$, $]-\infty; a[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ được gọi là **mở**.

Các khoảng $[a; b[$, $]a, b]$ được gọi là **nửa đóng** hoặc **nửa mở**.

Với các ký hiệu trên, các số thực a (hoặc b) được gọi là các **mút** của khoảng.

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, **bao đóng** của I, ký hiệu $\overline{I}$, là một khoảng cùng có các mút với I và chứa cả những mút thực của I, nếu có.

Phần trong của I, ký hiệu $\overset{o}{I}$, là khoảng thu được từ I bằng cách bỏ các mút, nếu có.

Như vậy, với mọi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$:

$\overline{[a;b]} = \overline{[a;b[} = \overline{]a;b]} = \overline{]a;b[} = [a;b]$, $\overline{]-\infty;a]} = \overline{]-\infty;a[} =]-\infty;a]$,

$\overline{]a;+\infty[} = \overline{[a;+\infty[} = [a;+\infty[$, $\overline{]-\infty;+\infty[} =]-\infty;+\infty[$,

$\overset{o}{\widehat{[a;b]}} = \overset{o}{\widehat{[a;b[}} = \overset{o}{\widehat{]a;b]}} = \overset{o}{\widehat{]a;b[}} =]a;b[$, $\overset{o}{\widehat{]-\infty;a]}} = \overset{o}{\widehat{]-\infty;a[}} =]-\infty;a[$,

$\overset{o}{\widehat{[a;+\infty[}} = \overset{o}{\widehat{]a;+\infty[}} =]a;+\infty]$, $\overset{o}{\widehat{]-\infty;+\infty[}} =]-\infty;+\infty[$.

Độc giả sẽ thấy một sự khảo sát đầy đủ về sự tồn tại và duy nhất của $\mathbb{R}$ trong *Giáo trình Toán học* tập 2, Dunod, của J.–M. Arnaudiès và H.Fraysse.

1.2.2 Các tính chất sơ cấp của số thực

1) $\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ (x \le y \Leftrightarrow x + z \le y + z)$.

2) $\forall\, x,y,u,v \in \mathbb{R},\ \left(\begin{cases} x \le y \\ u \le v \end{cases} \Rightarrow x + u \le y + v\right)$.

Từ đó bằng phép quy nạp đơn giản, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\ldots x_n$, $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\forall i \in \{1,\ldots,n\}, x_i \le y_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (0 < x \ \Leftrightarrow\ 0 < \frac{1}{x})$.

4) $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $\forall z \in \mathbf{R}_+^*$, $(x \le y \Leftrightarrow xz \le yz)$.

5) $\forall x,y,u,v \in \mathbf{R}$, $\left(\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le u \le v \end{cases} \Rightarrow xu \le yv\right)$.

Thực vậy, $\begin{cases} x \le y \\ 0 \le u \end{cases} \Rightarrow xu \le yu$, và $\begin{cases} u \le v \\ 0 \le y \end{cases} \Rightarrow yu \le yv$.

Từ đó bằng phép quy nạp đơn giản ta có:
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,...x_n$, $y_1,...,y_n \in \mathbf{R}$:

$$\left(\forall i \in \{1,...,n\},\ 0 \le x_i \le y_i\right) \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \le \prod_{i=1}^{n} y_i .$$

Trường hợp riêng: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $(0 \le x \le y \Rightarrow x^n \le y^n)$.

6) $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\left(x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}\right)$.

7) $\forall x,y,u,v \in \mathbb{R}$, $\left(\begin{cases} x \le y \\ u < v \end{cases} \Rightarrow x + u < y + v\right)$.

Thực vậy: $(y + v) - (x + u) = (y - x) + (v - u) > (y - x) + \dfrac{v-u}{2} \ge 0$.

Từ đó suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,...x_n$, $y_1,...,y_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,...,n\},\ x_i \le y_i \\ \exists i_0 \in \{1,...,n\},\ x_{i_0} < y_{i_0} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Tính chất này được sử dụng một cách thuận tiện hơn dưới dạng sau:

$$\left(\begin{cases} \forall i \in \{1,...,n\}, x_i \le y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}\right) \Rightarrow \left(\forall i \in \{1,...,n\}, x_i = y_i\right)$$

Ta cũng suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^2$, $(x \le y \Leftrightarrow x^n \le y^n)$

Giá trị tuyệt đối của một số thực

- **Định nghĩa** **Giá trị tuyệt đối** của $x \in \mathbf{R}$ là một số thực, ký hiệu $|x|$,

  xác định bởi: $$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}.$$

Ta có các tính chất sau:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \text{Max}(x, -x)$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(|xy| = |x||y|)$.

Suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$.

Trường hợp riêng: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x^n| = |x|^n$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

6) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$, *bất đẳng thức tam giác* (quy về *4)* bằng cách bình phương).

Ta suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

7) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \text{Max}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \\ \text{Min}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \end{cases}$.

Ta được kết quả sau cùng này bằng cách phân thành hai trường hợp $x \leq y$, $y \leq x$.

8) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$

vì $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, nên $|x| - |y| \leq |x - y|$; và tương tự

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Khoảng cách thông thường trong $\mathbb{R}$

◆ **Định nghĩa** **Khoảng cách thông thường** trong $\mathbb{R}$ là ánh xạ

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto |x-y| \end{aligned}.$$

Với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, số thực $d(x, y)$ được gọi là **khoảng cách** từ x đến y.

Điều này ứng với hình ảnh trực quan về khoảng cách giữa hai điểm của một đường thẳng.

Ta có các tính chất sau, suy ra trực tiếp từ các tính chất của giá trị tuyệt đối:

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

2) $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}(y, x) = \mathrm{d}(x, y)$.
(ta nói d có tính **đối xứng**).

3) $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.
(ta nói d thoả mãn **bất đẳng thức tam giác**).

4) $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $|\mathrm{d}(x, y) - \mathrm{d}(x, z)| \leq \mathrm{d}(y, z)$.
(**bất đẳng thức tam giác ngược**).

Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz

$$\forall n \in \mathrm{N}^*, \forall x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R},\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Ta sẽ trình bày ba cách chứng minh bất đẳng thức quan trọng này:

(i)
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$
$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 \geq 0.$$

(ii) Bất đẳng thức là hiển nhiên khi $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$, nên có thể giả thiết $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \neq 0$.

Khi đó:
$$0 \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)x_j - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)y_j\right)^2$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\right).$$

(iii) Chú ý rằng: $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + y_i)^2 \geq 0$, nghĩa là $(\forall \lambda \in \mathbf{R}, T(\lambda) \geq 0)$ trong đó T: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad T(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

- Nếu $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ thì do tam thức thực T có giá trị ≥ 0 trên R nên có biệt thức ≤ 0, từ đó: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0$.

- Nếu $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ thì ($\forall i \in \{1,..., n\},\ x_i = 0$), và bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên.

Trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz

1) Cho $(x_1,...,x_n),(y_1,...y_n)$ là hai phần tử của $\mathbb{R}^n$ sao cho đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, nghĩa là:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Lặp lại các phép tính ở (i), ta được: $\forall (i, j) \in \{1,..., n\}^2, x_i y_j = x_j y_i$.

Giả sử $(x_1,...,x_n) \neq (0,...,0)$; thế thì tồn tại $i_o \in \{1,..., n\}$ sao cho $x_{i_o} \neq 0$.

Ta suy ra: $\forall j \in \{1,...,n\},\ y_j = \dfrac{y_{i_0}}{x_{i_0}} x_j$.

Như vậy, tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $(y_1,...,y_n) = \alpha(x_1,..., x_n)$.

2) Ngược lại, giả sử tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho: $\forall j \in \{1,...,n\}, y_j = \alpha x_j$. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = \alpha^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \alpha^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \end{cases}.$$

Vậy $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

Cuối cùng: bất đẳng thức Cauchy–Schwarz trở thành đẳng thức khi và chỉ khi:

$$\left| \begin{array}{l} (x_1,...,x_n) = (0,...,0) \\ \text{hoặc} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ (y_1,...,y_n) = \alpha(x_1,...,x_n) \end{array} \right.$$

nghĩa là: khi và chỉ khi $((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n))$ phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.

Bài tập

◊ **1.2.1** Tìm một ví dụ về ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho không tồn tại cặp ánh xạ (g, h) từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thoả mãn $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x) + h(y)$.

◊ **1.2.2** Giải các hệ phương trình sau với ẩn là $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$a)\begin{cases} x+y=z \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z} \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x^2+2yz=x \\ y^2+2zx=y \\ z^2+2xy=z \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} xz+y=7z \\ yz+x=8z \\ x+y+z=12 \end{cases} \qquad d)^*\begin{cases} x+y^2+z^3=3 \\ y+z^2+x^3=3 \\ z+x^2+y^3=3 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases}.$$

◊ **1.2.3** Giải các phương trình sau, với ẩn là $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

a) $3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y + z)$ *b)* $3x^2 + 4y^2 + 18z^2 - 4xy - 12xz = 0.$

◊ **1.2.4** Chứng minh rằng với mọi $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z^2+t^2=2 \\ xz=yt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=2 \\ y^2+t^2=2 \\ xy=zt \end{cases}.$$

◊ **1.2.5** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $x_1,\dots, x_n \in \mathbb{R}$; chứng minh:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \Rightarrow x_1 = \dots = x_n .$$

◊ **1.2.6** Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $x \in \mathbb{R}-\{1\}$:

$$a)\ \prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}+1\right)=\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1} \quad b)\ \prod_{k=0}^{n}\left(x^{2\cdot 3^k}+x^{3^k}+1\right)=\frac{x^{3^{n+1}}-1}{x-1}.$$

◊ **1.2.7** Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{4} > 0$.

◊ **1.2.8** Chứng minh các bất đẳng thức sau đây và khảo sát các trường hợp xảy ra đẳng thức:

a) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2,\ a^3 + b^3 + 2 \ge 2ab + a + b$

b) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n-1)a^n + b^n \ge na^{n-1}b$

c) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$

d) $\forall (a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^3,\ abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

e) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2b + b^2c + c^2a$

f) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ abc(a+b+c) \le a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \le a^4 + b^4 + c^4$

g) $\forall (a,b,c)\in (\mathbb{R}_+)^3,\quad \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geq \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$

*h)** $\forall (a,b,c)\in (\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\geq \dfrac{3}{1+abc}$

*i)** $\forall (a,b,c)\in (\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq \dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

◊ **1.2.9** Cho $(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$ sao cho: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$; chứng minh rằng: $-1\leq z\leq \dfrac{13}{3}$.

◊ **1.2.10** Cho $(a,b,c)\in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\alpha = a+\dfrac{1}{b}$, $\beta = b+\dfrac{1}{c}$, $\gamma = c+\dfrac{1}{a}$; chứng minh rằng:

$$\mathrm{Max}(\alpha,\beta,\gamma)\geq 2$$

◊ **1.2.11** Cho $n\in \mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n\in \mathbb{R}_+$; chứng minh rằng: $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$

và khảo sát trường hợp đẳng thức.

◊ **1.2.12** Cho $n\in \mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n\in [1;+\infty[$; chứng minh rằng: $n+\prod_{i=1}^{n}a_i\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$

và khảo sát trường hợp đẳng thức. (Sử dụng bài tập 1.2.11).

◊ **1.2.13** Cho $n\in \mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n\in [1;+\infty[$; chứng minh rằng: $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geq \dfrac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$

(Sử dụng bài tập 1.2.11).

◊ **1.2.14** Chứng minh rằng: $n\in \mathbb{N}^*, \forall x\in [0;1[\ \cup\ ]1;+\infty[,\quad \dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}\geq (2n+1)x^n$.

◊ **1.2.15*** Với $n\in \mathbb{N}-\{0,1\}$, tính: $\underset{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\\ 0\leq x_1\leq\dots\leq x_n\leq 1}}{\mathrm{Max}}\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)\right)$.

◊ **1.2.16** Chứng minh rằng với mọi $n\in \mathbb{N}$: $\left(\prod_{i=0}^{n}\left(1+\dfrac{1}{2i+1}\right)\right)^2>2n+3$.

◊ **1.2.17** Chứng minh rằng $\forall x\in \mathbb{R}_+^*, \forall n\in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(x+i)^2}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+n}$.

◊ **1.2.18*** Cho $n\in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$ và $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$.

a) Chứng minh rằng: $\forall i\in \{1,\dots,n\},\quad \left|\dfrac{2}{i}-1-\dfrac{1}{n}\right|\leq 1-\dfrac{1}{n}$.

b) Từ đó suy ra: $\left|\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{i}\right|\leq \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

1.2.3 Các tính chất cơ bản của $\mathbb{R}$

1) Biên trên

Ta nhắc lại tiên đề về biên trên (cận trên đúng) trong $\mathbb{R}$: mọi bộ phận không rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{R}$ đều có một biên trên trong $\mathbb{R}$.

Chú ý đến tập các phần tử đối của các phần tử thuộc bộ phận đang xét, ta cũng có: mọi bộ phận không rỗng và bị chặn dưới của $\mathbb{R}$ đều có một biên dưới trong $\mathbb{R}$.

Bài tập

◊ **1.2.19** Tìm các biên dưới và biên trên trong $\mathbb{R}$, nếu chúng tồn tại, của các tập E sau đây:

a) $E = \left\{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *b)* $E = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n} - n^2;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

◊ **1.2.20** Cho A, B là hai bộ phận không rỗng của $\mathbb{R}$; ký hiệu:

$A + B = \{x \in \mathbb{R};\ \exists (a,b) \in A \times B, x = a + b\}$, $AB = \{x \in \mathbb{R};\ \exists (a,b) \in A \times B, x = ab\}$

$-A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in A\}$, $A^{-1} = \{x \in \mathbb{R}, \exists a \in A, ax = 1\}$.

a) Giả sử A và B bị chặn trên, chứng minh rằng $A + B$ có biên trên trong $\mathbb{R}$ và $\mathrm{Sup}(A + B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.

b) Giả sử A bị chặn trên, chứng minh rằng $-A$ có biên dưới trong $\mathbb{R}$ và: $\mathrm{Inf}(-A) = -\mathrm{Sup}(A)$.

c) Giả sử A và B bị chặn trên, chứng minh rằng $A \cup B$ có biên trên trong $\mathbb{R}$ và: $\mathrm{Sup}(A \cup B) = \mathrm{Max}(\mathrm{Sup}(A), \mathrm{Sup}(B))$.

d) Giả sử A và B bị chặn, ký hiệu $A_+ = A \cap \mathbb{R}_+$, $A_- = A \cap \mathbb{R}_-$, $B_+ = B \cap \mathbb{R}_+$, $B_- = B \cap \mathbb{R}_-$

α) Chứng minh rằng nếu $A_+ \neq \varnothing$ và $B_+ \neq \varnothing$ thì A_+B_+ có biên trên trong $\mathbb{R}$ và: $\mathrm{Sup}(A_+B_+) = \mathrm{Sup}(A_+)\mathrm{Sup}(B_+)$.

β) Khảo sát tương tự với $\mathrm{Sup}(A_+B_-)$, $\mathrm{Sup}(A_-B_+)$, $\mathrm{Sup}(A_-B_-)$.

γ) Suy ra rằng AB có biên trên trong $\mathbb{R}$ và:

$\mathrm{Sup}(AB) = \mathrm{Max}(\mathrm{Sup}(A_+)\mathrm{Sup}(B_+), \mathrm{Inf}(A_+)\mathrm{Sup}(B_-), \mathrm{Sup}(A_-)\mathrm{Inf}(B_+), \mathrm{Inf}(A_-)\mathrm{Inf}(B_-))$

ở đây, theo quy ước, ta không xét các biên đối với tập rỗng.

δ) Cho kết quả tương tự đối với $\mathrm{Inf}(AB)$.

e) Giả sử $\{0\} \neq A \subset \mathbb{R}_+$ và A bị chặn trên; hãy chứng minh rằng A^{-1} có biên dưới trong $\mathbb{R}$ và: $\mathrm{Inf}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Sup}(A)}$.

2) Sự tồn tại của các căn bậc n

Cho $a \in]1; +\infty[$ và $n \in \mathbb{N}^*$; chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một phần tử b thuộc $\mathbb{R}_+$ sao cho $b^n = a$.

Đặt $E = \{x \in \mathbb{R}_+; x^n \le a\}$; E không rỗng (vì $1 \in E$), bao hàm trong R và bị chặn trên bởi a, vì nếu $x \in E$ thì $x^n \le a \le a^n$. Theo tiên đề về biên trên trong $\mathbb{R}$, E có một biên trên b trong $\mathbb{R}$.

- $b \ge 1 > 0$ vì $1 \in E$.
- Giả thiết $b^n < a$; ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho

$$(b + \alpha)^n < a.$$

Cho $\alpha \in]0; 1[$ bất kỳ; khai triển theo công thức nhị thức Newton:

$$(b+\alpha)^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k b^{n-k} \alpha^k$$

Với mọi $k \in \{1,...,n\}$: $b^{n-k}\alpha^k \le b^{n-1}\alpha$ vì $b \ge 1$ và $0 < \alpha < 1$. Do đó:

$$(b+\alpha)^n - b^n \le \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k\right) b^{n-1}\alpha = \left(2^n - 1\right) b^{n-1}\alpha .$$

Tồn tại số thực α sao cho $0 < \alpha < \mathrm{Min}\left(1, \dfrac{a-b^n}{\left(2^n-1\right)b^{n-1}}\right)$, và do đó:

$$(b+\alpha)^n \le b^n + (2^n - 1)b^{n-1}\alpha < b^n + \left(a - b^n\right) = a .$$

Vậy $b + \alpha \in E$ và $b + \alpha > b$, mâu thuẫn với định nghĩa b là biên trên của E trong R.

- Giả sử $b^n > a$; ta sẽ chứng minh rằng tồn tại β thuộc $]0; b[$ sao cho $(b-\beta)^n > a$.

Cho $\beta \in]0; b[$ bất kỳ; khai triển theo công thức nhị thức Newton:

$$b^n - \left(b - \beta\right)^n = b^n - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k b^{n-k} \beta^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} b^{n-k} \beta^k .$$

Với mọi $k \in \{1,...,n\}$: $(-1)^{k+1} b^{n-k} \beta^k = (-1)^{k+1} b^n \left(\dfrac{\beta}{b}\right)^k \le b^n \dfrac{\beta}{b} = b^{n-1}\beta$, vì $b \ge 1$ và $\dfrac{\beta}{b} \in]0;1[$. Do đó: $b^n - (b - \beta)^n \le \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k\right) b^{n-1}\beta = \left(2^n - 1\right) b^{n-1}\beta$.

Tồn tại một số thực β sao cho: $0 < \beta < \mathrm{Min}\left(b, \dfrac{b^n - a}{\left(2^n - 1\right)b^{n-1}}\right)$, và do đó:

$$(b - \beta)^n \ge b^n - \left(2^n - 1\right) b^{n-1}\beta > b^n - \left(b^n - a\right) = a.$$

Vậy $b-\beta$ là một chặn trên của E trong **R**, điều đó mâu thuẫn với định nghĩa b là biên trên của E trong **R**. Điều này chứng tỏ $b^n = a$.

Mặt khác, $\{x \in \mathbf{R}_+;\ x^n = a\}$ chỉ có nhiều nhất một phần tử, vì nếu $x^n = a = y^n$ thì $(x-y)\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i} = 0$, với $x \geq 0$, $y \geq 0$, suy ra $x = y$.

Trường hợp $0 < a < 1$ có thể quy về trường hợp trên bằng cách xét $\frac{1}{a}$; các trường hợp $a = 0$, $a = 1$ có thể thấy ngay.

Tóm lại:

◆ **Mệnh đề–Định nghĩa** Với mọi $(a, n) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{N}^*$, tồn tại $b \in \mathbf{R}_+$ duy nhất sao cho $b^n = a$; phần tử b này được ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$, hay $a^{\frac{1}{n}}$, và gọi là **căn bậc n của a**. Với $n = 2$ ta ký hiệu $\sqrt{a}$ thay cho $\sqrt[2]{a}$.

Trong một chương sau, chúng ta sẽ khảo sát tổng quát hơn về x^y với $y \in \mathbf{R}$.

Bất đẳng thức Minkowski

Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n \in \mathbf{R}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chứng minh: Bình phương hai vế của bất đẳng thức này, ta quy về bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.

Tam thức bậc hai

Với $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, xét tam thức $T: \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto ax^2+bx+c\end{array}$,

và *biệt thức* $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì với mọi $x \in \mathbf{R}$: $aT(x) > 0$.
- Nếu $\Delta = 0$, T có một và chỉ một không điểm là $-\frac{b}{2a}$, và với mọi

$x \in \mathbf{R}$: $aT(x) \geq 0$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì T có hai không điểm thực là $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ và: $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty; x'\right[\cup \left]x''; +\infty\right[, & aT(x) > 0 \\ \forall x \in \left]x'; x''\right[, & aT(x) < 0 \end{cases}$ (nếu $x' < x''$).

Ta cũng có: $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$, $\quad x'x'' = \dfrac{c}{a}$.

Ta được các kết quả trên bằng cách viết $T(x)$ dưới dạng *chính tắc*:

$$T(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Bài tập

◊ **1.2.21** Đơn giản:

a) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ $\qquad$ b) $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$.

◊ **1.2.22** Giải trong R: $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$.

◊ **1.2.23** Giải trong R: $\sqrt[4]{313+x} + \sqrt[4]{313-x} = 6$.

◊ **1.2.24** Giải trong $\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ (x-y)^2 = x + y \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 56 \\ x - y + \sqrt{x-y} = 30 \end{cases}$.

◊ **1.2.25** Giải trong $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \dfrac{1}{2}(x + y + z + 11)$.

◊ **1.2.26** Giải trong $\mathbb{R}^4$:

a) $\begin{cases} x < y \\ z < t \\ x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ $\qquad$ b) $x + yzt = y + ztx = z + txy = t + xyz = 2$.

◊ **1.2.27** Chứng minh rằng: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

◊ **1.2.28** Cho $x_1,...,x_4,\ y_1,...,y_4 \in \mathbb{R}_+$ sao cho : $\forall i \in \{1,...,4\}, x_i + y_i = 1$.

Với mọi phép thế $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, ta ký hiệu $z_\sigma = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}y_{\sigma(3)}y_{\sigma(4)}$. Chứng minh rằng khi σ chạy khắp các trị trong $\mathfrak{S}_4$ thì ít nhất có một trong các z_σ không lớn hơn $\frac{1}{4}$.

◊ **1.2.29** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(a_i)_{1 \le i \le n}$ là một cấp số cộng với các phần tử thuộc $\mathbb{R}_+^*$ (nghĩa là: $\exists r \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,...,n-1\}\ a_{i+1} = a_i + r$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.$$

◊ **1.2.30** Chứng minh rằng:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \le \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$

b) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sqrt{|a-b|} \ge \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right|$.

◊ **1.2.31** Xét *dãy* ***Fibonacci*** $(\phi_n)_{n \ge 0}$ xác định bởi:

$\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1.\ (\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n)$. Ta ký hiệu: $\omega = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

a) Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega^{n-2} \le \phi_n \le \omega^{n-1}$.

b) Kiểm chứng: $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \ge 4 \Rightarrow n^2\omega > (n+1)^2)$.

c) Kiểm chứng: $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \ge 13 \Rightarrow \omega^{n-2} > n^2)$.

d) Từ đó suy ra tập các $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\phi_n = n^2$.

◊ **1.2.32** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$; chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$.

◊ **1.2.33** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,...,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$; chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=i}^{n} a_j} \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i}$.

Để giải các bài tập từ 1.2.34 *đến* 1.2.37, *có thể sử dụng sự so sánh giữa các trung bình cộng và trung bình nhân (xem bổ sung đủ ý)*

◊ **1.2.34** Chứng minh rằng với mọi $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$:

a) $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \ge 6xyz$

b) $x^3 + y^3 + z^3 \ge 3xyz$.

◊ **1.2.35** Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,...,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \ge n$$

◊ **1.2.36** Xét ***dãy điều hoà*** $(H_n)_{n\geq 1}$, xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Chứng minh rằng

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ n(n+1)^{\frac{1}{n}} - n \leq H_n \leq n - (n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

◊ **1.2.37** Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $(n+1)^n \geq 2^n n!$ *b)* $(n+1)^n(2n+1)^n \geq 6^n (n!)^2$.

3) Tính chất Archimède, phần nguyên của một số thực

♦ **Định lý** $\mathbb{R}$ là một **thể Archimède**, nghĩa là một thể thoả mãn tính chất Archimède:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, n\varepsilon > A.$$

Chứng minh: Cho $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, ta lập luận phản chứng, nghĩa là giả thiết $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\varepsilon \leq A$. Khi đó, tập hợp $E = \{n\varepsilon\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ là một bộ phận của $\mathbb{R}$ không rỗng và bị chặn, vậy có biên trên b trong $\mathbb{R}$ (Tiên đề về biên trên trong $\mathbb{R}$). Vì $b - \varepsilon < b$ nên $b-\varepsilon$ không phải là một chặn trên của E trong $\mathbb{R}$. Do đó tồn tại một $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n\varepsilon > b - \varepsilon$, vậy $(n+1)\varepsilon > b$, điều này trái với định nghĩa của b.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, áp dụng định lý trên với $\varepsilon = 1$, ta thấy rằng $\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$ là một bộ phận không rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{Z}$ nên có phần tử lớn nhất. Từ đó ta thu được:

♦ **Mệnh đề – Định nghĩa** Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ duy nhất sao cho $n \leq x < n+1$; n được gọi là **phần nguyên của x**, ký hiệu là $E(x)$, hay $\mathrm{Ent}(x)$, hay $[x]$, hay $\lfloor x \rfloor$.

Bài tập

◊ **1.2.38** Chứng minh rằng:

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y))$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z},\ E(-x) = -E(x) - 1$

c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{Z},\ E(x+\alpha) = E(x) + \alpha$.

◊ **1.2.39** *a)* Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.

b) Từ đó suy ra giá trị của $E\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

◊ **1.2.40** Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $E\left(\frac{n}{3}\right) + E\left(\frac{n+2}{6}\right) + E\left(\frac{n+4}{6}\right) = E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n+3}{6}\right)$.

◊ **1.2.41** Xác định $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}_+^*} \left(E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

◊ **1.2.42** Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) > \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$.

◊ **1.2.43** Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tính: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{k + 3\sqrt{k}}{k}\right)$

◊ **1.2.44** Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hãy tính $\sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right)$.

◊ **1.2.45*** Chứng tỏ rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n+1} \mid \mathrm{E}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}\right) + 1$.

◊ **1.2.46** Chứng tỏ rằng: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{n}\right) = \mathrm{E}(a)$.

4) Tính trù mật

♦ **Định nghĩa** Một bộ phận D của $\mathbb{R}$ được nói là **trù mật trong** $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(x < y \Rightarrow (\exists d \in D, x < d < y))$.

Cho D là một bộ phận của $\mathbb{R}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ và $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $x < y$. Thế thì tồn tại một dãy $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của D khác nhau từng đôi một, sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x < d_n < y.$$

Thật vậy:

- Tồn tại $d_0 \in D$ sao cho $x < d_0 < y$.
- Nếu tồn tại $d_n \in D$ sao cho $x < d_n < y$, thì tồn tại $d_{n+1} \in D$ sao cho $d_n < d_{n+1} < y$.

Các phần tử d_n xác định như vậy khác nhau từng đôi một, bởi vì dãy $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy tăng nghiêm ngặt. Điều này chứng tỏ rằng tập hợp $]x; y[\cap D$ là vô hạn.

♦ **Định lý**

$\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$

Chứng minh: Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $x < y$ và $\varepsilon = y - x > 0$. Vì $\mathbb{R}$ có tính Archimède nên tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n\varepsilon > 1$, nghĩa là $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Đặt $m = \mathrm{E}(nx) + 1$ và $r = \frac{m}{n}$, ta được: $m - 1 \le nx < m$, từ đó suy ra $x < \frac{m}{n} \le x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.

Bài tập

◊ **1.2.47** Ký hiệu $E = \{q^2; q \in \mathbb{Q}\}$ và $D = E \cup (-E)$; chứng minh rằng D trù mật trong $\mathbb{R}$.

◊ **1.2.48** Cho D, E là hai bộ phận của $\mathbb{R}$ sao cho: D trù mật trong $\mathbb{R}$ và $D \subset E$; chứng minh rằng E trù mật trong $\mathbb{R}$.

◊ **1.2.49** Người ta gọi mọi số hữu tỷ có dạng $\frac{m}{2^n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ là số **dyadic**; chứng minh rằng tập hợp các số dyadic trù mật trong $\mathbb{R}$.

◊ **1.2.50** Cho D là một bộ phận của $\mathbb{R}$ và trù mật trong $\mathbb{R}$, và F là một bộ phận hữu hạn của D; chứng minh rằng $D - F$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

5) Số vô tỷ

Một số thực được gọi **vô tỷ** khi và chỉ khi nó không phải là số hữu tỷ; vậy tập các số vô tỷ là $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Tập hợp này không ổn định đối với phép cộng ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $-\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) và với phép nhân ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Tuy vậy ta chú ý rằng:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \ \forall y \in \mathbb{Q}, \quad x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \\ \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \ \forall y \in \mathbb{Q}, \quad xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \\ \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \ \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

• **Mệnh đề**

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$

Chứng minh: Giả sử $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $x < y$. Tồn tại $q \in \mathbb{Q}$ sao cho $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < q < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$; nếu $q = 0$ thì tồn tại $q' \in \mathbb{Q}$ sao cho $q < q' < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$. Điều đó chứng tỏ $\mathbb{Q}\sqrt{2} - \{0\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ (ở đây $\mathbb{Q}\sqrt{2} = \{q\sqrt{2}\ ;\ q \in \mathbb{Q}\}$); vì $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ chứa $\mathbb{Q}\sqrt{2} - \{0\}$ nên $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

Bài tập

◊ **1.2.51** Chứng minh: *a)* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ *b)* $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$.

◊ **1.2.52** Cho $x \in \mathbb{R}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ sao cho $x \notin \mathbb{Q}$ và $ad - bc \neq 0$. Chứng minh: $\dfrac{ax + b}{cx + d} \notin \mathbb{Q}$.

◊ **1.2.53** Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2x + 5}{x + 2}$ gần với $\sqrt{5}$ hơn là x

$\left(\text{nghĩa là : } \left|\dfrac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5}\right| \le \left|x - \sqrt{5}\right|\right)$.

◊ **1.2.54*** Cho $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ sao cho $\sqrt{7} - \dfrac{a}{b} > 0$, chứng minh: $\sqrt{7} - \dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{ab}$.

6) Đặc trưng của các khoảng của $\mathbb{R}$

♦ **Mệnh đề** Một bộ phận I của $\mathbb{R}$ là một khoảng khi và chỉ khi:

$$\forall (x, y) \in I^2, (x \le y \Rightarrow [x; y] \subset I)$$

Chứng minh: (i) Nếu I là một khoảng của $\mathbb{R}$ và $x, y \in I$ sao cho $x \le y$, thì $[x; y] \subset I$, ta thấy rõ điều này bằng cách nhận xét từng trường hợp tùy theo loại khoảng của I (có 9 trường hợp)

(ii) Ngược lại, giả sử I là một bộ phận của $\mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall (x, y) \in I^2, (x \le y \Rightarrow [x; y] \subset I).$$

Vì $\varnothing$ là một khoảng, nên ta có thể giả sử $I \neq \varnothing$. Xét một phần tử cố định a của I và đặt $G_a = \{x \in I; x \le a\} =]-\infty, a] \cap I$ và $D_a = \{x \in I; x \ge a\} = [a; +\infty[\cap I$.

- Nếu D_a không bị chặn trên, thì với mọi $b \in [a; +\infty[$ tồn tại $c \in D_a$ sao cho $b \le c$, từ đó suy ra $b \in I$ vì $a \le b \le c$. Vậy $D_a = [a; +\infty[$.

- Nếu D_a bị chặn trên thì D_a có một biên trên β trong $\mathbb{R}$ và $D_a \subset [a; b]$. Với mọi $b \in [a; \beta[$, tồn tại $c \in D_a$ sao cho $b \le c$ (theo định nghĩa của β); vậy $b \in I$ vì $a \le b \le c$. Từ đó: $[a; \beta[\subset D_a \subset [a; \beta]$ và do đó $D_a = [a; \beta[$ hay $D_a = [a; \beta]$.

Do vậy D_a là một trong ba khoảng $[a; +\infty[$, $[a; \beta[$, $[a; \beta]$. Ta thu được kết quả tương tự đối với G_a: G_a là một trong các khoảng $]-\infty; a]$, $]\alpha; a]$, $[\alpha; a]$ trong đó $\alpha = \mathrm{Inf}(G_a)$ nếu G_a bị chặn dưới.

Vì $I = G_a \cup D_a$ nên ta thấy ngay I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Bài tập

◊ **1.2.55** Cho hai khoảng I, J trong $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm; chứng tỏ rằng tồn tại một song ánh từ I lên J.

1.3 Đường thẳng số mở rộng $\overline{\mathbb{R}}$

Ta thêm vào $\mathbb{R}$ hai phần tử riêng biệt và không thuộc $\mathbb{R}$, ký hiệu là $-\infty$ và $+\infty$, và mở rộng các luật hợp thành trong $+$, $\cdot$ và quan hệ thứ tự $\le$ ra $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ như sau:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \end{cases} \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty, x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty, x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty \\ (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty, (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ -\infty < x < +\infty; -\infty \le -\infty, +\infty \le +\infty \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ được gọi là **đường thẳng số mở rộng**.

Chú ý rằng các luật +, · trong $\overline{\mathbb{R}}$ chưa được định nghĩa cho tất cả các phần tử; $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $0(+\infty)$, $(+\infty)0$, $0(-\infty)$, $(-\infty)0$. Trong giải tích, chúng ứng với các dạng vô định.

Trong $\overline{\mathbb{R}}$ chỉ có 4 loại khoảng $[\overline{a};\overline{b}]$, $[\overline{a};\overline{b}[$, $]\overline{a};\overline{b}]$, $]\overline{a};\overline{b}[$, với $(\overline{a},\overline{b}) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ sao cho $\overline{a} \le \overline{b}$

◆ **Mệnh đề** Mọi bộ phận không rỗng của $\overline{\mathbb{R}}$ đều có một biên trên và một biên dưới trong $\overline{\mathbb{R}}$.

VÍ DỤ: $\mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathbb{R}}) = +\infty$, $\mathrm{Inf}_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathbb{R}}) = -\infty$, $\mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}}([-\infty;0[) = 0 = \mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(]-\infty;0[)$.

Bổ sung

◊ **C 1.1 So sánh trung bình cộng và trung bình nhân: phép chứng minh của Cauchy**

Với $n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, ta định nghĩa:

$$\begin{cases} \textbf{Trung bình cộng của } a_1,\dots,a_n \text{ là: } \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \\ \textbf{Trung bình nhân của } a_1,\dots,a_n \text{ là: } \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

mà ta ký hiệu lần lượt là $\mathcal{A}(a_1,\dots,a_n)$ và $\mathcal{G}(a_1,\dots,a_n)$

1) Chứng minh bằng quy nạp theo m:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall (a_1,\dots,a_{2^m}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^m} \quad \mathcal{A}(a_1,\dots,a_{2^m}) \ge \mathcal{G}(a_1,\dots,a_{2^m}).$$

2) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $2^m \le n < 2^{m+1}$. Đặt $a = \mathcal{A}(a_1,\dots,a_n)$ và với mọi $i \in \{n+1,\dots,2^{m+1}\}$ $a_i = a$. Áp dụng kết quả ở *1)* đối với họ $(a_1,\dots,a_{2^{m+1}})$, chứng minh: $\mathcal{A}(a_1,\dots,a_n) \ge \mathcal{G}(a_1,\dots,a_n)$.

Như vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức *so sánh giữa trung bình cộng và trung bình nhân:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

◊ **C 1.2 Tính không đếm được của $\mathbb{R}$**

Một tập hợp E được gọi là **đếm được** khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ $\mathbb{N}$ lên E.

A *1) a)* Chứng minh rằng mọi bộ phận vô hạn của một tập hợp đếm được là đếm được.

b) Chứng minh rằng nếu hai tập hợp đều đếm được thì hợp của chúng cũng đếm được.

2) Chứng tỏ rằng ánh xạ $f: \begin{array}{l}\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \\ (m,n) \mapsto (2m+1)2^n\end{array}$ là một song ánh

3) Suy ra rằng $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}$ đều đếm được.

B *1)* Người ta biết rằng mỗi số thực đều có một biểu diễn thập phân duy nhất (xem 3.2.2, *2)*).

Giả sử tồn tại một song ánh $\theta : \mathbb{N}^* \to [0;\, 1[$; với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta gọi $\theta(n) = 0, a_{n,1}a_{n,2}...a_{n,p}...$ là biểu diễn thập phân riêng của $\theta(n)$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét một số nguyên b_n sao cho $0 \le b_n \le 8$ và $b_n \neq a_{n,n}$. Chứng minh rằng $\theta(n)$ nhỏ hơn số thực $x = 0, b_1b_2b_3...$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Kết luận: $\mathbb{R}$ ***không đếm được***.

◊ C 1.3 Mở đầu về giải tích các khoảng

Ký hiệu $\mathcal{S}$ là tập hợp các đoạn của $\mathbb{R}$ nghĩa là tập hợp các khoảng đóng bị chặn $[a_1;\, a_2]$ của $\mathbb{R}$ khi $(a_1;\, a_2)$ chạy khắp $\mathbb{R}^2$ và $a_1 \le a_2$. Với hai phần tử A và B của $\mathcal{S}$ ta ký hiệu:

$$\begin{cases} A + B = \{x \in \mathbb{R} : \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\} \\ AB = \{x \in \mathbb{R} : \exists (a; b) \in A \times B,\ x = ab\ \} \end{cases}$$

A *1)* Đặt $A = [a_1;\, a_2]$, $B = [b_1,\, b_2]$. Chứng minh rằng:

$A + B = [a_1 + b_1;\, a_2 + b_2] \in \mathcal{S}$

$AB = [\mathrm{Min}(a_1b_1,\, a_1b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2);\ \mathrm{Max}(a_1b_1,\, a_1b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2)] \in \mathcal{S}$.

2) Kiểm chứng lại rằng với mọi A, B, C thuộc $\mathcal{S}$:

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $AB = BA$

d) $(AB)C = A(BC)$

e) $A + [0;\, 0] = A$

f) $A[1;\, 1] = A$

g) $AB = [0;\, 0] \Rightarrow (A = [0;\, 0]$ hay $B = [0;\, 0])$

h) A có một phần tử đối xứng đối với phép + (tương ứng: $\cdot$) khi và chỉ khi A là đơn tử (tương ứng: đơn tử khác $[0;\, 0]$).

i) $A(B + C) \subseteq (AB) + (AC)$ và cho ví dụ khi bao hàm thức này là nghiêm ngặt.

j) $A(B + C) = (AB) + (AC) \Leftarrow (\forall (b, c) \in B \times C,\ bc \ge 0)$.

B Giải các phương trình sau, với ẩn là $X \in \mathcal{S}$:

1) $[2;\, 3]X = [-1;\, 2]$ *2)* $[1;\, 2]X = [2;\, 4]$ *3)* $[1;4]X = [1;2]$

4) $[-3;\, 1]X = [1;\, 2]$ *5)* $[-1;\, 2]X = [-2;\, 4]$.

Nhận xét

Với mọi $A = [a_1; a_2] \in \mathcal{S}$ khác $[0;0]$, ta ký hiệu $\chi(A) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} & \text{nếu } |a_1| \le |a_2| \\ \dfrac{a_2}{a_1} & \text{nếu } |a_1| > |a_2| \end{cases}$

với A, $B \in \mathcal{S}$ cho trước và xét phương trình (1) $AX = B$, ẩn là $X \in \mathcal{S}$ ta có thể chứng minh rằng:

- (1) có ít nhất một nghiệm khi và chỉ khi: $\chi(A) \ge \chi(B)$
- (1) có ít nhất hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $\chi(A) = \chi(B) \le 0$.

Tham khảo: G.Alefeld và J.Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, London, 1983.

Chương 2
Số phức

2.1 Mở đầu

Chúng ta đã thấy (1.2.3, *2*)) rằng các tam thức thực $aX^2 + bX + c$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ không có không điểm thực. Tuy nhiên sẽ rất tiện lợi nếu có thể thừa số hoá các tam thức như vậy thành dạng $a(X - \alpha)(X - \beta)$, trong đó α và β là những số không thực ("ảo") và thực hiện những phép tính tương tự như các phép tính đã được sử dụng khi α và β là số thực.

Nhằm mục đích ấy, ta thêm vào $\mathbb{R}$ một phần tử mới, ký hiệu là i (chữ đầu của từ "imaginaire" (ảo)) và kết hợp i với các số thực x, y để có các số phức $x + iy$.

2.2 Thể số phức

2.2.1 Định nghĩa

Ta trang bị cho $\mathbf{R}^2$ hai luật hợp thành trong, ký hiệu là + và · (hay không viết dấu đối với trường hợp thứ hai) xác định bởi:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx'). \end{cases}$$

Ta kiểm chứng dễ dàng rằng $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ là một thể giao hoán, nghĩa là:

+ có tính giao hoán, kết hợp, có phần tử trung lập (0, 0) và mọi phần tử (x, y) thuộc $\mathbf{R}^2$ đều có phần tử đối xứng $(-x, -y)$ đối với phép +.

  có tính giao hoán, kết hợp, phân phối đối với phép +, có phần tử trung lập (1, 0) và mọi phần tử (x, y) thuộc $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ đều có phần tử đối xứng $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ đối với phép ·.

Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $x \mapsto (x,0)$ là đơn ánh và là một đồng cấu thể. Vậy ta có thể đồng nhất $(x, 0)$ với x, thể con $\mathbb{R} \times \{0\}$ của $\mathbb{R}^2$ với $\mathbb{R}$.

Ta ký hiệu tập hợp $\mathbb{R}^2$ là $\mathbb{C}$ và trang bị cho nó hai luật hợp thành trong $+, \cdot$ đã định nghĩa trên đây; các phần tử của $\mathbb{C}$ được gọi là các **số phức**. Vậy:

$$\boxed{\mathbb{C} \text{ là một thể giao hoán}}$$

Ký hiệu $i = (0, 1)$; i thoả mãn $i^2 = -1$. Ta có:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = (x, 0)(1, 0) + (y, 0)(0, 1) = x1 + yi = x + iy.$$

Cách viết $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gọi là **dạng chính tắc** (hay **dạng đại số**) của **số phức** z.

Rõ ràng $\mathbb{C}$ là một $\mathbb{C}$–không gian vectơ 1 chiều có một cơ sở là (1), và là một $\mathbb{R}$–không gian vectơ 2 chiều mà một cơ sở là (1, i). Ánh xạ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ $(x,y) \mapsto x+iy$ là một đẳng cấu $\mathbb{R}$–không gian vectơ.

Ta ký hiệu $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Chú ý rằng với mọi $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ ta có: $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Bài tập

◊ **2.2.1 Xây dựng $\mathbb{C}$ bằng ma trận**

Ký hiệu $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \{xI + yJ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Kiểm chứng rằng $J^2 = -1$ và chứng minh rằng ánh xạ $\theta : \mathbb{C} \to E$, cho ứng số phức $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, với $xI + yJ$, là một đẳng cấu thể. Nói cách khác J đóng vai trò của i trong $\mathbb{C}$.

◊ **2.2.2 Xây dựng $\mathbb{C}$ bằng đa thức**

a) Chứng minh rằng $X^2 + 1$ là bất khả quy trong $\mathbb{R}[X]$.

b) Xét idêan $\mathcal{I}$ của $\mathbb{R}[X]$ cảm sinh bởi $X^2 + 1$, nghĩa là:

$$\mathcal{I} = (X^2 + 1)\,\mathbb{R}[X] = \{(X^2 + 1)Q;\ Q \in \mathbb{R}[X]\},$$

và vành–thương $C = \mathbb{R}[X]/\mathcal{I}$. Ở đây quan hệ tương đương được xác định bởi:

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P \mathcal{R} Q \Leftrightarrow X^2 + 1 \mid Q - P)$$

Lớp, theo modulo R của một phần tử P của $\mathbb{R}[X]$ được ký hiệu là $\hat{P}$; các luật hợp thành trong của C là $\hat{+}, \hat{\cdot}$, được xác định bởi:

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \begin{cases} \hat{P} \hat{+} \hat{Q} = \widehat{P+Q} \\ \hat{P} \hat{\cdot} \hat{Q} = \widehat{PQ} \end{cases}$$

Hãy chứng minh rằng $(C, \hat{+}, \hat{\cdot})$ là một thể giao hoán, và ánh xạ $\theta : \mathbb{C} \to C$, cho ứng mỗi số phức $x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, với $\widehat{x + yX}$ là một đẳng cấu thể. Nói khác đi, trong C, $\hat{X}$ có vai trò như i trong $\mathbb{C}$.

◊ **2.2.3** Hãy tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sao cho:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) + zf(-z) = 1 + z.$$

◊ **2.2.4*** Với mọi $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ và mọi $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ sao cho $x + y = 1$, chứng minh rằng:

$$x^{m+1}\sum_{k=0}^{n} y^k \mathrm{C}_{m+k}^{k} + y^{n+1}\sum_{l=0}^{m} x^l \mathrm{C}_{n+l}^{l} = 1.$$

◊ **2.2.5** Cho E, F, G, H là những bộ phận của $\mathbb{R}^2$, xác định bởi các hệ thức sau:

$$E: \quad x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad F: \quad 2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} = 3,$$

$$G: \quad x^3 - 3xy^2 + 3y = 1, \qquad H: \quad 3x^2y - 3x - y^3 = 0.$$

Chứng minh: $E \cap F = G \cap H$.

◊ **2.2.6** Có tồn tại hay không $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ sao cho: $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^3 + y^3 = 3$?

◊ **2.2.7** Tìm tất cả các $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ sao cho:

$$\begin{cases} x, y, z \text{ khác nhau từng đôi} \\ x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2zx = z(z-1) + 2xy. \end{cases}$$

◊ **2.2.8** Giải hệ phương trình với ẩn $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$xy = z,\ \ yz = x,\ \ zx = y.$$

2.2.2 Số phức liên hợp, phần thực, phần ảo

- **Định nghĩa 1** Với mọi $z = x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa **(số) liên hợp** $\bar{z}$ của z bởi: $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

Ta có các tính chất sau:

1) $\forall z \in \mathbb{C}, \ \bar{\bar{z}} = z$

2) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \ \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

3) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \overline{zz'} = \bar{z}\,\overline{z'}$.

Hơn nữa, vì $\bar{1} = 1$, nên ta thấy rằng ánh xạ "chuyển sang số liên hợp" $\gamma : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{array}$ là một tự đồng cấu đối hợp của thể $\mathbb{C}$; γ là $\mathbb{R}$–tuyến tính, nhưng không là $\mathbb{C}$–tuyến tính.

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (z_1,...,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left(\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \text{ và } \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k} \right)$.

Tính chất này suy ra từ các tính chất *2), 3)* bằng một phép quy nạp đơn giản.

5) $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall z' \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

Thực vậy, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}\,\overline{z'} = \overline{\dfrac{1}{z'}\, z'} = 1$, suy ra $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} \neq 0$ và $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$.

6) $\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ \bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \end{cases}$.

Các phần tử của tập hợp $i\mathbb{R} = \{iy;\ y \in \mathbb{R}\}$ được gọi là các **số ảo thuần tuý** hoặc **thuần ảo**.

Ta có thể dùng số liên hợp để "biến đổi" mẫu số thành số thực:

$\dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;hoặc là với mọi $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

- **Định nghĩa 2** Với mọi $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa:

$$\begin{cases} \textbf{phần thực} \text{ của } z \text{ là : } \operatorname{Re}(z) = x \\ \textbf{phần ảo} \text{ của } z \text{ là : } \operatorname{Im}(z) = y \end{cases}.$$

Thấy ngay các tính chất sau:

1) $\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \\ \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z) \end{cases},\quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases}$.

2) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \begin{cases} \text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z') \end{cases}$.

3) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \text{Re}(\lambda z) = \lambda\, \text{Re}(z) \\ \text{Im}(\lambda z) = \lambda\, \text{Im}(z) \end{cases}$.

Nhưng, nói chung, $\text{Re}(zz') \neq \text{Re}(z)\text{Re}(z')$ và $\text{Im}(zz') \neq \text{Im}(z)\text{Im}(z')$. Các ánh xạ $\begin{array}{l}\text{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ \quad z \mapsto \text{Re}(z)\end{array}$ và $\begin{array}{l}\text{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ \quad z \mapsto \text{Im}(z)\end{array}$ là $\mathbb{R}$–tuyến tính, nhưng không là $\mathbb{C}$–tuyến tính.

Bài tập

◊ **2.2.9** Cho ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \begin{cases} f(z + z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases} \end{cases}$$

Chứng minh: ($\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z$) hoặc ($\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$).

◊ **2.2.10** Giải phương trình: $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$, ẩn là $z \in \mathbb{C}$.

◊ **2.2.11** Xác định tập các $z \in \mathbb{C}$ sao cho $(z, \bar{z})$ là $\mathbb{R}$–phụ thuộc tuyến tính.

◊ **2.2.12** Với $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ sao cho $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 = b^3 = c^3$.

2.2.3 Môđun

♦ **Định nghĩa** Với mọi $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa môđun của z, ký hiệu $|z|$, bởi: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ánh xạ môđun $\begin{array}{l}|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ \quad z \mapsto |z|\end{array}$ là thác triển của ánh xạ trị tuyệt đối: $\begin{array}{l}|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto |x|\end{array}$; điều đó lý giải cách chọn ký hiệu trên đây.

♦ **Các tính chất**

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, ($|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$).

3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Đặc biệt, với mọi $z \in \mathbb{C}^*$: $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

4) $\forall z \in \mathbf{C}$, $|\bar{z}| = |z|$.

5) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $|zz'| = |z||z'|$ và bằng một phép quy nạp đơn giản:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n,\ \left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|.$$

6) $\forall (z, z') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

7) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Bất đẳng thức này được gọi là **bất đẳng thức tam giác**, đó chính là bất đẳng thức Minkowski trong $\mathbb{R}^2$ (xem 1.2.3, *2)*). Từ đó bằng quy nạp đơn giản ta suy ra:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

8) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $\big||z| - |z'|\big| \leq |z| - |z'|$.

Thật vậy: $|z| = |(z - z') + z'| \leq |z - z'| + |z'|$, từ đó:

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ |z| - |z'| \leq |z - z'|\ ,$$

sau đó hoán vị vai trò của z và z'.

9) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $\left(|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{hoặc} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z \end{array} \right. \right)$.

Nếu $z \neq 0$, đặt $\dfrac{z'}{z} = x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$|z + z'| = |z| + |z'| \quad \Leftrightarrow \quad |1 + x + \mathrm{i}y| = 1 + |x + \mathrm{i}y|$$

$$\Leftrightarrow (1 + x)^2 + y^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2|x + \mathrm{i}y| \Leftrightarrow x = |x + \mathrm{i}y|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Bài tập

◊ **2.2.13 Hằng đẳng thức hình bình hành.**

Chứng minh: $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

◊ **2.2.14** Chứng minh rằng với mọi $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} \left|\overline{z}z'+1\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 = \left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right) \\ \left|\overline{z}z'-1\right|^2 - \left|z-z'\right|^2 = \left(1-|z|^2\right)\left(1-|z'|^2\right) \end{cases}.$$

◊ **2.2.15 Biểu diễn zz' bằng các bình phương các môđun**

Kiểm chứng rằng, với mọi $(z, z') \in \mathbb{C}$: $zz' = \frac{1}{4}\left(\left|z+\overline{z'}\right|^2 - \left|z-\overline{z'}\right|^2 + \mathrm{i}\left|z+\mathrm{i}\overline{z'}\right|^2 - \mathrm{i}\left|z-\mathrm{i}\overline{z'}\right|^2\right)$.

◊ **2.2.16** Kiểm chứng rằng mọi số phức có môđun bằng 1 đều có thể viết được dưới dạng: $\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}$, $x \in \mathbb{R}$.

◊ **2.2.17* Khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức tam giác với *n* số hạng.**

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$; chứng minh:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \left(\exists u \in \mathbb{C}, \exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^n, \forall k \in \{1,\ldots,n\}, z_k = \alpha_k u\right).$$

◊ **2.2.18** Chứng minh: $\forall(a, b) \in \mathbb{C}^2, |a+b|^2 \le \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$, và xét trường hợp đẳng thức.

◊ **2.2.19** Chứng minh rằng: $\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|(1+\mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}z\right| < \frac{3}{4}\right)$.

◊ **2.2.20** Chứng minh rằng: $\forall z \in \mathbb{C}, \left(|1+z| \ge \frac{1}{2} \text{ hay } \left|1+z^2\right| \ge 1\right)$.

◊ **2.2.21** Chứng minh rằng: $\forall(a, b) \in \mathbb{C}^2,\ 2|a|\,|b|\,|a-b| \ge \left(|a|+|b|\right)\bigl|a|b|-b|a|\bigr|$.

◊ **2.2.22** Chứng minh: $\forall(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4,\ \sum_{k=1}^{4}|z_k| \le \sum_{1\le i<j\le 4}\left|z_i + z_j\right|$.

◊ **2.2.23** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, $Z \in \mathbb{C}$ sao cho $Z^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2$, chứng minh:

$$\left|\mathrm{Re}(Z)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\mathrm{Re}(z_k)\right|.$$

◊ **2.2.24** Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| \ne 1$, và $n \in \mathbb{N}$, chứng minh:

$$\left|\frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}\right| \le \frac{1-(n+1)|z|^n + n|z|^{n+1}}{\left(1-|z|\right)^2}.$$

◊ **2.2.25** *a)** **Hằng đẳng thức Hlawka**

Chứng minh, với mọi $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$:

$$\left(|a|+|b|+|c|-|b+c|-|c+a|-|a+b|+|a+b+c|\right)\left(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\right)$$
$$=\left(|b|+|c|-|b+c|\right)\left(|a|-|b+c|+|a+b+c|\right)$$
$$+\left(|c|+|a|-|c+a|\right)\left(|b|-|c+a|+|a+b+c|\right)$$
$$+\left(|a|+|b|-|a+b|\right)\left(|c|-|a+b|+|a+b+c|\right).$$

b) Suy ra: $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, |a+b|+|b+c|+|c+a| \leq |a|+|b|+|c|+|a+b+c|$.

2.2.4 Acgumen

Chúng ta coi như đã biết các định nghĩa và các tính chất sơ cấp của các hàm số thực sin, cos, tan.

- **Định nghĩa** Với mọi số phức khác không $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tập hợp $\left\{\theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{và}\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ là một lớp tương đương modulo 2π, gọi là **Acgumen** của z, ký hiệu $\text{Arg}(z)$. Do lạm dụng từ ngữ, ta cũng gọi bất cứ phần tử nào của lớp tương đương modulo 2π này là $\text{Arg}(z)$.

Như vậy ta có $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z = |z|\left(\cos(\text{Arg}(z)) + i\sin(\text{Arg}(z))\right)$, biểu thức này được gọi là **dạng lượng giác** của z.

Ta không thể định nghĩa một cách thỏa đáng Acgumen của 0.

- **Các tính chất**

1) $$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \begin{cases}\text{Arg}(z) = 0\quad [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^* \\ \text{Arg}(z) = 0\quad [\pi] \iff z \in \mathbb{R}^* \\ \text{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2}\quad [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}^*\end{cases}.$$

2) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)\quad [2\pi]$.

3) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{*2}, \text{Arg}(z.z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')\quad [2\pi]$

Từ đó suy ra bằng quy nạp:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^{*n}, \text{Arg}\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\text{Arg}(z_k)\quad [2\pi];$$

trường hợp riêng: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \text{Arg}(z^n) = n\text{Arg}(z)\quad [2\pi]$.

4) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$.

Suy ra: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$.

5) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{*2}, \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') \quad [2\pi]$

6) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}, |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z') \quad [2\pi]$

Bài tập

◊ **2.2.26** Chứng minh rằng: $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z-1| \le \big||z|-1\big| + |z||\operatorname{Arg}(z)|$

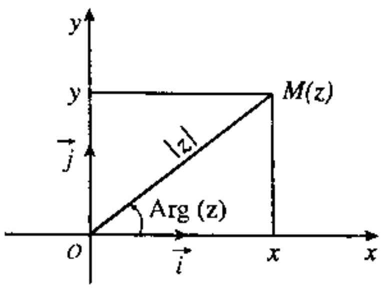
(ở đây $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$).

◊ **2.2.27** Cho $a, b, c \in \mathbb{C}$ sao cho $|a| = |b| = |c| = 1$, $a \neq c$, $b \neq c$; chứng minh:

$$\operatorname{Arg}\frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{b}{a} \qquad [\pi].$$

2.3 Biểu diễn hình học các số phức

2.3.1 Mặt phẳng phức



Mặt phẳng afin thực P được quy về một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{C} \to P$, đặt mỗi số phức $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ứng với một điểm M thuộc P có toạ độ (x, y) trong hệ quy chiếu R, là một song ánh. Điều đó cho phép đồng nhất $\mathbb{C}$ với P. Mặt phẳng P được gọi (một cách lạm dụng) là **mặt phẳng phức**.

Với mọi $z \in \mathbb{C}$, $\varphi(z)$ được gọi là **ảnh** của z trong P; với mọi $M \in P$, $\varphi^{-1}(M)$ được gọi là **toạ vị** của M. Ta ký hiệu $M(z)$ để chỉ M là một điểm của P có toạ vị z.

Ta có: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ và nếu $z \neq 0$, $\angle\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$.

Ký hiệu phương của P là $\vec{P}$ (tức là mặt phẳng vectơ liên kết với P) được trang bị cơ sở trực chuẩn $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$; ánh xạ $\vec{\varphi} : \mathbb{C} \to \vec{P}$ đặt mỗi số phức $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ứng với một vectơ $x\vec{i} + y\vec{j}$, là một song ánh.

Với mỗi $\vec{V} \in \vec{P}$, $\varphi^{-1}\left(\vec{V}\right)$ cũng gọi là **toạ vị** của $\vec{V}$. Như vậy:

$$\begin{cases} \forall(z,z') \in \mathbb{C}^2, & \vec{\varphi}(z'-z) = \overrightarrow{\varphi(z)\varphi(z')} \\ \forall(M,M') \in P^2, & \vec{\varphi}^{-1}\left(\overrightarrow{MM'}\right) = \varphi^{-1}(M') - \varphi^{-1}(M) \end{cases}.$$

Với mọi $(M,M') \in P^2$, ta có các mệnh đề tương đương sau đây:

$$\begin{cases} M \text{ và } M' \text{ đối xứng đối với } O \text{ khi và chỉ khi } z' = -z \\ M \text{ và } M' \text{ đối xứng đối với } (x'x) \text{ khi và chỉ khi } z' = \bar{z} \\ M \text{ và } M' \text{ đối xứng đối với } (y'y) \text{ khi và chỉ khi } z' = -\bar{z} \end{cases}$$

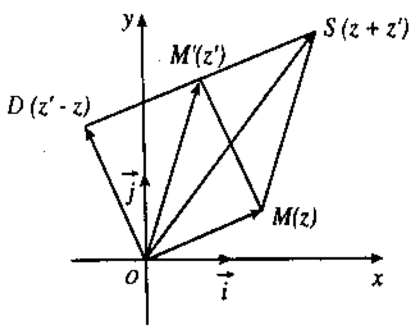
Chúng ta cũng chú ý rằng nếu $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ là bốn điểm của P sao cho $A \neq B$ và $C \neq D$ thì:

$$\begin{aligned} \angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \angle\left(\vec{i},\overrightarrow{CD}\right) - \angle\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi] \\ &= \operatorname{Arg}(d-c) - \operatorname{Arg}(b-a) \quad [2\pi] \\ &= \operatorname{Arg}\frac{d-c}{b-a} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Đặc biệt là: $(AB)//(CD) \Leftrightarrow \operatorname{Arg}\dfrac{d-c}{b-a} = 0 \quad [\pi]$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \operatorname{Arg}\frac{d-c}{b-a} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

2.3.2 Biểu diễn hình học của phép cộng trong $\mathbb{C}$



Cho $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $M(z)$, $M'(z')$, $S(z+z')$, $D(z-z')$; ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} \\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} \end{cases}.$$

Đặc biệt, ta có: $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = |z'-z|$.

Bài tập

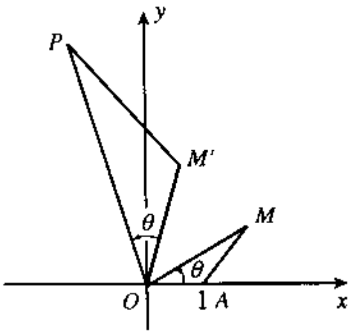
◊ **2.3.1** Cho $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ khác nhau từng đôi một sao cho $\dfrac{d-a}{b-c}$ và $\dfrac{d-b}{b-a}$ là những số thuần ảo; chứng minh rằng $\dfrac{d-c}{a-b}$ cũng thuần ảo. Biểu diễn hình học.

◊ **2.3.2** Xác định tập hợp các điểm M có tọa vị z thoả mãn điều kiện sau:

a) $|z| = 2|z-\mathrm{i}|$, *B)* $\dfrac{z^2}{z+\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

2.3.3 Biểu diễn hình học phép nhân trong C

Cho $(z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$, $\rho = |z|$, $\rho' = |z'|$, $\theta = \mathrm{Arg}(z) \quad [2\pi]$, $\theta' = \mathrm{Arg}(z') \quad [2\pi]$, $M(z)$, $M'(z')$, $P(z\,z')$.



Vì $\begin{cases} |zz'| = |z| \cdot |z'| = \rho\rho' \\ \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z'). \\ \qquad\qquad = \theta + \theta' \qquad [2\pi] \end{cases}$

nên ta chuyển từ M' đến P bởi phép đồng dạng thuận có tâm O, tỷ số $|z|$ và góc $\mathrm{Arg}(z)$, và ta chuyển từ M đến P bởi phép đồng dạng thuận tâm O, tỷ số $|z'|$ và góc $\mathrm{Arg}(z')$.

Ký hiệu A là điểm có tọa vị 1:

- Ta chuyển từ M' đến P bởi phép đồng dạng thuận tâm O, phép biến đổi này biến đổi A thành M.

- Ta chuyển từ M đến P bởi phép đồng dạng thuận tâm O, phép biến đổi này biến A thành M'.

2.3.4 Các ánh xạ $z \mapsto az + b$

1) Giả sử $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $f_{a,b}$: $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az+b \end{array}$ và $T_{a,b}$: $\begin{array}{l} P \to P' \\ M(z) \mapsto M'(az+b) \end{array}$

nghĩa là $T_{a,b} = \varphi \circ f_{a,b} \circ \varphi^{-1}$.

Nếu $a = 0$ thì $T_{a,b}$ là ánh xạ hằng.

Nếu $a = 1$ thì $T_{a,b}$ là phép tịnh tiến theo vectơ có tọa vị b,

Giả thiết $a \neq 0$ và $a \neq 1$; $T_{a,b}$ có một điểm bất động duy nhất Ω, có tọa vị là $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Vậy ta có:

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \ \ (z' = f_{a,b}(z) \Leftrightarrow z' - \omega = a(z - \omega)).$$

Vậy $T_{a,b}$ là phép đồng dạng thuận có tâm Ω, tỷ số $|a|$ và góc $\mathrm{Arg}(a)$.

2) Ngược lại, giả sử $\Omega \in P$, ω là toạ vị của Ω, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, S là phép đồng dạng thuận có tâm Ω, tỷ số ρ và góc θ. Với mọi $M(z) \in P$, ký hiệu z' là toạ vị của $S(M)$, ta có: $z' - \omega = a(z - \omega)$, ở đây $a \in \mathbb{C}$ là số phức có môđun ρ và Acgumen θ.

Tóm lại:

Với mọi $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ sao cho $a \neq 0$, $a \neq 1$, ánh xạ $\begin{array}{c}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az+b\end{array}$, trong cách biểu diễn hình học ứng với phép đồng dạng thuận có tâm Ω $\left(\text{tọa vị là } \omega = \dfrac{b}{1-a}\right)$, có tỷ số $|a|$ và góc $\operatorname{Arg}(a)$.

Bài tập

◊ **2.3.3** Cho $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ là ba điểm của mặt phẳng phức; chứng tỏ rằng tam giác ABC là tam giác đều thuận khi và chỉ khi: $a + jb + j^2c = 0$ trong đó:

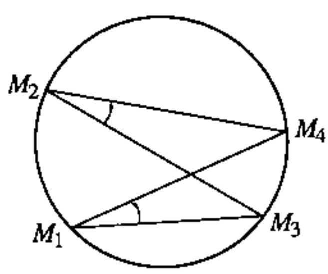
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

2.3.5 Điều kiện cần và đủ để ba điểm trên mặt phẳng phức thẳng hàng

Cho $M_k(z_k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$ là ba điểm của $\mathcal{P}$ khác nhau từng đôi. Để M_1, M_2, M_3 thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_3}$ $\mathbb{R}$–cộng tuyến, nghĩa là: $\exists a \in \mathbb{R},\ z_3 - z_1 = a(z_2 - z_1)$.

Vậy: M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$

2.3.6 Điều kiện cần và đủ để bốn điểm trên mặt phẳng phức đồng chu hoặc thẳng hàng



Giả sử $M_k(z_k)$, $k \in \{1,2,3,4\}$ là bốn điểm của $\mathcal{P}$ khác nhau từng đôi. Ta đã biết rằng để M_1, M_2, M_3, M_4 nằm trên một đường tròn hoặc trên một đường thẳng thì điều kiện cần và đủ là:

$$\angle\left(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right) = \angle\left(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}\right)\ [\pi]$$

điều này có nghĩa là:

$$\operatorname{Arg}\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} = \operatorname{Arg}\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \quad [\pi].$$

hư vậy M_1, M_2, M_3, M_4 đồng chu (nằm trên một đường tròn) hoặc thẳng àng (trên một đường thẳng) khi và chỉ khi:

$$\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$$

iểu thức trên đây được gọi là **tỷ số kép** của z_1, z_2, z_3, z_4.

.4 Luỹ thừa và căn số

.4.1 Hàm mũ biến số thuần ảo

/ới mọi $\theta \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

[a có các tính chất sau (suy ra từ các tính chất sơ cấp của các hàm số sin và os).

1) $\forall(\theta.\theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$,

ừ đó bằng quy nạp ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta_1, \dots \theta_n \in \mathbb{R}$, $e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}$,

và đặc biệt: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ($e^{i\theta} \neq 0$ và $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$), vậy $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

3) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, ($e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$).

4) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Trở lại với các hàm lượng giác, ta có **công thức Moivre**:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta .$$

Ta ký hiệu $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \} = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\} = \{ z \in \mathbb{C} ; z\bar{z} = 1 \}$.

Bài tập

◊ **2.4.1** Tính $\sup_{z\in\mathbb{U}} |z^3 - z + 2|$.

◊ **2.4.2** Với $a \in \mathbb{R}$, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

với ẩn là $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.4.2 Căn bậc n của một số phức khác không

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} z \in \mathbb{C}^*, r = |z|, & \varphi = \mathrm{Arg}(z) \quad [2\pi] \\ Z \in \mathbb{C}^*, R = |Z|, & \Phi = \mathrm{Arg}(Z) \quad [2\pi] \end{cases}$

Ta có:

$$Z = z^n \Leftrightarrow \begin{cases} R = r^n \\ \Phi = n\varphi \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \dfrac{\Phi}{n} \quad \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Như vậy Z có đúng n căn bậc n, đó là các số phức $R^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$,
$k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$ là tập các căn bậc n của 1.

Cho $Z \in \mathbb{C}^*$, z_0 là một căn bậc n của Z trong $\mathbb{C}$, khi đó:

$$\forall z \in \mathbb{C}, (Z = z^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow (\exists \omega \in \mathbb{U}_n, z = \omega z_0)).$$

Vậy: Ta có các căn bậc n của Z bằng cách chọn một trong các căn đó, rồi nhân căn vừa chọn với mỗi căn bậc n của 1.

Phép tính đại số các căn bậc hai của số phức khác không

Cho $Z = X + iY \in \mathbb{C}^*$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ta có: $Z = z^2 \Leftrightarrow X + iY = (x + iy)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \end{cases}$.

Có thể thêm vào hệ phương trình cuối kết quả thu được khi xét các môđun:

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Suy ra: $Z = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}\left(X + \sqrt{X^2 + Y^2}\right) \\ y^2 = \dfrac{1}{2}\left(-X + \sqrt{X^2 + Y^2}\right); \\ 2xy = Y \end{cases}$

trong đó phương trình thứ 3 dùng để xác định các dấu.

Hai căn bậc hai thu được là các số đối của nhau.

VÍ DỤ: Tìm các căn bậc hai phức của $1 + 3i$.

Với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$(x + iy)^2 = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{10}+1\right) \\ y^2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{10}-1\right) \\ 2xy = 3 \end{cases}$$

Vậy các căn bậc hai của $1 + 3i$ là $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+1\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}-1\right)}$ và số đối của nó.

Phép giải đại số phương trình bậc hai trong C

Cho $(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$; xét phương trình $az^2 + bz + c = 0$, ẩn số là $z \in \mathbf{C}$. Ta sử dụng **dạng chính tắc** của tam thức:

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)$$

Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ là **biệt thức** của tam thức, ta có:

- Nếu $\Delta \neq 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1 và z_2:

  $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, trong đó δ là một căn bậc hai phức của Δ.

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm duy nhất, gọi là **nghiệm kép**:

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Các nghiệm z_1, z_2, dù khác nhau hay không, đều thoả mãn:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Khi b chứa thừa số 2, thì sẽ thuận tiện hơn nếu ta dùng **biệt thức rút gọn**

$\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \dfrac{b}{2}$, và khi ấy $z_1 = \dfrac{-b'-\delta'}{a}$, $z_2 = \dfrac{-b'+\delta'}{a}$, ở đó δ' là một căn bậc hai phức của Δ'.

Ta chú ý rằng, nếu $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ và $z \in \mathbf{C}$ là nghiệm của $az^2 + bz + c = 0$, thì $\bar{z}$ cũng là nghiệm.

VÍ DỤ: Giải phương trình $(3 + i)z^2 - (8 + 6i)z + (25 + 5i) = 0$, ẩn số là $z \in \mathbb{C}$. Ở đây $b' = -(4 + 3i)$, $\Delta' = b'^2 - ac = (4 + 3i)^2 - (3 + i)(25 + 5i) = -63 - 16i$; $\delta' = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, và:

$$\delta'^2 = \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -63 \\ 2xy = -16 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{63^2 + 16^2} = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 64, \\ xy = -8 \end{cases}$$

chẳng hạn, ta có $\delta = 1 - 8i$. Các nghiệm là:

$$z_1 = \frac{-b' - \delta'}{a} = \frac{3 + 11i}{3 + i} = \frac{(3 + 11i)(3 - i)}{10} = 2 + 3i \text{, và}$$

$$z_2 = \frac{-b' + \delta'}{a} = \frac{5 - 5i}{3 + i} = \frac{(5 - 5i)(3 - i)}{10} = 1 - 2i .$$

Giả sử $(S, P) \in \mathbb{C}^2$, để hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$, điều kiện cần và đủ là z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - Sz + P = 0$, với ẩn $z \in \mathbb{C}$.

Bài tập

◊ **2.4.3** Giải các phương trình sau, với ẩn số là $z \in \mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b) $z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = 0$, biết rằng có một nghiệm thuần ảo.

c) $z^4 + 4iz^2 + 12(1 + i)z - 45 = 0$, biết rằng có một nghiệm thực và một nghiệm thuần ảo.

d) $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$, biết rằng $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ là một nghiệm; từ đó hãy phân tích $X^4 - X^3 + X^2 + 2$ thành các nhân tử nguyên tố trong $\mathbb{R}[X]$.

e) $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$; từ đó hãy phân tích $(X^2 - 4X + 5)^2 + (X + 1)^2$ thành các nhân tử nguyên tố trong $\mathbb{R}[X]$.

f) $(z^2 - 8z)^2 + 40(z^2 - 8z) + 375 = 0$.

g) $(z + i)^4 + (z^2 + 1)^2 + (z - i)^4 = 0$.

h) $(6z^2 + 3z - 1)^2 - (6z^2 + 3z - 1)(3z^2 + 6z + 1) + (3z^2 + 6z + 1)^2 = 0$.

◊ **2.4.4** Cho $a \in \mathbb{R}$, hãy tính các căn bậc 4 trong $\mathbb{C}$ của số phức Z xác định bởi:

$$Z = 8a^2 - (1 + a^2)^2 + 4a(1 - a^2)i .$$

◊ **2.4.5** Giải các phương trình sau đây, ẩn số là $z \in \mathbb{C}$:

a) $z^4 = z + \bar{z}$, *b)* $\overline{z^7} = \dfrac{1}{z^3}$.

◊ **2.4.6** Giải các hệ phương trình sau, ẩn là $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ hoặc $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$a)\ \begin{cases}(x+y)(x^3-y^3)=819\\(x-y)(x^3+y^3)=399\end{cases},\qquad b)\ \begin{cases}x=y^2\\y=z^2\\z=x^2\end{cases}.$$

2.4.3 Các căn bậc n của 1

Với $n \in \mathbb{N}^*$, có đúng n căn số bậc n của 1, đó là các số phức $\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $k = \{0,\dots,n-1\}$.

- $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\overline{\omega_k} = e^{\frac{-2\pi ik}{n}} = \omega_{n-k}$; các căn bậc n của 1 liên hợp với nhau từng đôi (1 là liên hợp của chính nó, -1 cũng vậy nếu n chẵn).
- $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} = \omega_1^k$.

Tổng quát hơn, với mọi $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\left(e^{\frac{2i\pi k}{n}}\right)^l = e^{\frac{2i\pi kl}{n}} = \left(e^{\frac{2i\pi l}{n}}\right)^k.$$

- Nếu $n \geq 2$: $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^k = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega} = 0$.

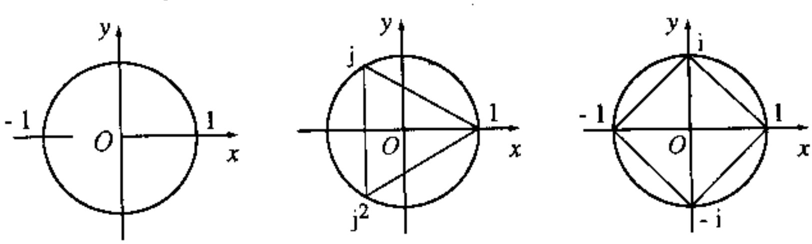
Với mọi $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, tổng các căn bậc n của 1 bằng 0.

- Các phần tử của $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^n = 1\}$ được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn lượng giác, và một trong các đỉnh là điểm có tọa vị là 1.

Đa giác này đối xứng qua $(x'x)$.

Khi $n = 3$, ta ký hiệu $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

từ đó $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \bar{j}$ và $1 + j + j^2 = 0$.



$n = 2$ $\qquad$ $n = 3$ $\qquad$ $n = 4$

Bài tập

◊ **2.4.7** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,...,a_n,b_1,...,b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$. Chứng minh rằng tồn tại $(A,B) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho:

$$A^2 + AB + B^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right).$$

◊ **2.4.8** Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và ω là một căn bậc n của 1; tính:

a) $\sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}$ *b)* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$, $p \in \mathbb{Z}$

c) $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k$ với $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

◊ **2.4.9** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$; chứng minh:

$$|a| + |b| \le \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|a + \omega^k b\right|.$$

◊ **2.4.10** Chứng minh rằng phương trình $z^4 + 5z^2 + 5 = 0$ với ẩn là $z \in \mathbb{C}$ có các nghiệm là $\omega_k - \omega_k^4$ (ở đây $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$). Hãy biểu diễn các nghiệm này theo $\omega = \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

2.4.4 Nhóm các căn bậc *n* của 1

1) $U = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ là một nhóm đối với phép nhân, đẳng cấu với nhóm $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ bởi phép đẳng cấu $\hat{\theta} \mapsto e^{i\theta}$ trong đó $\hat{\theta}$ là lớp modulo 2π của θ.

2) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; z^n = 1\}$ là một nhóm con của $(U, \cdot)$

3) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_n, \cdot)$ đẳng cấu với nhóm $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ bởi phép đẳng cấu $\hat{k} \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, với $\hat{k}$ là lớp modulo n của k.

2.5 Áp dụng số phức vào lượng giác

2.5.1 Khai triển cos$n$θ , sin$n$θ, tan$n$θ

Cho $\theta \in$ R, $n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng công thức Moivre và công thức nhị thức Newton:

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cos^{n-k}\theta\, \mathrm{i}^k \sin^k\theta,$$

tách phần thực và phần ảo, ta suy ra:

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \mathrm{C}_n^{2k} \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta$$
$$= \cos^n\theta - \mathrm{C}_n^2 \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + \ldots,$$

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \mathrm{C}_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}\theta \sin^{2k+1}\theta$$
$$= \mathrm{C}_n^1 \cos^{n-1}\theta \sin\theta - \mathrm{C}_n^3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \ldots.$$

Nhận xét: Thay $\sin^2\theta$ bởi $1-\cos^2\theta$, ta có:

- $\cos n\theta$ được biểu diễn thành một đa thức của $\cos\theta$, gọi là **đa thức Tchebychev loại 1**.
- $\sin n\theta$ bằng tích của $\sin\theta$ với một đa thức của $\cos\theta$, gọi là **đa thức Tchebychev loại 2.**

VÍ DỤ: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

Giả sử điều kiện tồn tại được thoả mãn thì:

$$\tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \frac{\dfrac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}}{\dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}} = \frac{\mathrm{C}_n^1 \tan\theta - \mathrm{C}_n^3 \tan^3\theta + \ldots}{1 - \mathrm{C}_n^2 \tan^2\theta + \mathrm{C}_n^4 \tan^4\theta - \ldots}.$$

VÍ DỤ: $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$.

2.5.2 Tuyến tính hoá $\cos^p\theta$, $\sin^p\theta$, $\cos^p\theta\sin^p\theta$

Cho $\theta \in \mathrm{R}$, $p \in \mathbf{N}^*$, $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Ta có $\begin{cases} 2\cos\theta = z + \bar{z} = z + \dfrac{1}{z} \\ 2i\sin\theta = z - \bar{z} = z - \dfrac{1}{z} \end{cases}$,

vậy $2^p\cos^p\theta = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^p$ và $(2i)^p\sin^p\theta = \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^p$.

Ta khai triển bằng cách sử dụng công thức nhị thức Newton, sau đó nhóm lại các phần tử bắt đầu từ các phần tử ở ngoài cùng. Ta phân biệt hai trường hợp tuỳ theo p chẵn hay p lẻ.

Trường hợp 1: p chẵn, $p = 2m$, $m \in \mathbf{N}^*$.

- $$2^{2m}\cos^{2m}\theta = \left(z^{2m} + \frac{1}{z^{2m}}\right) + C_{2m}^1\left(z^{2m-2} + \frac{1}{z^{2m-2}}\right) + \ldots$$
$$+ C_{2m}^{m-1}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + C_{2m}^m.$$
$$= 2\cos 2m\theta + 2C_{2m}^1\cos(2(m-1)\theta) + \ldots + 2C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta + C_{2m}^m.$$

Vậy $$\cos^{2m}\theta = 2^{-(2m-1)}\left(\frac{1}{2}C_{2m}^m + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k\cos(2(m-k)\theta)\right).$$

- $$2^{2m}(-1)^m\sin^{2m}\theta = \left(z^{2m} + \frac{1}{z^{2m}}\right) - C_{2m}^1\left(z^{2m-2} + \frac{1}{z^{2m-2}}\right) + \ldots$$
$$+ (-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + (-1)^m C_{2m}^m$$
$$= 2\cos 2m\theta - 2C_{2m}^1\cos(2(m-1)\theta) + \ldots$$
$$+ 2(-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta + (-1)^m C_{2m}^m.$$

Vậy $\sin^{2m}\theta = 2^{-(2m-1)}(-1)^m\left(\dfrac{(-1)^m}{2}C_{2m}^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k \cos\big(2(m-k)\theta\big)\right)$.

Trường hợp 2: p lẻ, $p = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$

- $$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\theta = \left(z^{2m+1} + \frac{1}{z^{2m+1}}\right) + C_{2m+1}^1\left(z^{2m-1} + \frac{1}{z^{2m+1}}\right) + \ldots$$
$$+ C_{2m+1}^m\left(z + \frac{1}{z}\right).$$
$$= 2\cos\big((2m+1)\theta\big) + 2C_{2m+1}^1\cos\big((2m-1)\theta\big) + \ldots$$
$$+ 2C_{2m+1}^m \cos\theta\,.$$

Vậy $\cos^{2m+1}\theta = 2^{-2m}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos\big((2m+1-2k)\theta\big)$.

- $$2^{2m+1}i(-1)^m \sin^{2m+1}\theta = \left(z^{2m+1} - \frac{1}{z^{2m+1}}\right) - C_{2m+1}^1\left(z^{2m-1} - \frac{1}{z^{2m-1}}\right) + \ldots$$
$$+ (-1)^m C_{2m+1}^m\left(z - \frac{1}{z}\right)$$
$$= 2i\sin\big(2m+1\big)\theta - 2iC_{2m+1}^1\sin(2m-1)\theta + \ldots$$
$$+ 2i(-1)^m C_{2m+1}^m \sin\theta\,.$$

Vậy: $\sin^{2m+1}\theta = 2^{-2m}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m+1}^k \sin\big((2m+1-2k)\theta\big)$.

VÍ DỤ: $\cos^6\theta = \dfrac{1}{32}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10)$

$\sin^4\theta = \dfrac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3)$

$\cos^5\theta = \dfrac{1}{16}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$

$\sin^5\theta = \dfrac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta)$.

Muốn tuyến tính hoá $\cos^p\theta\sin^q\theta$, ta có thể tuyến tính hoá $\cos^p\theta$ và $\sin^q\theta$, rồi thực hiện phép nhân, rồi tuyến tính hoá các phần tử thu được.

Khi $(p, q) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2$, người ta thường hay sử dụng các công thức lượng giác sơ cấp:

- $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

- $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$, $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$

  $$\cos^2\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\cos\theta\sin 2\theta = \frac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta)$$

  $$\cos\theta\sin^2\theta = \frac{1}{2}\sin\theta\sin 2\theta = \frac{1}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

- $\cos^4\theta = \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right)$

  $$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta.$$

  $$\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta),\ldots$$

Bài tập

◊ **2.5.1** Cho $(n, a, b) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$; tính các tổng:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb) \text{ và } S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb).$$

◊ **2.5.2** Cho $(n, x) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{R}$; tính $\sum_{k=0}^{n}\cos^3 kx$. (Sử dụng bài tập 2.5.1).

◊ **2.5.3** Chứng minh: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}|\sin k| \geq \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2\sin 1}$. (Sử dụng bài tập 2.5.1).

◊ **2.5.4** Với $(n, x, \theta) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, tính các tổng $\sum_{k=0}^{n}x^k\cos k\theta$ và $\sum_{k=0}^{n}x^k\sin k\theta$.

◊ **2.5.5** Với $(n, x) \in \mathbf{N}\times(\mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z})$, tính các tổng:

$$A_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}e^{ikx} \text{ và } B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}A_k(x).$$

Bổ sung

◊ **C 2.1** Ánh xạ $z \mapsto a\bar{z} + b$

Với mọi $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, ta ký hiệu $g_{a,b}$: $\begin{matrix}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a\bar{z}+b\end{matrix}$ và $T_{a,b}$: $P \to P$ là ánh xạ từ mặt phẳng phức vào chính nó, sao cho điểm có tọa vị z ứng với điểm có tọa vị $a\bar{z} + b$.

1) a) Chứng minh rằng, nếu $|a| \neq 1$ và $a \neq 0$ thì $T_{a,b}$ là phép đồng dạng nghịch tâm Ω có tọa vị $\dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$, tỷ số $|a|$, trục là đường thẳng (D) đi qua Ω với góc cực là $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arg}(a)\ [\pi]$, nghĩa là hợp giao hoán của phép vị tự tâm Ω và tỷ số $|a|$ với phép đối xứng trực giao qua (D).

b) Chứng minh rằng, nếu $|a| = 1$, thì $T_{a,b}$ là hợp giao hoán của phép đối xứng $S_{(D)}$ qua đường thẳng (D) có góc cực là $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arg}(a)$ và đi qua điểm có tọa vị $\dfrac{b}{2}$, với phép tịnh tiến theo vectơ $\dfrac{1}{2}(a\bar{b} + b)$ (*đối xứng trượt*).

2) a) Cho $\Omega \in P$, (D) là một đường thẳng của P, $\rho \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Chứng minh rằng phép đồng dạng nghịch, tâm Ω, tỷ số ρ, trục (D), ứng với ánh xạ $g_{a,b}$, ở đó $a = \rho e^{2i\theta}$ (θ là góc cực của (D) và b là số phức duy nhất thoả mãn $\omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ (ω là tọa vị của Ω) hoặc b là tọa vị của ảnh của O trong phép đồng dạng nghịch.

b) Cho (D) là một đường thẳng của P, $\vec{u}$ là một vectơ của $\vec{P}$. Chứng minh rằng hợp của phép đối xứng trực giao qua (D) với phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ ứng với ánh xạ $g_{a,b}$, ở đó $a = e^{2i\theta}$ (θ là góc cực của (D)) và b là ảnh của O trong phép đối xứng trượt.

◊ **C 2.2 Phép nghịch đảo, phân tích một ánh xạ phân tuyến tính**

Cho $\Omega \in P$, $k \in \mathbb{R}^*$; **phép nghịch đảo** với cực Ω và tỷ số k, là ánh xạ $I_{\Omega,k} : P - \{\Omega\} \to P - \{\Omega\}$ cho điểm M ứng với điểm M' sao cho: $\begin{cases}\Omega, M, M' \text{ thẳng hàng} \\ \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = k\end{cases}$

1) a) Với mọi $M \in P - \{0\}$, hãy biểu diễn các tọa độ (x', y') của $I_{O,1}(M)$ theo các toạ độ (x, y) của M.

b) Chứng minh rằng ánh xạ $z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$ ứng với phép nghịch đảo cực O và tỷ số 1.

c) Ảnh của một đường tròn, của một đường thẳng qua phép biến đổi $I_{O,1}$ là gì?

2) Cho $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, sao cho $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$, H là ánh xạ cho điểm M có tọa vị $z, z \neq -\dfrac{d}{c}$, ứng với điểm có tọa vị $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

a) Chứng minh rằng $H = \mathrm{T}_{\frac{a}{c}} \circ \mathrm{Sim}_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ \mathrm{S}_{(x'x)} \circ \mathrm{I}_{O,1} \circ \mathrm{T}_{\frac{d}{c}}$, trong đó $\mathrm{T}_{\frac{a}{c}}$ (tương ứng $\mathrm{T}_{\frac{d}{c}}$) chỉ phép tịnh tiến theo vectơ có toạ vị $\dfrac{a}{c}$ (tương ứng $\dfrac{d}{c}$), $\mathrm{Sim}_{\frac{bc-ad}{c^2}}$ là phép đồng dạng thuận, tâm O, tỷ số $\left|\dfrac{bc-ad}{c^2}\right|$ và góc $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{bc-ad}{c^2}\right)$, $\mathrm{S}_{(x'x)}$ là phép đối xứng trực giao qua $(x'x)$.

b) Suy ra rằng ảnh của đường tròn hoặc đường thẳng qua ánh xạ H là đường tròn hoặc đường thẳng.

Chương 3
Dãy số

Một dãy (số) là một ánh xạ từ N vào K (K = R hoặc C); thay cho ký hiệu $u : \mathrm{N} \to \mathrm{K}$, $n \mapsto u(n)$, ta thường ký hiệu $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ hay $(u_n)_{n \geq 0}$ hay $(u_n)_n$.

Một **dãy thực** (tương ứng : **phức**) là một dãy (số) sao cho:

$$\forall n \in \mathrm{N}, u_n \in \mathrm{R} \text{ (tương ứng: C).}$$

Với mỗi $n \in \mathrm{N}$, u_n được gọi là **số hạng thứ** n của dãy.

Mỗi ánh xạ từ $\{n \in \mathrm{N};\ n \geq n_0\}$ vào K ,với $n_0 \in \mathrm{K}$ cố định cũng gọi là một dãy (số); phần lớn các khái niệm được khảo sát chỉ đề cập đến các u_n «từ một thứ tự nào đó trở đi».

3.1 Hội tụ , phân kỳ

3.1.1 Định nghĩa

- **Định nghĩa 1**

1) Ta nói dãy số $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ **hội tụ đến** $l \in \mathrm{K}$ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}, \forall n \in \mathrm{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

2) Ta nói dãy số $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ **hội tụ** khi và chỉ khi tồn tại $l \in \mathrm{K}$ sao cho $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ hội tụ đến l, nghĩa là:

$$\exists l \in \mathrm{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}, \forall n \in \mathrm{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

3) Ta nói dãy số $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ phân kỳ khi và chỉ khi nó không hội tụ nghĩa là :

$$\forall\ l \in \mathrm{K}, \exists\ \varepsilon > 0, \forall\ N \in \mathrm{N}, \exists\ n \in \mathrm{N}, (\ n \geq N \text{ và } |u_n - l| > \varepsilon).$$

Chú ý rằng $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ hội tụ đến l khi và chỉ khi dãy $(u_n - l)_{n \in \mathrm{N}}$ hội tụ đến 0.

- **Mệnh đề 1** (**« Tính duy nhất của giới hạn » nếu nó tồn tại**)

Nếu một dãy số $(u_n)_n$ hội tụ đến l_1 và hội tụ đến l_2 thì $l_1 = l_2$.

Chứng minh : Giả sử $(u_n)_n$ hội tụ đến l_1 và hội tụ đến l_2 và $l_1 \neq l_2$.

Đặt $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_2 - l_1|$.

Vì $(u_n)_n$ hội tụ đến l_1 và hội tụ đến l_2 ,nên tồn tại $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon \\ n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| \leq \varepsilon \end{cases}.$$

Đặt $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, ta có : $\begin{cases} |u_N - l_1| \leq \varepsilon \\ |u_N - l_2| \leq \varepsilon \end{cases}$,

suy ra $|l_2 - l_1| \leq |l_2 - u_N| + |u_N - l_1| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l_2 - l_1|$, mâu thuẫn. ■

Mệnh đề trên chỉ ra rằng ta có thể dùng một ký hiệu kiểu hàm : nếu $(u_n)_n$ hội tụ đến l, ta nói rằng l là **giới hạn** của $(u_n)_n$ và kí hiệu :

$l = \lim\limits_{n\infty} u_n$ (hoặc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$) hoặc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ (hoặc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$).

VÍ DỤ :

1) Mọi dãy dừng (nghĩa là bằng hằng số từ một thứ tự nào đó trở đi) đều hội tụ.

2) Dãy $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ đến 0, bởi vì

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon),$$

khi chọn $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

Nhận xét : Nếu hai dãy số trùng nhau kể từ một thứ tự nào đó trở đi ,thì chúng có bản chất như nhau, nghĩa là sự hội tụ của dãy này kéo theo sự hội tụ của dãy kia. Nói cách khác ta không làm thay đổi bản chất của một dãy số (hội tụ, phân kỳ) khi ta thay đổi các phần tử của nó đến một thứ tự cho trước.

♦ Định nghĩa 2

1) • Ta nói một số thực A là một **chặn trên** của một dãy thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$.

• Ta nói một số thực A là một **chặn dưới** của một dãy thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$.

2) Một dãy thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi **bị chặn trên** (tương ứng **bị chặn dưới**) khi và chỉ khi tồn tại một số thực A sao cho A là một chặn trên (tương ứng : chặn dưới) của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Một dãy phức $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được nói là **bị chặn** nếu và chỉ nếu tồn tại $M\in\mathbb{R}_+$ sao cho : $\forall\, n\in\mathbf{N},\ |u_n|\le M$.

Nhận xét : một dãy thực bị chặn khi và chỉ khi nó bị chặn trên và chặn dưới.

- **Định nghĩa 3** Cho $(u_n)_n$ là một dãy thực.

1) Ta nói $(u_n)_n$ **tiến tới** $+\infty$ (hoặc : **nhận** $+\infty$ **làm giới hạn**) khi và chỉ khi :

$$\forall A>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ (n\ge N\Rightarrow u_n\ge A).$$

Khi đó ta ký hiệu : $u_n\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$ hay $\lim\limits_{n\infty}u_n=+\infty$.

2) Ta nói $(u_n)_n$ **tiến tới** $-\infty$ (hoặc: **nhận** $-\infty$ **làm giới hạn**) khi và chỉ khi :

$$\forall B<0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ (n\ge \mathrm{N}\Rightarrow u_n\le B).$$

Khi đó ta ký hiệu : $u_n\xrightarrow[n\infty]{}-\infty$ hay $\lim\limits_{n\ \infty}u_n=-\infty$.

Nhận xét:

1) $u_n\xrightarrow[n\infty]{}-\infty \Leftrightarrow -u_n\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$

2) Tất cả các dãy thực có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ đều phân kỳ.

- **Mệnh đề 2**

1) Mọi dãy phức hội tụ đều bị chặn.

2) Mọi dãy thực tiến tới $+\infty$ đều bị chặn dưới.

3) Mọi dãy thực tiến tới $-\infty$ đều bị chặn trên.

Chứng minh:

1) Giả sử $u_n\xrightarrow[n\infty]{}l$; tồn tại $N\in\mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n\in\mathbf{N},\ (n\ge N\Rightarrow |u_n-l|\le 1\,).$$

Vì vậy với mọi $n\in\mathbf{N}$ sao cho $n>N$:

$$|u_n|\le|u_n-l|+|l|\le 1+|l|\,.$$

Đặt $M=\mathrm{Max}(|u_0|,\ldots,|u_N|,\ 1+|l|)$, ta suy ra $\forall n\in\mathbf{N}$, $|u_n|\le M$.

2) Giả sử $u_n\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$; tồn tại $N\in\mathbf{N}$ sao cho :

$$\forall n\in\mathbf{N},\ (n\ge N\Rightarrow u_n>1).$$

Đặt $m=\mathrm{Inf}\,(u_0,\ldots,u_N,\ 1)$, ta suy ra : $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\ge m$.

3) Quy về *2)* bằng cách xét $(-u_n)_n$. ■

Nhận xét:

1) Tồn tại các dãy bị chặn nhưng không hội tụ; ví dụ $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Nếu một dãy thực tiến tới $+\infty$, thì nó không bị chặn trên, nhưng điều ngược lại không đúng, chẳng hạn ở ví dụ $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Mọi dãy không bị chặn thì phân kỳ.

3.1.2 Tính chất về thứ tự của các dãy thực hội tụ

◆ **Mệnh đề 1** Cho $(u_n)_n$ là một dãy thực hội tụ có giới hạn là l, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Nếu $a < l$ thì tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N_1 \Rightarrow a < u_n).$$

2) Nếu $l < b$ thì tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N_2 \Rightarrow u_n < b).$$

3) Nếu $a < l < b$ thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow a < u_n < b).$$

Chứng minh :

1) Áp dụng định nghĩa về sự hội tụ của $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ đến l, ta thấy tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{1}{2}(l-a) < l-a).$$

Nhưng $|u_n - l| < l - a \Rightarrow u_n - l > -(l-a) \Rightarrow u_n > a$.

2) Tương tự như *1)*.

3) Lấy $N = \operatorname{Max}(N_1, N_2)$. ■

◆ **Mệnh đề 2 (« Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức »)**

Cho $(u_n)_n$ là một dãy thực hội tụ, l là giới hạn của nó, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Nếu tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $(\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq a))$, thì $l \geq a$.

2) Nếu tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $(\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow u_n \leq b))$, thì $l \leq b$.

3) Nếu tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $(\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow a \leq u_n \leq b)$, thì $a \leq l \leq b$.

Chứng minh : suy ra từ mệnh đề 1 bằng lập luận phản chứng. ■

◆ **Mệnh đề 3 (« Định lý kẹp »)**

Cho $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ là ba dãy thực sao cho :

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n) \\ (u_n)_n \text{ và } (w_n)_n \text{ hội tụ đến cùng một giới hạn } l \end{cases}$$

Thế thì $(v_n)_n$ cũng hội tụ đến l.

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$; vì $(u_n)_n$ và $(w_n)_n$ hội tụ đến l nên tồn tại $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathrm{N},\ \left(n \ge N_1 \Rightarrow |u_n - l| \le \varepsilon\right) \\ \forall n \in \mathrm{N},\ \left(n \ge N_2 \Rightarrow |w_n - l| \le \varepsilon\right) \end{cases}$$

Đặt $N_0 = \mathrm{Max}(N, N_1, N_2)$, ta có với mọi $n \in \mathbf{N}$:

$$n \ge N_0 \Rightarrow \begin{cases} u_n \le v_n \le w_n \\ |u_n - l| \le \varepsilon \\ |w_n - l| \le \varepsilon \end{cases} \Rightarrow -\varepsilon \le u_n - l \le v_n - l \le w_n - l \le \varepsilon \Rightarrow |v_n - l| \le \varepsilon .$$

Vậy $(v_n)_n$ hội tụ đến l. ■

Nhận xét

1) Trái với các mệnh đề 1 và 2, định lý kẹp cho phép kết luận về sự *tồn tại* của một giới hạn, và như vậy rất có ích.

2) Ta có thể lược đồ hoá định lý kẹp dưới dạng :

$$\begin{array}{ccccc} u_n & \le & v_n & \le & w_n \\ & {\scriptstyle n\infty}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle n\infty} & \\ & & l & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad v_n \xrightarrow[n\infty]{} l$$

VÍ DỤ : Với $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$, ta có :

$$\forall n \in \mathrm{N}^*, \quad \begin{cases} u_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \\ u_n \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} \end{cases}.$$

Vì: $\frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ và $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, ta kết luận : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Nhận xét : để chứng minh rằng một dãy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ đến một phần tử l thuộc $\mathbf{K}$, một cách làm thuận tiện là làm xuất hiện một dãy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ có giới hạn 0 sao cho: $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - l| \le \varepsilon_n$.

♦ **Mệnh đề 4** Cho hai dãy thực $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$.

Nếu $\left.\begin{cases} \exists N \in \mathrm{N},\ \forall n \in \mathrm{N},\ (n \ge N \Rightarrow u_n \le v_n) \\ u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \end{cases}\right|$, thì $v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Chứng minh :

Cho $A \in \mathrm{R}^*_+$ cố định; vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \ge N_1 \Rightarrow u_n \ge A).$$

Đặt $N_2 = \mathrm{Max}(N, N_1)$ ta có :

$$\forall n \geq \mathbf{N}, \left(n \geq N_2 \Rightarrow \begin{cases} u_n \geq A \\ u_n \leq v_n \end{cases} \Rightarrow v_n \geq A \right).$$

Vậy: $v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Nhận xét: Bằng cách chuyển qua các phần tử đối, ta thu được mệnh đề sau :

$$\text{Nếu } : \begin{cases} \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq v_n) \\ u_n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty \end{cases}, \text{ thì : } v_n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty.$$

3.1.3 Các tính chất đại số của dãy số hội tụ

- **Mệnh đề 1** Giả sử $\lambda \in \mathbf{K}$, $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ là hai dãy số, $(l, l') \in \mathbf{K}^2$,

Ta có :

1) $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \Rightarrow |u_n| \xrightarrow[n\infty]{} |l|$

2) $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Leftrightarrow |u_n| \xrightarrow[n\infty]{} 0$

3) $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} l + l'$

4) $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \Rightarrow \lambda u_n \xrightarrow[n\infty]{} \lambda l$

5) $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ (v_n)_n \text{ bị chặn} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

6) $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} l l'$

7) $\left.\begin{array}{l} v_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{v_n} \text{ được xác định từ một thứ tự nào đó} \\ \dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{1}{l'} \end{cases}$

8) $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u_n}{v_n} \text{ được xác định từ một thứ tự nào đó.} \\ \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{l}{l'} \end{cases}$

Chứng minh:

1) Cho $\varepsilon > 0$. Vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ nên tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

Vì: $\forall n \in \mathbf{N},\ \big||u_n| - |l|\big| \leq |u_n - l|$,

nên suy ra $\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq N \Rightarrow \big||u_n| - |l|\big| \leq \varepsilon$, vậy $|u_n| \xrightarrow[n\infty]{} |l|$.

2) Tính chất *2)* thấy ngay, vì với mọi $n \in \mathbf{N}$:

$$\big||u_n| - 0\big| = |u_n| = |u_n - 0|$$

3) Cho $\varepsilon > 0$. Vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ và $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l'$, nên tồn tại $N, N' \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \ \Rightarrow\ |u_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \\ \forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N' \ \Rightarrow\ |u_n - l'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \end{cases}$$

đặt $N_0 = \mathrm{Max}(N, N')$, ta có :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq N_0 \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')|$$
$$\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon).$$

Vậy : $u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} l + l'$

4) Cho $\varepsilon > 0$. Vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ nên tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}\right).$$

do đó : $\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda||u_n - l| \leq \dfrac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda| + 1} \leq \varepsilon\right)$,

và do vậy $\lambda u_n \xrightarrow[n\infty]{} \lambda l$.

5) Theo giả thiết tồn tại $M \in \mathbf{R}_+$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N},\ |v_n| \leq M$.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M + 1}\right),$$

do đó : $\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \Rightarrow |u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon M}{M + 1} \leq \varepsilon\right)$.

Vậy $u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

6) Với mọi $n \in \mathbf{N}$, đặt $\alpha_n = u_n - l$. Ta có :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n v_n = (l + \alpha_n)\, v_n = l_n v_n + \alpha_n v_n.$$

Theo *4)* $lv_n \xrightarrow[n\infty]{} ll'$. Mặt khác $\alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ (xem *3)* và *4)*) và $(v_n)_n$ bị chặn vì hội tụ; vậy (theo *5)*) $\alpha_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và cuối cùng (xem *3)*), $u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} ll'$.

7) Vì $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l'$ nên $|v_n| \xrightarrow[n\infty]{} |l'|$ (xem *1)*).

Do $|l'| > 0$ nên theo 3.1.2, mệnh đề 1, tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N_1 \Rightarrow |v_n| \geq \frac{|l'|}{2}\right).$$

Đặc biệt: $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n \geq N_1,\ v_n \neq 0)$, và dãy $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geq N_1}$ *được xác định*. Với mọi $n \in \mathbf{N}$ sao cho $n \geq N_1$, ta có: $0 \leq \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|v_n - l'|}{|v_n| \cdot |l'|} \leq \frac{2}{|l'|^2}|v_n - l'|$.

Do $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l'$, ta suy ra $\frac{2}{|l'|^2}|v_n - l'| \xrightarrow[n\infty]{} 0$ rồi (xem 3.1 *2)* Mệnh đề 3), $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| \xrightarrow[n\infty]{} 0$, nghĩa là $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{l'}$.

8) Chỉ cần áp dụng *6)* và *7)* và chú ý rằng $\frac{u_n}{v_n} = u_n \frac{1}{v_n}$. ■

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(x_n)_n$ và $(y_n)_n$ là hai dãy thực, $(l, l') \in \mathbf{R}^2$, $z_n = x_n + iy_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$, $L = l + il'$. Ta có:

$$z_n \xrightarrow[n\infty]{} L \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} l \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \end{cases}.$$

Chứng minh:

1) Nếu $z_n \xrightarrow[n\infty]{} L$ thì với mọi $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} |x_n - l| \leq |z_n - L| \\ |y_n - l'| \leq |z_n - L| \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} l \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \end{cases}.$$

2) Ngược lại, nếu $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} l \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \end{cases}$ thì với mọi $n \in \mathbf{N}$:

$$|z_n - L| \leq |x_n - l| + |y_n - l'|$$

và suy ra $z_n \xrightarrow[n\infty]{} L$. ■

◆ **Mệnh đề 3** Cho $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ là hai dãy thực .

1) Nếu $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ và $(v_n)_n$ bị chặn dưới thì $u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ đặc biệt:

- $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \in \mathbf{R} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Nếu $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ và nếu $\left(\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq N \Rightarrow v_n \geq C)\right)$,

thì $u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ đặc biệt :

- $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} l' \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3) $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

4) Nếu $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và nếu $\left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n > 0)\right)$,

thì $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Chứng minh:

1) Theo giả thiết, tồn tại $m \in \mathbf{R}$ sao cho: ($\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n \geq m$). Cho $A > 0$; vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nên tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A - m).$$

Từ đó ta có : $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n \geq N \Rightarrow u_n + v_n \geq (A - m) + m = A)$.

Vậy $u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Cho $A \in \mathbf{R}_+^*$; vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq \frac{A}{C}\right)$$

Đặt $N_2 = \mathrm{Max}(N, N_1)$ ta có:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N_2 \Rightarrow \begin{cases} u_n \geq \dfrac{A}{C} \\ v_n \geq C \end{cases} \Rightarrow u_n v_n \geq A \right),$$

vậy $u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3) Cho $\varepsilon > 0$; vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nên tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Từ đó ta có : $\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \left| \dfrac{1}{u_n} \right| = \dfrac{1}{u_n} \leq \varepsilon \right).$

Vậy $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$

4) Cho $A > 0$; vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| \leq \dfrac{1}{A} \right)$. Đặt $N_2 = \text{Max}(N, N_1)$ ta có:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \geq N_2 \Rightarrow \begin{cases} |u_n| \leq \dfrac{1}{A} \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geq A \right),$$

vậy $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$. ■

Đối với các dãy thực ta thu được các bảng sau đây :

a) **Giới hạn và tổng**

v_n \ u_n	l	$+\infty$	$-\infty$	KG
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	KG
$+\infty$		$+\infty$	?	?
$-\infty$			$-\infty$	?
KG				?

Bảng $u_n + v_n$

- KG: Có nghĩa là dãy số ta đang quan sát không có giới hạn, kể cả hữu hạn hoặc vô hạn (vô cùng).

- ?: có nghĩa là các giả thiết đối với $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ chưa đủ để kết luận; trong trường hợp này ta có một **dạng vô định .**

- Trường hợp $\begin{cases} u_n & \text{KG} \\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} l \end{cases}$ .Ta lập luận bằng phản chứng : Nếu $(u_n + v_n)_n$ có giới hạn hữu hạn L thì: $u_n = (u_n + v_n) - v_n \xrightarrow[n\infty]{} L - l'$, mâu thuẫn. Nếu $(u_n + v_n) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ (tương ứng: $-\infty$), thì

  $u_n = (u_n + v_n) - v_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ (tương ứng: $-\infty$), mâu thuẫn.

Vì vậy $(u_n + v_n)_n$ không có giới hạn kể cả hữu hạn và vô hạn .

- Có thể bổ sung phần bảng nằm hẳn dưới đường chéo bằng đối xứng

  $(u_n + v_n = v_n + u_n)$.

- Vài ví dụ đơn giản về dạng vô định :

1) $\begin{cases} u_n = n^2 \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n = -n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty \end{cases}$, $u_n + v_n = n^2 - n = n(n-1) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) $\begin{cases} u_n = n+1 \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n = -n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty \end{cases}$, $u_n + v_n = (n+1) - n = 1 \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

3) $\begin{cases} u_n = n + (-1)^n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \\ v_n = -n \xrightarrow[n\infty]{} -\infty \end{cases}$, $u_n + v_n = (-1)^n$ không có giới hạn hữu hạn cũng như vô hạn.

b) **Giới hạn và tích**:

v_n \ u_n	$l > 0$	$l = 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	KG
$l' > 0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$	KG
$l' = 0$		0	0	?	?	?
$l' < 0$			ll'	$-\infty$	$+\infty$	KG
$+\infty$				$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$					$+\infty$	?
KG						?

Bảng $u_n . v_n$

3.1.4 Các ví dụ sơ cấp về dãy

1) Dãy cộng

Một dãy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ trong $\mathbf{K}$ được gọi là **dãy cộng** (hoặc: **cấp số cộng**) khi và chỉ khi tồn tại $r \in \mathbf{K}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Phần tử r (được xác định duy nhất) được gọi là **công sai** của dãy cộng $(u_n)_n$.

Khi đó ta có: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 + rn.$

2) Dãy nhân

- **Định nghĩa** Một dãy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ trong $\mathbf{K}$ được gọi là **dãy nhân** (hoặc **cấp số nhân**) nếu và chỉ nếu tồn tại $r \in \mathbf{K}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = ru_n.$$

Phần tử r (được xác định duy nhất), trừ khi ($\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 0$) được gọi là **công bội** của dãy nhân $(u_n)_n$.

Khi đó ta có : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 r^n$.

- **Mệnh đề** Cho $r \in \mathbf{K}$; dãy nhân $(r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ khi và chỉ khi $|r| < 1$ hay $r = 1$.

  Hơn nữa : • $|r| < 1 \Rightarrow r^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

  • $r \in]1; +\infty[\Rightarrow r^n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Chứng minh:

1) Giả sử $r \in]1; +\infty[$.

Tồn tại $h \in \mathbf{R}^*_+$ sao cho $r = 1 + h$. Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, bằng cách sử dụng nhị thức Newton, ta có $r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . h^k \geq 1 + nh$. Rõ ràng là $n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$; rồi vì h cố định trong $\mathbf{R}^*_+$ nên ta suy ra $1 + nh \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ và cuối cùng $r^n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Giả sử $|r| < 1$ và $r \neq 0$. Ta có:

$$|r| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|r|} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{|r|}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \Rightarrow |r|^n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Rightarrow r^n \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

3) Ngược lại giả sử dãy $(r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ đến một phần tử l của $\mathbf{K}$. Vì ($\forall n \in \mathbf{N},\ r^{n+1} = r^n r$) nên bằng cách chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$, ta có $l = lr$. Từ đó suy ra $l = 0$ hoặc $r = 1$. ■

3) *Dãy* $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a \in \mathbb{R}^*_+$ *cố định*

- Giả sử $a > 1$; cho $n \in \mathbb{N}^*$; áp dụng công thức nhị thức Newton:

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(1+\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^k$$
$$\geq \sum_{k=0}^{1} C_n^k\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^k = 1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$

Điều này chứng tỏ rằng $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0 \leq \sqrt[n]{a}-1 \leq \dfrac{a-1}{n}$, từ đó theo định lí kẹp:

$$\sqrt[n]{a}-1 \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

- Giả sử $0 < a < 1$; Khi ấy $\dfrac{1}{a} > 1$, vậy (xem trên đây) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$; nhưng $\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}\right)^{-1}$, vậy $\sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

- Trường hợp $a = 1$ khảo sát dễ dàng.

  Cuối cùng: với mọi $a \in \mathbb{R}^*_+$ cố định, $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4) *Các dãy* $\left(\dfrac{a^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a \in \,]1;+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ *cố định*

Vì $a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$, nên tồn tại $h \in \mathbb{R}^*_+$ sao cho $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1+h$. Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có với mọi $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k \geq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

do đó $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} \geq \dfrac{n-1}{2}h^2$ và $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Cuối cùng: $\dfrac{a^n}{n^\alpha} = \left(\dfrac{\left(a^n\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\right)^\alpha = \left(\dfrac{a^{\frac{n}{\alpha}}}{n}\right)^\alpha$, từ đó ta có kết quả:

với mọi $(a, \alpha) \in \,]1; +\infty[\times \mathbb{N}^*$ cố định, $\dfrac{a^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Chúng ta sẽ thấy (Tập 2, 7.5, Mệnh đề 4) là kết quả trên vẫn đúng với $\alpha \in \mathbf{R}$. Người ta nói rằng hàm mũ (a^n) **trội hơn** hàm luỹ thừa $\left(n^\alpha\right)$.

5) *Dãy* $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$, $a \in \mathbf{K}$ *cố định*

Đặt $N = \mathrm{E}(|a|) + 1$; với mọi $n \in \mathbf{N}$ sao cho $n > N$, ta có :

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left(\frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\left(\frac{|a|}{N+1}\cdots\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$

$$\leq \left(\frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\frac{|a|}{n}\xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

từ đó ta có: với mọi $a \in \mathbf{K}$ cố định, $\dfrac{a^n}{n!}\xrightarrow[n\infty]{} 0$. Người ta nói rằng giai thừa $(n!)$ **trội hơn** hàm mũ (a^n).

Bài tập

◊ **3.1.1** Cho $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy thực sao cho : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \mathbf{Z}$.

Chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ khi và chỉ khi $(u_n)_n$ là dãy dừng.

◊ **3.1.2** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ là hai dãy thực sao cho:

$$\begin{cases}\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq a\\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq b\\ u_n + v_n \xrightarrow[n\infty]{} a+b\end{cases}.$$

Chứng minh: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ và $v_n \xrightarrow[n\infty]{} b$.

◊ **3.1.3** Cho $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ là hai dãy thực hội tụ .

Chứng minh rằng các dãy $(x_n)_n$ và $(y_n)_n$ xác định bởi: $\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} x_n = \mathrm{Sup}(u_n, v_n)\\ y_n = \mathrm{Inf}(u_n, v_n)\end{cases}$ hội tụ và biểu diễn giới hạn của chúng theo giới hạn của $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$.

◊ **3.1.4** Chứng minh sự hội tụ và xác định giới hạn của các dãy sau với số hạng tổng quát được cho trong đề bài:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ b) $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3.k+1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+3)}$ c) $\sqrt[n]{3+\sin n}$.

◊ **3.1.5** Dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3u_n + 2\overline{u}_n\right) \end{cases}$$

có hội tụ hay không, và nếu có, giới hạn là gì ?

◊ **3.1.6** Cũng như câu hỏi ở bài tập 3.1.5 đối với:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + |u_n|\right) \end{cases}$$

◊ **3.1.7** Giả sử $p \in \mathbb{N}^*, (a_1, \dots, a_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2p}$. Chứng minh :

a) $\lim\limits_{n\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i . a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} = \operatorname*{Max}\limits_{1\le i\le p} a_i$ b) $\lim\limits_{n\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^{-n}\right)^{\frac{-1}{n}} = \operatorname*{Min}\limits_{1\le i\le p} a_i$.

◊ **3.1.8** Giả sử $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, sao cho $b^2 - 4ac < 0$, và $(u_n)_n, (v_n)_n$ là hai dãy thực sao cho:

$$au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2 \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Chứng minh : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **3.1.9** Giả sử $(u_n)_n$ là một dãy có phần tử thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$;

Chứng minh rằng : $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **3.1.10*** Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\dfrac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng sự tồn tại của một trong hai giới hạn $\lim\limits_{n\infty} \sin(n.\alpha)$, $\lim\limits_{n\infty} \cos(n.\alpha)$ kéo theo sự tồn tại của giới hạn kia, và rằng sự tồn tại cả hai giới hạn dẫn đến mâu thuẫn. Hãy kết luận.

◊ **3.1.11** Sử dụng $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x\right)$, chứng minh sự tồn tại của $\lim\limits_{n\infty} \prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{k}{n^2}\right)$ và tính giới hạn này .

◊ **3.1.12** Với $a \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, tìm $\lim\limits_{n\infty}\left(\mathrm{E}\left(a^n\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ nếu giới hạn này tồn tại.

◊ **3.1.13** Khảo sát (sự hội tụ, giới hạn nếu có) các dãy xác định bởi:

a) $$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{n+3}\left(nu_n - \dfrac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

(có thể xét $n(n+1)(n+2)u_n$)

$$b)\quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} u_0 \in \mathbf{C} \\ u_1 \in \mathbf{C} \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=o}^{n} u_i \end{cases}$$

$$d)\quad \begin{cases} u_1 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \end{cases}$$

◊ **3.1.14** Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của các dãy số mà số hạng tổng quát được cho trong đề bài :

a) $\dfrac{\cos n}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$

d) $\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{E}(kx),\ x \in \mathbf{R}$ *e)* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

◊ **3.1.15** *a)* Chứng minh : $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \mathbf{C},\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} z^l$

b) Suy ra ,với mọi $z \in \mathbf{C}$ sao cho $|z| < 1$: $\displaystyle\lim_{n\infty} \prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = \frac{1}{1-z}$.

◊ **3.1.16*** Chứng minh rằng với mọi $q \in\ ]-1; 1[$:

$$\lim_{n\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1-q^{2^k}}{1+q^{2^k}}\right)^{\frac{1}{2^k}}\right) = (1-q)^2.$$

(có thể sử dụng bài tập 3.1.15 *a)*).

◊ **3.1.17**

a) Cho $(u_n)_n$ là một dãy phức bị chặn sao cho : $2u_n + u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbf{C}$; chứng minh: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{1}{3}$.

b) Tìm một ví dụ về dãy $(u_n)_n$ không bị chặn mà $(u_n + u_{2n})_n$ hội tụ .

c) Tìm một ví dụ về dãy $(u_n)_n$ bị chặn, phân kỳ mà $(u_n + u_{2n})_n$ hội tụ.

◊ **3.1.18** **Dãy điều hoà**

Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, đặt $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Chứng minh: $\forall m \in \mathbf{N},\ H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.

b) Suy ra : $H_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **3.1.19*** Cho một dãy thực $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sao cho: $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \geq 1 \\ \forall p, q \in \mathbf{N}^*,\ u_{p+q} \leq u_p u_q \end{cases}$

và $(v_n)_{n\geq 1}$ là dãy xác định bởi : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = \frac{\ln u_n}{n}$.

Chứng minh rằng $(v_n)_n$ hội tụ và giới hạn của nó là $\operatorname{Inf}_{n\in\mathbf{N}^*}(v_n)$.

3.2 Tính đơn điệu

3.2.1 Dãy thực đơn điệu

◆ **Định nghĩa** Cho $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy thực .

- Ta nói $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tăng** khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
- Ta nói $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **giảm** khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
- Ta nói $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tăng nghiêm ngặt** khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n < u_{n+1}$.
- Ta nói $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **giảm nghiêm ngặt** khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} < u_n$.
- Ta nói $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **đơn điệu** khi và chỉ khi $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tăng hoặc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ giảm.
- Ta nói $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **đơn điệu nghiêm ngặt** khi và chỉ khi $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tăng nghiêm ngặt hoặc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ giảm nghiêm ngặt.

Nhận xét:

1) Nếu $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ đều tăng (tương ứng giảm) thì $(u_n + v_n)_n$ tăng (tương ứng giảm).

2) Nếu $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ đều tăng (tương ứng giảm) và các số hạng thuộc $\mathbf{R}_+$ thì $(u_n v_n)_n$ tăng (tương ứng giảm).

3) Một dãy có thể không tăng không giảm; ví dụ: $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

◆ **Định lý**

1) Mọi dãy thực tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

2) Mọi dãy thực giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Chứng minh:

1) Giả sử $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy thực tăng bị chặn trên. Tập $\{u_n;\, n \in \mathbf{N}\}$ là một bộ phận của **R** không rỗng và bị chặn trên. Vậy có một biên trên, ký hiệu là l.
Cho $\varepsilon > 0$. Theo định nghĩa của l, tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$l - \varepsilon \le u_N \le l.$$

Vì $(u_n)_n$ tăng nên suy ra:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n > N \Rightarrow u_n \ge u_N \Rightarrow l - \varepsilon \le u_n \le l < l + \varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \le \varepsilon\right).$$

Vậy $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

2) Chỉ cần áp dụng kết quả *1)* đối với dãy $(-u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

VÍ DỤ:

Cho $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

vậy $(u_n)_n$ tăng.

Mặt khác: $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \le n\frac{1}{n+1} \le 1$, vậy $(u_n)_n$ bị chặn trên.

Theo định lý *1)*, ta kết luận rằng $(u_n)_n$ hội tụ. Trong ví dụ này có thể tìm $\lim\limits_{n\infty} u_n$ bằng cách sử dụng khái niệm tổng Riemann (xem 6.2.7).

◆ **Mệnh đề**

1) Mọi dãy thực tăng và không bị chặn trên thì tiến tới $+\infty$.

2) Mọi dãy thực giảm và không bị chặn dưới thì tiến tới $-\infty$.

Chứng minh :

1) Cho $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy thực tăng và không bị chặn trên. Cho $A > 0$, tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho $u_N > A$. Vì $(u_n)_n$ tăng và suy ra: $\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \ge N \Rightarrow u_n \ge u_N > A\right)$.

Vậy $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Áp dụng kết quả 1) và dãy $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là đủ.

Nhận xét :

1) Nếu $(u_n)_n$ tăng thì chỉ có hai khả năng :

- hoặc $(u_n)_n$ hội tụ .
- hoặc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Nếu $(u_n)_n$ tăng và hội tụ đến l, thì $l = \mathrm{Sup}\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ và đặc biệt : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.

3) Nếu $(u_n)_n$ tăng thì hiển nhiên nó bị chặn dưới bởi u_0.

Bài tập

◊ **3.2.1** Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là hai dãy thực sao cho : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0 \\ \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tăng} \end{cases}$

Chứng minh rằng : $\left(\dfrac{u_0 + \ldots.. + u_n}{v_0 + \ldots.. + v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tăng.

◊ **3.2.2*** Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $u_n = C_{2n}^n \sqrt{n}\, 4^{-n}$.

a) Chứng minh rằng $(u_n)_n$ hội tụ.

b) Đặt $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$, chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*, le^{-\frac{1}{8n}} < u_n < l$.

◊ **3.2.3** Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là hai dãy thực sao cho:

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0,\ v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ giảm nghiêm ngặt} \\ \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\infty]{} l$.

◊ **3.2.4*** Cho $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ và $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là các dãy xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \left(u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ và } v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ hội tụ đến cùng một giới hạn. Giới hạn l này không thể biểu diễn «một cách đơn giản» theo a và b, và được gọi là **trung bình cộng–nhân** của a và b.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ chứng tỏ rằng:

$$0 \le v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)^2} \le \frac{(v_n - u_n)^2}{8\sqrt{ab}}.$$

c) *α)* Chỉ ra rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho : $0 \le \dfrac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}} < 1$.

β) Suy từ *b)* rằng:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n > n_0 \Rightarrow 0 \le v_n - u_n \le 8\sqrt{ab}\left(\frac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}}\right)^{2^{n-n_0}} \right).$$

Như vậy ,các dãy $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$ hội tụ «rất nhanh» đến l.

◊ **3.2.5*** Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, là ba dãy thực xác định bởi :

$$\begin{cases} 0 < u_0 \le v_0 \le w_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n v_n w_n}{v_n w_n + w_n u_n + u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n w_n + w_n u_n + u_n v_n}{u_n + v_n + w_n},\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n + w_n}{3} \end{cases}$$

Chứng minh rằng chúng đều hội tụ đến $(u_0 v_0 w_0)^{\frac{1}{3}}$.

3.2.2 Dãy kề nhau

♦ **Định nghĩa** Hai dãy thực $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được gọi là **kề** nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{tăng} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{giảm} \\ v_n - u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề 1** Nếu hai dãy thực $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kề nhau thì chúng hội tụ và có cùng một giới hạn. Hơn nữa nếu kí hiệu l là giới hạn chung thì ta có :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n.$$

Chứng minh :

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt: $w_n = v_n - u_n$. Dãy $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ giảm vì:

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \le 0.$$

Vì w_n giảm và có giới hạn 0, nên ta suy ra : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le v_n$.

- Như vậy: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$; do đó $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tăng và bị chặn trên bởi v_0, nên hội tụ đến một số thực l, còn $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ giảm và bị chặn dưới bởi u_0 nên hội tụ đến một số thực l'.
- Vì $\left(u_n \xrightarrow[n\infty]{} l, v_n \xrightarrow[n\infty]{} l', v_n - u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0\right)$ ta suy ra $l = l'$ và cuối cùng:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n.$$ ■

Trong các áp dụng bằng số, nhận xét rằng khi đó $0 \le l - u_n \le v_n - u_n$ có thể có ích .

VÍ DỤ :

1) **Số e, cơ số của các lôgarit Nêpe**

Với $n \in \mathbf{N}^*$, đặt $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ và $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Rõ rànglà $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ tăng nghiêm ngặt và $v_n - u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Hơn nữa :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = -\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} < 0,$$

do đó $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ giảm nghiêm ngặt .

Như vậy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ và $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ kề nhau, nên hội tụ đến cùng một giới hạn, kí hiệu là e. Bây giờ ta chứng minh rằng e là *số vô tỉ*.

Rõ ràng là e > 0. Giả sử tồn tại $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ sao cho $e = (p/q)$. Quy đồng mẫu số $u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ ta thấy tồn tại $a \in \mathbf{N}^*$ sao cho $u_q = \frac{a}{q!}$; vì vậy:

$$u_q < e < v_q \Leftrightarrow \frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{qq!} \Leftrightarrow a < p(q-1)! < a + \frac{1}{q} \le a + 1$$

mâu thuẫn, vì a, $p(q-1)!$, $a+1$, đều là những số nguyên. Cuối cùng: $e \notin \mathbf{Q}$.

Ta có thể chứng minh, nhưng khó hơn ,rằng e là số **siêu việt**, nghĩa là nó không làm triệt tiêu bất kì đa thức nào thuộc $\mathbf{Z}[X] - \{0\}$. (Tập 2.C7.4)

2) **Dãy các xấp xỉ thập phân non hoặc trội của một số thực :**

Đặt $D = \{\alpha \cdot 10^{-n};\ (\alpha, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\}$, gọi là tập hợp các số thập phân. Cho $a \in \mathbf{R}$; với mọi $n \in \mathbf{N}$ đặt:

$$u_n = 10^{-n}\,\mathrm{E}(10^n a) \text{ và } v_n = 10^{-n}\,(\mathrm{E}(10^n a) + 1).$$

Vậy ta có : $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_n \le a < v_n \\ 10^n u_n \in \mathbf{Z} \text{ và } 10^n v_n \in \mathbf{Z} \\ v_n - u_n = 10^{-n} \end{cases}$.

u_n được gọi là **xấp xỉ thập phân non đến** 10^{-n} **của** a.

v_n được gọi là **xấp xỉ thập phân trội đến** 10^{-n} **của** a.

Cho $n \in \mathbf{N}$. Vì $\begin{cases} E(10^n a) \le 10^n a < E(10^n a)+1 \\ E(10^{n+1} a) \le 10^{n+1} a < E(10^{n+1} a)+1 \end{cases}$,

nên ta có: $\begin{cases} 10E(10^n a) \le 10^{n+1} a < E(10^{n+1} a)+1 \\ E(10^{n+1} a) \le 10^{n+1} a < 10(E(10^n a)+1) \end{cases}$.

Vì $10E(10^n a), E(10^{n+1} a)+1, E(10^{n+1} a), 10(E(10^n a)+1)$, là những số nguyên nên :

$$\begin{cases} 10E(10^n a) \le E(10^{n+1} a) \\ E(10^{n+1} a)+1 \le 10(E(10^n a)+1) \end{cases}.$$

Vậy $u_n \le u_{n+1}$ và $v_{n+1} \le v_n$.

Như thế $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ và $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là những dãy kề nhau, do đó cùng tiến đến một giới hạn l. Hơn nữa do $(\forall n \in \mathbf{N}, u_n \le a \le v_n)$, ta suy ra $l = a$.

Cuối cùng: các dãy xấp xỉ thập phân non hoặc trội của a kề nhau và hội tụ đến a.

Nhận xét :

1) Để dãy các xấp xỉ thập phân non của a là dãy dừng, điều kiện cần và đủ là $a \in \mathbf{D}$.

2) $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \le u_{n+1} - u_n \le a - u_n < v - u_n = 10^{-n}$, nên u_n là số thập phân chứa (nhiều nhất) n chữ số sau dấu phẩy. Như vậy n chữ số đầu sau dấu phẩy của u_n và u_{n+1} là như nhau (nếu $a \ge 0$). Nói khác đi, u_{n+1} chỉ khác u_n ở chữ số thập phân thứ $(n + 1)$; chữ số này bằng 0 ở u_n (nếu $a \ge 0$).

3) Ở đây ta có thể thay 10 bằng một số nguyên bất kì lớn hơn hoặc bằng 2.

◆ **Mệnh đề 2** **(«Định lý về các đoạn lồng nhau»)**

Cho hai dãy thực $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le b_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n] \\ b_n - a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases}.$$

Khi đó tồn tại một số thực l duy nhất sao cho $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{l\}$.

Chứng minh: Các dãy $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ kề nhau, vậy hội tụ đến cùng một giới hạn .

Nhận xét: Kết quả này sẽ được khái quát hoá trong Tập 3 khi khảo sát các không gian vectơ định chuẩn đủ.

Bài tập

◊ **3.2.6** Chứng minh rằng các dãy sau kề nhau:

$$a)\quad u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1},\ v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2},\ n \geq 3.$$

$$b)\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}.k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{n^{\alpha+1}.n!},\ n \geq 1,\ \alpha \in \mathbb{Q}_+^*\left(\text{hay } \mathbb{R}_+^*\right)\ \text{cố định}$$

◊ **3.2.7** Hai bộ phận A và B của $\mathbb{R}$ được gọi là **kề nhau** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B,\ b - a < \varepsilon \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hai bộ phận A và B của $\mathbb{R}$ kề nhau nếu và chỉ nếu : Sup(A), Inf(B) tồn tại và bằng nhau.

b) Chứng minh rằng nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy kề nhau thì hai bộ phận $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ của $\mathbb{R}$ kề nhau, điều ngược lại có đúng không ?

3.3 Dãy con

♦ Định nghĩa 1

- Ta gọi mọi ánh xạ tăng nghiêm ngặt $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một **hàm trích**. Với một dãy$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cho trước, một dãy $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,với $\sigma(n)$ là một hàm trích được gọi một **dãy con** của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nhận xét

1) Với mọi hàm trích σ ta có: $(\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) \geq n)$, ta chứng minh tính chất này dễ dàng bằng quy nạp theo n: $(\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n$ vậy $\sigma(n+1) \geq (n+1)$.

2) Nếuσ, τ là hai hàm trích thì $\sigma \circ \tau$ là một hàm trích. Do đó mọi dãy con của một dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng là một dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VÍ DỤ:

1) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ và $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) $\left(u_{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) $\left(u_{n^2-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải là dãy con từ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vì u_0 bị **«lặp lại»**).

◆ **Mệnh đề 1** Nếu một dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến một phần tử l thuộc $\mathbb{K}$, thì mọi dãy con trích từ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cũng hội tụ đến l.

Chứng minh: Giả sử $U_n \xrightarrow[n\infty]{} l$, và σ là một hàm trích.

Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

Khi đó ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \sigma(n) \geq \sigma(N) \geq N \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - l| \leq \varepsilon).$$

Vậy $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} l$.

Nhận xét

Phần đảo của mệnh đề 1 cho phép chứng minh những dãy nhất định là phân kỳ. Chẳng hạn $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ phân kỳ vì dãy này có hai dãy con $\left((-1)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ và $\left((-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến những giới hạn khác nhau.

Mệnh đề sau đây rất đơn giản nhưng thường có ích.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{K}$ và $l \in \mathbb{K}$. Để $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến l, điều kiện cần và đủ là $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ và $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ đều hội tụ đến l.

Chứng minh

- Điều kiện cần suy ngay từ Mệnh đề 1.
- Đảo lại, giả sử $u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} l$, và $u_{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} l$.

Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| \leq \varepsilon \\ p \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon \end{cases}.$$

Đặt $N = \text{Max}(2N_1, 2N_2 + 1)$ và xét $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > N$. Tồn tại $p \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 2p$ hoặc $n = 2p + 1$.

Trong trường hợp 1, $(n = 2p)$, ta có $2p \geq 2N_1$, vậy $p \geq N_1$; từ đó ta suy ra $|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \varepsilon$.

Trong trường hợp 2, $(n = 2p + 1)$, ta có $2p + 1 \geq 2N_2 + 1$, vậy $p \geq N_2$; từ đó ta suy ra $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

◆ **Định lý (Định lý Bolzano–Weierstrass)**

Từ mọi dãy thực bị chặn ta đều có thể trích ra một dãy hội tụ .

Chứng minh: (Phương pháp *chia đôi*)

Cho $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy thực bị chặn. Ta sẽ xây dựng bằng quy nạp hai dãy thực $(a_n)_n, (b_n)_n$ kề nhau và một hàm trích σ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{\sigma(n)} \in [a_n; b_n].$$

Tồn tại $(a_0, b_0) \in \mathbf{R}^2$ sao cho : $\forall n \in \mathbf{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$;

rõ ràng $k \in \mathbf{N}; u_k \in [a_0; b_0] = \mathbf{N}$ là vô hạn.

Cho $n \in \mathbf{N}$, giả sử đã xác định $(a_n, b_n) \in \mathbf{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} a_n \leq b_n \\ \{k \in \mathbf{N};\ u_k \in [a_n; b_n]\} \quad \text{là vô hạn.} \\ b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \end{cases}$$

Xét điểm giữa $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ của $[a_n; b_n]$, rõ ràng ít nhất một trong hai khoảng $\left[a_n; \dfrac{a_n + b_n}{2}\right], \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}; b_n\right]$ là khoảng mà tập các k thuộc $\mathbf{N}$ sao cho u_k nằm trong khoảng ấy là vô hạn. Do đó tồn tại $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \mathbf{R}^2$ sao cho:

$$\begin{cases} a_{n+1} \leq b_{n+1} \\ \{k \in \mathbf{N};\ u_k \in [a_{n+1}; b_{n+1}]\} \quad \text{là vô hạn.} \\ b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0) \end{cases}$$

Ta định nghĩa hàm trích theo cách sau : $\sigma(0) = 0$,và với mọi n thuộc $\mathbf{N}$, tồn tại $k \in \mathbf{N}$ sao cho: $\begin{cases} k > \sigma(n) \\ u_k \in [a_n; b_n] \end{cases}$ và đặt $\sigma(n+1) = k$.

- Như vậy: ta đã xây dựng được hai dãy thực $(a_n)_n, (b_n)_n$ và hàm trích σ sao cho :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N},\ a_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbf{N},\ [a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n] \\ b_n - a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{\sigma(n)} \in [a_n; b_n] \end{cases}$$

Theo định lý về các đoạn lồng nhau, tồn tại $l \in \mathbf{R}$ sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}, l \in [a_n, b_n]$.

Vậy ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{\sigma(n)} - l| \le b_n - a_n$, và vì $b_n - a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên ta suy luận ra: $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} l$. Cuối cùng, ta đã có thể trích từ $(u_n)_n$ một dãy $(u_{\sigma(n)})_n$ hội tụ.

Bài tập

◊ **3.3.1** Chứng minh rằng mọi dãy trong **K** tuần hoàn và hội tụ là dãy dừng.

◊ **3.3.2** Cho một dãy thực $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sao cho:

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \le u_{m+n} \le \frac{m+n}{mn}.$$

Chứng minh rằng $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **3.3.3** Khảo sát dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n \end{cases}$

◊ **3.3.4** Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong **K** sao cho các dãy $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ.

Chứng minh rằng $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ.

◊ **3.3.5** Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong **K** và $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một ánh xạ .

a) Giả sử f là đơn ánh. Chứng minh rằng nếu $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ thì $(u_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ .

b) Giả sử f là toàn ánh. Chứng minh rằng nếu $(u_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ thì $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ.

c) Giả sử f là song ánh. Chứng minh rằng nếu $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ khi và chỉ khi $(u_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ .

◊ **3.3.6*** Cho $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ và $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số hữu tỉ hội tụ đến x; với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta đặt $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ với $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $q_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, và $|p_n| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3.4 Một số loại dãy thông thường

3.4.1 Dãy afin truy hồi cấp một với hệ số không đổi

Đó là các dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong **K** sao cho tồn tại $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ thoả mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Nếu $a = 1$, thì đó là dãy cộng (xem 3.1.4 *1*). Giả sử $a \neq 1$. Cho $\lambda \in \mathbb{K}$ (sẽ chọn sau) và dãy $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \lambda$.

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda = au_n + b + \lambda$

$$= a(v_n - \lambda) + b + \lambda = av_n + ((1-a)\lambda + b).$$

Khi chọn $\lambda = \frac{b}{a-1}$, ta thấy $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy nhân với công bội a. Vậy:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0.$$

Từ đó: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n\left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$.

3.4.2 Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi

Cho $(a, b) \in \mathbb{K}^2$; ký hiệu $E_{a,b}$ là tập hợp các dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong $\mathbb{K}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

gọi là **các dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi**.

1) Cấu trúc và số chiều của $E_{a,b}$

a) $E_{a,b}$ là một $\mathbb{K}$ –không gian vectơ vì :

- $E_{a,b} \neq \varnothing$ (dãy số không thuộc $E_{a,b}$)
- Nếu $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$, thì:

$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n)$

$= a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + b(\lambda u_n + v_n)$, vậy $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{a,b}$.

b) Kí hiệu $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai phần tử của $E_{a,b}$ xác định bởi: $\begin{cases} U_0 = 1,\ U_1 = 0 \\ V_0 = 0,\ V_1 = 1 \end{cases}$.

- Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ sao cho $\alpha(U_n)_n + \beta(V_n)_n = 0$.

Đặc biệt là: $\begin{cases} \alpha U_0 + \beta V_0 = 0 \\ \alpha U_1 + \beta V_1 = 0 \end{cases}$, vậy $\alpha = \beta = 0$

Điều này chỉ ra là $(U_n)_n, (V_n)_n$ độc lập trong $E_{a,b}$.

- Cho $(u_n)_n \in E_{a,b}$. Ta chứng tỏ bằng quy nạp hai bước theo n rằng :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 U_n + u_1 V_n.$$

Hệ thức hiển nhiên được thoả mãn với $n = 0$ và $n = 1$.

Giả sử với một $n \in \mathbf{N}$ cố định: $\begin{cases} u_n = u_0 U_n + u_1 V_n \\ u_{n+1} = u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1} \end{cases}$

Thế thì: $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n = a(u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1}) + b(u_0 U_n + u_1 V_n)$

$= u_0(aU_{n+1} + bU_n) + u_1(aV_{n+1} + bV_n) = u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2}$.

Điều này chứng tỏ rằng $((U_n)_n, (V_n)_n)$ sinh ra $E_{a,b}$. Cuối cùng, $((U_n)_n, (V_n)_n)$ là một cơ sở của $E_{a,b}$, vậy $\dim_{\mathbf{K}}(E_{a,b}) = 2$.

2) Các phần tử đặc biệt của $E_{a,b}$

Ta xét xem $E_{a,b}$ có chứa các dãy nhân hay không. Cho $r \in \mathbf{K}$; dãy $(r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ thuộc $E_{a,b}$ khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbf{N}, r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ nghĩa là $r^2 - ar - b = 0$.

Phương trình $r^2 - ar - b = 0$ được gọi là **phương trình đặc trưng** (của các dãy tuyến tính truy hồi cấp hai thoả mãn: $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$).

Kí hiệu biệt thức của phương trình này là $\Delta = a^2 + 4b$.

Trường hợp 1: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt trong $\mathbf{K}$ *kí hiệu là* r_1, r_2 *(xảy ra khi* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *và* $\Delta \neq 0$*) hay (*$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *và* $\Delta > 0$*)).*

Họ $\left((r_1^n)_{n \in \mathbf{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbf{N}}\right)$ là độc lập trong $E_{a,b}$ mà số chiều bằng 2; vậy đó là một cơ sở của $E_{a,b}$. Tồn tại (λ_1, λ_2) sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

Trong thực tế người ta tính λ_1, λ_2 theo u_0, u_1, r_1, r_2.

Trường hợp 2: Phương trình đặc trưng có một và chỉ một nghiệm trong $\mathbf{K}$ *,ký hiệu là* r_0 *(trường hợp* $\Delta = 0$ *).*

Khi đó ta thấy là hai dãy $(r_0^n)_{n \in \mathbf{N}}$ và $(nr_0^{n-1})_{n \in \mathbf{N}}$ lập thành một cơ sở trong $E_{a,b}$ (bằng cách sử dụng $r_0 = \frac{a}{2}$).

Tồn tại $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^{n-1}.$$

Chú ý rằng, nếu ($r_0 = 0$ và $n = 0$), nr_0^{n-1} được coi là 0. Vì vậy:

$$\left(nr_0^{n-1}\right)_{n \in \mathbf{N}} = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

Trường hợp 3 Phương trình đặc trưng không có nghiệm trong $\mathbf{K}$ *(nghĩa là* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *và* $\Delta < 0$*).*

Ký hiệu $E_{a,b}$ là tập các *dãy phức* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thoả mãn gỉa thiết truy hồi: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$; $E_{a,b}$ là tập các dãy thực cũng thoả mãn giả thiết truy hồi đó, thế thì $E_{a,b}=E'_{a,b}\cap\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Theo sự khảo sát ở trường hợp 1, khi ký hiệu r_1 và $r_2=\overline{r_1}$ là các không điểm phức (không thực) của phương trình đặc trưng, ta có: $E'_{a,b}=\left\{\left(\lambda_1 r_1^n+\lambda_2 r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}};\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2\right\}$.

Ta sẽ chứng minh rằng : $E_{a,b}=\left\{\left(\lambda_1 r_1^n+\overline{\lambda_1 r_1^n}\right)_{n\in\mathbb{N}};\ \lambda_1\in\mathbb{C}^2\right\}$.

- Với mọi $\lambda_1\in\mathbb{C}$, dãy $\left(\lambda_1 r_1^n+\overline{\lambda_1 r_1^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là phần tử của $E'_{a,b}$ với các số hạng thực, nên thuộc $E_{a,b}$.

- Ngược lại, cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{a,b}$, vì $E_{a,b}\subset E'_{a,b}$ nên tồn tại $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$ sao cho $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda_1 r_1^n+\lambda_2 r_2^n$.

Nhưng:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{a,b}\ \Rightarrow\begin{cases}u_0\in\mathbb{R}\\u_1\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2\in\mathbb{R}\\\lambda_1 r_1+\lambda_2\overline{r_1}\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=\overline{\lambda_1}+\overline{\lambda_2}\\\lambda_1 r_1+\lambda_2\overline{r_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{r_1}+\overline{\lambda_2}r_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=\overline{\lambda_1}+\overline{\lambda_2}\\\lambda_1 r_1+\lambda_2\overline{r_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{r_1}+\overline{\lambda_2}r_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2-\overline{\lambda_1}=\overline{\lambda_2-\overline{\lambda_1}}\\\left(\lambda_2-\overline{\lambda_1}\right)\overline{r_1}=\overline{\left(\lambda_2-\overline{\lambda_1}\right)\overline{r_1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2-\overline{\lambda_1}\in\mathbb{R}\\\left(\lambda_2-\overline{\lambda_1}\right)\overline{r_1}\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda_2-\overline{\lambda_1}=0\qquad\text{vì}\quad\overline{r_1}\notin\mathbb{R}.$$

Vậy $E_{a,b}=\left\{\left(\lambda_1 r_1^n+\overline{\lambda_1 r_1^n}\right)_{n\in\mathbb{N}};\ \lambda_1\in\mathbb{C}\right\}=\left\{\left(2\operatorname{Re}\left(\lambda_1 r_1^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}};\ \lambda_1\in\mathbb{C}\right\}$.

Ta có thể tiếp tục biến đổi biểu thức vừa thu được.

Đặt $\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{1}{2}(A-\mathrm{i}B),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\\\rho=|r_1|,\theta=\operatorname{Arg}(r_1)\end{cases}$

ta có: $2\mathrm{Re}(\lambda_1 {r_1}^n) = \mathrm{Re}((A - \mathrm{i}B)\rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta))$

$$= \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta).$$

Cuối cùng: $E_{a,b} = \left\{\left(\rho^n\left(A\cos n\theta + B\sin n\theta\right)_{n\in\mathbb{N}}; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right)\right.$

với $\rho = |r_1|,\ \theta = \mathrm{Arg}(r_1)$.

VÍ DỤ:

1) **Dãy Fibonacci**

Ta tính phần tử tổng quát của dãy $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\begin{cases}\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1\\ \forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n\end{cases}$$

Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 1 = 0$ có hai nghiệm thực $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, do đó tồn tại $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ta có: $\begin{cases}\phi_0 = 0\\ \phi_1 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \lambda_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$.

Vậy, giá trị của ϕ_n là:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Nhận xét: Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, vì $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| \le \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, nên ϕ_n là số nguyên gần nhất với $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

2) Tính u_n, biết rằng $\begin{cases}u_0 = 1,\ u_1 = \mathrm{i}\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\end{cases}$.

Phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 4 = 0$ có một nghiệm duy nhất $r_0 = 2$ (gọi là nghiệm kép); do đó tồn tại $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^{n-1}.$$

Ta có: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = i - 2 \end{cases}$,

từ đó: $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n + n(\mathrm{i} - 2)2^{n-1}$.

3) Tính u_n biết rằng $\begin{cases} u_0 = 0, \ \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

Phương trình đặc trưng $r^2 + 2r + 4 = 0$ không có nghiệm thực nhưng có hai nghiệm phức liên hợp 2j và $2\mathrm{j}^2$. Vì $|2\mathrm{j}| = 2$ và $\operatorname{Arg}(2\mathrm{j}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, nên tồn tại $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n\left(A\cos\frac{2n\pi}{3} + B\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Ta có: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ 2\left(A\cos\frac{2\pi}{3} + B\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$. Từ đó:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Bài tập

◊ **3.4.1** Xác định u_1 sao cho dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

có tất cả các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$.

◊ **3.4.2** *a)* Tìm số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases},$$

và khảo sát sự hội tụ của dãy đó.

b) Cũng câu hỏi như ở mục *a)* đối với:

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}.$$

◊ **3.4.3** Tính u_n biết rằng $\begin{cases} u_o > 0,\ \ u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = \left(u_n^2 u_{n+1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

◊ **3.4.4** Với các dãy $(u_n)_{n \in N}$ sau đây, hãy tính số hạng tổng quát và khảo sát sự hội tụ:

a) $\begin{cases} u_0 > 0, u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n}. \end{cases}$ (sử dụng bài tập 3.4.2a).

b) $\begin{cases} u_0 = 3 + \mathrm{i} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(3u_n - \mathrm{i}\overline{u_n}\right) \end{cases}$

c)* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{37}{12}, u_1 = \dfrac{35}{12} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n + 3^{n+1} \end{cases}$

◊ **3.4.5** Cho $(u_n)_{n \in N}$ là dãy thực xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+3} = \dfrac{1 + u_{n+1}u_{n+2}}{u_n} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \in \mathbf{N}^*$.

3.4.3 Dãy truy hồi loại $u_{n+1} = f(u_n)$

Ở đây chúng ta sẽ sử dụng các tính chất sơ cấp của các ánh xạ liên tục (xem chương 4) và các ánh xạ khả vi (xem chương 5).

Các tính chất chung

Cho một khoảng đóng I của $\mathbb{R}$, f: $I \to I$ là một ánh xạ.

a) Giả sử f đơn điệu trên I.

- Trường hợp f tăng trên I.

  Vì ($\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$), nên ta thấy rằng $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$.

  Chính xác hơn:

$$\begin{cases} u_o \le u_1 \ \Rightarrow\ u_1 \le u_2 \ \Rightarrow \ldots \Rightarrow\ u_n \le u_{n+1} \ \Rightarrow \ldots \\ u_o \ge u_1 \ \Rightarrow\ u_1 \ge u_2 \ \Rightarrow \ldots \Rightarrow\ u_n \ge u_{n+1} \ \Rightarrow \ldots \end{cases}$$

  Như vậy, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ đơn điệu và có chiều biến thiên phụ thuộc vị trí tương đối của u_0 và u_1. Trong mỗi ví dụ chỉ còn phải xem $(u_n)_n$ bị chặn dưới hay chặn trên.

- Trường hợp f giảm trên I.

  Ánh xạ $f \circ f$ tăng trên I vậy (trường hợp trên) hai dãy con $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ và $(u_{2p+1})_{p \in \mathbf{N}}$ đều đơn điệu (và có chiều ngược nhau).

b) Giả sử f liên tục trên I.

Nếu $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbb{R}$ thì $l \in I$, chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$ trong biểu thức $u_{n+1} = f(u_n)$, ta suy ra $f(l) = l$. Thường thì: ta có thể giải phương trình $f(l) = l$ (ẩn là $l \in I$) và từ đó xác định được các giới hạn "khả dĩ" của $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ta nói một phần tử x của I là một **điểm bất động** của f khi và chỉ khi: $f(x) = x$.

VÍ DỤ:

Khảo sát các dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau đây:

(1) $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases}.$$

- Trước hết, một phép quy nạp đơn giản cho thấy rằng:

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in [0; +\infty[.$$

- $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^3}{u_n^2 + 1} \leq 0$, vậy $(u_n)_n$ giảm.

- Vì $(u_n)_n$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên nó hội tụ đến một số thực l, và $l \geq 0$.

Chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$, ta có: $l = \dfrac{l}{l^2 + 1}$. Từ đó $l = 0$.

Cuối cùng: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

(2) $$\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right), \text{ ở đó } a \in \mathbf{R}_+^* \text{ cố định.} \end{cases}$$

- Trước hết một phép quy nạp đơn giản cho thấy với mỗi $n \in \mathbf{N}$, u_n là tồn tại và $u_n \in]0; +\infty[$.

- $\forall x \in]0; +\infty[, \left(x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a^2}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a\right)$.

- $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - a = \dfrac{u_n^2 + a^2 - 2au_n}{2u_n} = \dfrac{(u_n - a)^2}{2u_n} \geq 0$.

- $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$.

Vậy, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ giảm và bị chặn dưới bởi a nên hội tụ đến một số thực $l \in [a; +\infty[$, số thực đó chỉ có thể là a theo lời giải của $f(x) = x$.

Cuối cùng: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$.

Nhận xét:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \le u_{n+1} - a = \frac{(u_n - a)^2}{2au_n} \le \frac{(u_n - a)^2}{2a^2}.$$

Điều này chứng tỏ rằng dãy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tiến tới a rất nhanh (xem bài tập 3.2.4).

(3) $$\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R}_+ \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{6}\left(u_n^2 + 8\right) \end{cases}.$$

- Phép quy nạp đơn giản chứng tỏ rằng: $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n > 0$.
- Cho $f\colon \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \\ x \mapsto \frac{1}{6}\left(x^2+8\right) \end{array}$. Phép giải phương trình $f(x) = x$ (ẩn là $x \in \mathbf{R}_+$) cho

thấy f có hai điểm bất động: 2 và 4. Ta có ngay bảng biến thiên của f:

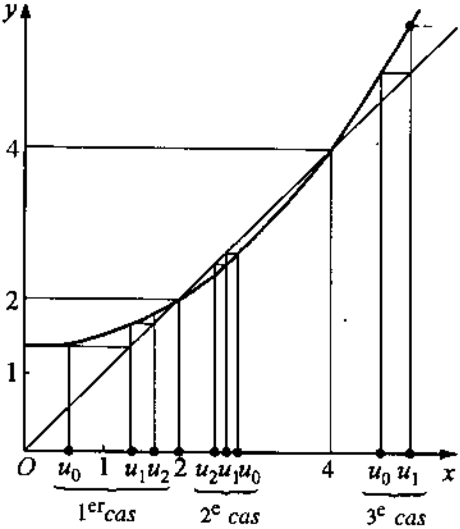
x	0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Các khoảng đóng [0; 2], [2; 4], [4; +∞[đều ổn định đối với f

(nghĩa là $f([0; 2]) \subset [0; 2]$,...).

- Vì f tăng, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ đơn điệu nên chiều biến thiên phụ thuộc vào dấu của $u_1 - u_0$.

Vì ($\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) - x = \dfrac{1}{6}(x-2)(x-4)$), nên dấu của $u_1 - u_0$ phụ thuộc vào vị trí của u_0 so với 2 và 4.



Trường hợp 1: $u_0 \in [0; 2[$

Ở đây $u_1 \geq u_0$, vậy bằng một phép quy nạp đơn giản ta có: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Hơn nữa: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0; 2[$.

Vậy $(u_n)_n$ tăng và bị chặn trên bởi 2, nên hội tụ đến một số thực $l \in [0; 2]$.

Ta đã thấy $l \in \{2, 4\}$, vậy $l = 2$.

Trường hợp 2: $u_0 \in]2; 4[$.

Bằng cách tương tự ta thấy rằng $(u_n)_n$ giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên hội tụ đến một số thực $l \in [2; u_0] \subset [2; 4[$. Ta đã biết $l \in \{2, 4\}$, vậy $l = 2$.

Trường hợp 3: $u_0 = 4$.

Dãy $(u_n)_{n \in N}$ không đổi và bằng 4, hội tụ đến 4.

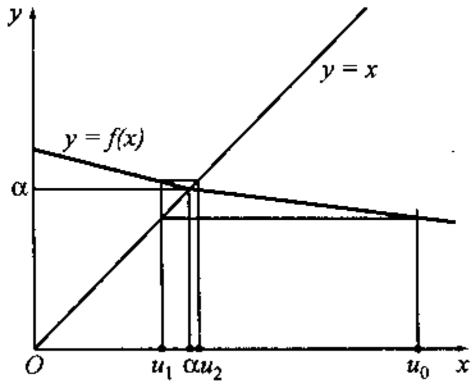
Trường hợp 4: $u_0 \in]4; +\infty[$.

Ở đây $(u_n)_{n \in N}$ tăng. Nếu $(u_n)_n$ hội tụ đến một số thực l thì ta có $l \geq u_0 > 4$, mâu thuẫn với $l \in \{2, 4\}$. Do đó $(u_n)_n$ tăng và phân kỳ, vậy $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Ta nói rằng 2 là **điểm bất động hút** và 4 là **điểm bất động đẩy** của f.

(4)
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathrm{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n} \end{cases}.$$

- Phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n tồn tại và $u_n \in]0; +\infty[$.



- Cho $f\colon [0;+\infty[\to [0;+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{2+x}$.

Phép giải của phương trình $f(x)=x$ (ẩn là $x \in [0;+\infty[$) cho thấy f có một và chỉ một điểm bất động, ký hiệu α, và $\alpha=\sqrt{2}-1\approx 0{,}414$.

- $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1}-\alpha| = \left|\frac{1}{2+u_n}-\frac{1}{2+\alpha}\right| = \frac{|u_n-\alpha|}{(2+u_n)(2+\alpha)} \le \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

Bằng một phép quy nạp đơn giản, ta suy ra:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n-\alpha| \le \frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|.$$

Vậy $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha$.

Ở đây không cần khảo sát các dãy con $(u_{2p})_p$ và $(u_{2p+1})_p$.

(5) $$\begin{cases} u_0 \in [0;+\infty[\\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2} \end{cases}.$$

- Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \ge 0$.
- Xét $f\colon [0;+\infty[\to [0;+\infty[$, $x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$, là một hàm liên tục. Ta có:

$\forall x \in [0;+\infty[$, $(f(x)=x \Leftrightarrow x^3+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow x=1)$.

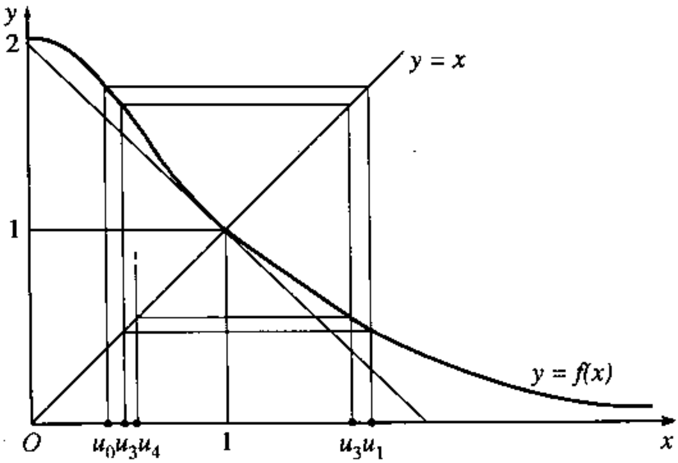
Vậy nếu $(u_n)_n$ hội tụ thì chỉ có thể hội tụ đến 1.

- Ánh xạ f khả vi trên $[0;+\infty[$:

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \le 0,$$

Vậy f giảm.

Vì $f'(1)=-1$, ta không thể lập luận như trong Ví dụ 4.



- Ta sẽ chứng minh rằng $u_{2p} \xrightarrow[p\infty]{} 1$ và $u_{2p+1} \xrightarrow[p\infty]{} 1$.

Cho $g = f \circ f : \ [0;+\infty[\to [0;+\infty[$ là một hàm tăng vì f giảm.

$$x \mapsto g(x) = \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$$

Ta tính:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \ g(x) - x = -\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(1+x^2)^2+4}$$

$$= -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}.$$

Trường hợp 1: $u_0 \in [0, 1]$

Khi ấy: $\forall p \in \mathbf{N}$, ($u_{2p} \in [0; 1]$ và $u_{2p+1} \in [1; +\infty[$),

vậy: $\forall p \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{2p+2} - u_{2p} = g(u_{2p}) - u_{2p} \geq 0 \\ u_{2p+3} - u_{2p+1} = g(u_{2p+1}) - u_{2p+1} \leq 0 \end{cases}$

Do đó $(u_{2p})_p$ tăng và $(u_{2p+1})_p$ giảm.

Hơn nữa, vì ($\forall p \in \mathbf{N}$, $u_{2p} \leq 1 \leq u_{2p+1}$), nên ta suy ra rằng $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến một phần tử $\lambda \in [0; +\infty[$ và $(u_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến một phần tử $\mu \in [0; +\infty[$.

Vì g liên tục trên $[0; +\infty[$ và vì ($\forall x \in [0; +\infty[$, ($g(x) = x \Leftrightarrow x = 1$)), nên ta suy ra $\lambda = \mu = 1$.

Cuối cùng: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Trường hợp 2: $u_0 \in [1; +\infty[$.

Vì $u_1 = f(u_0) \in [0; 1]$, ta quy về trường hợp trên (bằng cách thay u_0 bởi vì u_1) và có cùng một kết luận: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Bài tập

◊ **3.4.6** Khảo sát các dãy $(u_n)_n$ xác định bởi:

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6} \end{cases}$

($\sqrt[3]{x}$ đã được định nghĩa cho $x \in \mathbf{R}_+$ trong 1.2.3, *2)*; với $x \in \mathbf{R}_-$, ta đặt $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x}$).

d) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_0 \in]-1;0[\\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 + (-1)^n \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \ldots \sqrt{u_0}}} \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + \displaystyle\int_0^1 |t - u_n| dt \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sin 2u_n \end{cases}$.

◊ **3.4.7** Khảo sát dãy $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{6}{2 + u_n^2} \end{cases}.$$

◊ **3.4.8** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, sao cho $0 < a < b$, và $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là các dãy được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = a,\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases} \end{cases}.$$

Hãy chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ và $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ tới cùng một giới hạn; hãy biểu diễn giới hạn đó theo $\theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{a}{b}$.

◊ **3.4.9** Khảo sát các dãy $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \ \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \\ v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases} \end{cases}.$$

Bổ sung

◊ **C 3.1 Trung bình Césaro**

I – Trung bình Césaro

*1)** Cho một dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ trong $\mathbf{C}$, và $(v_n)_{n\geq 1}$ là **dãy các trung bình Césaro**, nghĩa là dãy được xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n).$$

Chứng minh rằng, nếu $(u_n)_{n\geq 1}$ hội tụ đến một số phức l, thì $(v_n)_{n\geq 1}$ cũng hội tụ đến l.

2) Điều đảo lại với tính chất *1)* có đúng không?

II – Một số dạng khác hoặc suy rộng

1) Bổ đề bậc thang: cho một dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ trong $\mathbf{C}$ sao cho $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\infty]{} a \in \mathbf{C}$;

chứng minh: $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} a$.

2) Trường hợp $+\infty$

Cho $(u_n)_{n\geq 1}$ là một dãy thực sao cho $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Chứng minh: $\frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3) Suy rộng của I 1)*

Cho một dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ trong $\mathbf{C}$ và một dãy $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ trong $\mathbf{R}_+^*$.

Giả sử: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbf{C}$ và $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \xrightarrow[n\infty]{} l$.

III – Một số ứng dụng

1) a) Cho $(u_n)_{n\geq 1}$ là một dãy có các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$.

Chứng minh rằng nếu $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ hội tụ tới một số thực l thì $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\geq 1}$ cũng hội tụ tới l. (Sử dụng một lôgarit).

b) Hãy suy ra các giới hạn khi $n \to +\infty$ của:

$$\sqrt[n]{n},\ \left(C_{pn}^{n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ với } p \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \text{ cố định},$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}},\ \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

2) Cho $(u_n)_{n\geq 0}$ là dãy được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}.$$

a) Chứng minh $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $U_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Chứng minh: $U_{n+1} - U_n \xrightarrow[n\infty]{} 2$.

c) Sử dụng bổ đề bậc thang, hãy suy ra:

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ (nghĩa là } \sqrt{2n}\cdot u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1).$$

◊ C 3.2 Giới hạn dưới, giới hạn trên

I – Ta liên kết mỗi dãy thực bị chặn $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, với hai dãy thực $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} v_n = \operatorname*{Inf}_{p\geq n} u_p = \operatorname{Inf}(u_n,\ u_{n+1},\ldots) \\ w_n = \operatorname*{Sup}_{p\geq n} u_p = \operatorname{Sup}(u_n,\ u_{n+1},\ldots) \end{cases}.$$

1) Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy thực bị chặn. Chứng minh rằng $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tăng, bị chặn trên, còn $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ giảm và bị chặn dưới. Vậy:

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số thực được gọi là **giới hạn dưới** của dãy bị chặn $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và ký hiệu là $\liminf\limits_{n\infty} u_n$

- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số thực được gọi là **giới hạn trên** của dãy bị chặn $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và ký hiệu $\limsup\limits_{n\infty} u_n$.

Ví dụ: Xác định giới hạn dưới và giới hạn trên của mỗi dãy trong các ví dụ sau đây:

(i) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ (ii) $u_n = (-1)^n$ (iii) $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

2) Cho $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy thực bị chặn.

- Chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ khi và chỉ khi: $\liminf\limits_{n\infty} u_n = \limsup\limits_{n\infty} u_n$

- Chứng minh rằng, nếu $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ, thì:

$$\liminf_{n\infty} u_n = \limsup_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty} u_n .$$

3) Cho $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy thực bị chặn.

Một số thực a được gọi là trị dính của $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nếu tồn tại một hàm trích σ sao cho $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$, và ta ký hiệu tập tất cả các trị dính của $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là VA $((u_n)_{n\in\mathbf{N}})$.

a) Chứng minh rằng $\liminf\limits_{n\infty} u_n$ và $\limsup\limits_{n\infty} u_n$ là các trị dính của $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Chứng minh rằng với mọi trị dính a của $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$\liminf_{n\infty} u_n \le a \le \limsup_{n\infty} u_n$$

4) Tính chất đại số của các giới hạn dưới và giới hạn trên

Chứng minh rằng với mọi dãy thực bị chặn $(a_n)_n$, $(b_n)_n$:

a) 1) $\liminf\limits_{n\infty} (-a_n) = -\limsup\limits_{n\infty} a_n$

b) 1) $\forall\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\begin{cases} \liminf\limits_{n\infty}(\lambda a_n) = \lambda \liminf\limits_{n\infty} a_n \\ \limsup\limits_{n\infty}(\lambda a_n) = \lambda \limsup\limits_{n\infty} a_n \end{cases}$

2) $\forall\lambda \in \mathbf{R}_-$, $\begin{cases} \liminf\limits_{n\infty}(\lambda a_n) = \lambda \limsup\limits_{n\infty} a_n \\ \limsup\limits_{n\infty}(\lambda a_n) = \lambda \liminf\limits_{n\infty} a_n \end{cases}$

c) 1) $\liminf\limits_{n\infty} (a_n + b_n) \ge \liminf\limits_{n\infty} a_n + \liminf\limits_{n\infty} b_n$

2) $\limsup\limits_{n\infty} (a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\infty} a_n + \limsup\limits_{n\infty} b_n$

Cho ví dụ về hai dãy thực bị chặn $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sao cho:

$$\liminf_{n\infty} a_n + \liminf_{n\infty} b_n < \liminf_{n\infty} (a_n+b_n) < \liminf_{n\infty} a_n + \limsup_{n\infty} b_n$$

$$< \limsup_{n\infty} (a_n + b_n) < \limsup_{n\infty} a_n + \limsup_{n\infty} b_n .$$

II – Ba bài tập có dùng đến khái niệm giới hạn dưới và giới hạn trên

1) Cho một dãy thực $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ bị chặn và $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là dãy các số trung bình Césaro của $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ (xem C3.1):

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ c_n = \frac{1}{n}\left(u_1 + \ldots + u_n\right).$$

a) Chứng minh rằng $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ bị chặn.

b) Chứng tỏ rằng $\liminf\limits_{n\infty} u_n \le \liminf\limits_{n\infty} c_n \le \limsup\limits_{n\infty} c_n \le \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

Như vậy nói riêng ta lại thấy kết quả của C 3.1, I *1)*.

*2)*** Cho $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là một dãy thực sao cho:

$$\begin{cases}\forall n \in \mathbf{N},\ \varepsilon_n \ge 0\\ \varepsilon_n \xrightarrow[n\infty]{} 0\end{cases}$$

và $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là một dãy thực bị chặn sao cho: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n \ge -\varepsilon_n$.

Ký hiệu $m = \liminf\limits_{n\infty} u_n$ và $M = \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

Chứng minh rằng tập hợp các trị dính của $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là $[m; M]$.

3) Cho $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là một dãy tăng trong $\mathbf{R}_+$ và $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là dãy được xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = \frac{u_n}{n+u_n}.$$

Chứng minh rằng tập hợp các trị dính của $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là một khoảng đóng, bị chặn (sử dụng *2)*).

◊ C 3.3 Các dãy phân tuyến tính thực

Cho $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ và dãy thực $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ được định nghĩa bởi:

$$\begin{cases}u_0 \in \mathbf{R}\\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}\text{, nếu nó tồn tại.}\end{cases}$$

Giả thiết $ad - bc \neq 0$ (nếu $ad - bc = 0$ thì dãy $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là dãy dừng nếu nó được xác định) và $c \neq 0$ (trường hợp $c = 0$ đã được xét ở 3.4.1)

Cho $f : \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$.

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

1) a) Chứng minh rằng f là một song ánh.

b) Cho $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ là dãy được định nghĩa bởi:

$$\begin{cases}t_0 = -\dfrac{d}{c}\\ \forall n \in \mathbf{N},\quad t_{n+1} = f^{-1}(t_n)\end{cases}$$, dãy này có thể không xác định kể từ một thứ tự nào đó.

Chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định khi và chỉ khi: $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \neq t_n$.

2) Chứng minh rằng, nếu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ thì: $cl^2 + (d-a)l - b = 0$.

Ký hiệu: $\Delta = (d-a)^2 + 4\,bc$.

3) Ta suy ra được gì từ 2) khi $\Delta < 0$?

Ví dụ: Khảo sát dãy xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{-u_n + 2} \end{cases}.$$

4) Giả sử $\Delta > 0$, ký hiệu α và β là hai nghiệm của phương trình $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ với ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $u_0 = \alpha \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha)$.

b) Giả thiết $u_0 \neq \alpha$, và đặt $U_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ và $\lambda = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \lambda U_n$.

c) Suy ra bản chất của dãy $(u_n)_n$.

Ví dụ: Khảo sát dãy được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}.$$

5) Giả thiết $\Delta = 0$, và đặt $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$.

a) Chứng minh: $u_0 = \alpha \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha)$.

b) Giả thiết $u_0 \neq \alpha$, và đặt $U_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ và $\mu = \dfrac{2c}{a+d}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + \mu$.

c) Suy ra bản chất của dãy $(u_n)_n$.

Ví dụ: Khảo sát dãy được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}.$$

Chương 4
Hàm một biến thực lấy giá trị thực hoặc phức

$\mathbb{K}$ chỉ $\mathbf{R}$ hoặc $\mathbf{C}$.

4.1 Đại số các hàm

4.1.1 Đại số $\mathbb{K}^X$

Giả sử X là một tập hợp không rỗng (X thường là một khoảng trong $\mathbf{R}$). Ta trang bị cho tập hợp $\mathbb{K}^X$ các ánh xạ từ X vào $\mathbb{K}$ bằng hai luật hợp thành trong ký hiệu là + và · (hoặc không dùng ký hiệu), và một luật hợp thành ngoài xác định bởi:

$$\begin{cases} \forall f, g \in \mathbb{K}^X,\ \forall x \in X, & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall f, g \in \mathbb{K}^X,\ \forall x \in X, & (fg)(x) = f(x)g(x) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathbb{K}^X,\ \forall x \in X, & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề** $\mathbb{K}^X$ là một đại số kết hợp, giao hoán, có đơn vị (đối với các luật đã định nghĩa trên đây).

Chứng minh

Trong các phép biến đổi sau đây (vốn là tầm thường) x, λ, μ, f, g, h chỉ những phần tử bất kỳ, $x \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $f, g, h \in \mathbf{K}^X$.

+ có tính kết hợp:

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x)+h(x)) f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x) \end{aligned}$$

+ có tính giao hoán: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

+ có phần tử trung lập là ánh xạ không 0: $\begin{array}{c} X \to \mathbb{K} \\ x \mapsto 0 \end{array}$:

$$(f+0)(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Mọi phần tử f của $\mathbf{K}^X$ có một phần tử đối xứng đối với phép + , gọi là phần tử đối của f, ký hiệu là $-f$, xác định bởi: $-f: \underset{x \mapsto -f(x)}{X \to \mathbf{K}}$:

$$(f+(-f))(x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)+(-f(x))=0$$

- có tính kết hợp
- có tính giao hoán
- có tính phân phối đối với phép +

$$\begin{aligned}(f(g+h))(x) &= f(x)((g+h)(x)) = f(x)(g(x)+h(x)) \\ &= f(x)g(x)+f(x)h(x)=(fg)(x)+(fh)(x)=(fg+fh)(x)\end{aligned}$$

- có một phần tử trung lập là ánh xạ hằng 1: $\underset{x \mapsto 1}{X \to \mathbf{K}}$:

$$(f \cdot 1)(x)=f(x)1=f(x).$$

$$\begin{aligned}((\lambda f)g)(x) &= (\lambda f)(x)g(x)=(\lambda f(x))g(x)=\lambda(f(x)g(x)) \\ &= \lambda((fg)(x))=(\lambda(fg))(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)f)(x) &= (\lambda+\mu)f(x)=\lambda f(x)+\mu f(x)=(\lambda f)(x)+(\mu f)(x) \\ &= \lambda f+\mu f(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(x) &= \lambda(f+g)(x)=\lambda(f(x)+g(x))=\lambda f(x)+\lambda g(x) \\ &= (\lambda f)(x)+(\lambda g)(x)=(\lambda f+\lambda g)(x).\end{aligned}$$

■

Nếu X có ít nhất hai phần tử khác nhau a, b thì $\mathbf{K}^X$ chứa các **ước của không** , nghĩa là tồn tại $(f,g) \in (\mathbf{K}^X)^2$ sao cho:

$$f \neq 0,\ \ g \neq 0,\ \ fg=0\,.$$

Thực tế, ta có thể chọn: $f: \underset{x \mapsto \begin{cases}1 & \text{nếu } x=a \\ 0 & \text{nếu } x\neq a\end{cases}}{X \to \mathbf{K}}$ và $g: \underset{x \mapsto \begin{cases}1 & \text{nếu } x=b \\ 0 & \text{nếu } x\neq b\end{cases}}{X \to \mathbf{K}}$

Nói cách khác, quan hệ $fg=0$ không kéo theo ($f=0$ hoặc $g=0$). Ta nói rằng vành $(\mathbf{K}^X,+,\cdot)$ **không phải là một miền nguyên.**

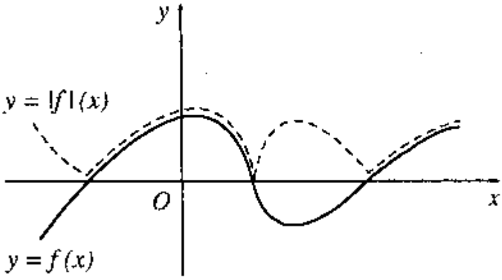
◆ Định nghĩa 1

1) Cho $g \in \mathbb{K}^X$; nếu $(\forall x \in X,\ g(x) \neq 0)$, ta đặt: $\dfrac{1}{g}: \underset{x \mapsto \frac{1}{g(x)}}{X \to \mathbb{K}}$

đó là phần tử đối xứng của g đối với phép nhân.

2) Cho $f, g \in \mathbb{K}^X$ sao cho $(\forall x \in X,\ g(x) \neq 0)$; ta đặt $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$.

- **Định nghĩa 2** Với $f \in \mathbb{K}^X$, đặt $\begin{array}{l} |f| : X \to \mathbf{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{array}$



Ta chú ý rằng nói chung $|f| \neq f$ và $|f| \neq -f$.

- **Định nghĩa 3**

Với $f \in \mathbf{C}^X$, đặt:

$$\begin{array}{l} \overline{f} : X \to \mathbf{C} \\ x \mapsto \overline{f(x)} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \operatorname{Re} f : X \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)) \end{array}, \quad \begin{array}{l} \operatorname{Im} f : X \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)) \end{array}.$$

Như vậy, với mọi $f \in \mathbf{C}^X$ và mọi x thuộc X, ta có:

$\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$, $(\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$

và với mọi f thuộc $\mathbf{C}^X$:

$$\begin{cases} f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \\ \overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{Re} f = \dfrac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right) \\ \operatorname{Im} f = \dfrac{1}{2i}\left(f - \overline{f}\right) \end{cases}.$$

Bài tập

◊ **4.1.1** Cho $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = 0.$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai ánh xạ trên là ánh xạ hằng.

◊ **4.1.2** Tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

a) $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) f\left(x^2 - 1\right) = \sin x$

b) $\forall x \in \mathbf{R},\ x f(x) + f(1 - x) = x^3 + 1$

c) $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f\left(x + y^2\right) = f\left(x^2\right) + f(y)$

d) $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x + y) - f(x - y) = 2y\left(3x^2 + y^2\right)$

e) $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ f(xy) + f(xz) - 2 f(x) f(yz) \geq \dfrac{1}{2}$

4.1.2 Quan hệ thứ tự trong $\mathbb{R}^X$

◊ **Định nghĩa 1** Cho một tập hợp X, ta định nghĩa trong $\mathbb{R}^X$ một quan hệ, ký hiệu là $\leq$, bởi:

$$\forall f,g \in \mathbb{R}^X, \ (f \leq g) \Leftrightarrow (\forall x \in X, f(x) \leq g(x)).$$

◊ **Mệnh đề**

1) $\leq$ là một quan hệ thứ tự trong $\mathbb{R}^X$; thứ tự này không toàn phần nếu X có ít nhất hai phần tử.

2) $\leq$ tương thích với phép $+$:

$$\forall f,g,h \in \mathbb{R}^X, \ (f \leq g \Rightarrow f+h \leq g+h).$$

3) Ta có:

$$\forall f,g,h \in \mathbb{R}^X, \ \left(\begin{cases} f \leq g \\ 0 \leq h \end{cases} \Rightarrow fh \ \leq \ gh\right).$$

Chứng minh:

- Các tính chất phản xạ $(f \leq f)$, phản đối xứng $\left(\begin{cases} f \leq g \\ g \leq f \end{cases} \Rightarrow f = g\right)$, bắc cầu $\left(\begin{cases} f \leq g \\ g \leq h \end{cases} \Rightarrow f \leq h\right)$ là hiển nhiên.

- Giả sử X chứa ít nhất hai phần tử phân biệt a,b. Xét:

$$f: X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x=a \\ 0 & \text{nếu } x\neq a \end{cases} \qquad \text{và } g: X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x=b \\ 0 & \text{nếu } x\neq b \end{cases}$$

Không có $f \leq g$ (vì $f(a) > g(a)$), cũng không có $f \geq g$ (vì $g(b) > f(b)$); ta cũng nói f và g không so sánh được theo $\leq$. ■

♦ **Định nghĩa 2** Với $f,g \in \mathbb{R}^X$, đặt:

$$\mathrm{Sup}(f,g): X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \mathrm{Sup}(f(x),g(x)) \qquad \text{và} \qquad \mathrm{Inf}(f,g): X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \mathrm{Inf}(f(x),g(x))$$

Theo tính chất 7 ở 1.2.2 ta có:

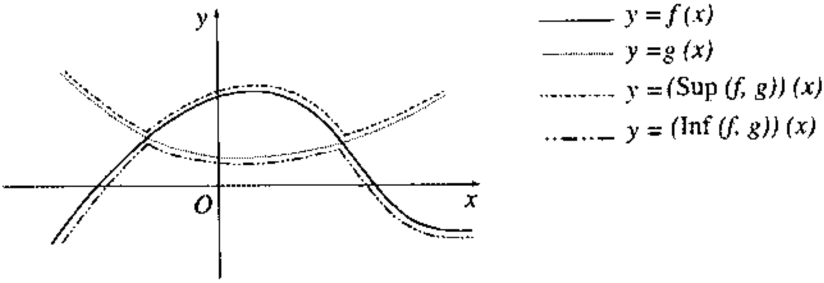
$$\forall (f,g) \in \left(\mathbb{R}^X\right)^2, \quad \begin{cases} \mathrm{Sup}(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|) \\ \mathrm{Inf}(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{cases}$$

Trường hợp riêng: $\forall f \in \mathbb{R}^X$, $|f| = \operatorname{Sup}(f,-f)$.

Chú ý rằng, nói chung: $\operatorname{Sup}(f,g) \neq f$ và $\operatorname{Sup}(f,g) \neq g$.

Chính xác hơn: $\operatorname{Sup}(f,g) = g \Leftrightarrow f \leq g$.

Với $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^X\right)^2$, người ta viết $f < g$ khi và chỉ khi: $\forall x \in X, f(x) < g(x)$.



Cần chú ý rằng: $\begin{cases} f \leq g \\ f \neq g \end{cases}$ không kéo theo $f < g$ (nếu X có ít nhất hai phần tử khác nhau); chẳng hạn: $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$, $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$.

- **Định nghĩa 3**

  Với $f \in \mathbb{R}^X$, ta định nghĩa $f^+ = \operatorname{Sup}(f,0)$, $f^- = \operatorname{Sup}(-f,0)$.

Bài tập

◊ **4.1.3** Cho một tập hợp X, kiểm chứng các công thức sau, với mọi f, g thuộc $\mathbb{R}^X$:

1) $\begin{cases} \operatorname{Sup}(f,g) = f + (g-f)^+ \\ \operatorname{Inf}(f,g) = g - (g-f)^+ \end{cases}$

2) $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$

3) $f \leq g \Leftrightarrow \begin{cases} f^+ \leq g^+ \\ g^- \leq f^- \end{cases}$

4) $\begin{cases} \operatorname{Sup}(f^+, f^-) = |f| \\ \operatorname{Inf}(f^+, f^-) = 0 \end{cases}$

5) $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$.

4.1.3 Tính chẵn lẻ

Trong cả §4.1.3 này, X chỉ một bộ phận của **R đối xứng đối với** 0, nghĩa là:

$$\forall x \in X, -x \in X$$

♦ **Định nghĩa** Cho $f \in \mathbb{K}^X$.

1) Ta nói f **chẵn** khi và chỉ khi $\forall x \in X, f(-x) = f(x)$.

2) Ta nói f **lẻ** khi và chỉ khi $\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$.

Nhận xét:

1) Mọi ánh xạ hằng trên X đều chẵn.

2) Nếu f lẻ và $0 \in X$ thì $f(0) = 0$, nhưng f có thể lẻ mà không xác định tại 0.

3) Một ánh xạ có thể không chẵn và cũng không lẻ; ví dụ: $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto x+1 \end{array}$.

Cho P_X (tương ứng: I_X) là tập hợp các ánh xạ chẵn (tương ứng: lẻ) từ X vào **K**.

♦ **Mệnh đề** P_X và I_X là hai không gian vectơ con của $\mathbf{K}^X$, bù nhau trong $\mathbf{K}^X$.

Chứng minh:

1) Các khẳng định sau đây là hiển nhiên:

- $0 \in P_X$ và $0 \in I_X$.
- $\forall x \in \mathbf{K}, \forall (f,g) \in (P_X)^2, \lambda f + g \in P_X$
- $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (f,g) \in (I_X)^2, \ \lambda f + g \in I_X$
- $P_X \cap I_X = \{0\}$.

2) Cho $f \in \mathbb{K}^X$, đặt $\begin{array}{l} g : X \to \mathbf{K} \\ \quad x \mapsto \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \end{array}$ và $\begin{array}{l} h : X \to \mathbf{K} \\ \quad x \mapsto \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)) \end{array}$,

ta có: $f = g + h$, $g \in P_X$, $h \in I_X$. ■

Với mọi $f \in \mathbb{K}^X$, đặt $\begin{array}{l} \breve{f} : X \to \mathbb{K} \\ \quad x \mapsto f(-x) \end{array}$.

Đồ thị của $\breve{f}$ suy ra từ đồ thị của f bằng phép đối xứng qua $(y'y)$, theo hướng $(x'x)$ (nếu $\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây với mọi $\lambda \in \mathbf{K}, f, g \in \mathbf{K}^X$:

$$\breve{\breve{f}} = f, \ (f+g)^{\smile} = \breve{f} + \breve{g} \ \ (\lambda f)^{\smile} = \lambda\breve{f}, \ (fg)^{\smile} = \breve{f}\,\breve{g}$$

Bài tập

◊ **4.1.4** Nếu $f : X \to \mathbf{R}$ chẵn hoặc lẻ và $g : X \to \mathbf{R}$ chẵn hoặc lẻ, thì có thể nói gì về fg?

◊ **4.1.5** Khảo sát tính chẵn lẻ nếu có của $g \circ f$ theo tính chẵn lẻ của: $f : X \to \mathbf{R}$ và $g : Y \to \mathbf{R}$, trong đó Y là một bộ phận của $\mathbf{R}$ đối xứng đối với 0, $f(X) \subset Y$, và $\underset{x \mapsto g(f(x))}{g \circ f : X \to \mathbf{R}}$ theo cách lạm dụng cách viết.

4.1.4 Tính tuần hoàn

◆ **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ và $f \in \mathbb{K}^X$.

1) Cho $T \in \mathbb{R}_+^*$; ta nói f là T**–tuần hoàn** khi và chỉ khi:

$$\forall x \in X, \quad \begin{cases} x + T \in X \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

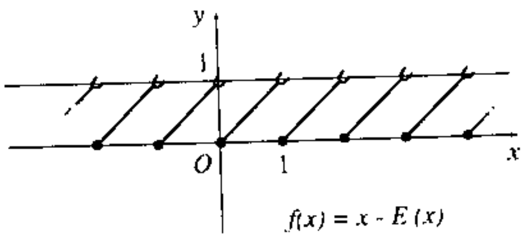
Ta nói rằng T là một chu kỳ của f.

2) Ta nói f là tuần hoàn khi và chỉ khi tồn tại $T \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho f là T–tuần hoàn.

VÍ DỤ:

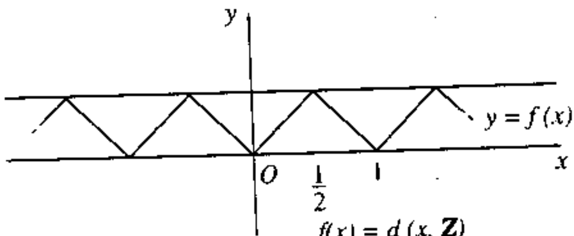
1) Mọi ánh xạ hằng từ một khoảng $[a;+\infty[$ hoặc $]a;+\infty[$ vào $\mathbf{K}$ đều T–tuần hoàn với mọi $T \in \mathbf{R}_+^*$.

2)



Ánh xạ $\underset{x \mapsto x-\mathrm{E}(x)}{\mathrm{R} \to \mathrm{R}}$ là 1– tuần hoàn.

3)



Ánh xạ $\underset{x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathbf{Z})}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ là 1– tuần hoàn,

trong đó: $\mathrm{d}(x,\mathbf{Z}) = \mathrm{Inf}\{|x-n|;\ n \in \mathbf{Z}\} = \mathrm{Min}(x - \mathrm{E}(x),\ \mathrm{E}(x)+1-x)$.

4) Các ánh xạ sin và cos là 2π–tuần hoàn trên $\mathbf{R}$; ánh xạ tan là π–tuần hoàn trên $\mathbf{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi;\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Nhận xét

1) Nếu f là T–tuần hoàn thì với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ f là nT–tuần hoàn. Ví dụ, sin là 6π–tuần hoàn.

2) Nếu f tuần hoàn và T_1, T_2 là những chu kỳ của f thì T_1+T_2 cũng là chu kỳ của f, vì:

$$\forall x\in X, f\left(x+\left(T_1+T_2\right)\right)=f\left(\left(x+T_1\right)+T_2\right)=f\left(x+T_1\right)=f(x).$$

◆ **Mệnh đề 1** Cho $T\in\mathbb{R}_+^*$ và $X\in\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sao cho $\forall x\in X$, $x+T\in X$.
Tập hợp các ánh xạ T–tuần hoàn từ X vào $\mathbf{K}$ là một đại số con có đơn vị của $\mathbb{K}^X$.

Chứng minh:
Thấy ngay các kết luận:

- $\begin{array}{l}1: X\to\mathbb{K}\\ \quad x\mapsto 1\end{array}$ là T–tuần hoàn.
- Nếu $f,g: X\to\mathbf{K}$ là T–tuần hoàn và $\lambda\in\mathbb{K}$, thì $f+g, \lambda f, fg$ đều là T–tuần hoàn.

Cũng chú ý rằng nếu $g: X\to\mathbf{K}$ là T–tuần hoàn và không triệt tiêu tại bất cứ điểm nào thuộc X thì $\frac{1}{g}$ cũng T–tuần hoàn.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $T\in\mathbb{R}_+^*$ và $X\in\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sao cho: $\forall x\in X, x+T\in X$.
Cho $f\in\mathbb{R}^X$, $Y\in\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sao cho $f(X)\subset Y$, $g\in\mathbb{K}^Y$.
Nếu f là T–tuần hoàn thì $\begin{array}{l}g\circ f: X\to\mathbb{K}\\ \qquad x\mapsto g(f(x))\end{array}$ cũng T–tuần hoàn.

Chứng minh:
Hiển nhiên là $g(f(x+T))=g(f(x))$.
Chú ý rằng ở đây giả thiết g tuần hoàn là thừa.

Nhóm các chu kỳ

Cho một ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tập hợp $P_f=\{t\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}, f(x+t)=f(x)\}$ là một nhóm con của $(\mathbb{R},+)$: $\begin{cases}0\in P_f\\ \forall(t,u)\in(P_f)^2,\ t+u\in P_f\\ \forall t\in P_f,\ -t\in P_f\end{cases}$.

Ánh xạ *f* tuần hoàn khi và chỉ khi $P_f\neq\{0\}$; trong trường hợp này ta gọi mọi phần tử của $P_f-\{0\}$ là **chu kỳ** của *f*. Như vậy f có thể có những chu kỳ < 0.

VÍ DỤ:

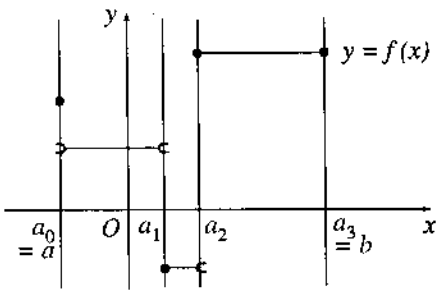
- $P_{\sin}=2\pi\mathbb{Z}$
- $P_{\chi_{\mathbb{Q}}}=\mathbb{Q}$ với $\chi_{\mathbb{Q}}:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}\end{array}$ là hàm đặc trưng của $\mathbb{Q}$.

4.1.5 Ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Trong cả §4.1.5 này, (a, b) chỉ một cặp số thực sao cho $a<b$.

- **Định nghĩa** Một ánh xạ $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ được gọi là ánh xạ **bậc thang** khi và chỉ khi tồn tại $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_0,\ldots,a_n)\in[a;b]^{n+1}$, $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ sao cho:

$$\begin{cases}a=a_0<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=b\\ \forall i\in\{0,\ldots,n-1\},\ \forall x\in\,]a_i;a_{i+1}[,\ f(x)=\lambda_i\end{cases}.$$



Nói cách khác, *f* chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn, và là hằng giữa hai điểm gián đoạn kế tiếp.

◆ **Mệnh đề** Tập hợp $E(a, b)$ các ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ là một đại số con có đơn vị của $\mathbb{R}^{[a;b]}$, nghĩa là:

1) $1 \in E(a,b)$

2) $\forall (f,g) \in (E(a,b))^2, \quad f+g \in E(a,b)$

3) $\forall f \in E(a,b), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f \in E(a,b)$

4) $\forall (f,g) \in (E(a,b))^2, \quad fg \in E(a,b).$

Chứng minh

Các tính chất *1)* và *3)* là hiển nhiên.

Cho $(f,g) \in (E(a,b))^2$. Tồn tại $n, p \in \mathbb{N}^*, (a_0,...,a_n) \in [a;b]^{n+1}, (b_0,...,b_p) \in [a;b]^{p+1}$, $(\lambda_0,...,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, (\mu_0,...,\mu_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ sao cho:

$$\begin{cases} a = a_0 < ... < a_n = b \\ a = b_0 < ... < b_p = b \\ \forall i \in [0,...,n-1], \quad \forall x \in]a_i;\ a_{i+1}[, \quad f(x) = \lambda_i \\ \forall j \in [0,...,p-1], \quad \forall x \in]p_j;\ p_{j+1}[, \quad g(x) = \mu_j \end{cases}$$

Ký hiệu $c_0,..., c_q$, là các điểm của $[a; b]$ thu được bằng cách hợp của hai tập hợp $\{a_0,..., a_n\}$ và $\{b_0,..., b_p\}$, rồi sắp thứ tự các phần tử của nó (đây là một bộ phận hữu hạn của $[a; b]$).

Trên mỗi $]c_k; c_{k+1}[$ $(k \in \{0,..., q-1\})$, f và g đều không đổi, vậy $f+g$ và fg cũng không đổi. ■

Ta sẽ khảo sát sâu hơn các ánh xạ bậc thang theo quan điểm tích phân các ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn (xem 6.1).

4.1.6 Ánh xạ đa thức, ánh xạ hữu tỷ

◆ **Định nghĩa 1** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Một ánh xạ $P : X \to \mathbb{K}$ được gọi là **ánh xạ đa thức** khi và chỉ khi tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $(a_0,...,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ sao cho:

$$\forall x \in X,\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Các ánh xạ đa thức từ X vào $\mathbb{K}$ tạo thành một đại số con có đơn vị của $\mathbb{K}^X$.

- **Định nghĩa 2** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Một ánh xạ f từ X vào $\mathbb{R}$ được gọi là **ánh xạ hữu tỷ** khi và chỉ khi tồn tại hai ánh xạ đa thức $P, Q: X \to \mathbb{K}$ sao cho:

$$\begin{cases} Q \neq 0 \\ \forall x \in X, \left(Q(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \right) \end{cases}.$$

VÍ DỤ:

Các hàm biến thực f, g xác định bởi các công thức $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x(x-1)}$, không cùng miền xác định, nhưng trùng nhau trên $\mathrm{R} - \{0,1\}$.

4.1.7 Tính đơn điệu

- **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ và $f \in \mathbb{R}^X$.
  1) Ta nói f **tăng** khi và chỉ khi:
  $$\forall (x_1, x_2) \in X^2,\ (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$
  2) Ta nói f **giảm** khi và chỉ khi:
  $$\forall (x_1, x_2) \in X^2,\ (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)).$$
  3) Ta nói f **tăng nghiêm ngặt** khi và chỉ khi:
  $$\forall (x_1, x_2) \in X^2,\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$
  4) Ta nói f **giảm nghiêm ngặt** khi và chỉ khi:
  $$\forall (x_1, x_2) \in X^2,\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)).$$
  5) Ta nói f **đơn điệu** khi và chỉ khi: f tăng hoặc f giảm.
  6) Ta nói f **đơn điệu nghiêm ngặt** khi và chỉ khi: f tăng nghiêm ngặt hoặc f giảm nghiêm ngặt.

Nhận xét:

1) Một ánh xạ có thể không đơn điệu; ví dụ:

$$\begin{array}{c} \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}, \quad \chi_{\mathrm{Q}} : \begin{array}{c} \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathrm{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathrm{R} - \mathrm{Q} \end{cases} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathrm{R}^* \to \mathrm{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}.$$

2) Mọi ánh xạ đơn điệu nghiêm ngặt đều là đơn ánh; nhưng điều ngược lại không đúng, như ở ví dụ sau:

$$\begin{array}{c} \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{nếu } (x \neq -1 \text{ và } x \neq 1) \\ 1 & \text{nếu } x = -1 \\ -1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

◆ **Mệnh đề:**

1) Nếu $f, g : X \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ tăng thì $f + g$ tăng.

2) Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ tăng thì các ánh xạ $-f: X \to \mathbb{R}$ và $\breve{f}: \underset{x \mapsto f(-x)}{\breve{X} \to \mathbb{R}}$

(ở đây $\breve{X} = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ \ -x \in X\ \}$) giảm.

3) Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ tăng và $\lambda \in \mathbb{R}_+$, thì λf tăng.

4) Nếu $f, g: X \to \mathbb{R}$ đều tăng và không âm thì fg tăng.

5) Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ và $g : Y \to \mathbb{R}$ đều tăng và $f(X) \subset Y$, thì ánh xạ hợp $\underset{x \mapsto g(f(x))}{X \to \mathbb{R}}$ tăng.

Chứng minh: Hiển nhiên.

Ta có thể phát biểu các tính chất tương tự đối với các ánh xạ giảm.

Nhận xét

Nếu $f: X \to \mathbf{R}$ tăng và $g : X \to \mathbf{R}$ giảm, thì không thể kết luận là $f + g$ đơn điệu; ví dụ: $f: \underset{x \mapsto x^3}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ và $g: \underset{x \mapsto -x}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$.

Bài tập

◊ **4.1.6** Giải phương trình: $x^{18} + x^{10} = 544$, ẩn là $x \in \mathbf{R}_+$.

◊ **4.1.7** Cho $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} f \circ f & \text{tăng} \\ f \circ f \circ f & \text{giảm} \end{cases}$$

Chứng minh rằng f giảm nghiêm ngặt.

4.1.8 Ánh xạ bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn

Trong cả §4.1.8 này, X chỉ một tập hợp không rỗng bất kỳ.

◆ **Định nghĩa**

1) Một ánh xạ $f : X \to \mathbf{R}$ gọi là **bị chặn trên** khi và chỉ khi tồn tại $A \in \mathbf{R}$ sao cho:

$$\forall x \in X, \qquad f(x) \le A.$$

2) Một ánh xạ $f: X \to \mathbb{R}$ gọi là **bị chặn dưới** khi và chỉ khi tồn tại $B \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in X, \qquad B \le f(x).$$

3) Một ánh xạ $f: X \to \mathbb{R}$ gọi là **bị chặn** khi và chỉ khi tồn tại $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sao cho:

$$\forall x \in X, \qquad B \le f(x) \le A.$$

Nhận xét:

1) Ánh xạ f bị chặn trên (tương ứng: bị chặn dưới; tương ứng: bị chặn) khi và chỉ khi bộ phận $f(X)$ của $\mathbb{R}$ bị chặn trên (tương ứng: bị chặn dưới; tương ứng: bị chặn) (xem 1.2.1).

2) Mọi ánh xạ hằng đều bị chặn.

3) $f: X \to \mathbb{R}$ bị chặn khi và chỉ khi $|f|: X \to \mathbb{R}$ bị chặn trên, nghĩa là khi và chỉ khi: $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X, |f(x)| \le M$.

◆ Mệnh đề - Định nghĩa 1

Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ bị chặn trên (tương ứng: bị chặn dưới) thì $f(X)$ có biên trên (tương ứng: biên dưới) trong $\mathbb{R}$, gọi là **biên trên** (tương ứng: **biên dưới**) của f, và được ký hiệu là : $\operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x)$ (tương ứng: $\operatorname*{Inf}_{x \in X} f(x)$) hoặc $\operatorname*{Sup}_{X} f$ (tương ứng: $\operatorname*{Inf}_{X} f$).

Điều này suy trực tiếp từ định lý về biên trên trong $\mathbb{R}$ (xem 1.2.3).

Vậy, theo định nghĩa: $\operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x) = \operatorname{Sup}\{f(x);\ x \in X\} = \operatorname{Sup} f(X)$.

◆ Mệnh đề 2

1) Nếu $f, g: X \to \mathbb{R}$ bị chặn trên, thì $f + g$ bị chặn trên và:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in X}(f+g)(x) \le \operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x) + \operatorname*{Sup}_{x \in X} g(x).$$

2) Nếu $f, g: X \to \mathbb{R}$ bị chặn trên và không âm, thì fg bị chặn trên và:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in X}(fg)(x) \le \left(\operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x)\right)\left(\operatorname*{Sup}_{x \in X} g(x)\right).$$

3) Nếu $f: X \to \mathbb{R}$ bị chặn trên và $\lambda \in \mathbb{R}_+$, thì λf bị chặn trên và:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in X}(\lambda f)(x) \le \lambda \operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x).$$

4) Để $f: X \to \mathbf{R}$ bị chặn dưới, điều kiện cận và đủ là $-f$ bị chặn trên và khi đó:

$$\operatorname*{Inf}_{x\in X} f(x) = -\operatorname*{Sup}_{x\in X}(-f(x)).$$

Chứng minh:

1) Đặt $M_f = \operatorname*{Sup}_{x\in X} f(x)$, $M_g = \operatorname*{Sup}_{x\in X} g(x)$.

Ta có: $\forall x \in X$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \le M_f + M_g$.

Điều này chứng tỏ: $M_f + M_g$ là một chặn trên của $(f+g)$, và: $\operatorname*{Sup}_{x\in X}(f+g)(x) \le M_f + M_g$, vì $\operatorname*{Sup}_{x\in X}(f+g)$ là chặn trên nhỏ nhất của $(f+g)(X)$ mà $M_f + M_g$ là một chặn trên của $(f+g)(X)$.

2) Cũng như trên:

$$\left(\forall x \in X, \begin{cases} 0 \le f(x) \le M_f \\ 0 \le g(x) \le M_g \end{cases}\right) \Rightarrow \left(\forall x \in X, 0 \le (fg)(x) \le M_f M_g\right).$$

3) Áp dụng tính chất 2) ở trên đối với (λ, f), và coi λ như một ánh xạ hằng, ta có: $\operatorname*{Sup}_{x\in X}(\lambda f)(x) \le \lambda \operatorname*{Sup}_{x\in X} f(x)$.

Nếu $\lambda = 0$, đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên.

Nếu $\lambda > 0$, áp dụng bất đẳng thức trên với $\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda f\right)$ thay cho (λ, f), ta có:

$$\operatorname*{Sup}_{x\in X}\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda f)(x)\right) \le \frac{1}{\lambda}\operatorname*{Sup}_{x\in X}(\lambda f)(x),$$

và cuối cùng, có đẳng thức cần chứng minh.

4) • Giả sử f bị chặn dưới, đặt $mf = \operatorname*{Inf}_{x\in X} f(x)$.

Ta có: $(\forall x \in X, \ m_f \le f(x))$.

Từ đó: $(\forall x \in X, \ -f(x) \le -m_f)$.

Điều này chứng tỏ $-f$ bị chặn trên và $M_{-f} \le -m_f$. Vì $(\forall x \in X, \ -f(x) \le M_{-f})$, nên ta suy ra $(\forall x \in X; -M_{-f} \le f(x))$, từ đây theo định nghĩa của m_f: $-M_{-f} \le m_f$.

Cuối cùng: $m_f = -M_{-f}$.

• Chứng minh đảo tương tự. ■

Tính chất 4) thường cho phép đưa việc khảo sát biên dưới về việc khảo sát biên trên.

Nhận xét: Các bất đẳng thức trong các tính chất *1)* và *2)* có thể là nghiêm ngặt như ở ví dụ: $f\colon \begin{array}{l}[0;1]\to \mathbb{R}\\ x\mapsto x\end{array}$, $g\colon \begin{array}{l}[0;1]\to \mathbb{R}\\ x\mapsto 1-x\end{array}$; trong ví dụ này:

$$\begin{cases} \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} (f+g)(x) = 1 \neq \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} f(x) + \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} g(x) = 2 \\ \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} (fg)(x) = \dfrac{1}{4} \neq \left(\underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} f(x)\right)\left(\underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} g(x)\right) = 1 \end{cases}$$

◆ **Mệnh đề 3** Tập hợp $B(X;\mathbb{R})$ các ánh xạ bị chặn từ X vào $\mathbf{R}$ là một đại số con có đơn vị của $\mathbf{R}^X$ nghĩa là:

$$\begin{cases} 1\in B(X;\mathbb{R}) \\ \forall (f,g)\in (B(X;\mathbb{R}))^2,\ f+g\in B(X;\mathbb{R}) \\ \forall \lambda\in \mathbb{R}, \forall f\in B(X;\mathbb{R}),\ \lambda f\in B(X;\mathbb{R}) \\ \forall (f,g)\in (B(X;\mathbb{R}))^2,\ fg\in B(X;\mathbb{R}) \end{cases}.$$

Hơn nữa, khi đặt $\|f\|_\infty = \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} |f(x)|$ với $f\in B(X;\mathbb{R})$, thì ta có:

$$\begin{cases} \forall f\in B(X;\mathbb{R}),\ (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f=0) \\ \forall \lambda\in\mathbb{R};\ \forall f\in B(X;\mathbb{R}),\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty \\ \forall (f,g)\in (B(X;\mathbb{R}))^2,\ \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \forall (f,g)\in (B(X;\mathbb{R}))^2,\ \|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty \end{cases}$$

Chứng minh:

Hiển nhiên bằng cách áp dụng mệnh đề 2 trên đây.

4.2 Giới hạn

Trong các mục 4.2 và 4.3, I chỉ một khoảng của $\mathbf{R}$ không rỗng và cũng không thu về một điểm. Ký hiệu $\overline{I}$ chỉ khoảng đóng cùng có mút với I và $\overset{\circ}{I}$ chỉ khoảng mở có cùng mút với I, xem 1.2.1

Để nhất quán, ta nói một tính chất của một hàm số xác định trên I là đúng trong lân cận điểm a $(a\in \overline{I}\cup\{-\infty;+\infty\})$ nếu nó đúng trong giao của I với một khoảng mở không rỗng có tâm là a nếu $a\in\mathbf{R}$, với một khoảng $]c,+\infty[$ nếu $a=+\infty$, với khoảng $]-\infty;c[$ nếu $a=-\infty$.

4.2.1 Khái niệm giới hạn

- **Định nghĩa 1**

  Cho $f: I \to \mathbb{K}$, $l \in \mathbb{K}$.

  1) Cho $a \in \overline{I}$, ta nói f **có giới hạn là** l **tại** a khi và chỉ khi:

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \quad \left(|x-a| \le \eta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right).$$

  2) Nếu I có mút là $+\infty$, ta nói f **có giới hạn là** l **tại** $+\infty$ khi và chỉ khi:

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \quad \left(x \ge A \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right).$$

  3) Nếu I có mút là $-\infty$, ta nói f **có giới hạn là** l **tại** $-\infty$ khi và chỉ khi:

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \quad \left(x \le B \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right).$$

  Khi f có giới hạn l tại a $(l \in \mathbb{K})$, ta nói rằng f **có giới hạn hữu hạn tại** a.

Nhận xét

Rõ ràng là f có giới hạn là l tại $-\infty$ khi và chỉ khi $\bar{f}: x \mapsto f(-x)$ có giới hạn là l tại $+\infty$.

- **Định nghĩa 2** Cho $f: X \to \mathbb{R}$.

  - *1)* Cho $a \in \overline{I}$, ta nói f **có giới hạn** là $+\infty$ **tại** a nếu và chỉ nếu:

    $$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \quad \left(|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) \ge A\right).$$

    2) Nếu I có mút là $+\infty$, ta nói f **có giới hạn là** $+\infty$ **tại** $+\infty$ nếu và chỉ nếu:

    $$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists A' \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \quad \left(x \ge A' \Rightarrow f(x) \ge A\right).$$

    3) Nếu **I** có mút là $-\infty$, ta nói f **có giới hạn** $+\infty$ **tại** $-\infty$ nếu và chỉ nếu:

    $$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B' \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \quad \left(x \le B' \Rightarrow f(x) \ge A\right).$$

  - Người ta nói f **có giới hạn** $-\infty$ **tại** a $\left(a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}\right)$ nếu và chỉ nếu $-f$ có giới hạn $+\infty$ tại a.

Nhận xét:

Khái niệm lân cận trong $\overline{\mathbb{R}}$, không thuộc chương trình, sẽ cho phép thống nhất các định nghĩa trên.

Trong phần tiếp theo của §4.2 này, các chữ $a, b, \ldots, l, l', \ldots$ có thể chỉ các phần tử của $\overline{I}$, hoặc $+\infty$ hoặc $-\infty$.

♦ **Mệnh đề 1** (**«Tính duy nhất của giới hạn, nếu tồn tại»**).
Nếu f nhận l và l' làm giới hạn tại a, thì $l = l'$.

Chứng minh:

Ta giả thiết, chẳng hạn $a \in \overline{I}$ và $(l, l') \in \mathbb{K}^2$, vì các trường hợp khác cũng tương tự.

Lập luận phản chứng: Giả sử f nhận l và l' làm giới hạn tại a và $l \neq l'$. Đặt $\varepsilon = \frac{1}{3}\left|l' - l\right| > 0$. Tồn tại $\eta_1 > 0$ và $\eta_2 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \begin{cases} |x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \\ |x-a| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l'| \leq \varepsilon \end{cases}.$$

Đặt $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$. Rõ ràng tồn tại $x_0 \in I$ sao cho $|x_0 - a| \leq \eta$ và do đó:

$$\left|l' - l\right| = \left|l' - f(x_0) + f(x_0) - l\right| \leq \left|f(x_0) - l'\right| + \left|f(x_0) - l\right| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}\left|l' - l\right|, \text{ mâu thuẫn.}$$

Mệnh đề trên chứng tỏ rằng ta có thể dùng cách ký hiệu hàm tính: Nếu f có giới hạn là l tại a, ta nói l là **giới hạn của** f **tại** a và ký hiệu:

$$l = \lim_{x \to a} f(x) \text{ hay } l = \lim_{a} f \text{ hay } f(x) \underset{x \to a}{\to} l \text{ hay } f \underset{a}{\to} l.$$

Nếu $f, g : I \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ trùng nhau trong một lân cận của a, thì việc tồn tại các giới hạn của f và g tại a là tương đương, trong trường hợp các giới hạn này tồn tại thì chúng bằng nhau. Nói cách khác, về việc khảo sát giới hạn tại a thì f và g là như nhau.

♦ **Mệnh đề 2** Nếu $f : I \to \mathbb{K}$ có giới hạn hữu hạn tại a thì f bị chặn trong một lân cận của a.

Chứng minh:

Ta giả thiết chẳng hạn $a \in \overline{I}$, vì các trường hợp $a = +\infty$, $a = -\infty$ cũng tương tự. Tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \left(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l| \right),$$

vậy f bị chặn trong lân cận của a. ∎

Nhận xét:
Bằng cách lập luận phản đảo, ta thấy, chẳng hạn, rằng ánh xạ $\begin{aligned}]0; 1[&\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$

không bị chặn trong lân cận của 0, nên không có giới hạn hữu hạn tại 0.

♦ **Mệnh đề 3** (**Sử dụng dãy để thể hiện giới hạn hàm số**)
Để $f : X \to \mathbb{K}$ có giới hạn là l tại a, điều kiện cần và đủ là: với mọi dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong I sao cho $u_n \underset{n\infty}{\to} a$, ta có $f(u_n) \underset{n\infty}{\to} l$.

Chứng minh:

Ta giả thiết $a \in \overline{I}$ và $l \in \mathbb{K}$, vì các trường hợp khác cũng tương tự.

1) Giả sử f có giới hạn là l tại a, và $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong I sao cho $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a$.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $f \underset{a}{\rightarrow} l$, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \ \left(|x\text{-}a| \le \eta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right).$$

Sau đó, vì $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ \left(n \ge N \Rightarrow |u_n - a| \le \eta\right).$$

Vậy ta có:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ \left(n \ge N \Rightarrow |u_n - a| \le \eta \Rightarrow |f(u_n - l) \le \varepsilon|\right).$$

Suy ra $f(u_n) \underset{n\infty}{\rightarrow} l$.

2) Giả sử l không phải là giới hạn của f tại a, nghĩa là:

Không $\left(\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \ \left(|x-a| \le \eta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right)\right)$.

Vậy tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\forall \eta > 0, \ \exists x \in I, \ \begin{cases} |x-a| \le \eta \\ |f(x)-l| > \varepsilon \end{cases}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (thay η bởi $\frac{1}{\eta}$), đều tồn tại $u_n \in I$ sao cho:

$$|u_n - a| \le \frac{1}{n} \text{ và } |f(u_n) - l| \ge \varepsilon.$$

Khi đó ta thấy rằng dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong I được xây dựng như trên thoả mãn: $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a$ và $f(u_n) \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} l$.

- **Định nghĩa 3** Cho $f: I \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{I}$, $l \in \mathbb{K} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

  Ta nói f có **giới hạn trái** (tương ứng: **phải**) **tại** a là l khi và chỉ khi thu hẹp $f|_{]-\infty;a[\cap I}$ (tương ứng: $f|_{]a;+\infty[\cap I}$) có giới hạn tại a là l.

Ví dụ, nếu $l \in \mathbb{K}$, f có giới hạn phải tại a là l khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \ \left(0 < x\text{-}a \le \eta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right).$$

Khi f có giới hạn trái (tương ứng: phải) tại a là l, ta ký hiệu:

$l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ hay $l = \lim\limits_{a^-} f$ hay $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} l$ hay $l = f(a^-)$.

$\Big($tương ứng: $l = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ hay $l = \lim\limits_{a^+} f$ hay $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} l$ hay $l = f(a^+)\Big)$. ■

4.2.2 Thứ tự và giới hạn

Trong §4.2.2 này các hàm số đều nhận những giá trị thực.

♦ **Mệnh đề 1** Cho $a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.

Giả sử f có giới hạn là l tại a.

1) Nếu $c < l$, thì trong lân cận của a: $c < f(x)$.

2) Nếu $l < d$, thì trong lân cận của a: $f(x) < d$.

3) Nếu $c < l < d$, thì trong lân cận của a: $c < f(x) < d$.

Chứng minh:

1) Vì $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ và $l - c > 0$ nên tồn tại $\eta_1 > 0$ sao cho với mọi x thuộc I:

$$|x - a| \le \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| \le \frac{1}{2}(l - c) < l - c \Rightarrow -f(x) + l < l - c \Rightarrow c < f(x).$$

2) Cũng vậy, tồn tại $\eta_2 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, (|x - a| \le \eta_2 \Rightarrow f(x) < d).$$

3) Đặt $\eta = \text{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$:

$$\forall x \in I, (|x - a| \le \eta \Rightarrow c < f(x) < d).$$

Nhận xét: Không thể thay thế các bất đẳng thức ngặt ($c < l, \ldots$) trong giả thiết bằng những bất đẳng thức không ngặt.

Thực vậy, nếu $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ và $c \le l$, thì trong lân cận của a có thể không có $c \le f(x)$, ví dụ:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \qquad a = 0,\ l = 0,\ c = 0.$$

♦ **Mệnh đề 2** (**«Chuyển qua giới hạn trong các bất đẳng thức»**).

Cho $a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. Giả sử f có giới hạn là l tại a.

1) Nếu $c \le f(x)$ trong lân cận của a, thì $c \le l$.

2) Nếu $f(x) \le d$ trong lân cận của a, thì $l \le d$.

3) Nếu $c \le f(x) \le d$ trong lân cận của a, thì $c \le l \le d$.

Chứng minh:

Suy từ Mệnh đề 1 bằng lập luận phản chứng.

Nhận xét:

Giả sử $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} l$, và trong lân cận của a, $c<f(x)$.

Mệnh đề 2 cho phép suy ra $c\le l$; nhưng không thể kết luận $c<l$, như ở ví dụ sau:

$$I=]0;+\infty[,\ a=0,\ f:x\mapsto\frac{1}{x+1},\ l=1,\ c=1.$$

Nói cách khác, khi chuyển qua giới hạn, các bất đẳng thức nghiêm ngặt trở thành các bất đẳng thức không ngặt.

♦ **Mệnh đề 3** («**Định lý kẹp**»).

Cho $f, g, h: I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}\cup\{-\infty;+\infty\}$, $l\in\mathbb{R}$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} f(x)\xrightarrow[x\to a]{} l \\ h(x)\xrightarrow[x\to a]{} l \\ f(x)\le g(x)\le h(x)\end{array}\right|$, thì g có giới hạn là l tại a.

Chứng minh:

Ta giả thiết chẳng hạn $a\in\overline{I}$, vì các trường hợp $a=-\infty$, $a=+\infty$ cũng tương tự.

Cho $\varepsilon>0$, vì f và h có giới hạn là l tại a nên tồn tại $\eta_1>0$, $\eta_2>0$ sao cho:

$$\forall x\in I,\ \begin{cases}|x-a|\le\eta_1 \Rightarrow |f(x)-l|\le\varepsilon\\ |x-a|\le\eta_2 \Rightarrow |h(x)-l|\le\varepsilon\end{cases}.$$

Đặt $\eta=\mathrm{Min}(\eta_1,\eta_2)>0$, ta có với mọi $x\in I$:

$$|x-a|\le\eta \Rightarrow \begin{cases}|f(x)-l|\le\varepsilon\\ |h(x)-l|\le\varepsilon\end{cases} \Rightarrow -\varepsilon\le f(x)-l\le g(x)-l\le h(x)-l\le\varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x)-l|\le\varepsilon.$$

Vậy g có giới hạn là l tại a. ■

Nhận xét:

1) Trái với các Mệnh đề 1 và 2, định lý kẹp cho phép kết luận về sự tồn tại của một giới hạn và như vậy rất có ích.

2) Ta có lược đồ hoá định lý hẹp như sau:

$$\begin{array}{ccc} f(x) \le & g(x) & \le h(x) \\ & \underset{x\to a}{\searrow}\quad\underset{x\to a}{\swarrow} & \\ & l & \end{array} \quad\Rightarrow\quad g(x)\xrightarrow[x\to a]{} l$$

♦ **Mệnh đề 4** Cho $f,g: I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} f(x)\xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ \text{Trong lân cận của } a: f(x)\le g(x)\end{array}\right|$, thì $g(x)\xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Chứng minh:

Ta giả thiết chẳng hạn, $a \in \overline{I}$, vì các trường hợp $a = -\infty$, $a = +\infty$ cũng tương tự.

Cho $A \in \mathbb{R}$, vì $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, nên tồn tại $\eta_1 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leq \eta_1 \Rightarrow f(x) \geq A\right).$$

Mặt khác, theo giả thiết tồn tại $\eta_2 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leq \eta_2 \Rightarrow f(x) \leq g(x)\right).$$

Đặt $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2)$, ta có:

$$\forall x \in I, \left(|x - a| \leq \eta \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq A \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \Rightarrow g(x) \geq A \right).$$

Vậy $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$. ■

Ta cũng dễ dàng chứng minh được một định lý tương tự đối với $-\infty$.

4.2.3 Các phép toán đại số đối với các hàm có giới hạn

1) Trường hợp giới hạn hữu hạn

♦ **Mệnh đề 1** Cho:

$$\lambda \in \mathbf{K}, \quad a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}, \quad f, g: I \to \mathbf{K}, \quad (l, l') \in \mathbf{K}^2.$$

Ta có:

1) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$

2) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$

3) $\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l'$

4) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \Rightarrow \lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l$

5) $\left.\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ g(x) \text{ bị chặn trong lân cận của } a \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

6) $\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} ll'$

7) $\left.\begin{array}{l} g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{l'}$

8) $\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{l}{l'}$.

Chứng minh:

Ta giả thiết chẳng hạn, $a \in \overline{I}$, do các trường hợp $a = -\infty$, $a = +\infty$ cũng tương tự.

1) Cho $\varepsilon > 0$, vì $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \le \eta \;\Rightarrow\; |f(x)-l| \le \varepsilon\right),$$

Vì $\forall x \in I, \quad \big||f(x)|-|l|\big| \le |f(x)-l|$,

nên $\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \le \eta \;\Rightarrow\; \big||f(x)|-|l|\big| \le \varepsilon\right)$,

và cuối cùng: $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$.

2) Tính chất này là hiển nhiên vì:

$$\forall x \in X, \quad \big||f(x)|-0\big| = |f(x)| = |f(x)-0|.$$

3) Cho $\varepsilon > 0$. Vì $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ và $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'$ nên tồn tại $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} |x-a| \le \eta_1 \;\Rightarrow\; |f(x)-l| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |x-a| \le \eta_2 \;\Rightarrow\; |g(x)-l'| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Đặt $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2)$, ta có:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \le \eta \;\Rightarrow\; \begin{cases} |f(x)-l| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |g(x)-l'| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}\right.$$

$$\Rightarrow \big|(f(x)+g(x))-(l+l')\big| = \big|(f(x)-l)+(g(x)-l')\big| \le |f(x)-l|+|g(x)-l'| \le \varepsilon.$$

Vậy, $f(x)+g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l+l'$.

4) Cho $\varepsilon > 0$. Vì $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \le \eta \;\Rightarrow\; |f(x)-l| \le \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1}\right).$$

Từ đó ta có:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \le \eta \;\Rightarrow\; |\lambda f(x)-\lambda l| = |\lambda||f(x)-l| \le \frac{|\lambda|\,\varepsilon}{|\lambda|+1} \le \varepsilon\right).$$

Vậy $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l$.

5) Theo giả thiết, tồn tại $\eta_1 > 0$ và $C \in \mathrm{R}_+$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow |g(x)| \leq C\right).$$

Cho $\varepsilon > 0$, vì $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, nên tồn tại $\eta_2 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{C+1}\right).$$

Đặt $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, ta có:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{\varepsilon C}{C+1} \leq \varepsilon\right).$$

Vậy $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

6) Đặt $h: I \to \mathbf{K}$
$\quad x \mapsto f(x)-l$.

Ta có: $\forall x \in I, \quad f(x)g(x) = lg(x) + h(x)g(x)$.

Theo *4)* $lg(x) \xrightarrow[x\to a]{} ll'$. Mặt khác theo *3)* và *4)* $h(x) = f(x) - l \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Vậy theo *5)* $h(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ vì g bị chặn trong lân cận của a. Cuối cùng theo *3)* $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} ll'$.

7) Vì $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'$, nên theo *1)* ta có: $|g(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |l'|$.

Vì $|l'| > 0$, nên theo 4.2.2, Mệnh đề 1, tồn tại $\eta_1 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow |g(x)| > \frac{|l'|}{2}\right).$$

Đặc biệt: $\quad \forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow g(x) \neq 0\right)$.

Do đó hàm $\dfrac{1}{g}$ được xác định ít nhất trên $I \cap \left]a-\eta_1;\ a+\eta_2\right[$.

Với mọi x thuộc $I \cap \left]a-\eta_1;\ a+\eta_2\right[$ ta có:

$$0 \leq \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|g(x)-l'|}{|g(x)||l'|} \leq \frac{2}{|l'|^2}|g(x)-l'|.$$

Vì $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'$, nên suy ra $\dfrac{2}{|l'|^2}|g(x)-l'| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ (xem 4), sau đó theo Định lý kẹp (4.2.2 Mệnh đề 3): $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l'}\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ nghĩa là $\dfrac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{l'}$.

8) Áp dụng *6)* và *7)* với chú ý rằng: $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$. ■

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f: I \to \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{C}$. Ta có:

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \;\Leftrightarrow\; \bar{f}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \bar{l}.$$

Chứng minh:

Thấy ngay vì $|f(x)-l| = \left|\overline{f(x)-l}\right| = \left|\bar{f}(x)-\bar{l}\right|$.

◆ **Hệ quả** Cho $f: I \to \mathbb{C}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Ta có:

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha + \mathrm{i}\beta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (\operatorname{Re} f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \\ (\operatorname{Im} f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \beta \end{cases}.$$

2) Trường hợp giới hạn vô hạn.

Mệnh đề sau đây về nội dung và cách chứng minh tương tự như Mệnh đề 3 ở 3.1.3.

◆ **Mệnh đề** Cho $a \in \bar{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$.

1) Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ và nếu g bị chặn dưới trong lân cận của a, thì: $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Trường hợp riêng:

- $\left.\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}\right| \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$

- $\left.\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l' \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}\right| \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$

2) Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ và nếu g bị chặn dưới trong lân cận của a bởi một hằng số thực sự dương, thì: $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Trường hợp riêng :

- $\left.\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$

- $\left.\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l' \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}\right| \Rightarrow f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$

Ta cũng có thể lập bảng các giới hạn của $f + g$ và fg tương tự như các bảng giới hạn của các dãy $(u_n + v_n)_n$, $(u_n v_n)_n$.

3) Hợp các giới hạn

♦ **Mệnh đề** Cho $a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f: I \to \mathbb{R}$, J là một khoảng của $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(I) \subset J,\quad b \in \overline{J} \cup \{-\infty; +\infty\},\quad g: J \to K,\quad l \in K \cup \{-\infty; +\infty\}.$$

Nếu $\begin{cases} f \text{ có giới hạn là } b \text{ tại } a \\ g \text{ có giới hạn là } l \text{ tại } b \end{cases}$, thì $g \circ f$ có giới hạn là l tại a.

Chứng minh:

Ta giả thiết $a \in I$, $b \in J$, $l \in \mathrm{K}$, các trường hợp khác cũng tương tự.

Cho $\varepsilon > 0$; vì $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} l$ nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall y \in J,\ \big(|y - b| \le \eta \Rightarrow |g(y) - l| \le \varepsilon\big).$$

Vì $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:

$$\forall x \in I,\ \big(|x - a| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \le \eta\big).$$

Từ đó ta có: $\forall x \in I,\ \big(|x - a| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \le \eta \Rightarrow |g(f(x)) - l| \le \varepsilon\big)$.

Vậy $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

Ở đây, $g \circ f: \begin{array}{l} I \to \mathrm{K} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$, do lạm dụng ngôn từ.

4.2.4 Trường hợp hàm đơn điệu

Trong §4.2.4 này các hàm được xét đều nhận giá trị thực.

♦ **Định lý** Cho $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ sao cho $a < b$, $f:]a; b[\to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tăng.

1) Nếu f bị chặn trên; thì f có giới hạn hữu hạn tại b và:

$$\lim_b f = \sup_{x \in]a; b[} f(x).$$

2) Nếu f không bị chặn trên, thì f có giới hạn là $+\infty$ tại b.

Chứng minh:

1) Bộ phận $f(]a;b[)$ của $\mathbb{R}$ không rỗng, bị chặn trên nên có một biên trên l trong $\mathbb{R}$.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $l-\varepsilon$ không phải là một chặn trên của $f(]a;b[)$ trong $\mathbb{R}$, nên tồn tại $y \in f(]a;b[)$ sao cho $l-\varepsilon < y$, và tồn tại $\xi \in]a;b[$ sao cho $y = f(\xi)$. Do đó: $l-\varepsilon < f(\xi) \le l$.

Vậy với mọi $x \in]a;b[$:

$$\xi \le x \Rightarrow f(\xi) \le f(x) \Rightarrow l-\varepsilon \le f(x) \le l \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon.$$

Giả sử $b \in \mathbb{R}$ (trường hợp $b = +\infty$ khảo sát tương tự).

Đặt $\eta = b-\xi > 0$, khi đó ta có: $\forall x \in]a;b[, \left(0 < b-x \le \eta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon\right)$.

Điều này chứng tỏ: $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} l$.

2) Cho $A \in \mathbb{R}$. Vì f không bị chặn trên, nên tồn tại $\zeta \in]a;b[$ sao cho $f(\zeta) > A$. Vậy với mọi $x \in]a;b[$: $\zeta \le x \Rightarrow f(\zeta) \le f(x) \Rightarrow f(x) \ge A$.

Giả sử $b \in \mathbb{R}$ (trường hợp $b = +\infty$ khảo sát tương tự).

Đặt $\eta = b-\zeta > 0$, ta có: $\forall x \in]a;b[, \left(0 < b-x \le \eta \Rightarrow f(x) \ge A\right)$.

Điều này chứng tỏ $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$. ■

Nếu $b \in \mathbb{R}$, thì trong định lý trên ta có thể nói về giới hạn trái tại b.

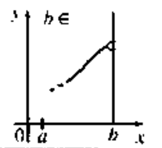
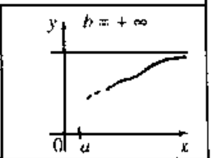
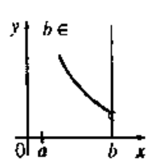
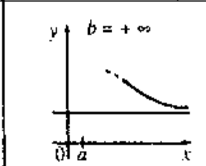
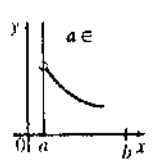
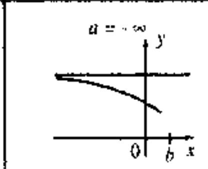
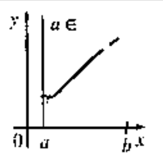
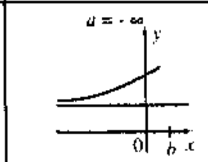
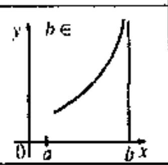
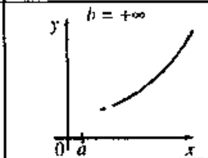
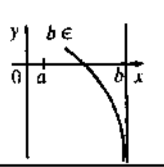
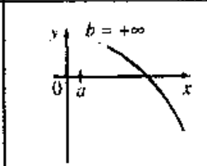
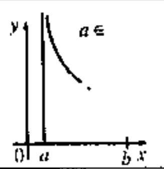
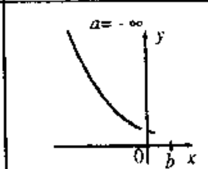
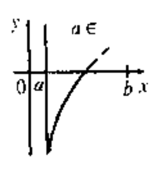
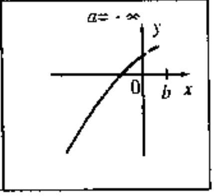
Chú ý rằng một hàm tăng trên $]a;b[$ luôn có giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn tại b.

Xét các ánh xạ:

$$\left\{\begin{array}{l} x \mapsto -f(x) \\ x \mapsto f(a+b-x) \end{array}\right| \quad \text{nếu } b \in \mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \mapsto -f(x) \\ x \mapsto f(-x) \end{array}\right| \quad \text{nếu } b = +\infty.$$

Từ định lý trên ta suy ra các kết quả được nêu trong bảng sau:

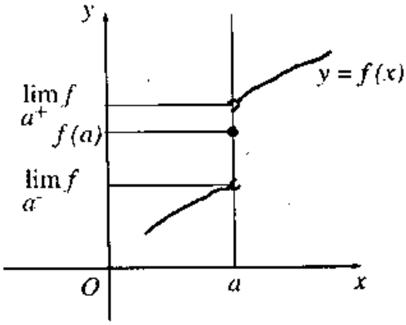
Các giả thiết đối với $f :]a;b[\to \mathbb{R}$	Kết luận		Sơ đồ	
	Tồn tại của...	Có giá trị...		
Tăng và bị chặn trên	$\lim_{b} f$	$\sup_{x \in]a;b[} f(x)$		
Giảm và bị chặn dưới	$\lim_{b} f$	$\inf_{x \in]a;b[} f(x)$		
Giảm và bị chặn trên	$\lim_{a} f$	$\sup_{x \in]a;b[} f(x)$		
Tăng và bị chặn dưới	$\lim_{a} f$	$\inf_{x \in]a;b[} f(x)$		
Tăng và không bị chặn trên	$\lim_{b} f$	$+\infty$		
Giảm và không bị chặn dưới	$\lim_{b} f$	$-\infty$		
Giảm và không bị chặn trên	$\lim_{a} f$	$+\infty$		
Tăng và không bị chặn dưới	$\lim_{a} f$	$-\infty$		

- **Mệnh đề**

  Nếu $f: I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tăng, thì f có một giới hạn trái và một giới hạn phải hữu hạn tại mọi điểm a thuộc $\overset{\circ}{I}$, và:

$$\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f .$$

Chứng minh:



Ánh xạ f tăng và bị chặn trên bởi $f(a)$ trên $I \cap \left]-\infty; a\right[$, và tăng và bị chặn dưới bởi $f(a)$ trên $I \cap \left]a; +\infty\right[$.

Ta có kết quả tương tự cho trường hợp f giảm.

4.3 Tính liên tục

4.3.1 Định nghĩa

1) Liên tục tại một điểm

- **Định nghĩa** Cho $f: I \to \mathbf{K}$, $a \in I$. Ta nói f **liên tục tại** a khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in I,\quad \left(|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon\right).$$

  Ta nói f **gián đoạn tại** a khi và chỉ khi f không liên tục tại a.

Mệnh đề sau đây chứng minh dễ dàng.

- **Mệnh đề 1** Cho $f: I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. Để f liên tục tại a, điều kiện cần và đủ là f có giới hạn là $f(a)$ tại điểm a.

Gián đoạn loại 1

Ta nói f có điểm **gián đoạn loại 1 tại** a khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \text{ không liên tục tại } a. \\ f \text{ có giới hạn trái tại } a \text{ (nếu } f \text{ xác định bên trái } a). \\ f \text{ có giới hạn phải tại } a \text{ (nếu } f \text{ xác định bên phải } a) \end{cases}$$

Nếu f có giới hạn trái hữu hạn tại a và giới hạn phải hữu hạn tại a, ta gọi số thực $\sigma_f(a)$ xác định bởi $\sigma_f(a) = \lim\limits_{a^+} f - \lim\limits_{a^-} f$ là **bước nhảy của** f **tại** a.

Theo 4.2.4, Mệnh đề, nếu f tăng trên khoảng I, thì tại mọi điểm $a \in \mathring{I}$, f có giới hạn trái hữu hạn tại a và giới hạn phải hữu hạn tại a và $\sigma_f(a) \geq 0$; hơn nữa với các giả thiết trên thì f liên tục tại a khi và chỉ khi $\sigma_f(a) = 0$.

Nếu f không liên tục tại a và không có điểm gián đoạn loại 1 tại a, thì ta nói f có **điểm gián đoạn loại 2 tại** a.

◆ **Mệnh đề 2** Nếu f liên tục tại a thì f bị chặn trong lân cận của a.

Chứng minh:

Xem 4.2.1, Mệnh đề 2.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $f: I \to \mathbb{K}$, $a \in I$; f liên tục tại a khi và chỉ khi: với mọi dãy $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ những phần tử của I hội tụ đến a, ta có:

$$f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a).$$

Chứng minh:

Xem 4.2.1, Mệnh đề 3 và Mệnh đề 1 trên đây.

2) Liên tục toàn cục

◆ **Định nghĩa 1** Cho $f: I \to \mathbb{K}$. Ta nói f liên tục trên I khi và chỉ khi f liên tục tại mọi điểm của I.

Ta ký hiệu $C(I, \mathbf{K})$ là tập hợp các ánh xạ từ I đến $\mathbf{K}$ liên tục trên I.

Ta gọi mọi khoảng J của $\mathbf{R}$, không rỗng và không thu về một điểm sao cho $J \subset I$ là khoảng con của I.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $f: I \to \mathbb{K}$, J một khoảng con của I. Ta nói f liên tục trên J khi và chỉ khi thu hẹp: $f|_J : \begin{array}{l} J \to K \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ liên tục trên J.

VÍ DỤ:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \le 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$ liên tục trên $]-\infty; 0]$, nhưng không liên tục trên $[0; +\infty[$.

Nhận xét

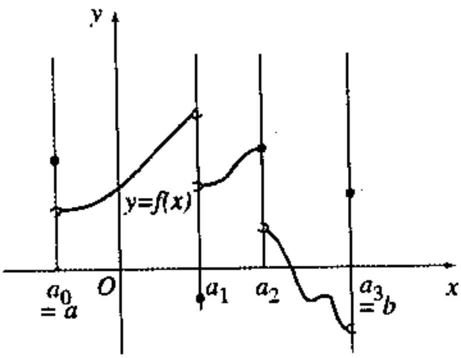
Rõ ràng rằng, nếu $a < b < c$ và nếu $f: [a; c] \to \mathbb{K}$ liên tục trên $[a; b]$ và $[b; c]$, thì f liên tục trên $[a; c]$.

3) Liên tục từng khúc

- **Định nghĩa** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ và $f: [a; b] \to \mathbb{K}$.

  Ta nói f **liên tục từng khúc trên** $[a; b]$ khi và chỉ khi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_0, \ldots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$ sao cho:

  $\begin{cases} a = a_0 < \ldots < a_n = b \\ \text{Với mọi } i \in \{0, \ldots, n-1\}, f \text{ liên tục trên }]a_i; a_{i+1}[\text{ và có giới hạn phải hữu hạn tại } a_i \text{ và giới hạn trái hữu hạn tại } a_{i+1}. \end{cases}$



Điều này quy về điều kiện, với mọi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f|_{]a_i; a_{i+1}[}$ liên tục trên $[a_i; a_{i+1}]$.

Bài tập

◊ **4.3.1** Nghiên cứu, tại mọi điểm, sự liên tục của các ánh xạ sau đây:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & \text{nếu } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

*b)** $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{p+q} & \text{nếu } x = \dfrac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \text{ƯCLN } (p, q) = 1 \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+ \end{cases}$

(sử dụng bài tập 3.3.6).

◊ **4.3.2** Tìm tất cả các ánh xạ f trong mỗi trường hợp sau:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục tại 0, $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục tại 0, $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục tại 0, $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = -f(x^2)$.

◊ **4.3.3*** Tìm tất cả các ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

◊ ***4.3.4** Cho $a \in \mathbb{R}$; tìm tất cả các ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) = f(x) - f(y) + axy.$$

(sử dụng bài tập 4.3.3).

4.3.2 Các phép toán đại số trên các ánh xạ liên tục

1) Liên tục tại một điểm

◆ **Mệnh đề 1** Cho $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g: I \to \mathbb{K}$.

1) Nếu f liên tục tại a, thì $|f|$ liên tục tại a.

2) Nếu f, g cùng liên tục tại a, thì $f + g$ liên tục tại a.

3) Nếu f liên tục tại a, thì λf liên tục tại a.

4) Nếu f, g cùng liên tục tại a, thì fg liên tục tại a.

5) Nếu g liên tục tại a và nếu $g(a) \neq 0$, thì $\dfrac{1}{g}$ liên tục tại a.

6) Nếu f, g cùng liên tục tại a và nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại a.

Chứng minh: Tương tự như chứng minh mệnh đề 1, 4.2.3 *1)*.

Nhận xét : Bằng cách lưu ý rằng đối với mọi $f, g: I \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f-g|\big), \operatorname{Inf}(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f-g|\big).$$

(xem 4.1.2), ta thấy rằng nếu f và g cùng liên tục tại a thì $\operatorname{Sup}(f, g)$ và $\operatorname{Inf}(f, g)$ cũng liên tục tại a. Trường hợp riêng, nếu f liên tục tại a, thì f^+ và f^- liên tục tại a.

◆ **Mệnh đề 2** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$. $g: J \to \mathbb{K}$, sao cho $f(I) \subset J$, ta ký hiệu, một cách lạm dụng $g \circ f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto g[f(x)] \end{array}$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} f \text{ liên tục tại } a \\ g \text{ liên tục tại } f(a) \end{array}\right|$, thì $g \circ f$ liên tục tại a.

Chứng minh: Tương tự như chứng minh mệnh đề trong 4.2.3 *3)*. ■

Mệnh đề sau đây được thấy ngay (xem 4.2.3 *1)*, Mệnh đề 2 và Hệ quả) .

◆ **Mệnh đề 3** Cho $a \in I, f: I \to \mathbb{C}$. Các tính chất sau tương đương đôi một:

(i) f liên tục tại a

(ii) $\bar{f}$ liên tục tại a

(iii) $\mathrm{Re}f$ và $\mathrm{Im}f$ đều liên tục tại a.

2) Liên tục trên toàn bộ

Các mệnh đề sau đây được suy ra dễ dàng từ các Mệnh đề 1 và 2 của §1 trước.

◆ **Mệnh đề 1** Cho $\lambda \in \mathrm{K}, f, g: I \to \mathrm{K}$.

1) Nếu f liên tục trên I, thì $|f|$ liên tục trên I

2) Nếu f và g cùng liên tục trên I, thì $f + g$ liên tục trên I

3) Nếu f liên tục trên I, thì λf liên tục trên I

4) Nếu f và g cùng liên tục trên I, thì fg liên tục trên I

5) Nếu g liên tục trên I và nếu $(\forall x \in I, g(x) \neq 0)$ thì $\dfrac{1}{g}$ liên tục trên I

6) Nếu f, g cùng liên tục trên I và nếu $(\forall x \in I, g(x) \neq 0)$ thì $\dfrac{f}{g}$ liên tục trên I.

Ta đã ký hiệu $C(I, \mathbf{K})$, tập hợp các ánh xạ liên tục từ I vào $\mathbf{K}$. (xem 4.3.1 *2)*). Vì $C(I, \mathrm{K}) \neq \varnothing$ và sử dụng các tính chất *2), 3), 4)* ở trên, ta thấy rằng $C(I, \mathbf{K})$ là một đại số con của $\mathbf{K}^I$ đối với các luật thông thường, nghĩa là:

$$\begin{cases} 1 \in C(I, \mathbf{K}) \\ C(I, \mathbf{K}) \text{ là một } \mathbf{K}\text{–không gian vectơ đối với phép cộng và luật hợp thành ngoài.} \\ C(I, \mathbf{K}) \text{ ổn định với phép nhân.} \end{cases}$$

Chú ý

Nếu $f, g: I \to \mathbf{R}$ cùng liên tục trên I, thì $\mathrm{Sup}(f, g)$ và $\mathrm{Inf}(f, g)$ cùng liên tục trên I. Trường hợp riêng, nếu $f: I \to \mathbf{R}$ liên tục trên I thì f^+ và f^- cùng liên tục trên I.

◆ **Mệnh đề 2** Cho I, J hai khoảng của $\mathbf{R}$, $f: I \to \mathbf{R}$, $g: J \to \mathbf{K}$, sao cho $f(I) \subset J$, ta ký hiệu một cách lạm dụng, $g \circ f: \begin{array}{c} I \to \mathbf{K} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$.

Nếu f liên tục trên I, và nếu g liên tục trên J, thì $g \circ f$ liên tục trên I.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $f: I \to \mathbf{C}$. Các tính chất sau tương đương từng đôi một.

(i) f liên tục trên I.

(ii) $\bar{f}$ liên tục trên I.

(iii) $\mathrm{Re}f$ và $\mathrm{Im}f$ liên tục trên I.

Bài tập

◊ **4.3.5** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, $f: I \to \mathbf{R}$, $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ sao cho ước số chung lớn nhất của $(p, q) = 1$.

Ta giả sử là f^p và f^q liên tục trên $I(f^p = f...f)$. Chứng minh rằng f liên tục trên I.

◊ **4.3.6** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$ và E *là* một không gian vectơ con của $C(I, \mathbf{R})$ sao cho:

$$\forall f \in E,\ \left(\left(\exists x_0 \in I, f(x_0) = 0\right) \Rightarrow f = 0\right)$$

Chứng minh rằng E có số chiều hữu hạn và $\dim(E) \le 1$.

◊ **4.3.7** *a)* Tìm một ví dụ về ánh xạ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} f \text{ gián đoạn tại mọi điểm thuộc } \mathbf{R} \\ f \circ f \text{ liên tục trên } \mathbf{R}. \end{cases}$$

b) Tìm một ví dụ về ánh xạ $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} g \circ g \text{ gián đoạn tại mọi điểm của } \mathbf{R}. \\ g \circ g \circ g \text{ liên tục trên } \mathbf{R}. \end{cases}$$

4.3.3 Liên tục trên một khoảng

◆ **Định lý** («**Định lý các giá trị trung gian**»).

Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, $f: I \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ liên tục, $(a, b) \in I^2$ sao cho $f(a) \le f(b)$. Thế thì f nhận tất cả các giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, nghĩa là:

$$\forall \gamma \in [f(a); f(b)],\ \exists c \in I,\ f(c) = \gamma.$$

Chứng minh

Đầu tiên ta chú ý rằng nếu $\gamma = f(a)$ hoặc $\gamma = f(b)$ thì kết quả là tầm thường. Vậy ta giả thiết $f(a) < \gamma < f(b)$.

Xét $F = \{x \in [a; b]; f(x) \le \gamma\}$, F là một bộ phận của $\mathbf{R}$ không rỗng (vì $a \in F$), và bị chặn trên (bởi b vì $F \subset [a; b]$), vậy F có một biên trên, ký hiệu là c. Ta sẽ chứng minh $f(c) = \gamma$.

Với mỗi n thuộc $\mathbf{N}^*$, tồn tại $x_n \in F$ và $y_n \in [a; b] - F$ sao cho

$$c - \frac{1}{n} < x_n \le c < y_n < c + \frac{1}{n}.$$

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

- Ta có $c - \frac{1}{n} < c$, nên $c - \frac{1}{n}$ không phải là một chặn trên của F vậy tồn tại x_n trong F sao cho $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$.

- Ta có $F \subset [a; c]$; $c < b$ (vì f liên tục tại b và $\gamma < f(b)$) và $c < c + \frac{1}{n}$, từ đó suy ra tồn tại y_n thuộc $[a; b]$ sao cho $y_n \notin F$ và $c < y_n < c + \frac{1}{n}$ (y_n có thể là bất kỳ phần tử nào của $]c; \mathrm{Min}(c + \frac{1}{n}, b)[$).

Vậy $x_n \xrightarrow[n\infty]{} c$ và $y_n \xrightarrow[n\infty]{} c$, và do tính liên tục của f tại c nên $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(c)$, và $f(y_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(c)$.

Nhưng, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq \gamma < f(y_n)$, từ đó chuyển qua giới hạn, ta được: $\gamma = f(c)$.

Nhận xét

1) Người ta thường sử dụng định lý các giá trị trung gian trong trường hợp $\gamma = 0$: nếu một ánh xạ với giá trị thực liên tục trên một khoảng, nhận một giá trị không dương và một giá trị không âm, thì nó nhận giá trị 0.

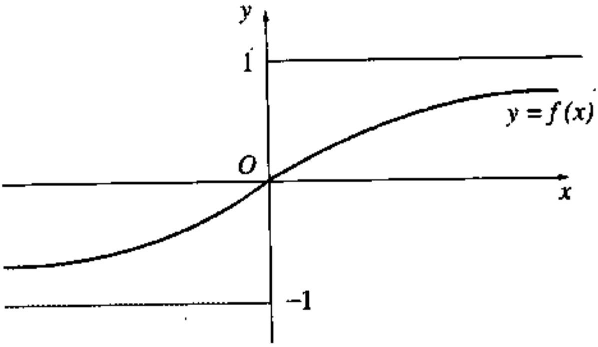
2) Ta có thể phát biểu định lý các giá trị trung gian dưới dạng cô đọng hơn như sau: ảnh của một khoảng bởi một ánh xạ liên tục (với giá trị thực) là một khoảng.

3) Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$ và $f: I \to \mathbb{R}$, là một ánh xạ liên tục. Ta có thể tự hỏi liệu "loại" của I (nghĩa là I đóng, bị chặn, nửa mở...) có được bảo toàn bởi f không, nghĩa là $f(I)$ có cùng loại với I hay không. Sau này (4.3.3) ta sẽ thấy rằng rằng nếu I là một đoạn thì $f(I)$ cũng là một đoạn. Nhưng các loại khoảng khác thì, nói chung, không được bảo toàn. Chính xác hơn, với một trong tám loại khoảng khác với đoạn (xem 1.2.1) của I, $f(I)$ có thể là một trong 9 loại khoảng. Có thể chỉ ra được đủ $8 \times 9 = 72$ ví dụ (một số được suy ra từ các ví dụ khác). Chúng ta hãy nêu vài ví dụ trong số đó.

- $I = \mathbb{R}$ và $f(I) =]-1; 1[$

với $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

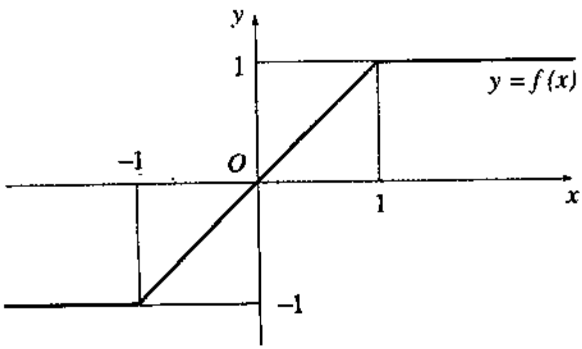
$$x \mapsto \frac{x}{|x| + 1}$$



- $I = \mathbb{R}$, $f(I) = [-1; 1]$

Với f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

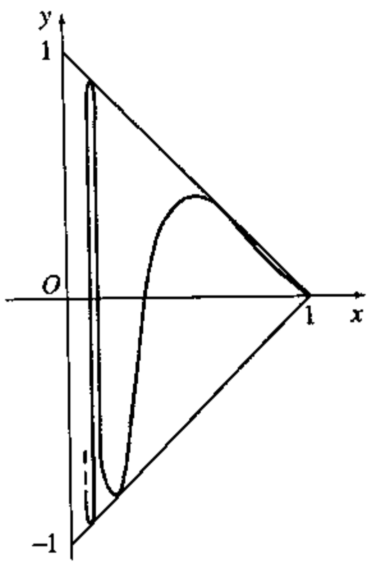
$$x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ nếu } x \leq -1 \\ x \text{ nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}$$



- $I =]0; 1]$, $f(I) =]-1; 1[$

với f: $]0;1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (1-x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Bài tập

◊ **4.3.8** Chứng minh rằng phương trình $x^{17} = x^{11} + 1$, ẩn là $x \in \mathbf{R}_+$ có ít nhất một nghiệm.

◊ **4.3.9** Cho f, g: $[0; 1] \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho $f(0) = g(1) = 0$ và $f(1) = g(0) = 1$. Chứng minh rằng: $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+, \exists x \in [0; 1], f(x) = \lambda g(x)$.

◊ **4.3.10** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, f, g: $I \to \mathbf{R}$ cùng liên tục sao cho:

$$\forall x \in I, (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0.$$

Chứng minh rằng $f = g$ hay $f = -g$.

◊ **4.3.11** Cho f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho: $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(|x|) = |f(x)| > 0$. Chứng minh rằng: f chẵn (sử dụng bài tập 4.3.10).

◊ **4.3.12** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a \leq b$ và f: $[a; b] \to [a; b]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

◊ **4.3.13*** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$ và $f: I \to \mathbf{R}$, một đơn ánh liên tục. Chứng minh rằng f đơn điệu nghiêm ngặt.

◊ **4.3.14** *a)* Cho $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ giảm nghiêm ngặt. Chứng minh rằng không tồn tại ánh xạ: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, liên tục sao cho $f \circ f = \varphi$. (Sử dụng bài tập 4.3.13)

b) Có tồn tại hay không một ánh xạ liên tục f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho: $\forall x \in \mathbf{R}$, $(f \circ f)(x) + x = 0$? (sử dụng *a)*).

4.3.4 Tính liên tục trên một đoạn

Ta nhắc lại rằng (xem 1.2.1 *4)*) một đoạn (của $\mathbf{R}$) theo định nghĩa là một khoảng đóng và bị chặn $[a; b]$, $a \leq b$.

◆ **Định lý** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a \leq b$ và $f: [a; b] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ; nếu f liên tục thì f bị chặn và đạt được biên trên và biên dưới của nó.

Chứng minh:

1) Ta sẽ chứng minh f bị chặn.

• Giả sử f không bị chặn trên. Khi đó với mọi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $x_n \in [a; b]$ sao cho $f(x_n) > n$ theo định lý Bolzano – Weierstrass (3.3, Định lý) vì $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bị chặn nên tồn tại một hàm trích σ và một phần tử c của $[a; b]$ sao cho $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$. Vì f liên tục tại c nên $f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(c)$.

Nhưng mặt khác: $\forall n \in \mathbf{N}$, $f(x_{\sigma(n)}) > \sigma(n) \geq n$, vậy $f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ $f(x)$ bị chặn trên.

• Áp dụng kết quả trên đối với $-f$ thay cho f, ta suy ra f bị chặn dưới. Cuối cùng, f bị chặn.

2) Ta chứng minh rằng f đạt tới các biên.

- Ký hiệu $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$

Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, vì $M - \dfrac{1}{n}$ không phải là một chặn trên của f, nên tồn tại x_n thuộc $[a;\, b]$ sao cho:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M\ .$$

Theo định lý Bolzano – Weierstrass, vì $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ bị chặn nên tồn tại một hàm trích τ và một phần tử d của $[a;\, b]$ sao cho $x_{\tau(n)} \xrightarrow[n\infty]{} d$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x_{\tau(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(d)$.

Nhưng mặt khác: $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ M - \dfrac{1}{\tau(n)} < f(x_{\tau(n)}) \le M$, do đó chuyển qua giới hạn ta được:

$$M = f(d).$$

Điều này chứng tỏ rằng f đạt giá trị M: $\exists d \in [a;\, b], M = f(d)$.

Áp dụng kết quả trên đối với $-f(x)$ thay cho f ta cũng suy ra rằng f cũng đạt tới biên dưới . ■

Kết luận của định lý có nghĩa là tồn tại $\operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x)$ và $\operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$ (trong $\mathbf{R}$), và tồn tại $x_1, x_2 \in [a;\, b]$ sao cho:

$$\operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_1) \quad \text{và} \quad \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_2).$$

◆ **Mệnh đề** Cho $(a;\, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a \le b$ và $f : [a;\, b] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ. Nếu $f(x)$ liên tục, thì $f([a;\, b])$ là một đoạn của $\mathbf{R}$.

Chứng minh:

- Theo định lý các giá trị trung gian (4.3.3, Định lý) $f([a;\, b])$ là một khoảng của $\mathbf{R}$.
- Theo định lý trên đây $f([a;\, b])$ là một bộ phận của $\mathbf{R}$ bị chặn và chứa các biên của nó. ■

Như vậy nếu $f : [a;\, b] \to \mathbf{R}$ liên tục, thì $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x)$ và $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$ là tồn tại và ta có: $f([a;\, b]) = [m;\, M]$.

Bài tập

◊ **4.3.15** Cho $(a;\, b) \in \mathbf{R}^2$, sao cho $a < b$, $f, g : [a;\, b] \to \mathbf{R}$ liên tục thoả mãn:

- $\forall x \in [a;\, b],\ 0 < g(x) < f(x)$.

Chứng minh rằng: $\exists \lambda \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in [a;\, b],\ (1 + \lambda)g(x) \le f(x)$.

◊ **4.3.16** Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho: $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

Chứng minh rằng: $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho: $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq f(x_0)$.

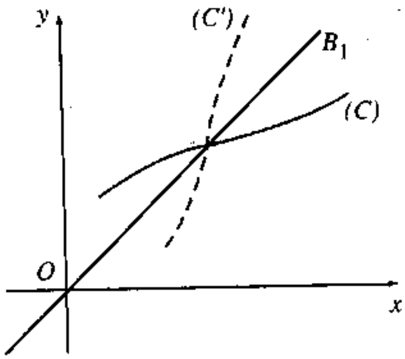
◊ **4.3.17*** Cho $f : [0; 1] \to [0; 1]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0; 1]$ sao cho $f^{-1}(\{c\})$ không có đúng hai phần tử.

4.3.5 Ánh xạ ngược

Với ánh xạ $f : I \to \mathbf{R}$ đã cho, ta chú ý đến sự tồn tại của hàm ngược của f. Trước hết, ta hạn chế f vào ảnh của nó, bằng cách thay f bởi ánh xạ: $\begin{array}{l}\tilde{f} : I \to f(I) \\ \quad x \mapsto f(x)\end{array}$; theo cách xây dựng, rõ ràng $\tilde{f}$ là toàn ánh.

Nếu $\tilde{f}$ là song ánh, ta nói f có một hàm ngược, đó là $\tilde{f}^{-1} : f(I) \to I$ hay theo cách lạm dụng ngôn từ, ánh xạ $\begin{array}{l} f(I) \to \mathrm{R} \\ \quad y \mapsto \tilde{f}^{-1}(y)\end{array}$.

Trên một mặt phẳng afin Euclide định hướng P, với hệ quy chiếu trực chuẩn $(O, \vec{i}, \vec{j})$, các đường cong biểu diễn (C) của f và (C') của $\tilde{f}^{-1}$ đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất B_1 vì: $M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow M'(y, x) \in (C')$.



Ta chú ý rằng một ánh xạ không liên tục f vẫn có thể có ánh xạ ngược. Ví dụ ánh xạ $f : [0; 1] \to [0; 1]$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = 0 \\ x & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

là song ánh, nhưng không liên tục trên $[0; 1]$.

♦ **Định lý** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ; ta ký hiệu: $\begin{array}{l}\widetilde{f} : I \to f(I).\\ \quad x \mapsto f(x)\end{array}$

Nếu f liên tục và đơn điệu nghiêm ngặt, thì:

1) $f(I)$ là một khoảng

2) $\widetilde{f}$ là song ánh

3) $\widetilde{f}^{-1}$ đơn điệu nghiêm ngặt cùng chiều với f

4) $\widetilde{f}^{-1}$ liên tục trên $f(I)$.

Chứng minh

Ta giả thiết f liên tục và, chẳng hạn, tăng nghiêm ngặt.

1) Theo định lý các giá trị trung gian (xem 4.3.3, Định lý) $f(I)$ là một khoảng của $\mathbb{R}$.

2) • Theo định nghĩa $\widetilde{f}$ là toàn ánh.

• Cho $x_1, x_2 \in I$ sao cho $\widetilde{f}(x_1) = \widetilde{f}(x_2)$.

Nếu $x_1 < x_2$ thì $\widetilde{f}(x_1) < \widetilde{f}(x_2)$, mâu thuẫn.

Nếu $x_1 > x_2$ thì $\widetilde{f}(x_1) > \widetilde{f}(x_2)$, mâu thuẫn.

Vậy $x_1 = x_2$ (điểm quan trọng là thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ là thứ tự toàn phần).

Vậy $\widetilde{f}$ là đơn ánh.

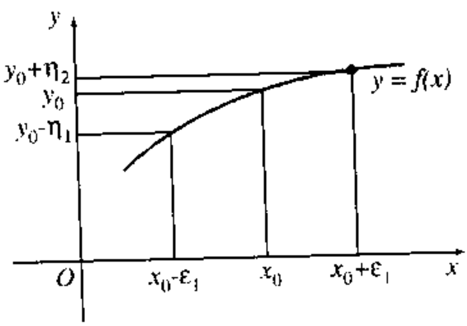
3) Cho $y_1, y_2 \in f(I)$ sao cho $y_1 < y_2$; ký hiệu $x_1 = \widetilde{f}^{-1}(y_1)$ và $x_2 = \widetilde{f}^{-1}(y_2)$. Nếu $x_1 \geq x_2$, thì, do $\widetilde{f}$ tăng: $\widetilde{f}(x_1) \geq \widetilde{f}(x_2)$, nghĩa là $y_1 \geq y_2$, mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ $\widetilde{f}^{-1}$ tăng nghiêm ngặt.

4) Cho $\varepsilon > 0$ và $y_0 \in f(I) = J$; ký hiệu $x_0 = \widetilde{f}^{-1}(y_0)$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall y \in J, (|y - y_0| \leq \eta \Rightarrow |\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon).$$

• Nếu x_0 không phải là một biên của I nếu có, thì tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$. Ký hiệu $\varepsilon_1 = \mathrm{Min}(\varepsilon, \alpha) > 0$. Vì f và $\widetilde{f}^{-1}$ đều tăng nên với mọi y thuộc J ta có:

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}^{-1}(y) - x_0| \leq \varepsilon_1 &\Leftrightarrow x_0 - \varepsilon_1 \leq \widetilde{f}^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon_1\\ &\Leftrightarrow \widetilde{f}(x_0 - \varepsilon_1) \leq y \leq \widetilde{f}(x_0 + \varepsilon_1)\end{aligned}$$



Vì $x_0 - \varepsilon_1 < x_0$ và vì $\widetilde{f}$ tăng nghiêm ngặt nên:

$$\widetilde{f}(x_0 - \varepsilon_1) < \widetilde{f}(x_0) = y_0 .$$

Vậy tồn tại $\eta_1 > 0$ sao cho:

$$\widetilde{f}(x_0 - \varepsilon_1) = y_0 - \eta_1 .$$

Tương tự, tồn tại $\eta_2 > 0$ sao cho:

$$\widetilde{f}(x_0 + \varepsilon_1) = y_0 + \eta_2 .$$

Ký hiệu $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, ta có với mọi y thuộc $f(I)$:

$$|y - y_0| \le \eta \Rightarrow y_0 - \eta \le y \le y_0 + \eta \Rightarrow y_0 - \eta_1 \le y \le y_0 + \eta_2$$
$$\Rightarrow x_0 - \varepsilon \le \widetilde{f}^{-1}(y) \le x_0 + \varepsilon_1 \Rightarrow \left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)\right| \le \varepsilon_1 .$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng $\widetilde{f}^{-1}$ liên tục tại y_0.

• Nếu x_0 là một mút nếu có của I, thì trong phép chứng minh trên ta chỉ sử dụng một trong hai số thực η_1, η_2. ■

♦ **Định nghĩa** Cho I, J là hai khoảng, $f : I \to J$ là một ánh xạ.

Ta nói f là một **phép đồng phôi** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f & \text{liên tục trên } I \\ f & \text{là song ánh} \\ f^{-1} & \text{liên tục trên } J \end{cases}$$

VÍ DỤ

Các ánh xạ sau là những phép đồng phôi:

$\underset{x \mapsto ax+b}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ $\quad ((a, b) \in \mathbf{R}^2$ cố định và $a \ne 0)$

$\underset{x \mapsto \frac{1}{x}}{\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*}$, $\underset{x \mapsto x^2}{\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+}$, $\underset{x \mapsto x^3}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$, $\underset{x \mapsto \sin x}{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]}$.

Bài tập

◊ **4.3.18** Chứng minh rằng $f : \underset{x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{nếu } x \in \mathbf{Q} \\ x+1 & \text{nếu } x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q} \end{cases}}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ là song ánh và gián đoạn tại mọi điểm thuộc $\mathbf{R}$.

◊ **4.3.19** Chứng minh rằng:

$f:]-1; 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ là song ánh, và hãy biểu thị $f^{-1}(y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

◊ **4.3.20** Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5+x-1$.

a) Chứng minh rằng f là song ánh.

b) Giải phương trình $f(x) = f^{-1}(x)$, ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

4.3.6 Tính liên tục đều

♦ **Định nghĩa** Cho $f: I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ. Ta nói f **liên tục đều** trên I khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in I^2, (|x'-x''| \le \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon).$$

Ta chú ý rằng trong định nghĩa này η không phụ thuộc x' cũng như x'', nhưng trong định nghĩa của tính liên tục tại một điểm a của I, η có thể phụ thuộc a.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề**

Nếu f liên tục đều trên I thì f liên tục trên I.

Điều ngược lại của mệnh đề là sai: một ánh xạ $f: I \to \mathbb{R}$ có thể liên tục trên I, nhưng không liên tục đều trên I. Ví dụ: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Ta sẽ chứng minh phủ định của định nghĩa tính liên tục đều, nghĩa là:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x', x'') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x'-x''| \le \eta \\ |x'^2 - x''^2| > \varepsilon \end{cases}.$$

Đặt $x'' \ge 0$ và $x' = x'' + \eta$. Khi đó:

$$\begin{cases} |x'-x''| \le \eta \\ |x'^2 - x''^2| > \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow 2\eta x'' + \eta^2 > \varepsilon \Leftarrow x'' > \frac{\varepsilon}{2\eta}.$$

Do vậy chỉ cần chọn: $\varepsilon = 1$, $x'' = \frac{1}{\eta}$, $x' = \frac{1}{\eta} + \eta$ là đủ.

Tuy nhiên, nếu I là một đoạn trên $\mathbb{R}$ thì ta có định lý sau:

♦ **Định lý** («**Định lý Heine**»)

Cho $(a; b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a \le b$ và $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ. Nếu f liên tục trên $[a; b]$, thì f liên tục đều trên $[a; b]$.

Chứng minh: (có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên)

Lập luận phản chứng. Ta giả thiết f liên tục nhưng không liên tục đều. Thế thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\forall \eta > 0, \exists (x', x'') \in [a, b]^2, \begin{cases} |x' - x''| \le \eta \\ |f(x') - f(x'')| > \varepsilon \end{cases}.$$

Đặc biệt, với mỗi $n \in \mathbf{N}^*$ (lấy $\eta = \frac{1}{n}$) tồn tại $(x'_n, x''_n) \in [a; b]^2$ sao cho:

$$\begin{cases} |x'_n - x''_n| \le \dfrac{1}{n} \\ |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon \end{cases}.$$

Theo định lý Bolzano – Weierstrass (3.3), vì $(x'_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ bị chặn nên tồn tại một hàm trích ρ và một phần tử c của $[a; b]$ sao cho $x'_{\rho(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$. Rồi vẫn theo định lý Bolzano – Weierstrass vì $(x''_{\rho(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ bị chặn, nên tồn tại một hàm trích τ và một phần tử d của $[a; b]$ sao cho $x''_{\rho(\tau(n))} \xrightarrow[n\infty]{} d$.

Ký hiệu $\sigma = \rho \circ \tau$ cũng là một hàm trích.

Vì $(x'_{\sigma(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ được trích ra từ $(x'_{\rho(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ nên $x'_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} c$.

Hơn nữa: $x''_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} d$.

Do: $\forall n \in \mathbf{N}^*, \left|x'_{\sigma(n)} - x''_{\sigma(n)}\right| \le \dfrac{1}{\sigma(n)} \le \dfrac{1}{n}$, bằng cách chuyển qua giới hạn ta suy ra: $c = d$.

Mặt khác vì f liên tục tại c và d, ta có: $\begin{cases} f(x'_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(c) \\ f(x''_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(d) \end{cases}$.

Vì: $\forall n \in \mathbf{N}^*, \left|f(x'_{\sigma(n)}) - f(x''_{\sigma(n)})\right| \ge \varepsilon$, nên chuyển qua giới hạn ta thu được $|f(c) - f(d)| \ge \varepsilon$ điều trái với $c = d$. ■

Bài tập

Ta viết tắt chữ «liên tục đều» là «ltđ».

◊ **4.3.21**

a) Cho $\lambda \in \mathbf{R}, f, g: I \to \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng:

1) f ltđ $\Rightarrow |f|$ ltđ.

2) $(f, g$ ltđ$) \Rightarrow \lambda f + g$ ltđ.

3) $$\left.\begin{cases} g & \text{ltđ} \\ \exists C \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in I,\ g(x) \geq C \end{cases}\right| \Rightarrow \frac{1}{g} \quad \text{ltđ.}$$

4) $(f, g$ ltđ$) \Rightarrow (\mathrm{Sup}(f, g), \mathrm{Inf}(f, g)$ ltđ$)$.

b) Chứng tỏ rằng, nếu $f: I \to \mathbf{R}$ ltđ và $g: J \to \mathbf{R}$ ltđ (sao cho $f(I) \subset J$) thì:

$$g \circ f: \begin{array}{l} I \to \mathbf{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array} \quad \text{ltđ.}$$

◊ **4.3.22** Mô tả tập hợp các ánh xạ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} f & \text{ltđ} \\ f & \text{là song ánh} \\ f^{-1} & \text{không ltđ} \end{cases}$$

4.3.7 Ánh xạ Lipschitz

◆ **Định nghĩa** Cho ánh xạ $f: I \to \mathbf{R}$.

1) Cho $k \in \mathbf{R}_+$. Ta nói f là ánh xạ k–**Lipschitz** khi và chỉ khi:

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

2) Ta nói f là **ánh xạ Lipschitz** khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbf{R}_+$ sao cho f là ánh xạ k–Lipschitz.

Một ánh xạ $f: I \to I$ là một **ánh xạ co** khi và chỉ khi tồn tại $k \in [0; 1[$ sao cho f là ánh xạ k–Lipschitz.

VÍ DỤ:

1) $f: \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{1}{|x|+1} \end{array}$ là ánh xạ 1–Lipschitz vì:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{\big||x_1| - |x_2|\big|}{(|x_1|+1)(|x_2|+1)} \leq |x_1 - x_2|.$$

2) $f: \underset{x \mapsto x^2}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ không là Lipschitz bởi vì tỷ số $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$ (bằng $x_1 + x_2$) không bị chặn khi (x_1, x_2) chạy khắp $\mathbf{R}^2$ sao cho $x_1 \neq x_2$.

Nhận xét

1) $f: I \to \mathbf{R}$ là ánh xạ Lipschitz khi và chỉ khi:

$$\left\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y};\ (x,y) \in I^2,\ x \neq y\right\} \text{ bị chặn.}$$

2) Ta sẽ thấy ở phần sau (5.2.2, Mệnh đề) rằng mọi ánh xạ khả vi và có đạo hàm bị chặn đều là ánh xạ Lipschitz.

◆ | **Mệnh đề** Nếu $f: I \to \mathbf{R}$ là ánh xạ Lipschitz, thì f liên tục đều.

Chứng minh:

Cho $f: I \to \mathbf{R}$ là ánh xạ k–Lipschitz ($k \in \mathbf{R}_+$) và $\varepsilon > 0$.

Đặt $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k+1} > 0$, ta có:

$$\forall (x', x'') \in I^2, \left(|x'-x''| \leq \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq k\frac{\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon\right).$$

Điều đó chứng tỏ f liên tục đều trên I.

Nhận xét: Khẳng định đảo của mệnh đề trên là sai: một ánh xạ có thể liên tục đều nhưng không Lipschitz, chẳng hạn như ở ví dụ: $f: \underset{x \mapsto \sqrt{x}}{[0;1] \to \mathbf{R}}$.

Thật vậy:

- $\forall (x', x'') \in [0;1]^2, \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| \leq \sqrt{|x'-x''|}$ (xem bài tập 1.2.30, *b)*), vậy khi chọn $\eta = \varepsilon^2$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in [0;1]^2, \left(|x'-x''| \leq \eta \Rightarrow \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| \leq \varepsilon\right)$$

- $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Bài tập

Ta viết tắt k–Lipschitz là k–lip.

◊ **4.3.24**

a) Cho $\lambda \in \mathbf{R}$, $f, g: I \to \mathbf{R}$, $(k, k') \in (\mathbf{R}_+)^2$. Chứng minh rằng:

1) f k–lip $\Rightarrow |f|$ k–lip.

2) $\left.\begin{matrix} f & k-\text{lip} \\ g & k'-\text{lip} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f+g \quad (k+k')-\text{lip}$.

3) f k–lip $\Rightarrow \lambda f$ $|\lambda| k$- lip

4) $\left\{\begin{matrix} g & k-\text{lip} \\ \exists C \in \mathbf{R}_+, & \forall x \in I,\ g(x) \geq C \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{1}{g} \quad \dfrac{k}{C^2}-\text{lip}$.

5) $\begin{cases} f & k-\text{lip} \\ g & k-\text{lip} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sup}(f,g) & k-\text{lip} \\ \text{Inf}(f,g) & k-\text{lip} \end{cases}$.

b) Chứng minh rằng nếu $f: I \to \mathbf{R}$ là ánh xạ k–lip, $g: J \to \mathbf{R}$ là ánh xạ k'–lip và $f(I) \subset J$, thì:

$$g \circ f: \begin{matrix} I \to \mathbf{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{matrix} \quad \text{là ánh xạ } k'k\text{–lip.}$$

◊ **4.3.25** Cho $a, b, c \in \mathbf{R}$ sao cho $a < b < c$, $f: [a; b] \to \mathbf{R}$ là ánh xạ k–lip, $g: [b; c] \to \mathbf{R}$ là ánh xạ k'–lip, sao cho $f(b) = g(b)$, $h: [a; c] \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in [a; c],\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [a;b] \\ g(x) & \text{nếu } x \in [b;c] \end{cases}.$$

Chứng tỏ rằng h là ánh xạ Max(k, k')–lip.

◊ **4.3.26** Cho một ví dụ về ánh xạ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} f & \text{là ánh xạ Lipschitz} \\ f & \text{là song ánh} \\ f^{-1} & \text{không phải là ánh xạ Lipschitz} \end{cases}$$

Chương 5

Đạo hàm

Trong cả chương này, I sẽ chỉ một khoảng trong **R**, không rỗng và không thu về một điểm; và ta sẽ ký hiệu **K** = **R** hoặc C .

5.1 Đạo hàm

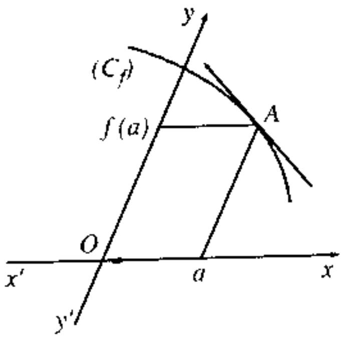
5.1.1 Đạo hàm tại một điểm

◆ **Định nghĩa 1** Cho $a \in I, f \in \mathbb{K}^I$. Ta nói f **khả vi tại** a khi và chỉ khi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tồn tại và hữu hạn; giới hạn này được ký hiệu là $f'(a)$ và được gọi là **đạo hàm của** f **tại** a.

Ta cũng có thể ký hiệu $(D_1 f)(a)$, hay $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ thay cho $f'(a)$.

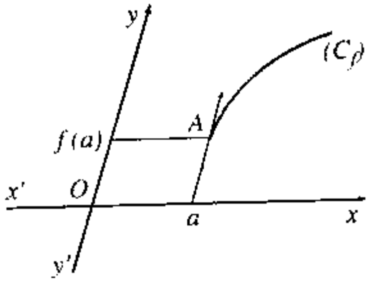
Mọi ánh xạ hằng $\lambda : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to \lambda \end{array}$ đều khả vi tại mọi a thuộc I và $\lambda'(a) = 0$.

Tỷ số $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ được gọi là **tỷ số gia** (hoặc **tỷ số biến thiên**) **của** f **giữa** a **và** $a + h$.



Nếu f nhận giá trị thực, thì tính khả vi của f được diễn giải hình học bởi sự tồn tại một tiếp tuyến không song song với $(y'y)$ tại điểm A có toạ độ $(a, f(a))$ trên đường cong C_f biểu diễn f.

Tiếp tuyến này có hệ số góc $f'(a)$.



Nếu $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ thì tại A đường cong C_f có một bán tiếp tuyến song song với $(y'y)$.

- **Định nghĩa 2** Cho $a \in I$, $f \in \mathbf{K}^I$

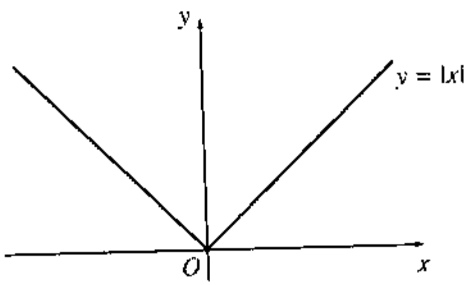
1) Ta nói f **khả vi phải** tại a nếu và chỉ nếu

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tồn tại và hữu hạn ; giới hạn này được ký hiệu là $f_p'(a)$, và được gọi là đạo hàm phải của f tại a.

2) Ta nói f **khả vi trái** tại a nếu và chỉ nếu

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tồn tại và hữu hạn ; giới hạn này được ký hiệu là $f_t'(a)$, và được gọi là đạo hàm trái của f tại a.

VÍ DỤ: $f\colon \begin{array}{l} \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ khả vi bên trái tại 0, và khả vi bên phải tại 0, và $f_t'(0) = -1$, $f_p'(0) = 1$.

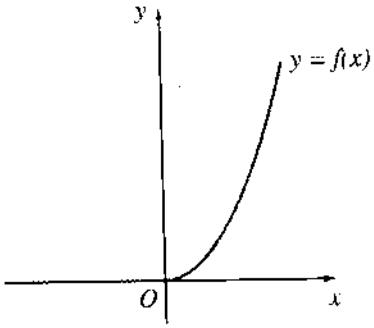


Nhận xét: Nếu $I = [a; b[$, $((a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a < b)$, các định nghĩa «f khả vi tại a» và «f khả vi phải tại a» là tương đương.

Mệnh đề sau là hiển nhiên:

- **Mệnh đề 1** Cho $a \in \overset{o}{I}$, $f \in \mathbf{K}^I$.
Để f khả vi tại a, điều kiện cần và đủ là f khả vi trái và phải tại a và $f_t'(a) = f_p'(a)$.
Hơn nữa, với các giả thiết trên, ta có $f'(a) = f_t'(a) = f_p'(a)$.

VÍ DỤ:



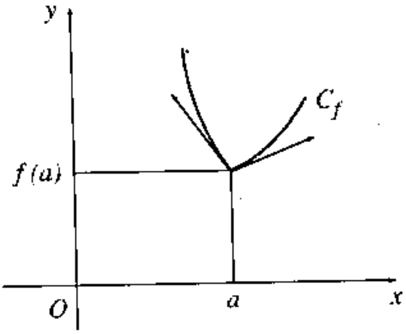
Xét f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ x^2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Ta có, với mọi $h \in \mathbf{R}^*$:

$$\begin{cases} \text{nếu } h > 0, \ \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = h \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ \text{nếu } h < 0, \ \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Vậy f khả vi tại 0 và $f'(0) = 0$.



Ta nói điểm $A(a, f(a))$ của C_f là một **điểm góc** của C_f nếu tại A C_f có hai bán tiếp tuyến không song song. Chẳng hạn là trường hợp khi $f_t'(a)$ và $f_p'(a)$ tồn tại nhưng không bằng nhau.

- **Mệnh đề 2** Cho $a \in I$, $f \in \mathbb{K}^I$.
Nếu f khả vi tại a, thì f liên tục tại a.

Chứng minh: Với mọi $h \in \mathbf{R}^*$ sao cho $a + h \in I$, ta có :

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

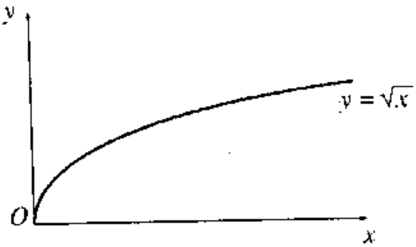
Từ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$, ta suy ra $f(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(a)$, và do đó f liên tục tại a. ■

Nhận xét:

1) Khẳng định đảo của mệnh đề trên là sai: một ánh xạ có thể liên tục tại a, nhưng không khả vi tại a như trong các ví dụ sau:

i) $\left|\,.\,\right| : \underset{x \mapsto |x|}{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0.

ii)



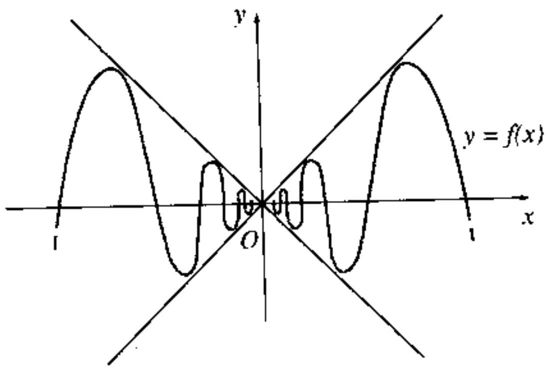
$\sqrt{\cdot} : \underset{x \mapsto \sqrt{x}}{\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}}$ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0, vì:

$$\forall h > 0, \quad \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty$$

iii) $f: \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại 0 (vì $|f(x)| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) và không khả vi tại 0 vì $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$ không có giới hạn khi $h \to 0$.



2) Với cùng một phương pháp như trong chứng minh mệnh đề trên, ta chứng minh được rằng:

- Nếu f khả vi phải (tương ứng: trái) tại a, thì f liên tục phải (tương ứng : trái) tại a.

- Nếu f khả vi phải và trái tại a, thì f liên tục tại a.

Bài tập

◊ **5.1.1** Cho $a \in \mathbf{R}$, I là một khoảng mở của $\mathbf{R}$ sao cho $a \in I$, và $f : I \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ khả vi tại a.

Hãy tìm : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

◊ **5.1.2** Chứng tỏ rằng $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \in \mathbf{Q} \\ 3-x & \text{nếu } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

không khả vi tại bất cứ điểm nào của $\mathbf{R}$.

5.1.2 Các tính chất đại số của các hàm khả vi tại một điểm

♦ **Định lý 1** Cho $a \in I$, $\lambda \in \mathbf{K}$, $f, g : I \to \mathbf{K}$ là hai ánh xạ khả vi tại a.

Ta có:

1) $f + g$ khả vi tại a và $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2) λf khả vi tại a và $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

3) fg khả vi tại a và $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

4) Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{1}{g}$ khả vi tại a và $(\dfrac{1}{g})'(a) = -\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$.

5) Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi tại a và $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Chứng minh:

1) $\dfrac{1}{h}((f+g)(a+h) - (f+g)(a))$

$$= \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) + \frac{1}{h}(g(a+h) - g(a)) \xrightarrow[h \to 0]{} f'(a) + g'(a)$$

2) $\dfrac{1}{h}((\lambda f)(a+h) - (\lambda f)(a)) = \lambda \dfrac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \xrightarrow[h \to 0]{} \lambda f'(a)$

3)

$$\frac{1}{h}((fg)(a+h) - (fg)(a)) = \frac{1}{h}((f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a)))$$

$$= \left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))\right)g(a+h) + f(a)\left(\frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right).$$

Vì g khả vi tại a, nên g liên tục tại a , vậy $g(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} g(a)$.

Ta suy ra : $\frac{1}{h}((fg)(a+h)-(fg)(a)) \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

4) Vì $g(a) \neq 0$ và g liên tục tại a (vì g có đạo hàm tại a) nên ta có $g(x) \neq 0$ trong lân cận của a. Vậy $\frac{1}{g}$ được xác định trong lân cận của a. Do đó với mọi số thực h thuộc lân cận của 0 và $h \neq 0$:

$$\frac{1}{h}\left(\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}\right)=-\frac{1}{h}\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$=-\left(\frac{1}{h}(g(a+h)-g(a)\right)\frac{1}{g(a+h)g(a)} \xrightarrow[h\to 0]{} -g'(a)\frac{1}{(g(a))^2}$$

5) Suy ra từ *3)* và *4)* và:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\frac{1}{g(a)}+f(a)\frac{-g'(a)}{(g(a))^2}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$ ■

Nhận xét: Định lý trên được mở rộng một cách dễ dàng cho các đạo hàm phải (tương ứng : trái).

◆ **Hệ quả** Cho $a \in I$, $f : I \to \mathbf{C}$. Các tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi một:

(i) f khả vi tại a

(ii) $\bar{f}$ khả vi tại a

(iii) $\mathrm{Re}f$ và $\mathrm{Im}f$ khả vi tại a.

Hơn nữa, nếu f khả vi tại a , thì :

$(\bar{f})'(a)=\overline{f'(a)}$, $(\mathrm{Re}f)'(a) = \mathrm{Re}(f'(a))$, $(\mathrm{Im}f)'(a) = \mathrm{Im}(f'(a))$.

◆ **Định lý 2** (**«Đạo hàm của hàm hợp»**)

Cho I, J là hai khoảng của $\mathbf{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{K}$, $g : J \to \mathbb{K}$, sao cho $f(I) \subset J$. Ta ký hiệu (theo một cách lạm dụng) $g \circ f : \begin{array}{l} J \to \mathbb{K} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$.

Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$, thì $g \circ f$ khả vi tại a và :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) .$$

Chứng minh:

Đặt ε_1 là ánh xạ xác định trên $\{ h \in \mathbf{R} \; ; a+h \in I\}$ bởi :

$$\varepsilon_1(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{nếu } h \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } h = 0 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} \forall h \in \mathrm{R}, a+h \in I \Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{cases}$$

Cũng vậy , đặt ε_2 là ánh xạ xác định trên $\{ k \in \mathbf{R} \; ; f(a)+k \in J\}$ bởi :

$$\varepsilon_2(k) = \begin{cases} \dfrac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} - g'(f(a)) & \text{nếu } k \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } k = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathrm{R}, f(a)+k \in J \Rightarrow g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + k\varepsilon_2(k) \\ \varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0 \end{cases}$$

Với mọi $h \in \mathbf{R}$ sao cho $a+h \in I$, ta có :

$(g \circ f)(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$

$= g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$

$= g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon(h)$

trong đó ε được xác định bởi: $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(h))\,\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$.

Vì $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ và $\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$, nên ta suy ra $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Điều này dẫn đến :

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)g'(f(a)).$$

Ta đã diễn đạt tính khả vi của f và g bởi sự tồn tại của các dạng khai triển hữu hạn đến cấp 1 và hợp các khai triển ấy (xem Tập 2, 8.3.4). ∎

- **Định lý 3** (**«Đạo hàm hàm ngược»**)

  Cho $a \in I$, $f : I \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ đơn điệu nghiêm ngặt và liên tục trên I , khả vi tại a và $f'(a) \neq 0$. Khi đó hàm ngược của f là $f^{-1} : f(I) \to \mathbf{R}$ khả vi tại $f(a)$ và : $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Ở đây ta đã đồng nhất (một cách lạm dụng) $f: I \to \mathbf{R}$ với thu hẹp của nó:
$\underset{x \mapsto f(x)}{\widetilde{f}: I \to f(I)}$; f^{-1} thực ra chỉ ánh xạ ngược $\widetilde{f}^{-1}: f(I) \to I$.

Chứng minh:

Theo 4.3.3 , Định lý, $f(I)$ là một khoảng của $\mathbf{R}$, $\underset{x \mapsto f(x)}{\widetilde{f}: I \to f(I)}$ là song ánh và hàm ngược $\widetilde{f}^{-1}$ của nó là hàm đơn điệu nghiêm ngặt, cùng chiều với f , liên tục trên $f(I)$.
Với mọi y thuộc $f(I) - \{f(a)\}$ ta có :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}.$$

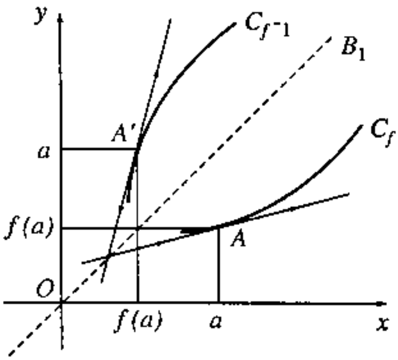
Vì f khả vi tại a và $f'(a) \neq 0$ và vì $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to f(a)]{} a$, nên bằng các phép hợp các giới hạn ta được :

$$\frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} \xrightarrow[y \to f(a)]{} \frac{1}{f'(a)}.$$

Điều này chứng tỏ f^{-1} khả vi tại $f(a)$ và $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. ■

Nhận xét :

1) Ta giữ nguyên các giả thiết của định lý trên.

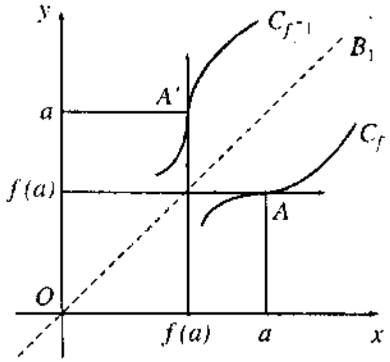


Trong một hệ quy chiếu trực chuẩn , các đường cong C_f và $C_{f^{-1}}$ đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất B_1 . Các tiếp tuyến tại $A(a, f(a))$ của C_f và $A'(f(a), a)$ của $C_{f^{-1}}$ đối xứng qua B_1.

2) Nếu biết rằng f^{-1} khả vi tại $f(a)$, thì ta có thể tìm được giá trị của $(f^{-1})'(f(a))$ bằng cách chú ý rằng $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, từ đó $(f^{-1} \circ f)'(a) = 1$, nghĩa là $(f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1$.

3) Theo nhận xét *2)* trên đây , nếu f đơn điệu nghiêm ngặt và liên tục trên I, khả vi tại a và $f'(a) = 0$, thì f^{-1} không khả vi tại $f(a)$. Chính xác hơn, trở lại chứng minh định lý trên ta thấy rằng $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} \xrightarrow[y \to f(a)]{} +\infty$ trong trường hợp f tăng nghiêm ngặt.

Trong trường hợp này, tiếp tuyến tại $A'(f(a),a)$ với $C_{f^{-1}}$ tồn tại và song song với $(y'y)$.



Bài tập

♦ **5.1.3** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$, $f, g : I \to \mathbf{R}$ đều khả vi tại a. Hãy tìm

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

5.1.3 Ánh xạ đạo hàm

Phần lớn các khái niệm và tính chất của § này có thể mở rộng cho trường hợp những hàm xác định trên một hợp hữu hạn những khoảng mở không giao nhau từng đôi một.

♦ **Định nghĩa** Cho $f \in \mathbf{K}^I$. Ta gọi ánh xạ có giá trị bằng $f'(x)$ tại mỗi $x \in I$, sao cho $f'(x)$ tồn tại, là **ánh xạ đạo hàm** của f.

Vậy thì $\mathrm{Def}(f') = \{x \in I, f$ khả vi tại $x\}$, và $f' : \begin{array}{l}\mathrm{Def}(f') \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f'(x)\end{array}$.

Ta nói f khả vi trên I nếu và chỉ nếu $\mathrm{Def}(f') = I$.

Ta có thể ký hiệu $D_1 f$, hay $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ thay cho f', và $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$ thay cho $f'(x)$.

VÍ DỤ:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $\quad f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$, $\quad f': \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ nếu } x > 0 \\ -1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$,

3) $f: [0;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x(1-x)$, $\quad f': [0;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1-2x$. ■

Định lý sau đây suy ra một cách dễ dàng từ Định lý 1, 5.1.2.

♦ **Định lý 1** Cho $\lambda \in \mathbf{K}$, $f, g: I \to \mathbf{K}$ đều khả vi trên I. Khi đó :

1) $f+g$ khả vi trên I và $(f+g)' = f' + g'$

2) λf khả vi trên I và $(\lambda f)' = \lambda f'$

3) fg khả vi trên I và $(fg)' = f'g + fg'$

4) Nếu $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$ thì $\dfrac{1}{g}$ khả vi trên I và $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

5) Nếu $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$ thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi trên I và $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Nhận xét: Một phép quy nạp đơn giản chứng tỏ rằng:

Nếu $n \in \mathbf{N}^*$ và nếu $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbf{K}$ đều khả vi trên I,

thì $\prod_{k=1}^{n} f_k$ khả vi trên I và $\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n$.

Ví dụ: $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$.

♦ **Hệ quả** Cho $f: I \to \mathbf{C}$. Các tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi một :

(i) f khả vi trên I.

(ii) $\bar{f}$ khả vi trên I.

(iii) $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ khả vi trên I.

Hơn nữa nếu f khả vi trên I, thì :

$$(\bar{f})' = \overline{f'}, \quad (\operatorname{Re} f)' = \operatorname{Re}(f'), \quad (\operatorname{Im} f)' = \operatorname{Im}(f').$$

♦ **Định lý 2** Cho I và J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{K}$ sao cho $f(I) \subset J$. Ta ký hiệu (một cách lạm dụng) $g \circ f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to g(f(x)) \end{array}$.

Nếu f khả vi trên I và g khả vi trên $f(I)$, thì $g \circ f$ khả vi trên I và :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

Chứng minh: Suy trực tiếp từ Định lý 2, 5.1.2. ■

Nhận xét: Ta thu được kết quả tương tự đối với phép hợp nhiều ánh xạ khả vi; chẳng hạn : $(h \circ g \circ f)' = (h' \circ g \circ f)(g' \circ f)f'$.

Đạo hàm của các hàm số thông thường

1) Cho $n \in \mathbb{N}$ và $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$. Với mọi $(a, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ta có:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left((a+h)^n - a^n\right) = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} h^k$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} C_n^{l+1} a^{n-l-1} h^l \xrightarrow[h \to 0]{} C_n^l a^{n-1} = na^{n-1}.$$

Vậy f khả vi trên $\mathbb{R}$ và : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

2) Cho $n \in \mathbb{Z}_-^*$ và $g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$. Theo 5.1.3 định lý 1, *4)*, g khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = nx^{n-1}.$$

3) Cho $q \in \mathbb{N}^*$ và $\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^q \end{array}$.

Ánh xạ φ là ánh xạ ngược của $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ y \mapsto y^q \end{array}$.

Vì f tăng nghiêm ngặt và liên tục trên $\mathbb{R}_+$, và do f khả vi trên $\mathbb{R}_+$ và

$(\forall y \in \mathbf{R}_+^*,\ f'(y) = qy^{q-1} \neq 0)$, nên theo Định lý 3, 5.1.2, φ khả vi trên $\mathbf{R}_+^*$ và:

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} = \frac{1}{q\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

Hơn nữa, $\forall h \in \mathbf{R}_+^*$, $\dfrac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = h^{\frac{1}{q}-1} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty$ nếu $q \geq 2$.

Vậy nếu $q \geq 2$, thì φ không khả vi tại 0.

Chẳng hạn : $\sqrt{.} : \underset{x \mapsto \sqrt{x}}{\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}}$ không khả vi tại 0.

4) Với mọi $(a, h) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$:

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \sin a\frac{\cos h - 1}{h} + \cos a\frac{\sin h}{h}.$$

Ta công nhận rằng: $\dfrac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ (xem Tập 2, 8.2.3).

Do đó $$\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h} = -\frac{h}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Vì vậy $\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos a$. Vậy sin khả vi trên $\mathbf{R}$ và sin' = cos.

Tương tự, ta chứng minh rằng cos khả vi trên $\mathbf{R}$ và cos' = –sin. (Ta có thể chú ý rằng : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ và áp dụng định lý đạo hàm của hàm hợp, Định lý 2).

5) tan khả vi trên $\mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi;\ n \in \mathbf{Z}\}$ và :

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2.$$

Tương tự, cotan khả vi trên $\mathbf{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbf{Z}\}$ và :

$$\text{cotan}' = -\frac{1}{\sin^2} = -(1+\text{cotan}^2).$$

6) Chúng ta sẽ thấy dưới đây (Tập 2, 7.4) rằng hàm số mũ e^x khả vi trên **R** và có đạo hàm là chính nó. Chúng ta cũng sẽ thấy dưới đây (Tập 2, 7.1) rằng hàm $\ln : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \to \ln x\end{array}$ khả vi trên $\mathbf{R}_+^*$ và $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

Đạo hàm lôgarit

Chúng ta sẽ thấy trong Tập 2, 7.4 , định nghĩa và sự khảo sát các hàm lũy thừa $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

Nếu f có dạng tích của các nhân tử với các số mũ cố định, chẳng hạn : $f = u^\alpha v^\beta w^\gamma$ (trong đó $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, u, v, w là những ánh xạ khả vi trên I và có giá trị dương) , thì ta có thể xét **đạo hàm lôgarit** của f . nghĩa là đạo hàm của $\ln \circ f$:

$$\frac{f'}{f} = (\ln \circ f)' = (\alpha \ln u + \beta \ln v + \gamma \ln w)' = \alpha \frac{u'}{u} + \beta \frac{v'}{v} + \gamma \frac{w'}{w} .$$

5.1.4 Các đạo hàm cấp cao

Ký hiệu $f^{(0)}$ chỉ f.

◆ **Định nghĩa** Cho ánh xạ $f : I \to \mathbf{K}$.

Ta định nghĩa các **đạo hàm cấp cao** của f lần lần (nghĩa là theo quy nạp) bởi (với mọi $n \in \mathbf{N}^*$) :

- Với $a \in I$, $f^{(n)}(a)$, nếu tồn tại , là đạo hàm của $f^{(n-1)}$ tại a.
- $f^{(n)}$ là ánh xạ đạo hàm của $f^{(n-1)}$.

Ta gọi số thực $f^{(n)}(a)$ là **đạo hàm cấp** n **của** f **tại** a.

Ta gọi ánh xạ $x \mapsto f^{(n)}(x)$ là **ánh xạ đạo hàm cấp** n **của** f.

Ta nói f **khả vi** n **lần trên** I khi và chỉ khi $f^{(n)}$ xác định trên I.

Ta nói f **khả vi vô hạn lần trên** I khi và chỉ khi f khả vi n lần trên I với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Ta có thể ký hiệu $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$ thay cho $f^{(n)}(a)$, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ thay cho $f^{(n)}$.

Nhận xét:

1) $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$; $f^{(3)}$ có thể ký hiệu là f'''.

2) Nếu f khả vi n lần trên I , thì với mọi $p \in \mathbf{N}$ sao cho $p \le n$, f khả vi p lần trên I , và với mọi $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ sao cho $p + q \le n$, ta có : $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

3) Các tập xác định của f, f', f'', ... có thể khác nhau.

4) Sự tồn tại của $f^{(n)}(a)$ đương nhiên đòi hỏi là $f^{(n-1)}$ xác định trên giao của I và một khoảng mở không rỗng có trung điểm là a .

♦ **Định lý** Cho $\lambda \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $f, g: I \to \mathbf{K}$ khả vi n lần trên I , thế thì :

1) $(f+g)$ khả vi n lần trên I và $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

2) λf khả vi n lần trên I và $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

3) fg khả vi n lần trên I và: $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

(công thức Leibniz)

4) Nếu $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi n lần trên I.

Chứng minh:

1) và *2)* được chứng minh dễ dàng bằng quy nạp.

3) Quy nạp theo n :

Trường hợp $n = 1$ đã được chứng minh (5. 1. 3 , Định lý 1, *3)*). Giả sử tính chất đã đúng với n và $fg: I \to \mathbf{K}$ khả vi $(n+1)$ lần trên I . Theo giả thiết quy nạp, fg khả vi n lần trên I và : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n f^{(k)} g^{(n-k)}$. Vì $(fg)^{(n)}$ là tổng của những tích những ánh xạ khả vi trên I, nên nó khả vi trên I và :

$$\left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

(thay chỉ số $l = k+1$ trong tổng thứ nhất)

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \mathrm{C}_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

(vì $\mathrm{C}_n^{-1} = 0$ và $\mathrm{C}_n^{n+1} = 0$)

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

4) Quy nạp theo n.

Trường hợp $n = 1$ đã được chứng minh (5.1.3 , Định lý 1,5)).

Giả sử tính chất đã đúng với n và $f, g : I \to \mathbf{K}$ khả vi $(n+1)$ lần trên I sao cho $(\forall x \in I, g(x) \neq 0)$. Ta đã có $\dfrac{f}{g}$ khả vi trên I và $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Vì f, f', g, g' khả vi n lần trên I nên $f'g - fg'$ và g^2 cũng thế (xem *3)* trên đây); theo giả thiết quy nạp thì $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ khả vi n lần trên I, vậy cuối cùng $\dfrac{f}{g}$ khả vi $(n+1)$ lần trên I. ■

Chú ý rằng không có công thức " đơn giản " cho $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$.

Bài tập

◊ **5.1.4** Với mọi $n \in \mathbf{N}$ hãy xác định đạo hàm cấp n của :

a) $f : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x} \end{array}$.

b) $f : \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} \end{array}$.

◊ **5.1.5** Giả sử $n \in \mathbf{N}^*$ và $f_n : \begin{array}{l}]-1; +\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x) \end{array}$.

Chứng minh rằng f_n khả vi n lần trên $]-1 ; +\infty[$ và :

$$\forall x \in]-1 ; +\infty[\ , \ f_n^{(n)}(x) = (n+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}.$$

◊ **5.1.6** Chứng minh rằng Arctan khả vi vô hạn lần trên $\mathbf{R}$ và với mọi $(n, x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}^*_+$:

$$(\operatorname{Arc}\tan)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{x}\right).$$

◊ **5.1.7** Giả sử : $f : \begin{array}{l}]-1; 1[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$.

a) Chứng minh rằng f khả vi vô hạn trên $]-1, 1[$ và với mọi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một đa thức P_n thuộc $\mathbf{R}[X]$ sao cho :

$$\forall x \in]-1; 1[\ , \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Chứng minh : $\forall n \in \mathbf{N}$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (2n+1)XP_n$.

b) *α)* Chứng minh rằng : $\forall x \in]-1; 1[, (1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 0$.

β) Suy ra rằng, với mọi $n \in \mathbf{N}^*$: $P_{n+1} - (2n+1)XP_n - n^2(1-X^2)P_{n-1} = 0$.

γ) Chứng minh : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $P'_n = n^2 P_{n-1}$.

δ) Suy ra rằng, với mọi n thuộc $\mathbf{N} - \{0,1\}$: $n^2 P_n - (2n-1)XP'_n - (1 - X^2)P''_n = 0$.

c) Tính $P_n(0)$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

5.1.5 Lớp của một hàm

♦ **Định nghĩa 1** Cho $f \in \mathbb{K}^I$.

1) Cho $n \in \mathbf{N}$. Ta nói f **thuộc lớp** C^n **trên** I khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \text{ khả vi } n \text{ lần trên } I \\ f^{(n)} \text{ liên tục trên } I \end{cases}.$$

2) Ta nói f **thuộc lớp** C^∞ **trên** I khi và chỉ khi f khả vi vô hạn lần trên I.

Với $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, ta ký hiệu $C^n(I, \mathbb{K})$ là tập hợp các ánh xạ từ I vào $\mathbb{K}$ thuộc lớp C^n.

Nhận xét :

1) $f \in C^0(I, \mathbf{K})$ khi và chỉ khi f liên tục trên I.

2) Với mọi $(p, n) \in (\mathbf{N} \cup \{+\infty\})^2$ sao cho $p \le n$, ta có: $C^p(I, \mathbf{K}) \supset C^n(I, \mathbf{K})$.

3) Một ánh xạ $f : I \to \mathbf{K}$ có thể khả vi n lần trên I, nhưng không thuộc lớp C^n trên I. Ví dụ: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ khả vi trên $\mathbf{R}$ nhưng không thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

(xem bài tập 5.1.10).

4) Ta có thể chứng minh (định lý Darboux, ví dụ 5.2.11) rằng, nếu f khả vi trên khoảng I, thì $f'(I)$ là một khoảng thuộc $\mathbf{R}$ mà f' không nhất thiết liên tục.

5) Ta sẽ thấy ở dưới đây (5.2.2 Hệ quả) rằng với một số giả thiết nhất định, nếu f' có giới hạn hữu hạn tại a, thì f' liên tục tại a.

♦ **Định lý 1** Cho $\lambda \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, $f, g: I \to \mathbf{K}$ đều thuộc lớp C^n trên I. Khi đó:

1) $f + g$ thuộc lớp C^n trên I

2) λf thuộc lớp C^n trên I

3) fg thuộc lớp C^n trên I

4) Nếu $(\forall x \in I, g(x) \neq 0)$ thì $\dfrac{f}{g}$ thuộc lớp C^n trên I.

Chứng minh: Suy ra dễ dàng từ 5.1.4, Định lý, và phép chứng minh của định lý đó.
Như vậy $C^n(I, \mathbf{K})$ là một đại số con có đơn vị của $\mathbf{K}^I$. ■

♦ **Định lý 2** Cho $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{K}$, sao cho $f(I) \subset J$. Ta ký hiệu, một cách lạm dụng,

$$g \circ f : \begin{array}{l} I \to \mathrm{K} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}.$$

Nếu f và g thuộc lớp C^n thì $g \circ f$ thuộc lớp C^n trên I.

Chứng minh: Quy nạp theo n.
Trường hợp $n = 1$ đã được chứng minh (5.1.3, Định lý 2). Giả sử tính chất đã đúng với n và f (tương ứng: g) thuộc lớp C^{n+1} trên I (tương ứng: J). Ta đã biết rằng $g \circ f$ khả vi trên I và $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$ (xem 5.1.3, Định lý 2). Vì f và g' thuộc lớp C^n, giả thiết quy nạp chứng tỏ $g' \circ f$ thuộc lớp C^n. Vì $g' \circ f$ và f' thuộc lớp C^n, định lý trên đây chứng tỏ rằng $(g' \circ f)f'$ thuộc lớp C^n. Vậy $g \circ f$ thuộc lớp C^{n+1}.
Trường hợp $n = +\infty$ được suy ra từ kết quả ở trên:

$$\begin{cases} f \in C^\infty \\ g \in C^\infty \end{cases} \Rightarrow \left(\forall n \in \mathrm{N}, \begin{cases} f \in C^n \\ g \in C^n \end{cases} \right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathrm{N}, g \circ f \in C^n \right) \Rightarrow g \circ f \in C^\infty .$$ ■

♦ **Định nghĩa 2** Cho $a, b \in \mathbf{R}$ sao cho $a < b$, $f: [a; b] \to \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}$. Ta nói f **thuộc lớp C^n từng khúc trên** $[a, b]$ khi và chỉ khi: tồn tại $p \in \mathbf{N}^*$, $(a_0, \dots a_p) \in \mathbf{R}^{p+1}$ sao cho:

- $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$.
- Với mọi $I \in \{0, \dots, p-1\}$ thu hẹp $f|_{]a_i; a_{i+1}[}$ có thác triển trên $[a_i; a_{I+1}]$ thuộc lớp C^n trên $[a_i; a_{I+1}]$.

VÍ DỤ:

1) $f: \begin{array}{l} [-1;1] \to \mathrm{R} \\ x \to \mathrm{d}(x, \mathrm{Z}) \end{array}$ (xem 4.1.4, Ví dụ 3) liên tục trên $[-1; 1]$ và thuộc lớp C^n từng khúc với mọi $n \in \mathbf{N}$.

2) $f: \begin{array}{l} [-1;1] \to \mathrm{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ nếu } x \in]0;1] \\ 0 \text{ nếu } x \in [-1;0] \end{cases} \end{array}$ (xem 5.1.1, Ví dụ) thuộc lớp C^1 trên $[-1; 1]$ và thuộc lớp C^2 từng khúc trên $[-1; 1]$.

Bài tập

◊ **5.1.8** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$ và $f \in \mathbf{R}^I$.

a) Chứng minh rằng f khả vi trên I khi và chỉ khi thu hẹp của f trên đoạn $[a; b]$ bất kỳ của I là khả vi trên $[a; b]$.

b) Cho $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng f thuộc lớp C^n trên I khi và chỉ khi thu hẹp của f trên đoạn $[a; b]$ bất kỳ của I thuộc lớp C^n trên I.

◊ **5.1.9** Cho $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ sao cho ánh xạ $f: \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} P(x) & \text{nếu } x \le 0 \\ Q(x) & \text{nếu } x > 0\end{cases}\end{array}$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}$.

Chứng minh: $P = Q$.

◊ **5.1.10** Khảo sát tính liên tục, tính khả vi, tính liên tục của đạo hàm đối với các ánh xạ:

$$f_\alpha: \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0\end{cases}\end{array} \qquad \alpha \in \{0,1,2,3\}.$$

◊ **5.1.11** Cho $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ đều thuộc lớp C^2 trên $\mathbf{R}$ và $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } g(x) \ge 0 \\ f(x) + (g(x))^3 & \text{nếu } g(x) < 0\end{cases}.$$

Chứng minh rằng h thuộc lớp C^2 trên $\mathbf{R}$.

◊ **5.1.12** Cho $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, I là một khoảng của $\mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}^*$, $f_1, \ldots f_p \in C^n(I, \mathbf{R})$. Với mọi $k \in \{1, \ldots, p\}$, ta ký hiệu $Z(f_k) = \{x \in I; f_k(x) = 0\}$. Chứng minh rằng hai tính chất sau là tương đương:

(i) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} Z(f_k) = \varnothing$

(ii) $\exists\, (u_1, \ldots, u_p) \in \left(C^n(I, \mathbf{R})\right)^p, \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k f_k = 1$.

5.1.6 Vi phân

◆ **Định nghĩa** Cho $a \in I, f \in \mathbb{K}^I$. Ta giả thiết f khả vi tại a.

Ta gọi ánh xạ, ký hiệu là $d_a f$, xác định bởi $d_a f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h \mapsto f'(a)h \end{array}$ là **vi phân của f tại a.**

Vậy vi phân của f tại a là một ánh xạ tuyến tính.

Tồn tại một ánh xạ $\varepsilon : \{h \in \mathbf{R};\ a+h \in I\} \to \mathbb{K}$ sao cho:

$$\begin{cases} \text{Với mọi } h \text{ thuộc R sao cho } a+h \in I :\ f(a+h) = f(a) + (\mathrm{d}_a f)(h) + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \ . \end{cases}$$

Nhận xét:

1) Một ánh xạ $f: I \to \mathbf{K}$ khả vi tại a khi và chỉ khi tồn tại một số thực λ và một ánh xạ $\varepsilon: I \to \mathbf{K}$ sao cho:

$$\begin{cases} \text{Với mọi } h \text{ thuộc } \mathbf{R} \text{ sao cho } a+h \in I, \text{ ta có}:\ f(a+h) = f(a) + \lambda h + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ và khi đó } \lambda = f'(a) \ . \end{cases}$$

2) Với mọi $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{d}_a(\mathrm{Id}_\mathbf{R})$: $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h \mapsto h \end{array}$. Một cách lạm dụng, ta ký hiệu x là ánh xạ đồng nhất x: $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$. Khi đó, ta có với mọi a thuộc $\mathbf{R}$: $\mathrm{d}_a x$: $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h \mapsto h \end{array}$.

Vì ánh xạ $\mathrm{d}_a x$ (đồng nhất trên $\mathbf{R}$) không phụ thuộc a nên ta ký hiệu nó là $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ h \mapsto h \end{array}$$

Cho $f: I \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ khả vi tại a. Khi đó ta có:

$\forall h \in \mathbf{R}$, $(\mathrm{d}_a f)(h) = f'(a)h = f'(a)\mathrm{d}x(h)$, từ đó có ký hiệu $\mathrm{d}_a f = f'(a)\mathrm{d}x$.

Đôi khi người ta bỏ a trong $\mathrm{d}_a f$ và một cách lạm dụng, thay a bởi x trong $f'(a)$ để có biểu thức cô đọng hơn: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$; điều này cho thấy lại quan hệ $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$; điều đó lý giải cho cách viết $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ để chỉ $f'(x)$.

Mệnh đề sau đây suy ngay từ 5.1.3, Định lý 1.

♦ **Mệnh đề** Cho: $a \in I$, $\lambda \in \mathbf{K}$, f, g: $I \to \mathbf{K}$ khả vi tại a.

Khi đó:

1) $\mathrm{d}_a(f+g) = \mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g$

2) $\mathrm{d}_a(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}_a f$

3) $\mathrm{d}_a(fg) = f(a)\mathrm{d}_a g + g(a)\mathrm{d}_a f$

4) $\mathrm{d}_a\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{(g(a))^2}\left(g(a)\mathrm{d}_a f - f(a)\mathrm{d}_a g\right)$ nếu giả thiết $g(a) \neq 0$.

5.2 Định lý Rolle, định lý số gia hữu hạn

5.2.1 Định lý Rolle

♦ **Định lý** (Định lý Rolle)

Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, f : $[a; b] \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ.

Nếu: $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } [a;b] \\ f \text{ khả vi trên }]a;b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$, thì tồn tại $c \in]a; b[$ sao cho : $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

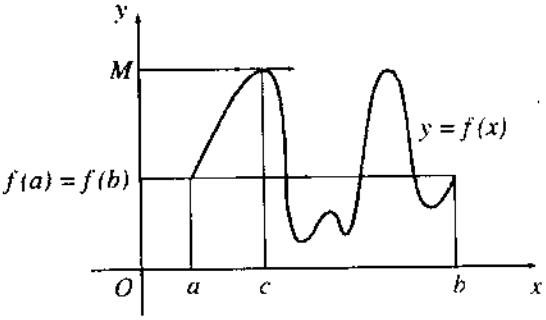
Vì f liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên f bị chặn và đạt tới các biên (xem 4.3.4, Định lý).

Đặt $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$.

Nếu $m = M$ thì f không đổi, và do đó $\forall x \in]a; b[$, $f'(x) = 0$.

Giả sử $m < M$; vì $f(a) = f(b)$ nên không thể có đồng thời $M = f(a)$ và $m = f(a)$, và ta có thể quy chẳng hạn về trường hợp $M \neq f(a)$.

Vì f đạt giá trị M nên tồn tại $c \in]a; b[$ sao cho $M = f(c)$.



Cho $h \in \mathbf{R}^*$ sao cho:

$c + h \in [a; b]$.

- Nếu $h > 0$ thì:

$\begin{cases} c+h > c \\ f(c+h) \le M = f(c) \end{cases}$,

do đó $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$.

- Nếu $h < 0$ thì

$\begin{cases} c+h < c \\ f(c+h) \le M = f(c) \end{cases}$, do đó $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$.

Vì f khả vi tại 0 nên khi cho h tiến tới 0 ta được: $f'(c) \le 0$ và $f'(c) \ge 0$, cuối cùng là $f'(c) = 0$. ■

Nhận xét:

1) Kết luận của định lý Rolle có thể được biểu diễn bằng đồ thị như sau: tồn tại một điểm trên đường cong C_f biểu diễn f, có hoành độ thuộc $]a; b[$, tại đó tiếp tuyến song song với $(x'x)$.

2) Có thể có nhiều điểm c như trên.

3) Do ánh xạ $\begin{array}{l}]0; 1[\to]a; b[\\ \theta \mapsto a+\theta(b-a) \end{array}$ là song ánh nên kết luận của định lý Rolle có thể viết là $\exists \theta \in]0; 1[$, $f'(a + \theta(b - a)) = 0$.

Bài tập

◊ **5.2.1** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b, f: [a; b] \to \mathbf{R}$ liên tục trên $[a; b]$, khả vi bên phải và bên trái tại mọi điểm của $[a; b]$, và sao cho $f(a) = f(b)$.

Chứng minh rằng $\exists c \in]a; b[$, $f_t'(c) f_p'(c) \le 0$.

◊ **5.2.2** Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, $(n, k, l) \in \mathbf{N}^3$ sao cho $0 \le l \le k$ và $0 \le l \le n$, $f: I \to \mathbf{R}$ khả vi n lần trên I. Giả sử f có ít nhất k không điểm trong I. Chứng minh rằng $f^{(l)}$ có ít nhất $(k - l)$ không điểm trong I.

◊ **5.2.3** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$, f, g: $[a; b] \to \mathbf{R}$ liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên $]a; b[$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in]a; b[$ sao cho: $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

◊ **5.2.4** Cho I là một khoảng mở của $\mathbf{R}$, $(a, b) \in I^2$ sao cho $a < b, f: I \to \mathbf{R}$ khả vi trên I. Giả sử $f(a) = f(b) = 0, f'(a) > 0, f'(b) > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c_1, c_2, c_3 \in]a; b[$ sao cho:

$$c_1 < c_2 < c_3,\ f(c_2) = 0,\ f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

◊ **5.2.5** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b, f: [a; b] \to \mathbf{R}$ khả vi sao cho $f'(a) = f'(b)$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in]a; b[$ sao cho: $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$.

5.2.2 Định lý số gia hữu hạn

♦ **Định lý** (**Định lý số gia hữu hạn**)

Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ. Nếu f liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $]a; b[$, thì tồn tại $c \in\ ]a; b[$ sao cho:

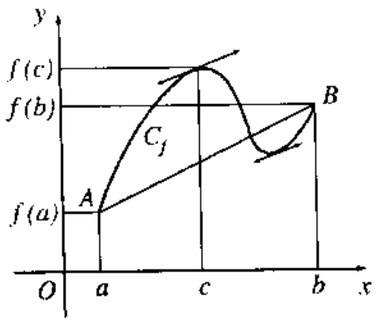
$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Chứng minh:

Xét $\varphi : [a; b] \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in [a; b],\quad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Rõ ràng là φ liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên $]a; b[$, và $\varphi(b) = \varphi(a)$ (vì $\varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$).



Áp dụng định lý Rolle đối với φ trên $[a; b]$, ta suy ra tồn tại phần tử $c \in\ ]a; b[$ sao cho $\varphi'(c) = 0$, nghĩa là

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \blacksquare$$

Kết luận của định lý số gia hữu hạn được biểu diễn đồ thị như sau: tồn tại một điểm trên đường cong biểu diễn f có hoành độ thuộc $]a; b[$, mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng (AB), trong đó $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

♦ **Hệ quả** (**« Định lý giới hạn của đạo hàm »**)

Cho $x_0 \in \mathbf{R}$, I là một khoảng của $\mathbf{R}$ sao cho $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f: I \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ.

$$\text{Nếu } \begin{cases} f \text{ liên tục tại } x_0 \\ f \text{ khả vi trên } I - \{x_0\} \\ f' \text{ có giới hạn hữu hạn là } l \text{ tại } x_0 \end{cases},$$

thì f khả vi tại tại x_0 và $f'(x_0) = l$, và do đó f' liên tục tại x_0.

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall t \in I - \{x_0\},\ \left(|t - x_0| \le \eta \Rightarrow |f'(t) - l| \le \varepsilon\right).$$

Cho $x \in I - \{x_0\}$ sao cho $|x - x_0| \le \eta$. Định lý số gia hữu hạn áp dụng được cho thu hẹp của f trên khoảng đóng có mút là x_0 và x; như vậy tồn tại c_x (phụ thuộc x) sao cho:

$$\begin{cases} |c_x - x_0| \le |x - x_0| \le \eta \\ f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_x) \end{cases}.$$

Từ đó: $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l\right| = |f'(c_x) - l| \le \varepsilon$.

Ta đã chứng minh rằng:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I - \{x_0\}, \left(|x - x_0| \le \eta \ \Rightarrow \ \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l\right| \le \varepsilon\right),$$

nghĩa là: f khả vi tại x_0 và $f'(x_0) = l$. ■

Nhận xét:

1) Ta có định lý tương tự đối với đạo hàm trái hoặc phải. Ví dụ:

Nếu $\left\{\begin{array}{l} f:]a; b[\to \mathbf{R} \text{ liên tục tại } a. \\ f \text{ khả vi trên }]a; b[\\ f' \text{ có giới hạn hữu hạn là } l \text{ tại } a^+ \end{array}\right|$,

thì f khả vi phải tại a và $f_p'(a) = l$.

2) Bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta cũng có:

Nếu $\left\{\begin{array}{l} f \text{ liên tục tại } x_0 \\ f \text{ khả vi trên } I - \{x_0\} \\ f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty \text{ (tương ứng: } -\infty) \end{array}\right|$, thì $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ (tương ứng: $-\infty$)

3) Trong Hệ quả không thể bỏ đi giả thiết « f liên tục tại x_0 ». Điều đó được chỉ ra trong ví dụ sau: $I = \mathbf{R}$, $x_0 = 0$, $f: I \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = 0 \\ 0 & \text{nếu } x \ne 0 \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề** Cho $f: I \to \mathbf{R}$ khả vi trên I.

Để f là Lipschitz trên I, điều kiện cần và đủ là f' bị chặn trên I.

Chứng minh:

1) Giả sử f' bị chặn trên I và, chẳng hạn, cho $(x_1, x_2) \in I^2$ sao cho $x_1 < x_2$. Theo định lý số gia hữu hạn áp dụng vào f trên $[x_1; x_2]$, tồn tại $c \in]x_1; x_2[$ sao cho:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Từ đó: $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \le \|f'\|_\infty (x_2 - x_1)$, và do đó f có tính chất $\|f'\|_\infty$ – Lipschitz.

2) Ngược lại, giả sử f là Lipschitz, tồn tại $k \in \mathbf{R}_+$ sao cho:

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ |f(x_2) - f(x_1)| \le k|x_2 - x_1|.$$

Cho $x_0 \in I$ và $h \in \mathbf{R}^*$ sao cho $x_0 + h \in I$, ta có:

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| \le k.$$

Vì f khả vi tại x_0 theo giả thiết, nên khi chuyển qua giới hạn khi h tiến tới 0, ta suy ra $|f'(x_0)| \le k$. Vậy f' bị chặn trên I. ■

Nhận xét:

1) Với các giả thiết của mệnh đề, ta đã được:

$$\sup_{(x_1,x_2)\in I^2, x_1 \ne x_2} \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = \sup_{x \in I} |f'(x)|.$$

2) Mệnh đề trên có ích trong việc khảo sát các dãy thực thuộc loại $u_{n+1} = f(u_n)$ (xem 3.4.3).

VÍ DỤ:

Cho f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2+3x-1}{x^4+x^2+1}$$

Rõ ràng là f khả vi trên $\mathbf{R}$ và một phép tính sơ cấp cho thấy:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{-4x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 3}{\left(x^4 + x^2 + 1\right)^2}.$$

Với $x \in \mathbf{R}$, ta đặt $t = \text{Max}(1, |x|)$. Ta có với mọi x thuộc $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \left|-4x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 3\right| \le 29t^5 \\ (x^4 + x^2 + 1)^2 \ge (x^4 + 1)^2 \ge t^8 \end{cases},$$

từ đó $|f'(x)| \le \dfrac{29}{t^3} \le 29$.

Theo mệnh đề trên, f có tính Lipschitz.

Bài tập

◊ **5.2.6 Định lý số gia hữu hạn suy rộng**

Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, f, g: $[a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $]a; b[$ sao cho $\forall x \in]a; b[$, $g'(x) \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in]a; b[$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

◊ **5.2.7 Quy tắc L'Hospital (Lôpitan)**

Cho $x_0 \in \mathbb{R}$, I là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, f, g: $I \to \mathbb{R}$ liên tục tại x_0 và khả vi trên $I - \{x_0\}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in I - \{x_0\},\ g'(x) \neq 0 \\ \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ (sử dụng bài tập 5.2.6).

Ứng dụng: Giả sử đã biết đạo hàm của các hàm số lượng giác, hãy chứng minh rằng:

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1; \quad \frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}; \quad \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{6}.$$

◊ **5.2.8*** Cho f: $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ khả vi trên $]0; +\infty[$ sao cho f' có giới hạn hữu hạn l tại $+\infty$.

Chứng minh rằng $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$.

◊ **5.2.9** Cho $h \in \mathbb{R}_+^*$, $f: [-h; h] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^5.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in]-h; h[$ sao cho:

$$f(h) - f(-h) = \frac{h}{3}(f'(-h) + 4f'(0) + f'(h)) - \frac{1}{90}h^5 f^{(5)}(c).$$

◊ **5.2.10** Cho $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a; b]$, khả vi trên $]a; b[$, có thể trừ ra một số hữu hạn n ($n \in \mathbb{N}$) điểm. Chứng minh rằng tồn tại $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, và $(c_1, ..., c_{n+1}) \in (]a; b[)^{n+1}$ sao cho $a < c_1 < ... < c_{n+1} < b$, thoả mãn:

$$f(b) - f(a) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f'(c_i)\right)(b-a).$$

◊ **5.2.11* Định lý Darboux**

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, f: $I \to \mathbb{R}$ khả vi trên I. Chứng minh rằng $f'(I)$ là một khoảng của $\mathbb{R}$.

◊ **5.2.12** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f:]a; b[\to \mathbb{R}$ khả vi trên $]a; b[$ và sao cho:

$\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{b^-} f = +\infty$.

Chứng minh rằng $f'(]a; b[) = \mathbb{R}$ (sử dụng định lý Darboux, bài tập 5.2.11).

◊ **5.2.13*** Cho $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho $a < b < c < d$ và $f : [a; d] \to \mathbb{R}$ khả vi trên $[a; d]$

Chứng minh rằng tồn tại $(u, v) \in]a; c[\times]b; d[$ sao cho:

$$\begin{cases} u < v \\ f(c) - f(a) = (c-a)f'(u) \\ f(d) - f(b) = (d-b)f'(v) \end{cases}.$$

(Sử dụng định lý Darboux, bài tập 5.2.11).

5.3 Sự biến thiên của hàm

5.3.1 Khảo sát tính đơn điệu của hàm khả vi

♦ **Mệnh đề**

Nếu $\begin{cases} f : I \to \mathbb{R} \text{ liên tục trên } I \\ f \text{ khả vi trên } \overset{\circ}{I} \\ \forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0 \end{cases}$, thì f không đổi trên I.

Chứng minh:

Cho $(x_1, x_2) \in I^2$ sao cho $x_1 < x_2$. Theo định lý số gia hữu hạn (áp dụng vào f trên $[x_1; x_2]$, tồn tại $c \in]x_1; x_2[$ sao cho:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) = 0.$$ ■

Nhận xét:

Kết quả trên vẫn đúng trong trường hợp tổng quát hơn $f : I \to \mathbb{C}$ (xét Re f và Im f).

♦ **Định lý 1** cho $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục trên I, khả vi trên $\overset{\circ}{I}$. Để f tăng trên I thì điều kiện cần và đủ là: $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$.

Chứng minh:

1) Giả sử f tăng trên I.

Cho $x_0 \in \overset{\circ}{I}$; với mọi $h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $x_0 + h \in I$, ta có: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$.

Chuyển qua giới hạn khi h tiến tới 0 ta suy ra $f'(x_0) \geq 0$.

2) Ngược lại, giả sử: $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) \geq 0$. Cho $(x_1, x_2) \in I^2$ sao cho $x_1 < x_2$. Áp dụng định lý số gia hữu hạn vào f trên $[x_1; x_2]$, ta thấy tồn tại $c \in]x_1; x_2[$ sao cho:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0.$$

Vậy f tăng trên I. ■

Nhận xét: Khi khảo sát $-f$ thay cho f, ta thu được định lý tương tự như định lý trên bằng cách thay:

$$\begin{cases} \text{tăng bởi giảm} \\ \geq 0 \text{ bởi } \leq 0 \end{cases}.$$

♦ **Định lý 2** Cho $f : I \to \mathbb{R}$ liên tục trên I, khả vi trên $\overset{o}{I}$. Để f tăng nghiêm ngặt, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \forall x \in \overset{o}{I},\ f'(x) \geq 0 \\ \{x \in \overset{o}{I},\ f'(x) = 0\} \text{ không chứa bất kỳ một khoảng có phần} \\ \text{trong không rỗng nào.} \end{cases}$$

Chứng minh:

1) Giả sử f tăng nghiêm ngặt trên I. Theo định lý 1 ta đã có:

$$\forall x \in \overset{o}{I},\ f'(x) \geq 0.$$

Ta lập luận bằng phản chứng: Giả sử $\{x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0\}$ chứa một khoảng có phần trong không rỗng. Khi đó tồn tại $c \in \{x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0\}$ và $\alpha > 0$ sao cho

$$]c - \alpha; c + \alpha[\subset \{x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0\}.$$

Điều này có nghĩa là $\forall x \in]c - \alpha; c + \alpha[,\ f'(x) = 0$.

Theo Mệnh đề trong 5.3.1, f không đổi trên $]c - \alpha; c + \alpha[$, do đó không tăng nghiêm ngặt trên I, mâu thuẫn với giả thiết.

Ta kết luận là $\{x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0\}$ không chứa bất kỳ khoảng nào có phần trong không rỗng.

2) Ngược lại, giả sử:

$$\begin{cases} \forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) \geq 0 \\ \{x \in \overset{o}{I},\ f'(x) = 0\} \text{ không chứa bất kỳ khoảng nào có phần trong không rỗng} \end{cases}$$

Theo Định lý 1, ta thấy ngay là f tăng trên I. Ta lập luận phản chứng: giả sử f không tăng nghiêm ngặt trên I, như vậy tồn tại $(x_1, x_2) \in I^2$ sao cho $x_1 < x_2$ và $f(x_1) = f(x_2)$. Vì f tăng trên I, nên ta có:

$$\forall x \in [x_1; x_2], \quad f(x) = f(x_1),$$

và $]x_1, x_2[\in \{x \in \overset{\circ}{I} \,;\, f'(x) = 0\}$, trái với giả thiết.

Vậy f tăng nghiêm ngặt trên I. ∎

Nhận xét:

1) Trường hợp riêng, nếu f khả vi trên I và nếu $(\forall x \in I,\ f'(x) > 0)$ thì f tăng nghiêm ngặt trên I.

2) Có thể xảy ra trường hợp: f khả vi trên I, tăng nghiêm ngặt trên I, và f' triệt tiêu ít nhất tại một điểm thuộc I, ví dụ: $f: \underset{x \mapsto x^3}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$.

Các định lý 1 và 2 được sử dụng trong việc khảo sát sự biến thiên của hàm số. Các kết quả thường được trình bày trong một bảng, được gọi là **bảng biến thiên** của f.

Chẳng hạn xét $f: \underset{x \mapsto \frac{x}{1+x^2}}{\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}}$, ánh xạ f khả vi trên $\mathbf{R}_+$ và $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Các mũi tên, theo nguyên tắc, chỉ sự đơn điệu nghiêm ngặt.

♦ **Định lý 3** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^I$. Nếu f khả vi trên I và nếu $(\forall x \in I,\ f'(x) > 0)$ hoặc $(\forall x \in I,\ f'(x) < 0)$, thì $\widetilde{f}: \underset{x \mapsto f(x)}{I \to f(I)}$ là một song ánh.

Ánh xạ ngược $\widetilde{f}^{-1}$ (viết một cách lạm dụng là f^{-1}) khả vi trên $f(I)$ và:

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Chứng minh:
Chẳng hạn ta giả thiết: $f' > 0$ (trường hợp $f' < 0$ đưa về trường hợp này bằng cách xét $-f$). Theo định lý 2, f tăng nghiêm ngặt. Ta có thể áp dụng định lý 3 phần 5.1.2 để suy ra rằng f^{-1} khả vi và biểu diễn đạo hàm của nó. ■

Nhận xét: Theo định lý Darboux (bài tập 5.2.11) ta có thể thay giả thiết $(\forall x \in I,\ f'(x) > 0)$ hay $(\forall x \in I, f'(x) < 0)$ bởi $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

◆ **Định nghĩa** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to J$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

Ta nói f là một C^n–**vi phôi từ** I **lên** J khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } I \\ f \text{ là song ánh} \\ f^{-1} \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } J \end{cases}$$

◆ **Định lý 4** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to J$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Để f là một C^n–vi phôi từ I lên J, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} f \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } I \\ f' > 0 \text{ hoặc } f' < 0 \\ f(I) = J \end{cases}$$

Chứng minh:

1) Giả sử f là một C^n–vi phôi từ I lên J. Nói riêng f và f^{-1} đều thuộc lớp C^1 và $\left(f^{-1} \circ f\right)' = 1$, từ đó suy ra $\left(\left(f^{-1}\right)' \circ f\right) f' = 1$. Điều này chứng tỏ rằng f' không triệt tiêu tại bất cứ điểm nào thuộc I; vì f' liên tục, nên định lý các giá trị trung gian cho thấy: $f' > 0$ hoặc $f' < 0$.

2) Đảo lại, giả sử f thuộc lớp C^n trên I và $f' > 0$ (trường hợp $f' < 0$ được quy về trường hợp này bằng cách xét $-f$). Định lý 3 chứng tỏ rằng f là song ánh, f^{-1} khả vi trên I và $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Công thức cuối này chứng tỏ rằng $(f^{-1})'$ liên tục (vì f' và f^{-1} đều liên tục). Từ công thức này, một phép quy nạp đơn giản cho phép chứng tỏ rằng với mọi $k \in \{1,\ldots,n\}$, f^{-1} thuộc lớp C^k trên J, đặc biệt, f^{-1} thuộc lớp C^n trên J.

Bài tập

◊ **5.3.1** Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \le |x-y| g(|x-y|) \\ \lim\limits_{0^+} g = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

◊ **5.3.2** Cho $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bị chặn,khả vi 2 lần sao cho $f'' \ge 0$.Chứng minh rằng f là hàm giảm.

◊ **5.3.3** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n$; $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $\lambda_n \neq 0$.

Chứng minh rằng phương trình $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$, ẩn là $x \in \mathbb{R}_+^*$, có nhiều nhất là n nghiệm.

◊ **5.3.4** Tìm tất cả các ánh xạ f trong mỗi trường hợp sau:

a) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{khả vi trên } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{khả vi trên } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + f(y)) = f(y + f(x)) \end{cases}$

c) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{khả vi 2 lần trên } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y) f''(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} f:]-1;1[\to \mathbb{R} \quad \text{khả vi trên }]-1;1[\\ \forall (x,y) \in]-1;1[,\ f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) \end{cases}$

e) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{khả vi trên } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(xy \neq 1 \Rightarrow f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)\right) \end{cases}$

◊ **5.3.5** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^{n+1} - (n+1)x + n \ge 0$.

b) $\forall x \in]-1; +\infty[,\ \dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$.

c) $\forall x \in]0; +\infty[,\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{8} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} < \dfrac{1}{2}$.

d) $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ x\cos x < \dfrac{\pi^2}{16}$.

e) $\forall x \in [0; 1[,\ \tan x \le \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

f) $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[,\ x\cot\text{an}\dfrac{x}{2} - x\tan^3\dfrac{x}{2} < 2$.

◊ **5.3.6** *a)* Chứng minh rằng: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

(sử dụng bài tập 5.3.5 *b)*).

b) Suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(k^2+k\right)}{k+1} < \left(\ln(n+1)\right)^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(k^2+k\right)}{k}$.

◊ **5.3.7** *a)* Chứng minh rằng trong lân cận của 0:

$$-\frac{x^2}{2} - 3x^4 \le \ln\cos x \le -\frac{x^2}{2}.$$

b) Suy ra: $\lim_{n\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\sqrt{k}}{n}$.

◊ **5.3.8** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m > n \Rightarrow \left(x^m + y^m\right)^n < \left(x^n + y^n\right)^m$.

b) $\forall (x, y) \in]0; 1[^2, \left(x < y \Rightarrow \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}\right)$.

c) $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]0; 1[, \ x - \operatorname{Arcsin} y \le \frac{\sqrt{1-y^2} - \cos x}{y}$.

d) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left(0 < x < y < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} < \frac{\tan y}{\tan x} < \frac{4}{\pi}\frac{y}{x}\right)$.

5.3.2 Khảo sát các cực trị của một hàm khả vi

♦ **Định nghĩa** Cho $a \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$.

1) Ta nói rằng f có một **cực đại địa phương tại** a khi và chỉ khi tại lân cận của a:

$$f(x) \le f(a)$$

2) Ta nói rằng f có một **cực tiểu địa phương tại** a khi và chỉ khi tại lân cận của a:

$$f(x) \ge f(a)$$

3) Ta nói rằng f có một **cực đại địa phương ngặt** (hoặc **chặt tại** a) khi và chỉ khi tại lân cận của a, trừ tại a:

$$f(x) < f(a)$$

4) Ta nói rằng f có một **cực tiểu địa phương chặt tại** a khi và chỉ khi tại lân cận của a, trừ tại a:

$$f(x) > f(a).$$

5) Ta nói rằng f có một **cực trị địa phương tại** a khi và chỉ khi f có một cực đại địa phương tại a hoặc một cực tiểu địa phương tại a.

6) Ta nói rằng f có một **cực trị địa phương chặt tại** a khi và chỉ khi f có một cực đại địa phương chặt tại a hoặc một cực tiểu địa phương chặt tại a.

VÍ DỤ:

1) Mọi ánh xạ hằng có tại mọi điểm một cực đại địa phương và một cực tiểu địa phương.

2) $\begin{array}{l}|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \quad x\mapsto|x|\end{array}$ có một cực tiểu địa phương chặt tại $x = 0$.

3) $\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \quad x\mapsto d(x,\mathbb{Z})\end{array}$ (xem 4.1.4 Ví dụ 3) có một cực đại địa phương chặt tại $\frac{1}{2}$.

Nhận xét

Ta thường đưa việc khảo sát cực tiểu địa phương và việc khảo sát cực đại địa phương từ trường hợp này sang trường hợp khác bằng cách xét $-f$ thay cho f.

◆ **Định lý:** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $a \in I, f \in \mathbb{R}^I$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} a \in \overset{\circ}{I} \\ f \text{ khả vi tại } a \\ f \text{ có một cực trị địa phương tại } a \end{array}\right.$, thì $f'(a) = 0$.

Chứng minh:

Ta giả thiết chẳng hạn rằng f có cực đại địa phương tại a. Với mọi $h \in \mathbb{R}^*$ sao cho $a+h \in I$, ta có:

$$\begin{cases} h>0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \\ h<0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0 \end{cases}.$$

Chuyển qua giới hạn khi h tiến tới 0, ta suy ra $\begin{cases} f'(a)\le 0 \\ f'(a)\ge 0 \end{cases}$, vậy $f'(a) = 0$.

Về cơ bản đó chính là phép chứng minh định lý Rolle 5.2.1.

Nhận xét:

1) Chính xác hơn, phép chứng minh trên chứng tỏ rằng:

nếu $\begin{cases} a \in \overset{o}{I} \\ f \text{ khả vi phải và trái tại } a \\ f \text{ có cực đại địa phương tại } a \end{cases}$, thì $f_t^{'}(a) \geq 0$ và $f_p^{'}(a) \leq 0$

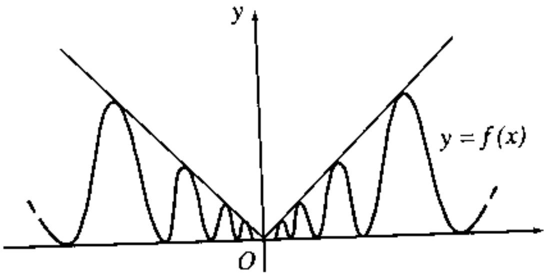
2) Định lý không đúng nếu a là một mút của I. Chẳng hạn f: $\underset{x \mapsto x}{[0;1] \to \mathbb{R}}$ khả vi trên [0; 1], có cực tiểu địa phương tại 0; tuy nhiên $f\,'(0) = 1 \neq 0$.

3) Một ánh xạ có thể có một cực trị địa phương tại a mà không khả vi tại a. Chẳng hạn,

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} |x|\sin^2\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

có một cực tiểu địa phương không chặt tại 0, nhưng không khả vi tại 0.



4) Nếu f khả vi tại a và $f\,'(a) = 0$, thì ta không thể suy ra là f có một cực trị địa phương tại a. Ví dụ: $f : \underset{x \mapsto x^3}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ và $a = 0$.

Trong khi đó, ta chú ý đến tính chất hiển nhiên sau đây vốn hay được sử dụng.

♦ **Mệnh đề** Cho $a \in \overset{o}{I}$, $f \in \mathbb{R}^I$.

Nếu f tăng trên $I \cap\,]-\infty; a]$ và giảm trên $I \cap [a; +\infty[$, thì f có một cực đại địa phương tại a.

x		a	
$f(x)$		↗	↘

Bài tập

◊ **5.3.9** Tính $\operatorname{Sup}\left\{-x^3 + \dfrac{75}{4}x;\ x \in \mathbb{R} \text{ và } x^4 + 36 \leq 13x^2\right\}$

◊ **5.3.10** Cho $f :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ khả vi sao cho $\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{1^-} f = +\infty$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in]-1; 1[$ sao cho $f\,'(c) = 0$.

5.4 Hàm lồi

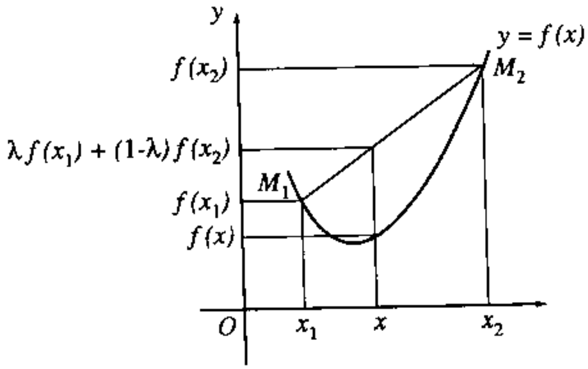
5.4.1 Định nghĩa

- **Định nghĩa**

Ánh xạ $f: I \to \mathbb{R}$ được gọi là **lồi** khi và chỉ khi:

$\forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall\lambda \in [0; 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

Ta nói f là **lõm** khi và chỉ khi $-f$ lồi.



Đặt:

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

$M_1(x_1, f(x_1))$,

$M_2(x_2, f(x_2))$,

$M(x, f(x))$ là các điểm của đường cong C_f biểu diễn của f có hoành độ là x_1, x_2, x.

Ánh xạ f lồi khi và chỉ khi với mọi cặp (M_1, M_2), những điểm của C_f, mọi điểm M của C_f có hoành độ nằm giữa các hoành độ của M_1 và M_2 đều ở phía dưới đoạn thẳng M_1M_2.

Nói cách khác, f lồi khi và chỉ khi đường cong nằm dưới mọi dây cung của nó (một dây cung ở đây là một đoạn thẳng).

Đặt $E_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \ge f(x)\}$ gọi là **êpi–đồ thị** của f. E_f được biểu diễn hình học bởi phần mặt phẳng nằm phía trên C_f.

Ta nhắc lại rằng một bộ phận E của mặt phẳng được gọi là **lồi** khi và chỉ khi:

$$\forall (A, B) \in E^2,\ [AB] \subset E.$$

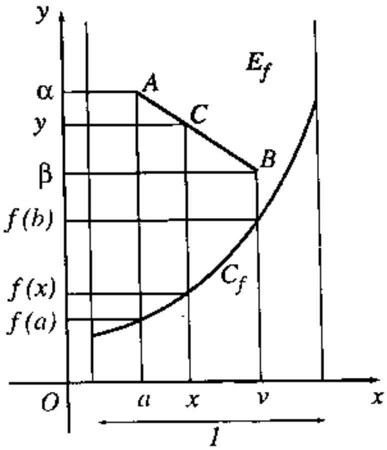
ở đây $[AB]$ chỉ **đoạn thẳng** của mặt phẳng nối liền A và B, nghĩa là:

$$[AB] = \{A + \lambda\overrightarrow{AB}\ ;\ \lambda \in [0; 1]\}.$$

- **Mệnh đề 1** Ánh xạ f lồi khi và chỉ khi êpi – đồ thị E_f của nó là một bộ phận lồi của mặt phẳng.

Chứng minh:

1)



Giả sử f lồi, và cho $A, B \in E_f$, $\lambda \in [0;1]$, $C = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, (a, α), (b, β), (x, y) là các toạ độ theo thứ tự của A, B, C.

Ta có $x = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b$, từ đó do f lồi suy ra:

$$f(x) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

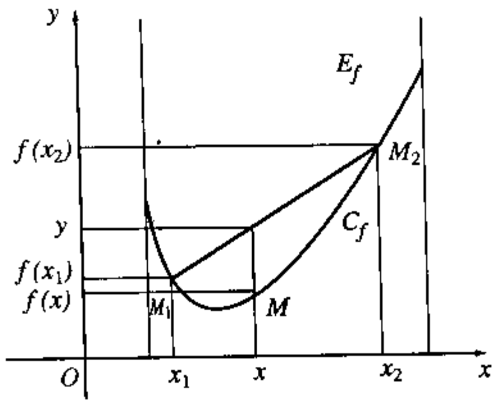
Mặt khác, vì A và B thuộc E_f, ta có:

$$f(a) \leq \alpha \quad \text{và} \quad f(b) \leq \beta.$$

Vì vậy $f(x) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta = y$. Do đó $C \in E_f$. Điều này chứng tỏ:

$$\forall (AB) \in (E_f)^2, [AB] \subset E_f.$$

2)



$y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$

Đảo lại, giả sử E_f lồi và cho $(x_1, x_2) \in I^2$,

$\lambda \in [0; 1]$, $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$,

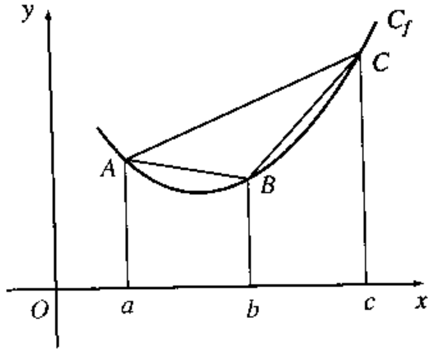
$M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, $M(x, f(x))$.

Vì $(M_1, M_2) \in (E_f)^2$, nên $[M, M_2] \subset E_f$ và đặc biệt, điểm $P(x, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2))$ cũng thuộc E_f, vậy:

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Điều này chứng tỏ rằng f lồi.

Khảo sát tỷ số gia



Cho $f \in \mathbb{R}^I$, $(a, b, c) \in I^3$ sao cho $a < b < c$ $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, $C(c, f(c))$. Ký hiệu $p(AB)$, $p(AC)$, $p(BC)$ là các hệ số góc theo thứ tự của các đường thẳng (AB), (AC) và (BC).

Do ánh xạ $\begin{array}{l}[0;1] \to [a;c] \\ \lambda \mapsto \lambda a+(1-\lambda)c\end{array}$ là một song ánh, nên ta có sự tương đương lôgic như sau, nếu đặt $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ hay $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$:

$f(\lambda a + (1 - \lambda)c) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(c) \Leftrightarrow (c - a)f(b) \le (c - b)f(a) + (b - a)f(c)$.

Bằng cách làm xuất hiện $f(b) - f(a)$ hay $f(c) - f(b)$ hay $f(c) - f(a)$, ta thấy các bất đẳng thức sau tương đương từng đôi một:

$$\begin{cases}(c-a)f(b) \le (c-b)f(a) + (b-a)f(c) \\ p(AB) \le p(AC) \\ p(AC) \le p(BC) \\ p(AB) \le p(BC)\end{cases}$$

Ta suy ra kết quả sau:

- **Mệnh đề 2** Cho $f \in \mathbb{R}^I$. Với mọi $a \in I$, ta ký hiệu:

  $\begin{array}{l}\tau_a : I - \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{array}$, gọi là ánh xạ tỷ số gia tại a. Để f là lồi, điều kiện cần và đủ là với mọi $a \in I$, τ_a là một ánh xạ tăng trên $I - \{a\}$.

- **Mệnh đề 3** **(Bất đẳng thức Jensen)**

  Nếu: $f \in \mathbb{R}^I$ lồi, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,..., x_n \in I$, $\lambda_1,..., \lambda_n \in [0; 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, thì ta có: $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

Chứng minh:

Quy nạp theo n.

Tính chất trên là tầm thường khi $n = 1$; khi $n = 2$ thì đó là định nghĩa tính lồi của f.

Giả sử tính chất trên đã đúng với một số nguyên $n \in \mathbb{N}^*$, nghĩa là: với mọi $x_1,...,x_n \in I$ và $\lambda_1,...,\lambda_n \in [0;1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, ta có:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Cho $x_1,..., x_{n+1} \in I$ và $\lambda_1,..., \lambda_{n+1} \in [0; 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Nếu $\lambda_1 =...= \lambda_n = 0$, bất đẳng thức ta muốn có là hiển nhiên.

Giả sử $(\lambda_1,...,\lambda_n) \neq (0,...,0)$; đặt $\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} > 0$ và $x' = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Vì $x_1,..., x_n \in I$, mà I là một khoảng của $\mathbb{R}$, nên rõ ràng là $x' \in I$. Áp dụng định nghĩa tính lồi của f:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\big(\mu x' + (1-\mu) x_{n+1}\big)$$

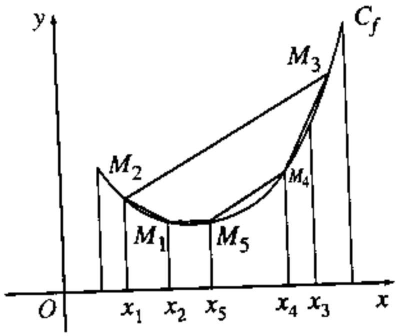
$$\leq \mu f(x') + (1-\mu) f(x_{n+1}) = \mu f(x') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Áp dụng giả thiết quy nạp:

$$f(x') = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} f(x_k) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

vì $\left(\forall k \in \{1,...,n\}, \frac{\lambda_k}{\mu} \geq 0\right)$ và $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} = 1$.

Ta suy ra: $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$. ■



Bất đẳng thức trên được biểu diễn đồ thị như sau: Đa giác lồi xác định bởi các điểm $M_k(x_k, f(x_k))$ $(1 \leq k \leq n)$ hoàn toàn nằm trên đường cong C_f biểu diễn f.

Bài tập

◊ **5.4.1** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, lồi, $(a, b, c) \in I^3$ sao cho $a < b < c$. Chứng tỏ rằng:

$$\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

◊ **5.4.2** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$.

$$\text{Giả sử } \begin{cases} f \geq 0,\ g \geq 0 \\ (f \text{ và } g \text{ tăng}) \text{ hoặc } (f \text{ và } g \text{ giảm}) \\ f, g \text{ lồi} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng fg lồi trên I.

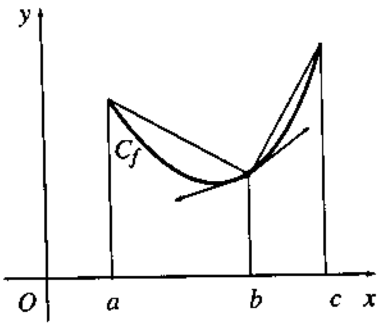
◊ **5.4.3** Cho $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ lồi và $\varphi : \begin{array}{l} \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)+f(1-x) \end{array}$. Chứng minh φ là hàm giảm.

5.4.2 Sử dụng đạo hàm trong việc khảo sát tính lồi

♦ **Mệnh đề** Giả sử $f: I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ lồi. Khi đó f khả vi phải và trái tại mọi điểm thuộc $\overset{\circ}{I}$, và với mọi $(a, b, c) \in I^3$ sao cho $a < b < c$, ta có:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_t'(b) \leq f_p'(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Chứng minh:



Vì f lồi, theo 5.4.1, Mệnh đề 2, với mọi $b \in \overset{\circ}{I}$, ánh xạ

$$\tau_b : \begin{array}{l} I-\{b\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{array}$$

tăng trên $I - \{b\}$.

- Cho $u \in]a; b[$; ta có: $\forall v \in]b; c[$, $\tau_b(a) \leq \tau_b(u) \leq \tau_b(v) \leq \tau_b(c)$. Như vậy τ_b tăng trên $]b; c[$ và bị chặn dưới bởi $\tau_b(u)$. Theo 4.2.4, τ_b có giới hạn phải tại b (vậy f khả vi phải tại b) và $\tau_b(a) \leq \tau_b(u) \leq f'_p(b) \leq \tau_b(c)$.

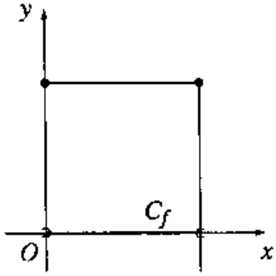
- Nhưng khi đó τ_b tăng trên $]a; b[$ và bị chặn trên bởi $f_p'(b)$, vậy nó có giới hạn trái tại b (vậy f khả vi trái tại b) và $\tau_b(a) \leq f_t'(b) \leq f_p'(a) \leq \tau_b(c)$. ■

♦ **Hệ quả** Nếu f lồi trên khoảng I, thì f liên tục trên $\overset{\circ}{I}$.

Nhận xét:

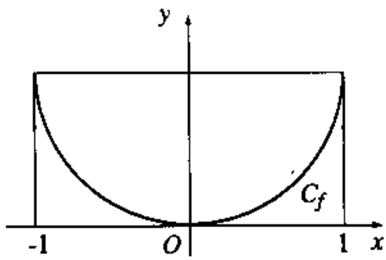
f có thể lồi trên $[a; b]$ nhưng vẫn gián đoạn tại a, hoặc liên tục tại a nhưng không khả vi tại a. Ví dụ:

1)



$$f: \quad [0;1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \{0;1\} \\ 0 & \text{nếu } x \in]0;1[\end{cases}$$

2)

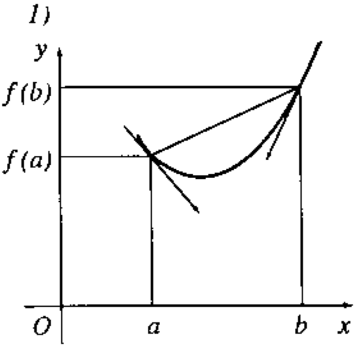


$$f: [-1; 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

♦ **Định lý** Cho $f: I \to \mathbb{R}$ khả vi trên I. Để f là ánh xạ lồi, điều kiện cần và đủ là f ' tăng trên I.

Chứng minh:

1)



Giả sử f lồi và $a, b \in I$ sao cho $a < b$.

Theo 5.4.2 Mệnh đề: $f'(a) \le \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

và $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \le f'(b)$,

từ đó $f'(a) \le f'(b)$.

2) Đảo lại, giả sử f ' tăng trên I. Cho $a, b \in I$ sao cho $a < b$ chẳng hạn (trường hợp $a = b$ là tầm thường), và $\lambda \in]0; 1[$ (các trường hợp $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ là tầm thường); đặt $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$.

Áp dụng định lý số gia hữu hạn đối với f trên $[a; x]$ và $[x; b]$; tồn tại $c \in]a; x[$ và $d \in]x; b[$ sao cho: $\begin{cases} f(x) - f(a) = (x-a)f'(c) = (1-\lambda)(b-a)f'(c) \\ f(b) - f(x) = (b-x)f'(d) = \lambda(b-a)f'(d) \end{cases}$.

Vì f' tăng trên $f'(c) \le f'(d)$, vậy: $\lambda(f(x) - f(a)) \le (1 - \lambda)(f(b) - f(x))$, nghĩa là:

$$f(x) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Ta kết luận f là ánh xạ lồi.

♦ **Hệ quả** Cho $f: I \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần trên I. Để f là ánh xạ lồi, điều kiện cần và đủ là $f'' \ge 0$.

VÍ DỤ:

Các ánh xạ $\begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln x \end{array}$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+e^x) \end{array}$ là lồi vì các đạo hàm cấp 2 đều không âm.

Bài tập

◊ **5.4.4** Cho $f: [0; 1] \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần sao cho $\forall x \in [0; 1], f''(x) \le 1$. Chứng minh:

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \le \frac{1}{4}.$$

◊ **5.4.5** Cho I là một khoảng bị chặn của $\mathbb{R}$ và $f: I \to \mathbb{R}$ lồi. Chứng minh rằng f bị chặn dưới trên I.

◊ **5.4.6** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ lồi. Giả sử f bị chặn trên và đạt tới biên trên tại một điểm thuộc $\overset{\circ}{I}$. Chứng minh rằng f là một ánh xạ hằng.

◊ **5.4.7** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \left(\overset{\circ}{I}\right)^2$, $f: I \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu f lồi trên I thì f có tính Lipschitz trên $[a; b]$.

◊ **5.4.8** Cho I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ và $f: I \to \mathbb{R}$ lồi và khả vi. Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên I.

◊ **5.4.9** Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần, lồi, sao cho $f \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x}) \end{array} \text{ lồi}$$

◊ **5.4.10** Cho $f:]0; +\infty[$ khả vi hai lần, lồi, sao cho $f \ge 0$, và $\alpha \in [1; +\infty[$. Chứng minh rằng: $\begin{array}{rl} g_\alpha: &]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^{\frac{1}{2}\alpha+1} f\left(x^{-\alpha}\right) \end{array}$ lồi.

◊ **5.4.11*** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}_+^*$. Chứng minh rằng hai tính chất sau tương đương:

(i) $\ln \circ f$ lồi.

(ii) Với mọi $a \in \mathbb{R}$, $\begin{array}{rl} f_a: & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto e^{ax} f(x) \end{array}$ lồi.

5.4.3 Bất đẳng thức lồi

Cho $f : I \to \mathrm{R}$; nếu f khả vi hai lần trên I và $f'' \geq 0$ thì f lồi (xem 5.4.2, Hệ quả) và ta có thể áp dụng bất đẳng thức Jensen (xem 5.4.1, Mệnh đề 3). Ta nói rằng bất đẳng thức thu được là một **bất đẳng thức lồi**. Ta sẽ xét hai ví dụ quan trọng.

1) **So sánh trung bình cộng và trung bình nhân**

(Phương pháp khác xem C1.1)

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,..., a_n \in \mathrm{R}_+^*$, ta định nghĩa **trung bình cộng** của $a_1,...,a_n$ là:

$$A(a_1,...,a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ ,$$

và **trung bình nhân** của $a_1,..., a_n$ là:

$$G(a_1,...,a_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ánh xạ $f: \begin{array}{l}]1;+\infty[\to \mathrm{R} \\ x \mapsto -\ln x \end{array}$ lồi, vì f khả vi hai lần trên $]0; +\infty[$ và $\forall x \in]0;+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$. Vì vậy ta có thể áp dụng bất đẳng thức Jensen; với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,..., a_n \in]0; +\infty[$, $\lambda_1,..., \lambda_n \in [0; 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, ta có:

$$-\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(-\ln a_k\right).$$

Điều này tương đương với $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \geq \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}$

Đặc biệt, lấy $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ ta có:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

nghĩa là: $G(a_1,..., a_n) \leq A(a_1,..., a_n)$.

2) **Các bất đẳng thức Hölder và Minkowski trong $\mathbb{C}^n$**

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) \in]1; +\infty[^2$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Cho $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen thu được ở *1)* trong trường hợp $n = 2$, $a_1 = x^p$, $a_2 = y^q$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ ta được:

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

Bất đẳng thức cuối cùng này vẫn đúng khi x hoặc y bằng 0.

b) Cho $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, ta ký hiệu:

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \beta = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nếu $\alpha \ne 0$ và $\beta \ne 0$, ta có thể áp dụng bất đẳng thức đạt được ở *a)* trong trường hợp: $x = \frac{|x_k|}{\alpha}$, $y = \frac{|y_k|}{\beta}$. Ta được:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \frac{|x_k y_k|}{\alpha\beta} = \frac{|x_k|}{\alpha}\frac{|y_k|}{\beta} \le \frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{\beta^q}.$$

Cộng lại, ta được:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \le \frac{1}{p\alpha^p}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p + \frac{1}{q\beta^q}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q = \frac{1}{p\alpha^p}\alpha^p + \frac{1}{q\beta^q}\beta^q$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ta suy ra **bất đẳng thức Hölder trong $\mathbb{C}^n$:**

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz (xem 1.3.2*) là trường hợp riêng của bất đẳng thức Hölder: $p = q = 2$.*

c) Với cùng những ký hiệu như trên:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \le \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k + y_k|^{p-1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder hai lần:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

$$\le \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Nhưng $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vậy $(p-1)q = p$. Ta suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \le \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Từ đó có **bất đẳng thức Minkowski:**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bài tập

◊ **5.4.12** *a)* Chứng minh rằng: $f: \begin{array}{l}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln(\ln x) \end{array}$ là ánh xạ lồi.

b) Suy ra: $\forall (x, y) \in\ ]1; +\infty[^2,\ \ln\frac{(x+y)}{2} \ge \sqrt{\ln x \ln y}$.

◊ **5.4.13** *a)* Chứng minh rằng: $f: \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln x \end{array}$ là ánh xạ lồi.

b) Suy ra: $\forall (x, y, a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ \ x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \ge (x+y)\ln\frac{(x+y)}{a+b}$.

Chương 6

Tích phân

Trong chương này ta xét phép tích phân các ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn.

6.1 Tích phân các ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Trong toàn bộ tiết (6.1) này, (a, b) chỉ một cặp số thực sao cho $a < b$.

6.1.1 Đại số các ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Việc nghiên cứu này đã được bắt đầu từ 4.1.5 .

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi một họ hữu hạn $(a_i)_{0 \le i \le n}$ sao cho:

$a = a_0 < a_1 < .... a_{n-1} < a_n = b$ $(n \ge 1)$ là một phân hoạch của $[a ; b]$.

Ta ký hiệu $\mathcal{S}$ là tập hợp các phân hoạch của $[a; b]$. Với mỗi $s = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$, **bước** (hoặc **môđun**) của s là số thực $p(s)$ được định nghĩa như sau: $p(s) = \underset{0 \le i \le n-1}{\text{Max}} (a_{i+1} - a_i)$.

Ký hiệu $\mathcal{F}$ là tập hợp các bộ phận hữu hạn của $[a, b]$ có chứa $\{a, b\}$. Rõ ràng là ánh xạ $\theta: \mathcal{S} \to \mathcal{F}$ cho mỗi phân hoạch $(a_i)_{0 \le i \le n}$ của $[a; b]$ ứng với một tập hợp $\{a_i ; 0 \le i \le n\}$, là một song ánh. Đương nhiên, $\mathcal{F}$ được trang bị một quan hệ thứ tự, định nghĩa bởi phép bao hàm, và rõ ràng là $\mathcal{F}$ ổn định đối với các phép hợp và giao:

$$\forall (F, G) \in \mathcal{F}^2, (F \cup G \in \mathcal{F}, F \cap G \in \mathcal{F}).$$

Song ánh θ cho phép chuyển thứ tự $(\subset)$ và các luật hợp thành trong $(\cup, \cap)$ từ $\mathcal{F}$ vào $\mathcal{S}$. Vậy ta định nghĩa trong $\mathcal{S}$:

- một quan hệ thứ tự, ký hiệu $\prec$:

$$\forall (s, s') \in \mathcal{S}^2, (s \prec s' \Leftrightarrow \theta(s) \subset \theta(s'))$$

(Khi đó ta nói s' mịn hơn s)

- một luật hợp thành trong, ký hiệu là $\vee$:

$$\forall (s, s') \in \mathcal{S}^2, (s \vee s' = \theta^{-1} (\theta(s) \cup \theta(s')))$$

- một luật hợp thành trong, ký hiệu là $\wedge$:

$$\forall (s, s') \in \mathcal{S}^2, (s \wedge s' = \theta^{-1} (\theta(s) \cap \theta(s'))).$$

VÍ DỤ

Lấy $a = 0$, $b = 6$, $s = (0, 1, 2, 3, 4, 6)$, $s' = (0, 2, 3, 6)$. Ta được $s \vee s' = (0,1,2,3,4,6)$, $s \wedge s' = (0, 2, 3, 6)$, s và s' không so sánh được theo $\prec$.

Ta có thể nói vắn tắt là:

$s \vee s'$ thu được bằng cách sắp thứ tự bảng các điểm thuộc s và các điểm thuộc s'.

$s \wedge s'$ thu được bằng cách sắp thứ tự bảng các điểm chung của s và s'.

◊ Định nghĩa 2

1) Một ánh xạ $e = [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi **ánh xạ bậc thang** khi và chỉ khi tồn tại $s = (a_0, \ldots\ldots, a_n) \in \mathcal{S}$ và $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \forall x \in \left]a_i ; a_{i+1}\right[, e(x) = \lambda_i.$$

Ở đây ta ký hiệu $E(a, b)$ là tập hợp các ánh xạ bậc thang trên $[a, b]$.

2) Cho $s = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{S}$ và $e \in E(a, b)$, ta nói s **tương thích với** e khi và chỉ khi, với mọi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ thu hẹp của e trên $\left]a_i ; a_{i+1}\right[$ là ánh xạ hằng.

Nhận xét

1) Theo định nghĩa, nếu $e \in E(a, b)$ thì tồn tại ít nhất một phân hoạch $[a, b]$ tương thích với e.

2) Nếu s tương thích với e thì mọi phân hoạch s' mịn hơn s (nghĩa là $s \prec s'$) cũng tương thích với e.

3) Với $e \in E(a, b)$, tập hợp các phân hoạch của $[a, b]$ tương thích với e có phần tử nhỏ nhất (theo thứ tự $\prec$ trong $\mathcal{S}$), đó là phân hoạch tạo nên bởi a, b và các điểm gián đoạn của e.

◆ **Mệnh đề 1** $E(a, b)$ là một đại số có đơn vị đối với các luật thông thường, nghĩa là :

$$\begin{cases} 1 \in E(a,b) \\ \forall (e_1, e_2) \in (E(a,b))^2, \quad \begin{cases} e_1 + e_2 \in E(a,b) \\ e_1 e_2 \in E(a,b) \end{cases} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall e \in E(a,b), \quad \lambda e \in E(a,b) \end{cases}$$

Chứng minh

Nếu s_1 (tương ứng; s_2) là một phân hoạch của $[a, b]$ tương thích hợp với e_1 (tương ứng; e_2), thì $e_1 + e_2$ và $e_1 e_2$ đều không đổi trên mỗi khoảng mở nối hai điểm liên tiếp của $s_1 \vee s_2$ (xem 4.1.5). ■

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên

◆ **Mệnh đề 2** $\quad \forall e \in E(a,b), \quad |e| \in E(a,b)$.

Nhận xét

Có thể thấy (xem 4.1.2) rằng nếu $(e_1, e_2) \in (E(a,b))^2$ thì $\mathrm{Sup}(e_1, e_2) \in E(a,b)$ và $\mathrm{Inf}(e_1, e_2) \in E(a,b)$.

6.1.2 Tích phân của một ánh xạ bậc thang trên một đoạn

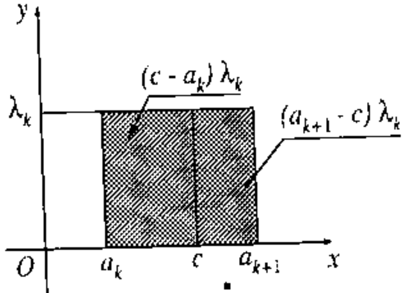
◆ **Mệnh đề-Định nghĩa 1** Cho $e \in E(a,b)$, $s = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$, tương thích với e, và với mọi $i \in \{0, \ldots, (n-1)\}$, λ_i là giá trị của e trên $]\,a_i, a_{i+1}[$. Số thực $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$ không phụ thuộc phân hoạch s tương thích với e. Số thực này được gọi là **tích phân của** e **trên** $[a, b]$ và được ký hiệu là $\int_a^b e$, hay $\int_a^b e(x)\,\mathrm{d}x$.

Chứng minh

Đặt $I(e, s) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$.

1) Cho $s = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$ tương thích với e và với mọi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, λ_i là giá trị của e trên $]\,a_i ; a_{i+1}[$. Cho $c \in [a, b]$ sao cho $c \notin \theta(s)$; tồn tại một $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ sao cho $a_k < c < a_{k+1}$

Đặt $s' = (a_0, \ldots, a_k, c, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, nghĩa là $s' = \theta^{-1}(\theta(s) \cup \{c\})$.



Ánh xạ bậc thang e không đổi và bằng λ_k trên $]\,a_k ; a_{k+1}[$ và:

$(c - a_k)\lambda_k + (a_{k+1} - c)\lambda_k = (a_{k+1} - a_k)\lambda_k$.

Từ đó suy ra $I(e, s') = I(e, s)$.

Điều này chứng tỏ $I(e,s)$ không thay đổi nếu ta thêm một điểm vào s.

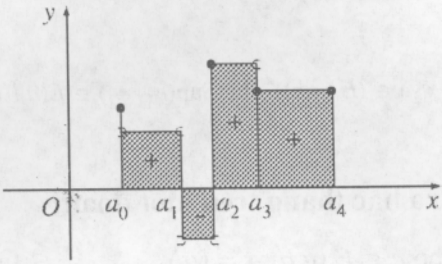
2) Cho $s, t \in \mathcal{S}$ tương thích với e và sao cho $s \prec t$. Sử dụng *1)* và bằng một phép quy nạp đơn giản ta thấy: $I(e,s) = I(e,t)$.

3) Cho $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ tương thích với e. Theo *2)*:

$$\begin{cases} I(e,s_1) = I(e,s_1 \vee s_2) \\ I(e,s_2) = I(e,s_1 \vee s_2) \end{cases}, \text{ vậy } \; I(e,s_1) = I(e,s_2). \qquad ■$$

Nhận xét

1)



Trong một mặt phẳng Euclide định hướng với một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận, ta biểu diễn hình học $\int_a^b e$ là tổng các diện tích đại số của những hình chữ nhật.

2) $I(e, s)$ không phụ thuộc các giá trị của e tại các điểm gián đoạn.

3) Cho $e_1, e_2 \in E\,(a, b)$ trùng nhau trên $[a; b]$, trừ ra tại một số hữu hạn điểm. Khi đó tồn tại $s \in \mathcal{S}$ tương thích đồng thời với e_1 và e_2, và sao cho e_1 và e_2 trùng nhau trên mỗi khoảng mở nối liền hai điểm liên tiếp của s, vậy ta có: $\int_a^b e_1 = \int_a^b e_2$.

◆ **Mệnh đề 2** Ánh xạ $\underset{e \mapsto \int_a^b e}{E(a, b) \to \mathbb{R}}$ là ánh xạ tuyến tính, nghĩa là:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (e_1, e_2) \in (E(a, b))^2, \int_a^b (\alpha\, e_1 + e_2) = \alpha \int_a^b e_1 + \int_a^b e_2 .$$

Chứng minh

Tồn tại $s = (a_0, ..., a_n) \in \mathcal{S}$ tương thích đồng thời với e_1 và e_2 (ta có thể lấy $s = s_1 \vee s_2$, với s_1 tương thích với e_1, s_2 với e_2), sau đó với mỗi $i \in \{0, ..., n-1\}$, tồn tại $(\lambda_i, \mu_i) \in \mathbb{R}^2$ sao cho :

$$\forall x \in \,]a_i; a_{i+1}[, \begin{cases} e_1(x) = \lambda_i \\ e_2(x) = \mu_i \end{cases}.$$

Vì vậy ta có: $\forall x \in \,]\,a_i; a_{i+1}[, (\alpha e_1 + e_2)(x) = \alpha\lambda_i + \mu_i$, do đó:

$$\int_a^b (\alpha\, e_1 + e_2) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(\alpha\lambda_i + \mu_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\mu_i = \alpha \int_a^b e_1 + \int_a^b e_2 . \qquad ■$$

◆ **Mệnh đề 3**

1) $\forall e \in E(a, b), (e \geq 0 \Rightarrow \int_a^b e \geq 0)$

2) $\forall (e_1, e_2) \in (E(a, b))^2, (e_1 \leq e_2 \Rightarrow \int_a^b e_1 \leq \int_a^b e_2)$

3) $\forall e \in E(a, b), \left|\int_a^b e\right| \leq \int_a^b |e|$.

Chứng minh

1) Với các ký hiệu trong Mệnh đề–Định nghĩa 1, vì $e \geq 0$ nên ta có:

$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \lambda_i \geq 0$. Do đó :

$$\int_a^b e = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i \geq 0 .$$

2) $e_1 \leq e_2 \Leftrightarrow e_2 - e_1 \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (e_2 - e_1) \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b e_2 - \int_a^b e_1 \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b e_1 \leq \int_a^b e_2$.

3) Trước tiên, $|e| \in E(a,b)$ (xem 6.1.1, Mệnh đề 2) sau đó, vì $-|e| \leq e \leq |e|$ ta suy ra: $-\int_a^b |e| \leq \int_a^b e \leq \int_a^b |e|$ nghĩa là $\left|\int_a^b e\right| \leq \int_a^b |e|$ ■

◆ **Mệnh đề 4** **(Hệ thức Chasles)**

Giả sử $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ sao cho $a < b < c$ và $e \in E(a, c)$. Thế thì các thu hẹp của e trên $[a; b]$ và $[b; c]$ là những ánh xạ bậc thang và:

$$\int_a^b e\,|_{[a;b]} + \int_b^c e|_{[b;c]} = \int_a^c e .$$

Chứng minh

Tồn tại một phân hoạch của $[a; c]$ tương thích với e và có chứa b. Ký hiệu

$s = (a_0, \ldots a_n)$, $b = a_k$, λ_i là giá trị của e trên $]a_i; a_{i+1}[$ với mỗi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ta có:

$$\int_a^b e|_{[a;b]} + \int_b^c e|_{[b;c]} = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i-1} - a_i)\lambda_i + \sum_{i=k}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i = \int_a^c e .$$

Thay cho $e|_{[a;b]}$ *và* $e|_{[b;c]}$ ta thường ký hiệu e và có: $\int_a^b e + \int_b^c e = \int_a^c e$. ■

6.2 Tích phân các ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn

Trong các §§ 6.2.1 đến 6.2.5, (a, b) chỉ một cặp số thực sao cho $a < b$.

6.2.1 Đại số các ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn

Khái niệm ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn đã được định nghĩa ở 4.3.1, 3).

◆ **Mệnh đề 1** Tập hợp $\mathcal{CM}$ các ánh xạ liên tục từng khúc trên $[a, b]$ là một đại số con có đơn vị của $\mathbb{R}^{[a, b]}$, đối với các luật thông thường, nghĩa là :

$$\begin{cases} 1 \in \mathcal{CM} \\ \forall (f, g) \in (\mathcal{CM})^2, \quad \begin{cases} f + g \in \mathcal{CM} \\ fg \in \mathcal{CM} \end{cases} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{CM}, \quad \lambda f \in \mathcal{CM} \end{cases}$$

Hơn nữa: $\forall f \in \mathcal{CM}$, $|f| \in \mathcal{CM}$.

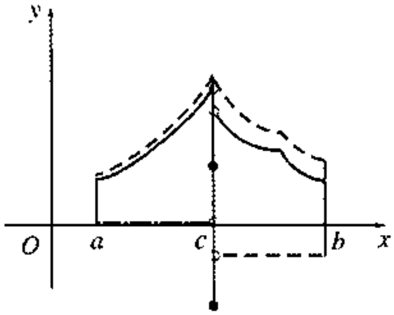
Chứng minh: Tương tự như đối với Mệnh đề ở 6.1.1.

◆ **Mệnh đề 2** Cho f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc. Tồn tại g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và e: $[a, b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc thang sao cho: $f = g + e$.

Chứng minh

Quy nạp theo ν, là số các điểm gián đoạn của f

- Nếu $\nu = 0$, ta có thể lấy $g = f$, $e = 0$.
- Nếu $\nu = 1$, ký hiệu c là điểm gián đoạn của f ($c \in [a; b]$).



Xét g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } x \in [a; c[\\ \lim\limits_{c^-} f \text{ nếu } x = c \\ f(x) - (\lim\limits_{c^+} f - \lim\limits_{c^-} f) \text{ nếu} \\ \qquad\qquad x \in]c; b] \end{cases}$$

Rõ ràng là g liên tục trên $[a, b] - \{c\}$; hơn nữa $\begin{cases} \lim\limits_{c^-} g = \lim\limits_{c^-} f \\ g(c) = \lim\limits_{c^-} f \\ \lim\limits_{c^+} g = \lim\limits_{c^+} f - (\lim\limits_{c^+} f - \lim\limits_{c^-} f) \\ \quad\quad = \lim\limits_{c^-} f \end{cases}$

Điều đó chứng tỏ rằng g liên tục tại c.

Đặt $e = f - g$, ta có : $f = g + e$ và $e \in E(a,b)$.

• Ta giả thiết tính chất trên đã được chứng minh cho các ánh xạ liên tục từng khúc có ν điểm gián đoạn, và giả thiết f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc có $\nu + 1$ điểm gián đoạn. Bắt đầu như đối với trường hợp $\nu = 1$, ta lập $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc có ν điểm gián đoạn, và e_1: $[a, b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc thang sao cho $f = g_1 + e_1$. Theo giả thiết, tồn tại g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và e_2: $[a, b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc thang sao cho $g_1 = g + e_2$. Cuối cùng: $f = g + (e_1 + e_2)$, với g là ánh xạ liên tục, $e_1 + e_2$ là ánh xạ bậc thang. ■

6.2.2 Xấp xỉ một ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn bằng những ánh xạ bậc thang

♦ **Định lý** Giả sử f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc và $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$.
Tồn tại các ánh xạ bậc thang φ, Ψ: $[a; b] \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$\varphi \leq f \leq \Psi \text{ và } \Psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Ở đây ta đồng nhất số thực ε và ánh xạ hằng $\varepsilon : [a; b] \underset{x \mapsto \varepsilon}{\to} \mathbb{R}$.

Chứng minh

Theo 6.2.1, Mệnh đề 2, tồn tại g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và e_1: $[a; b] \to \mathbb{R}$ là hàm bậc thang sao cho $f = g + e_1$. Trước hết ta tìm hai hàm bậc thang Ψ_1, φ_1: $[a, b] \to \mathbb{R}$ sao cho $\varphi_1 \leq g \leq \Psi_1$ và $\Psi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon$; khi đó rõ ràng rằng nếu đặt $\varphi = \varphi_1 + e_1$, $\Psi = \Psi_1 + e_1$ thì cặp (φ, Ψ) sẽ thoả mãn:

$(\varphi, \Psi) \in (E(a, b))^2$, $\psi - \varphi = \psi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon$, $\varphi = \varphi_1 + e_1 \leq g + e_1 = f \leq \psi_1 + e_1 = \psi$.

Cho $\varepsilon > 0$.

Vì g liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên theo định lý Heine (4.3.6, Định lý), g liên tục đều trên $[a; b]$.

Tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in [a; b]^2, \left(|x' - x''| \leq \eta \Rightarrow |g(x') - g(x'')| \leq \varepsilon\right).$$

Tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $\dfrac{b-a}{n} \leq \eta$ (ví dụ $N = E\left(\dfrac{b-a}{\eta}\right) + 1$) . ta chú ý rằng η và N phụ thuộc vào ε.

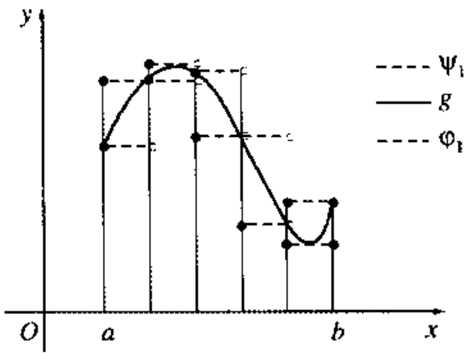
Với $k \in \{0, \ldots, N\}$, ta ký hiệu $a_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$, và xét phân hoạch "đều" $s = (a_k)_{0 \le k \le N}$ của $[a; b]$.

Với mỗi $k \in \{0,\ldots,N-1\}$, g liên tục trên đoạn $[a_k; a_{k+1}]$, vì vậy (xem 4.3.4), $g\big|_{[a_k;a_{k+1}]}$ bị chặn; ký hiệu :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{x\in[a_k;a_{k+1}]} g(x), \qquad \mathrm{M}_k = \operatorname*{Sup}_{x\in[a_k;a_{k+1}]} g(x).$$

Xét các ánh xạ bậc thang $\varphi_1, \psi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, định nghĩa là:

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, \ldots, N-1\}, \forall x \in [a_k; a_{k+1}[, (\varphi_1(x) = m_k \text{ và } \psi_1(x) = M_k) \\ \varphi_1(b) = m_{N-1}, \ \psi_1(b) = M_{N-1}. \end{cases}$$



Rõ ràng rằng : $\varphi_1 \le g \le \psi_1$.

Cho $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, ta có với mọi (x', x'') thuộc $[a; b]^2$:

$$(x', x'') \in [a_k; a_{k+1}]^2 \Rightarrow |x' - x''| \le a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{N} \le \eta$$

$$\Rightarrow |g(x') - g(x'')| \le \varepsilon \ \Rightarrow \ g(x') - \varepsilon \le g(x'').$$

Cố định x'' trong $[a_k; a_{k+1}]$ và chuyển qua biên trên khi x' chạy khắp $[a_k; a_{k+1}]$, ta suy ra:

$$M_k - \varepsilon \le g(x'').$$

Sau đó chuyển qua biên dưới khi x'' chạy khắp $[a_k; a_{k+1}]$: $M_k - \varepsilon \le m_k$, suy ra:

$$M_k - m_k \le \varepsilon.$$

Kết quả là:

$$\forall k \in \{0, \ldots, N-1\}, \forall x \in [a_k; a_{k+1}[, \ \psi_1(x) - \varphi_1(x) = M_k - m_k \le \varepsilon.$$

Vì ta còn có: $\psi_1(b) - \varphi_1(b) = M_{N-1} - m_{N-1} \le \varepsilon$, nên ta kết luận: $\psi_1 - \varphi_1 \le \varepsilon$. ■

6.2.3 Tích phân trên một đoạn một ánh xạ liên tục từng khúc

Cho f: $[a, b] \to \mathbf{R}$, liên tục từng khúc.

Đặt $\left\{\begin{array}{l} A = \{\varphi \in E(a,b);\ \varphi \le f\ \} \\ B = \{\Psi \in E(a,b);\ f \le \Psi\} \end{array}\right|$, vốn là những bộ phận của $E\,(a, b)$,

và $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = \left\{\int_a^b \varphi : \varphi \in A\right\} \\ \mathcal{B} = \left\{\int_a^b \Psi : \psi \in B\right\} \end{array}\right|$, là những bộ phận của $\mathbf{R}$.

1) • $A \neq \varnothing$ vì, theo 6.2.2, Định lý (lấy $\varepsilon = 1$, chẳng hạn) tồn tại $\varphi_0 \in A$, vậy $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Tương tự, tồn tại $\psi_0 \in B$, vậy $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

- Ta có: $\forall \varphi \in A, \quad \varphi \le f \le \psi_0$.

  vậy $\forall \varphi \in A,\ \int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi_0$,

điều này chứng tỏ $\mathcal{A}$ bị chặn trên (bởi $\int_a^b \psi_0$).

Tương tự, $\mathcal{B}$ bị chặn dưới (bởi $\int_a^b \varphi_0$).

Như vậy, $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai bộ phận không rỗng của $\mathbf{R}$, theo thứ tự bị chặn trên và bị chặn dưới; do đó (xem 1.2.3) $\mathcal{A}$ có biên trên và $\mathcal{B}$ có biên dưới trong $\mathbf{R}$; ký hiệu :

$$\mu_1 = \operatorname{Sup}(\mathcal{A}), \qquad \mu_2 = \operatorname{Inf}(\mathcal{B}).$$

2) Ta chứng minh $\mu_1 = \mu_2$.

- Vì $\forall \varphi \in A, \forall \psi \in B, \varphi \le \psi$ nên khi cố định φ trong A và chuyển qua biên dưới khi ψ chạy khắp B , ta có:

$$\forall \varphi \in A,\ \int_a^b \varphi \le \mu_2 ,$$

sau đó chuyển qua biên trên khi φ chạy khắp A: $\mu_1 \le \mu_2$.

- Cho $\varepsilon > 0$. Theo 6.2.2, Định lý, tồn tại $(\varphi, \psi) \in (E(a, b))^2$ sao cho:

$$\varphi \le f \le \psi \quad \text{và} \quad \psi - \varphi \le \varepsilon.$$

Khi ấy ta có $\varphi \in A$, $\psi \in B$ và: $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b (\psi - \gamma) \le \int_a^b \varepsilon = (b-a)\varepsilon$,

suy ra: $\mu_2 \le \int_a^b \psi \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi \le (b-a)\varepsilon + \mu_1$.

Vậy: $\forall \varepsilon > 0\ \mu_2 - \mu_1 \le (b-a)\varepsilon$, do đó $\mu_2 - \mu_1 \le 0$, $\mu_2 \le \mu_1$.

Cuối cùng: $\mu_1 = \mu_2$.

Nhận xét Các bộ phận $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ kề nhau (xem bài tập 3.2.7).

Tóm lại:

◆ **Mệnh đề-Định nghĩa** Cho f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, liên tục từng khúc.

Các bộ phận của $\mathbb{R}$: $\left\{ \int_a^b \varphi \ ; \ \varphi \in E(a,b) \ , \ \varphi \le f \right\}$ và

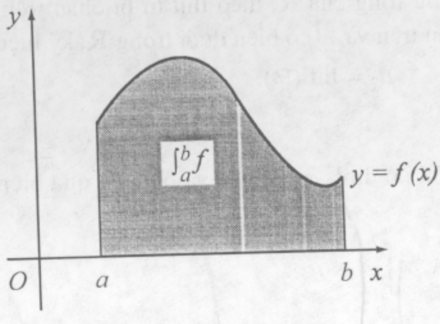
$\left\{ \int_a^b \psi ; \psi \in E(a,b), \ f \le \psi \right\}$ theo thứ tự có biên trên và biên dưới trong $\mathbb{R}$,

và các biên đó bằng nhau.

Ta gọi biên chung đó là **tích phân** của f (trên $[a, b]$) và ký hiệu $\int_a^b f$

(hay: $\int_{[a,b]} f$ hay : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$):

$$\int_a^b f = \sup_{\substack{\varphi \in E(a,b) \\ \varphi \le f}} \left(\int_a^b \varphi \right) = \inf_{\substack{\psi \in E(a,b) \\ f \le \psi}} \left(\int_a^b \psi \right).$$



$\int_a^b f$ chỉ diện tích đại số của phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường thẳng có phương trình $x = a$, $x = b$, trục các giá trị x, và đường cong biểu diễn f (hệ quy chiếu trực chuẩn).

Nhận xét

Định nghĩa trên mở rộng định nghĩa ở 6.1.2, bởi vì nếu e: $[a, b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc thang thì:

$$\left\{ \int_a^b \varphi ; \varphi \in E(a,b) \ , \ \varphi \le e \right\} \quad \text{và} \quad \left\{ \int_a^b \psi ; \psi \in E(a,b) \ , \ e \le \psi \right\}$$

có phần tử chung là số thực $\int_a^b e$.

6.2.4 Các tính chất đại số

- **Mệnh đề** Ánh xạ $\begin{array}{l} \mathcal{CM} \to \mathbf{R} \\ f \mapsto \int_a^b f \end{array}$ là một dạng tuyến tính, nghĩa là:

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{CM})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Chứng minh

1) Cho $f, g \in \mathcal{CM}$. Ta sẽ chứng minh: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Cho $\varepsilon > 0$. Theo 6.2.2, Định lý, tồn tại $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in E(a, b)$, sao cho:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le f \le \psi_1 \\ \psi_1 - \varphi_1 \le \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \varphi_2 \le f \le \psi_2 \\ \psi_2 - \varphi_2 \le \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

Ký hiệu $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ và $\psi = \psi_1 + \psi_2$, ta có:

$$(\varphi, \psi) \in (E(a, b))^2, \quad \varphi \le f + g \le \psi, \quad \psi - \varphi \le \varepsilon.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \int_a^b (f+g) \le \int_a^b \psi \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi = (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b f + \int_a^b g \\ \int_a^b f + \int_a^b g \le \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 = \int_a^b \psi \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b (f+g). \end{cases}$$

Và như vậy khi cho ε tiến tới 0^+, ta được:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2) Giả sử $f \in \mathcal{CM}, \lambda \in \mathbf{R}$.

Cho $\varepsilon > 0$. Theo 6.2.2, Định lý tồn tại $\varphi_1, \psi_1 \in E(a, b)$ sao cho:

$$\varphi_1 \le f \le \psi_1 \text{ và } \psi_1 - \varphi_1 \le \varepsilon.$$

- Giả sử $\lambda \in \mathbf{R}_+$.

Ký hiệu $\varphi = \lambda\varphi_1, \psi = \lambda\psi_1$, ta có:

$$(\varphi, \psi) \in (E(a, b))^2, \varphi \le \lambda f \le \psi, \psi - \varphi \le \lambda\varepsilon,$$

suy ra:

$$\begin{cases} \int_a^b (\lambda f) \le \int_a^b \psi \le (b-a)\lambda\varepsilon + \int_a^b \varphi = (b-a)\lambda\varepsilon + \lambda\int_a^b \varphi_1 \le (b-a)\lambda\varepsilon + \lambda\int_a^b f \\ \lambda\int_a^b f \le \lambda\int_a^b \psi_1 \le \lambda(b-a)\varepsilon + \lambda\int_a^b \varphi_1 = \lambda(b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi \le \lambda(b-a)\varepsilon + \int_a^b (\lambda f) \end{cases},$$

và như vậy khi cho ε tiến tới 0^+ ta được:

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda\int_a^b f.$$

- Đặt $A_f = \{\varphi \in E(a, b);\ \varphi \le f\}$, $B_f = \{\psi \in E(a, b);\ f \le \psi\}$; tương tự với A_{-f}, B_{-f}, rõ ràng là các ánh xạ $A_f \underset{\varphi \mapsto -\varphi}{\rightarrow} B_{-f}$ và $B_f \underset{\psi \mapsto -\psi}{\rightarrow} A_{-f}$ là những song ánh,

từ đó:

$$\int_a^b (-f) = \sup_{\varphi \in A_{-f}} \left(\int_a^b \varphi\right) = \sup_{\psi \in B_f} \left(\int_a^b -\psi\right) = \sup_{\psi \in B_f} \left(-\int_a^b \psi\right) = -\inf_{\psi \in B_f} \left(\int_a^b \psi\right) = -\int_a^b f.$$

Ta suy ra, với $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\int_a^b (\lambda f) = \int_a^b (-\lambda)(-f) = -\lambda\int_a^b (-f) = -\lambda\left(-\int_a^b f\right) = \lambda\int_a^b f.$$

Cuối cùng: $\forall (f, g) \in (\mathcal{CM})^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\int_a^b (\lambda f + g) = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b g = \lambda\int_a^b f + \int_a^b g$ ■

Nhận xét: Nếu hai ánh xạ f, g thuộc $\mathcal{CM}$ chỉ khác nhau ở một số hữu hạn điểm thì $\int_a^b f = \int_a^b g$. Thật vậy, tồn tại ánh xạ bậc thang $e : [a, b] \to \mathbf{R}$ sao cho $g = f + e$,

suy ra : $\int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b e = \int_a^b f$.

6.2.5 Các tính chất liên quan đến thứ tự

◆ **Mệnh đề 1** Cho f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc.

Nếu $f \ge 0$ thì $\int_a^b f \ge 0$.

Chứng minh

Vì $0 \in E(a, b)$ và $0 \le f$, nên ta có $\int_a^b 0 \le \int_a^b f$, nghĩa là $0 \le \int_a^b f$. ■

♦ **Hệ quả 1** Nếu f, g: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc thì:

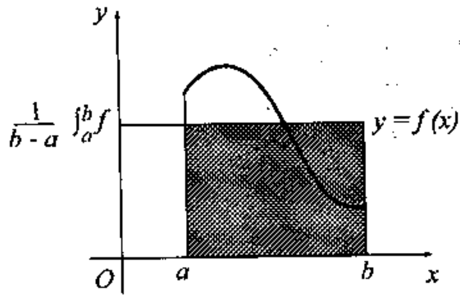
$$f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Chứng minh: $f \le g \Leftrightarrow g - f \ge 0 \Rightarrow \int_a^b (g-f) \ge 0 \Leftrightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g.$ ■

♦ **Hệ quả 2** Cho $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc, $m = \inf_{x \in [a;b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a;b]} f(x)$. Ta có:

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f \le M\,(b-a).$$

♦ **Định nghĩa** Cho f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc, giá trị trung bình của f trên $[a, b]$ là số thực $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.



Giá trị trung bình của f là chiều cao của hình chữ nhật (có các cạnh song song với các trục toạ độ, có đáy là $[a; b]$) với diện tích $\int_a^b f$.

Với các ký hiệu như ở hệ quả 2, giá trị trung bình của f trên [a, b] nằm giữa m và M.

♦ **Mệnh đề 2**

Với mọi f thuộc $\mathcal{CM}$: $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Chứng minh: $\begin{cases} f \le |f| \\ -f \le |f| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b f \le \int_a^b |f| \\ -\int_a^b f = \int_a^b (-f) \le \int_a^b |f| \end{cases} \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$ ■

◆ **Hệ quả 3**

1) Giả sử $f, g \in \mathcal{CM}$, $\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$. Ta có:

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \|f\|_\infty \int_a^b |g|.$$

2) Giả sử: $f \in \mathcal{CM}$, $\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} |f(x)|$. Ta có:

$$\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)\|f\|_\infty .$$

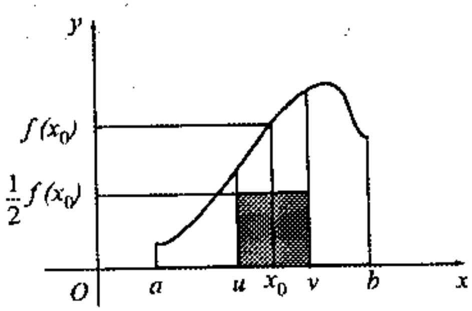
Chứng minh

1) $\left|\int_a^b fg\right| \le \int_a^b |fg| \le \int_a^b \|f\|_\infty |g| = \|f\|_\infty \int_a^b |g|$.

2) Áp dụng *1)* với $g = 1$. ■

◆ **Mệnh đề 3** Giả sử $f \in \mathcal{CM}$ sao cho $f \ge 0$, và $x_0 \in [a, b]$ sao cho f liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$. Khi đó ta có: $\int_a^b f > 0$.

Chứng minh :



Vì f liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$ nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:

$\forall x \in [a; b] \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$,

$$f(x) \ge \frac{1}{2} f(x_0).$$

Ký hiệu: $[u; v] = [a; b] \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, và e: $[a, b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ bậc thang xác định bởi:

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in [a; u[\\ \frac{1}{2}f(x_0) & \text{nếu } x \in [u; v] \\ 0 & \text{nếu } x \in]v; b] \end{cases}$$

Khi đó ta có: $f \ge e$, vậy $\int_a^b f \ge \int_a^b e = \frac{1}{2}(v-u)f(x_0) > 0$. ■

Bổ đề sau đây (suy ra từ Mệnh đề 3 bằng lập luận phản chứng) rất quan trọng (chẳng hạn trong việc nghiên cứu tích vô hướng xác định bằng tích phân). Ta nhắc lại rằng ta đã giả thiết $a < b$.

◆ **Hệ quả 4** Cho f: $[a, b] \to \mathbf{R}$.

Nếu $\begin{cases} f \text{ liên tục} \\ f \geq 0 \\ \int_a^b f = 0 \end{cases}$, thì $f = 0$.

Nhận xét Theo hệ quả 4, ta có:

1) Nếu f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục và nếu $\int_a^b f^2 = 0$ (trong đó $f^2 = ff$), thì $f^2 = 0$, và vì vậy $f = 0$.

2) Nếu f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục và $\int_a^b |f| = 0$ thì $|f| = 0$ và do đó $f = 0$.

◆ **Định lý (Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz đối với tích phân)**

Với mọi ánh xạ f, g: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc, ta có:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Chứng minh :

Với mọi $\lambda \in \mathbf{R}$: $\int_a^b (\lambda f + g)^2 \geq 0$, từ đó bằng cách khai triển:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \left(\int_a^b f^2\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 \geq 0.$$

• Giả sử $\int_a^b f^2 = 0$.

Nếu $\int_a^b fg > 0$, thì $2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} -\infty$, mâu thuẫn. Cũng vậy, nếu $\int_a^b fg < 0$ thì $2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} -\infty$ mâu thuẫn. Vậy $\int_a^b fg = 0$, và bất đẳng thức ta mong muốn trở nên tầm thường.

• Giả sử $\int_a^b f^2 > 0$.

Theo (1.2.3, 2), khảo sát các tam thức thực) biệt thức ≤ 0, nghĩa là:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 - \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0. \qquad \blacksquare$$

♦ **Mệnh đề 4** **(Khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với tích phân các ánh xạ liên tục)**

Cho f, g: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục. Để $\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$,

điều kiện cần và đủ là (f, g) phụ thuộc, nghĩa là tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ sao cho $\alpha f + \beta g = 0$.

Chứng minh

1) Giả sử (f, g) phụ thuộc.

Nếu $f = 0$ thì kết luận là hiển nhiên.

Nếu $f \neq 0$, thì tồn tại $\alpha \in \mathbf{R}$ sao cho $g = \alpha f$, và ta có:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b \alpha f^2\right)^2 = \alpha^2\left(\int_a^b f^2\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b \alpha^2 f^2\right) = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

2) Đảo lại, giả sử có đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Nếu $f = 0$, thì (f, g) phụ thuộc .

Giả sử $f \neq 0$. Vì f liên tục, nên $\int_a^b f^2 > 0$ (xem Mệnh đề 3). Từ đó ta suy ra:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\lambda + \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b f^2}\right)^2.$$

Đặc biệt khi chọn $\lambda = -\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b f^2}$ thì $\int_a^b (\lambda f + g)^2 = 0$, rồi (xem Nhận xét 1)

$\lambda f + g = 0$, và vì vậy (f, g) phụ thuộc. ■

Bài tập

◊ **6.2.1** Cho f: $[0; 1] \to [0; 1]$ liên tục sao cho $f \neq 0$ và $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$ (với $f^2 = ff$). Chứng minh rằng $f = 1$.

◊ **6.2.2** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$, $n \in \mathbf{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục và không cùng bằng 0. Chứng minh rằng tồn tại $u_1, \ldots, u_n$: $[a; b] \to \mathbf{R}$ liên tục, sao cho $\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i u_i\right) = 1$.

◊ **6.2.3** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$, f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc, $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$. Giả sử $m > 0$. Chứng minh rằng:

a) $2\sqrt{\dfrac{m}{M}}(b-a) \le \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_a^b f + m\int_a^b \frac{1}{f} \le \left(1+\frac{m}{M}\right)(b-a)$

b) $(b-a)^2 \le \displaystyle\int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f} \le (b-a)^2 \frac{(m+M)^2}{4m.M}$.

◊ **6.2.4** Cho f: $[0; 1] \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho với mọi ánh xạ bậc thang và tăng g: $[0; 1] \to \mathbf{R}$, ta có $\displaystyle\int_0^1 fg = 0$. Chứng minh rằng $f = 0$.

◊ **6.2.5 *** Cho f: $[0; \pi] \to \mathbf{R}$ liên tục, ≥ 0, sao cho:

$$\forall n \in \{0,1,2,3,4\},\ \int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx = (-1)^n (2n+1)$$

Chứng minh rằng: $f = 0$.

◊ **6.2.6** Tính: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^3} \frac{dt}{(\ln t)^2}$.

6.2.6 Hệ thức Chasles

♦ **Mệnh đề 1** Cho $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ sao cho $a < b < c$ và $f : [a; c] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc. Thế thì các thu hẹp của f trên $[a; b]$ và $[b; c]$ liên tục từng khúc và $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

Ở đây ta ký hiệu $\displaystyle\int_a^b f$ thay cho $\displaystyle\int_a^b f\big|_{[a;b]}$.

Chứng minh

Rõ ràng rằng $f\big|_{[a;b]}$ và $f\big|_{[b;c]}$ liên tục từng khúc.

Cho $\varepsilon > 0$. Theo 6.2.2, Định lý, tồn tại $\varphi_1, \psi_1 \in E(a, b)$, $\varphi_1, \psi_2 \in E(b, c)$ sao cho:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le f\big|_{[a;b]} \le \psi_1 \\ \psi_1 - \varphi_1 \le \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \varphi_2 \le f\big|_{[b;c]} \le \psi_2 \\ \psi_2 - \varphi_2 \le \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ký hiệu $\varphi, \psi : [a; c] \to \mathbf{R}$ là các ánh xạ được định nghĩa bởi:

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b],\ (\varphi(x) = \varphi_1(x) \text{ và } \psi(x) = \psi_1(x)) \\ \forall x \in [b, c],\ (\varphi(x) = \varphi_2(x) \text{ và } \psi(x) = \psi_2(x)). \end{cases}$$

Rõ ràng là: $(\varphi, \psi) \in (E(a,c))^2$, $\varphi \le f \le \psi$, $\psi - \varphi \le \varepsilon$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \int_a^c f \le \int_a^c \psi = \int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi_1 + \int_b^c \varphi_2 \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b f + \int_b^c f \\ \int_a^b f + \int_b^c f \le \int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 \le (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi_1 + \int_b^c \varphi_2 = (b-a)\varepsilon + \int_a^c \varphi \le (b-a)\varepsilon + \int_a^c f \end{cases},$$

và khi cho ε tiến tới 0^+, ta suy ra: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$. ∎

◊ Định nghĩa-ký hiệu

$$\begin{cases} \int_a^b f = 0 \quad \text{nếu } a = b \\ \int_a^b f = -\int_b^a f \ \text{ nếu } a > b \text{ và } f : [b; a] \to \mathbf{R} \text{ liên tục từng khúc} \end{cases}$$

Các tính chất đại số (6.2.4) không thay đổi, các tính chất về thứ tự (6.2.5) có thể sửa đổi dễ dàng tùy theo vị trí tương đối của a và b.

◆ **Mệnh đề 2** (**Hệ thức Chasles**)

Cho $a, b, c \in \mathbf{R}$ và f là một ánh xạ nhận giá trị thực, liên tục từng khúc trên một đoạn chứa a, b, c. Thế thì: $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Chứng minh

- Nếu ($a = b$ hoặc $a = c$ hoặc $b = c$), thì tính chất là hiển nhiên.
- Nếu $a < b < c$, xem Mệnh đề 1.
- Nếu $a < c < b$, theo Mệnh đề 1 ta có:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \text{từ đó} \qquad \int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

- Các trường hợp khác ($b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, $c < b < a$) chứng minh tương tự. ∎

Ta suy ra một cách dễ dàng nhờ quy nạp theo N mệnh đề sau:

◆ **Mệnh đề 3** Cho $N \in \mathbf{N}^*$, $a_0, ..., a_N \in \mathbf{R}$, f là một ánh xạ nhận giá trị thực, liên tục từng khúc trên đoạn lớn nhất chứa $a_0, ..., a_N$.

Khi đó ta có: $\displaystyle\int_{a_0}^{a_N} f = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f$.

Bài tập

◊ **6.2.7** Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao co $a < b$, f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc sao cho $f \geq 0$ và

$\int_a^b f = 0$.

Chứng minh rằng f bằng 0, trừ ra tại một số hữu hạn điểm.

◊ **6.2.8*** Cho f : $[1, +\infty[\to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 và lồi. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbf{N} - \{0,1\}$:

$$0 \leq \frac{1}{2}f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1)).$$

◊ **6.2.9 *** Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$:

$$\frac{3n+1}{2n+2} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

(Có thể sử dụng bài tập 6.2.8)

◊ **6.2.10** Cho f: $[0; \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho tồn tại $c \in [0; \frac{\pi}{2}]$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \forall x \in]0; c[, & f(x) > 0 \\ \forall x \in]c; \frac{\pi}{2}[, & f(x) < 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng: $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\, dx\right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\, dx\right)^2 > 0$.

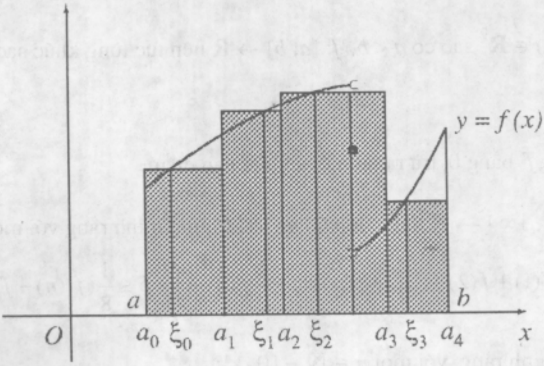
6.2.7 Tổng Riemann

Trong § 6.2.7 này (a, b) chỉ một cặp số thực thoản mãn $a < b$.

- **Định nghĩa** *Cho* f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ liên tục từng khúc, $s = (a_0, ..., a_n)$ là một phân hoạch của $[a; b]$, và với mọi $i \in \{0, ..., n-1\}$, ξ_i là một phần tử của $[a_i; a_{i+1}]$. Ta gọi số thực $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(\xi_i)$ là **tổng Riemann**

  liên kết với f, s, $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$.

Như vậy tổng Riemann nói trên là tích phân của một ánh xạ bậc thang e xác định bởi: $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$, $\forall x \in]a_i; a_{i+1}[$, $e(x) = f(\xi_i)$.



◆ **Định lý** Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.

Các tổng Riemann tương ứng với f đều hội tụ đến $\int_a^b f$ khi bước của phân hoạch dần đến 0, nghĩa là:

Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $\alpha > 0$ sao cho với mọi phân hoạch $s = (a_0, ..., a_n)$ của $[a; b]$ có bước $\le \alpha$ và mọi họ $(\xi_i)_{0 \le i \le n-1}$ sao cho $(\forall i \in \{0, ..., n-1\}, \xi_i \in [a_i; a_{i+1}])$, ta có:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \le \varepsilon .$$

Chứng minh

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên f liên tục đều trên $[a; b]$ (Định lý Heine, 4.3.6, Định lý). Vậy tồn tại $\alpha > 0$, sao cho:

$$\forall (x', x'') \in [a; b]^2, \ (|x' - x''| \le \alpha \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \frac{\varepsilon}{b-a}).$$

Cho $s = (a_0, ..., a_n)$ là một phân hoạch của $[a; b]$ có bước $\le \alpha$, nghĩa là

$$\forall i \in \{0, ..., n-1\}, \quad a_{i+1} - a_i \le \alpha.$$

Cho $i \in \{0, ..., n-1\}$, ta có: $\forall x \in [a_i; a_{i+1}], \ |x - \xi_i| \le a_{i+1} - a_i \le \alpha$, vậy:

$$\forall x \in [a_i; a_{i+1}], \quad |f(x) - f(\xi_i)| \le \frac{\varepsilon}{b-a},$$

từ đó suy ra:

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| = \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f - f(\xi_i)) \right| \le \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f - f(\xi_i)| \le (a_{i+1} - a_i) \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Ta suy ra:

$$\left|\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f - (a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f - (a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\frac{\varepsilon}{b-a} = (a_n - a_0)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon . \qquad \blacksquare$$

Nhận xét

1) Ta có thể chứng minh rằng kết quả của việc khảo sát trên vẫn đúng cho trường hợp tổng quát hơn, khi f liên tục từng khúc trên $[a, b]$, (chú ý rằng f có thể có những điểm gián đoạn trên $[a; b]$.

2) Một tổng Riemann không chỉ phụ thuộc vào bước của phân hoạch mà còn phụ thuộc vào chính phân hoạch đó và các điểm ξ_i.

3) Nếu f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ có tính k–Lipschitz ($k \in \mathbb{R}_+$) thì với mọi phân hoạch $s = (a_0, ..., a_n)$ của $[a, b]$ có bước ký hiệu là $p(s)$, và mọi họ $(\xi_i)_{0 \le i \le n-1}$ thỏa mãn $\xi_i \in [a_i; a_{i+1}]$ $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$, ta có

$$\left|\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(x)-f(\xi_i)|\mathrm{d}x$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} k\int_{a_i}^{a_{i+1}}|x-\xi_i|\mathrm{d}x \leq k\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} p(s)\mathrm{d}x = k(b-a)p(s)$$

Trong trường hợp này (f Lipschitz) kết quả của định lý được chứng minh mà không cần đến khái niệm liên tục đều. ■

Một trường hợp thường gặp là trường hợp phân hoạch $(a_0, ..., a_n)$ là **đều** (nghĩa là: $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$, $a_{i+1}-a_i = \dfrac{b-a}{n}$ và ξ_i bằng a_i (hoặc a_{i+1} hoặc $\frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$).

Khi đó ta có kết quả sau :

♦ **Hệ quả** Cho f: $[a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục. Ta có:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_a^b f .$$

Đặc biệt nếu f liên tục trên [0; 1] thì: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f .$

VÍ DỤ: Tính $n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2}$.

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2} = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}$.

Vì $f: \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}\end{array}$ liên tục, nên hệ quả trên chỉ ra rằng:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Rồi $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$ (về quan hệ giữa tích phân và đạo hàm, xem §6.4).

Bài tập

◊ **6.2.11** Xác định giới hạn của dãy cho bởi số hạng tổng quát của nó:

a) $\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$

b) $\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{\alpha}}\left(n^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}+k^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}\right)$, $\alpha \in]0, +\infty[-\{1\}$

c) $\sum_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}$

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

e) $\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$

f) $\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}(k^2+ak+b)^{\alpha}$

g) $n^2\left(\prod_{k=1}^{n}k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}$

h) $\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{1}{n+k}}\right)-n$

◊ **6.2.12** Cho f, g: $[0; 1] \to \mathbb{R}_+$ liên tục; chứng minh:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k+1}{n}\right)} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1\sqrt{f+g}.$$

6.3 Mở rộng cho các hàm có giá trị phức

◆ **Định nghĩa** Cho f: $[a; b] \to \mathbf{C}$ liên tục từng khúc. Ta gọi là tích phân của f (trên $[a; b]$) và ký hiệu là $\int_a^b f$ (hay $\int_{[a,b]} f$, hay $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, số phức xác định bởi:

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i\int_a^b \operatorname{Im} f .$$

Chú ý rằng: $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ đều liên tục từng khúc trên $[a; b]$ và có giá trị thực.
Định nghĩa này mở rộng định nghĩa ở 6.2.3, vì nếu f có giá trị thực thì $\operatorname{Re} f = f$ và $\operatorname{Im} f = 0$.

◆ **Mệnh đề 1** Ánh xạ $f \to \int_a^b f$ là một dạng $\mathbf{C}$-tuyến tính trên $\mathbf{C}$– không gian vectơ các ánh xạ liên tục từng khúc trên $[a; b]$.

Chứng minh
Nếu $\lambda \in \mathbf{C}$ và f, g: $[a; b] \to \mathbf{C}$ liên tục từng khúc, thì khi đặt $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$, $\beta = \operatorname{Im}(\lambda)$, $r = \operatorname{Re} f$, $s = \operatorname{Im} f$, $u = \operatorname{Re} g$, $v = \operatorname{Im} g$, ta có:

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \int_a^b ((\alpha r - \beta s + u) + i(\alpha s + \beta r + v))$$

$$= \int_a^b (\alpha r - \beta s + u) + i\int_a^b (\alpha s + \beta r + v)$$

$$= \left(\alpha\int_a^b r - \beta\int_a^b s + \int_a^b u\right) + i\left(\alpha\int_a^b s + \beta\int_a^b r + \int_a^b v\right)$$

$$= (\alpha + i\beta)\left(\int_a^b r + i\int_a^b s\right) + \left(\int_a^b u + i\int_a^b v\right) = \lambda\int_a^b f + \int_a^b g .$$ ■

◆ **Mệnh đề 2** Với mọi f: $[a; b] \to \mathbf{C}$ liên tục từng khúc:

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| .$$

Chứng minh

Trước hết chú ý rằng $|f|$ liên tục từng khúc. Ký hiệu $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Ta có:

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \Leftrightarrow \left|\int_a^b u + i\int_a^b v\right| \le \int_a^b \sqrt{u^2+v^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b u\right)^2 + \left(\int_a^b v\right)^2 \le \left(\int_a^b \sqrt{u^2+v^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b u\right)^2 \le \left(\int_a^b (\sqrt{u^2+v^2} - v)\right)\left(\int_a^b \left(\sqrt{u^2+v^2} + v\right)\right).$$

Rõ ràng rằng $\sqrt{u^2+v^2} - v \ge 0$ và $\sqrt{u^2+v^2} + v \ge 0$. Các ánh xạ g, h: $[a; b] \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi: $g = (\sqrt{u^2+v^2} - v)^{\frac{1}{2}}$ và $h = (\sqrt{u^2+v^2} + v)^{\frac{1}{2}}$ liên tục từng khúc trên $[a; b]$ và $gh = |u|$.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (6.2.5, Định lý):

$$\left(\int_a^b gh\right)^2 \le \left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b h^2\right).$$

Từ đó suy ra kết quả cần tìm nhờ chú ý rằng:

$$\left(\int_a^b u\right)^2 \le \left(\int_a^b |u|\right)^2 = \left(\int_a^b gh\right)^2.$$

■

◆ **Hệ quả**

1) Cho $f, g : [a; b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc. Ta có

$$\left|\int_a^b gf\right| \le \|f\|_\infty \int_a^b |g|.$$

2) Cho $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc. Ta có:

$$\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)\|f\|_\infty.$$

♦ **Mệnh đề 3** (**Hệ thức Chasles**)

Giả sử $a, b, c \in \mathbf{R}$ và f là một ánh xạ có giá trị phức liên tục từng khúc trên một đoạn chứa a, b, c. Khi đó ta có:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \ .$$

Chứng minh

$$\int_a^c f = \int_a^c \operatorname{Re} f + i \int_b^c \operatorname{Im} f$$

$$= \left(\int_a^b \operatorname{Re} f + \int_b^c \operatorname{Re} f \right) + i \left(\int_a^b \operatorname{Im} f + \int_b^c \operatorname{Im} f \right)$$

$$= \left(\int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f \right) + \left(\int_b^c \operatorname{Re} f + i \int_b^c \operatorname{Im} f \right)$$

$$= \int_a^b f + \int_b^c f \ .$$ ■

6.4 Tích phân và đạo hàm

Trong cả §6.4 này, I chỉ một khoảng của **R** *không rỗng và không thu về một điểm*

Các hàm được xét đến có giá trị trong **K** (**K** = **R** hay **C**).

6.4.1 Hàm tích phân của cận trên

Cho $x_0 \in I$ và f: $I \to \mathbf{K}$ liên tục từng khúc trên I, nghĩa là liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bao hàm trong I. Với mỗi x thuộc I, thu hẹp của f trên đoạn có các mút x_0 và x liên tục từng khúc, do đó ta có thể xét ánh xạ F: $I \to \mathbf{K}$ định nghĩa bởi: $\forall x \in I, F(x) = \int_{x_0}^{x} f$.

Như vậy $\int_{x_0}^{x} f$ được coi như một hàm của x là cận phía trên (ta cũng gọi là: cận trên) của tích phân.

♦ **Mệnh đề 1**

$F : I \to \mathbf{K}$ liên tục trên I.
$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi đoạn $[a; b]$ bao hàm trong I, F là ánh xạ Lipshcitz.

Cho $(a, b) \in I^2$ sao cho $a \le b$. Vì f liên tục từng khúc trên $[a; b]$, nên f bị chặn trên $[a; b]$; đặt $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$. Với mọi $(x', x'') \in [a; b]^2$ sao cho, chẳng hạn $x' \le x''$, ta có:

$$|F(x'') - F(x')| = \left|\int_{x_0}^{x''} f - \int_{x_0}^{x'} f\right| = \left|\int_{x'}^{x''} f\right| \le \int_{x'}^{x''} |f| \le M(x'' - x').$$

Điều này chứng tỏ rằng f là M–Lipschitz trên $[a; b]$, vậy liên tục trên $[a; b]$.
Cuối cùng, vì f liên tục trên mọi đoạn $[a; b]$ bao hàm trong I, nên rõ ràng là F liên tục trên I. ■

♦ **Mệnh đề 2**

• F: $I \to \mathbf{K}$ thuộc lớp C^1 từng khúc.
$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f$

• F khả vi tại mọi điểm x_1 thuộc I tại đó f liên tục, và $F'(x_1) = f(x_1)$.

Chứng minh

1) Cho $x_1 \in I$ sao cho f liên tục tại x_1.

Với mọi x thuộc $I - \{x_1\}$, ta có:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1)\right| = \frac{1}{|x - x_1|}\left|\int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{x_1} f - (x - x_1)f(x_1)\right|$$

$$= \frac{1}{|x - x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} (f - f(x_1))\right| \le \frac{1}{|x - x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} |f - f(x_1)|\right|.$$

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục tại x_1 nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall t \in I,\ (|t - x_1| \le \eta \Rightarrow |f(t) - f(x_1)| \le \varepsilon).$$

Cho $x \in I - \{x_1\}$ sao cho $|x - x_1| \le \eta$. Khi đó ta có:

$$\left|\int_{x_1}^{x} |f - f(x_1)|\right| \le \left|\int_{x_1}^{x} \varepsilon\right| = \varepsilon |x - x_1|.$$

Như vậy ta đã chứng minh rằng:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I - \{x_1\}, \left(|x - x_1| \le \eta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| \le \varepsilon \right),$$

nghĩa là: $\dfrac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} \xrightarrow[x \to x_1]{} f(x_1)$.

Điều này chứng tỏ F khả vi tại x_1 và $F'(x_1) = f(x_1)$.

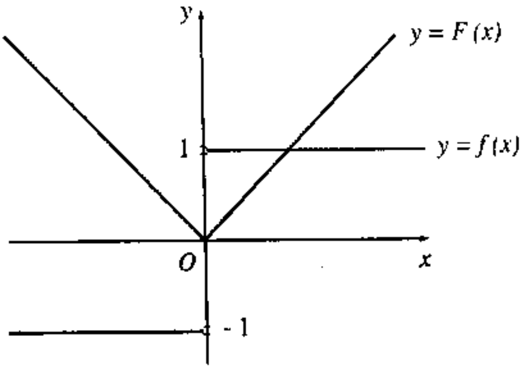
2) Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a \le b$ và $[a; b] \subset I$. Vì f liên tục từng khúc trên $[a; b]$, nên tồn tại $n \in \mathbf{N}^*$ và $(a_0, ..., a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ sao cho:

$$\begin{cases} a = a_0 < ... < a_n = b, \\ \text{Với mỗi } i \in \{0, ..., n-1\}, \text{ thu hẹp của } f \text{ trên }]a_i; a_{i+1}[\text{ có thể thác triển} \\ \text{liên tục lên } [a_i; a_{i+1}]. \end{cases}$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng F khả vi trên $[a; b] - \{a_0, ..., a_n\}$ và $F'\big|_{]a_i;a_{i+1}[}$ có thể thác triển liên tục tại a_i và a_{i+1}.

Như vậy f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $[a, b]$. vì F thuộc lớp C^1 từng khúc trên mọi đoạn bao hàm trong I nên F thuộc lớp C^1 từng khúc trên I. ■

VÍ DỤ:



Xét hàm dấu:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ được xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$$

Khi ấy $\begin{array}{c} F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \int_0^x f \end{array}$ được xác định bởi : $\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}_-, F(x) = \int_0^x f = \int_0^x -1 = -x \\ \forall x \in \mathbf{R}_+, F(x) = \int_0^x f = \int_0^x 1 = x \end{cases}$,

nghĩa là: $\forall x \in \mathbf{R}, F(x) = |x|$.

Ta chú ý rằng F liên tục trên $\mathbf{R}$, thuộc lớp C^1 trên $]-\infty; 0[$ và trên $]0; +\infty[$, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbf{R}$, nhưng không khả vi tại 0.

♦ **Hệ quả 1** Với mọi $p \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, nếu f thuộc lớp C^p trên I thì $\begin{array}{l} F : I \to \mathbf{K} \\ \quad x \mapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array}$ thuộc lớp C^{p+1} trên I và $F' = f$.

Trường hợp $p = 0$ của hệ quả này rất có ích.

♦ **Hệ quả 2** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbf{R}$, u, v; $I \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho $u(I) \subset J$ và $v(I) \subset J$, $f : J \to \mathbf{K}$ liên tục.

Ánh xạ $\begin{array}{l} \psi : I \to \mathbf{K} \\ \quad x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I và:

$$\forall x \in I, \quad \psi'(x) = f(v(x))\, v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Chứng minh

Chỉ cần đặt: $\begin{array}{l} F : J \to \mathbf{K} \\ \quad y \mapsto \int_{y_0}^{y} f \end{array}$ (trong đó y_0 cố định trong J), ta có:

$$\forall x \in I, \quad \psi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$ ■

VÍ DỤ: Ánh xạ $\begin{array}{l} \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto \int_{x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}$ và :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \psi'(x) = 2\sqrt{1+16x^4} - \sqrt{1+x^4} .$$

6.4.2 Nguyên hàm

♦ **Định nghĩa** Cho $f: I \to \mathbf{K}$, $\phi ; I \to \mathbf{K}$ là hai ánh xạ.

Ta nói rằng ϕ là một **nguyên hàm của** f **trên** I khi và chỉ khi : ϕ khả vi trên I và $\phi' = f$.

♦ **Định lý** Cho $f : I \to \mathbf{K}$ liên tục. Khi đó:

1) Với mọi $x_0 \in I$, ánh xạ $\begin{array}{l} F : I \to \mathbf{K} \\ \quad x \mapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array}$ là một nguyên hàm của f trên I.

2) Với mọi nguyên hàm ϕ_0 của f trên I, tập hợp các nguyên hàm của f trên I là $\{ \phi_0 + \lambda ; \lambda \in \mathbf{K}\}$.

Chứng minh

1) Theo Hệ quả 1 ở § 6.4.1, ánh xạ $\begin{array}{l} F : I \to \mathbf{K} \\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array}$ thuộc lớp C^1 và $F' = f$. Vậy F là một nguyên hàm của f trên I. Do đó f có ít nhất một nguyên hàm trên I.

2) • Với mọi $\lambda \in \mathbf{K}$, $\phi_0 + \lambda$ là một nguyên hàm của f trên I vì $\phi_0 + \lambda$ khả vi trên I, và $(\phi_0 + \lambda)' = \phi'_0 = f$.

• Đảo lại, giả sử ϕ là một nguyên hàm của f trên I. Thế thì $\phi - \phi_0$ khả vi trên I và $(\phi - \phi_0)' = \phi' - \phi'_0 = f - f = 0$, vậy (xem 5.3.1, Nhận xét $\phi - \phi_0$ không đổi, nghĩa là tồn tại $\lambda \in \mathbf{K}$ sao cho $\phi = \phi_0 + \lambda$. ■

Phép tính máy móc một số nguyên hàm sẽ được trình bày trong chương 9, Tập 2.

Với $f : I \to \mathbf{K}$ liên tục, ta ký hiệu $\int f$ hoặc $\begin{array}{l} I \to \mathbf{K} \\ x \mapsto \int f(x)\mathrm{d}x \end{array}$ là một nguyên hàm nào đó trong các nguyên hàm của f trên I. Ký hiệu này có ưu điểm là gọn nhưng không tiện vì nó chỉ không phải một hàm, mà thực tế là vô hạn hàm khác nhau một hằng số cộng.

♦ **Mệnh đề-Ký hiệu** Cho $(a, b) \in I^2$, $f : I \to \mathbf{K}$ liên tục, $\phi : I \to \mathbf{K}$ một nguyên hàm của f trên I. Khi đó ta có :

$$\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a).$$

Phần tử $\phi(b) - \phi(a)$ của $\mathbf{K}$ được ký hiệu là $\left[\phi(x)\right]_{x=a}^{x=b}$ hoặc đơn giản hơn $\left[\phi(x)\right]_a^b$, và được gọi là **biến phân từ a đến b của ϕ.**

Chứng minh

Theo Định lý trên, tồn tại $\lambda \in \mathbf{K}$ sao cho $\phi = F + \lambda$, từ đó

$$\phi(b) - \phi(a) = F(b) - F(a) = \int_{x_0}^{b} f - \int_{x_0}^{a} f = \int_a^b f.$$

Chú ý là mệnh đề trên nói rằng, nếu $f : I \to \mathbf{K}$ thuộc lớp C^1 trên I thì :

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

■

Bài tập

◊ **6.4.1** Cho $f, g : [0\,;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in [0\,;+\infty[\ ,\ g(x) > 0 \\ \dfrac{f}{g} \quad \text{đơn điệu} \end{cases}.$$

Ta ký hiệu $f : \begin{array}[t]{l}[0;+\infty] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f\end{array}$, $G : \begin{array}[t]{l}[0;+\infty] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x g\end{array}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{F}{G}$ đơn điệu trên $]0\,;+\infty[$.

◊ **6.4.2** Cho $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, $g : \begin{array}[t]{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \int_0^x f\end{array}$.

Chứng minh rằng nếu g giảm trên $\mathbb{R}$ thì $f = 0$.

◊ **6.4.3** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1. Chứng minh:

$$\forall x \in [a, b],\quad |f(x)| \le \frac{1}{2}\left(|f(a)+f(b)| + \int_a^b |f'|\right).$$

◊ **6.4.4** Cho $f: [0, +\infty\,[\ \to \mathbb{R}$ liên tục và sao cho tồn tại $k \in \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$\forall x \in [0, +\infty[,\quad 0 \le f(x) \le k \int_0^x f .$$

Chứng minh rằng $f = 0$ (xét $x \mapsto e^{-kx} \int_0^x f$).

◊ **6.4.5** Tìm tất cả các ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f .$$

◊ **6.4.6*** **(Bổ đề Gronwall)**

Cho f, g: $[0, +\infty\,[\ \to \mathbb{R}$ liên tục, $f \ge 0$, $g \ge 0$, và $C \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in [0, +\infty\,[,\quad f(x) \le C + \int_0^x f\,g .$$

Chứng minh rằng: $\forall x \in [0, +\infty\,[,\ f(x) \le C\, e^{\int_0^x g}$.

6.4.3 Phép đổi biến

Ta nhắc lại rằng, nếu $\varphi: J \to \mathbb{K}$ và $g: I \to \mathbb{K}$ đều thuộc lớp C^1 trên các khoảng J và I, và nếu $\varphi(J) \subset I$, thì $g \circ \varphi : \begin{array}{l} J \to \mathbb{K} \\ x \mapsto g(\varphi(x)) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên J và:

$(g \circ \varphi)' = (g' \circ \varphi)\, \varphi'$ (xem 5.1.5, Định lý 2)

Như vậy ta có: $\int g'(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = g(\varphi(x))$, từ đó suy ra mệnh đề sau:

- **Mệnh đề** Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi : [\alpha; \beta] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $[\alpha; \beta]$, f là một ánh xạ nhận giá trị thực hoặc phức, thuộc lớp C^0 trên một đoạn chứa $\varphi([\alpha; \beta])$: Thế thì: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\, du.$

Ta nói rằng ta đã thực hiện **phép đổi biến** $u = \varphi(x)$.

VÍ DỤ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

Trong thực tế, nhân tử $\varphi'(x)$ không phải luôn có sẵn trong tích phân đang khảo sát, mà phải đưa vào bằng cách chia cho chính $\varphi'(x)$. Điều này đòi hỏi φ' phải khác không trên khoảng đang xét. Vì φ thuộc lớp C^1 trên một khoảng nên định lý các giá trị trung gian chỉ ra rằng điều kiện này dẫn đến: $\varphi' > 0$ hoặc $\varphi' < 0$.

Bài tập

◊ **6.4.7**

a) Chứng minh: $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx.$

b) Từ đó suy ra giá trị của $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx.$

◊ **6.4.8** Cho $a \in \mathbb{R}^*_+$ và $f: [0; a] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho: $\forall x \in [0; a]$ $\begin{cases} f(x) \neq -1 \\ f(x).f(a-x) = 1 \end{cases}$

Tính $\int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx.$

◊ **6.4.9** Chứng minh rằng: $\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **6.4.10** Cho f : $[0; 1] \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho $f > 0$.

a) Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, tồn tại $(x_0, \ldots, x_n) \in [0; 1]^{n+1}$ duy nhất thoả mãn:

$$\begin{cases} 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1 \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f \end{cases}$$

b) Xác định $\lim\limits_{n\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)$.

◊ **6.4.11*** Cho f : $[0; 1] \to \mathbf{R}$ liên tục sao cho; $\forall k \in \mathbf{N}$, $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0$

a) Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $0 < \alpha < \beta < 1$. Chứng minh rằng tồn tại đa thức P hệ số thực, bậc 2, sao cho: $\begin{cases} \forall x \in [\alpha; \beta], & P(x) \geq 1 \\ \forall x \in [0; \alpha] \cup [\beta; 1], & 0 \leq P(x) \leq 1 \end{cases}$

b) Chứng minh: $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^1 (P(x))^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

c) Từ đó suy ra $f = 0$.

6.4.4 Phép tích phân từng phần

◆ **Mệnh đề 1 (Phép tính nguyên hàm từng phần)**

Cho u, v: $I \to \mathbf{K}$ thuộc lớp C^1 trên I. Ta có: $\int u'v = uv - \int uv'$.

Chứng minh: $(uv)' = u'v + uv'$ (xem 5.1.3, Định lý 1, *3)*) từ đó $uv = \int u'v + \int uv'$.

◆ **Mệnh đề 2 (Phép tích phân từng phần)**

Cho u, v: $[a; b] \to \mathbf{K}$ thuộc lớp C^1 trên $[a; b]$. Ta có:

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Chứng minh: Suy ra dễ dàng từ Mệnh đề 1.

Phép tích phân từng phần là một trong các công cụ cơ bản của Giải tích cổ điển. Nó thường cho phép thu được mối liên hệ giữa các tích phân phụ thuộc một số nguyên.

VÍ DỤ:

1) **Tích phân Wallis**

Ta sẽ tính giá trị của $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Với mọi $n \geq 2$, bằng cách tích phân từng phần:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx = [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,(1 - \sin^2 x)\, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

Từ đó có hệ thức: $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$.

Ta phân thành hai trường hợp tùy theo tính chẵn lẻ của n; Với mọi $p \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dots = \dfrac{2p-1}{2p} \cdot \dfrac{2p-3}{2p-2} \cdots \dfrac{1}{2} I_0 \\ I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dots = \dfrac{2p}{2p+1} \cdot \dfrac{2p-2}{2p-1} \cdots \dfrac{2}{3} I_1 \end{cases}$$

Vì $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ và $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$, nên ta kết luận:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p-1)\ (2p-3)\dots 1}{(2p)\ (2p-2)\dots 2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \dfrac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \dfrac{2p\ (2p-2)\dots 2}{(2p+1)\ (2p-1)\dots 3} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

2) **Bổ đề Lebesgue đối với một ánh xạ thuộc lớp C^1**

Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sao cho $a < b$, $f: [a;b] \to \mathbb{K}$ thuộc lớp C^1, và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{inx} dx$$

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ bằng cách tích phân từng phần:

$$I_n = \left[f(x) \frac{e^{inx}}{in} \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \frac{e^{inx}}{in} dx$$

$$= \frac{1}{in}\left(f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}\right) - \frac{1}{in}\int_a^b f'(x) e^{inx} dx$$

Từ đó: $|I_n| \leq \frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'|\right)$.

Vậy $I_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

(Ta có thể chứng minh rằng kết quả này ($I_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$) vẫn đúng khi f chỉ liên tục từng khúc).

Khi xét riêng từng phần thực và phần ảo, ta có kết quả là: nếu f: $[a;b] \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1, thì:

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0 \text{ và } \int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

(rõ ràng là hai kết quả cuối cùng vẫn đúng khi f nhận giá trị phức) .

Bài tập

◊ **6.4.12** Cho $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ sao cho $a < c < b$, u: $[a;b] \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$, v: $[a;b] \to \mathbf{R}$ sao cho $v\big|_{[a;c[}$ và $v\big|_{]c;b]}$ có những thác triển thuộc lớp C^1 trên $[a; c]$ và $[c; b]$

Chứng minh rằng:

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uw - u(c)(v(c^+) - v(c^-)) ,$$

trong đó w là ánh xạ thác triển bất kỳ của v' lên $[a ; b]$.

◊ **6.4.13** Chứng minh: $\dfrac{\int_a^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x \ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

◊ **6.4.14** Với $\varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$ cố định, hãy tính: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\varepsilon}\int_x^{x+1} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

6.4.5 Công thức Taylor với phần dư tích phân

Ta đã thấy (xem 6.4.2) là nếu f thuộc lớp C^1 trên $[a; b]$ thì:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a) .$$

Như vậy, nếu f thuộc lớp C^1 trên một khoảng I của $\mathbf{R}$ và nếu $(a, b) \in I^2$ thì:

$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ công thức này cho phép biểu diễn f bằng một tích phân đối với f'.

Bây giờ chúng ra sẽ mở rộng công thức này bằng cách sử dụng các đạo hàm cấp cao của f.

♦ **Định lý** **(Công thức Taylor với phần dư tích phân)**

Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $f : I \to \mathbb{K}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^{n+1} trên I, $(a, b) \in I^2$. Ta có:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x .$$

Chứng minh: Quy nạp theo n.

Ta đã thấy tính chất này với $n = 0$: nếu f thuộc lớp C^1 trên $[a; b]$, thì:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x .$$

Giả sử tính chất đã đúng với một số nguyên n, và f: $I \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^{n+2} trên I. Bằng cách tích phân từng phần:

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x .$$

Điều đó chứng minh tính chất tới cấp $n + 1$. ■

Bằng cách coi b là biến, công thức Taylor với phần dư tích phân cho phép biểu diễn f dưới dạng tổng một đa thức $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)$ và **phần dư** là tích phân $\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x$.

Trong khá nhiều trường hợp ta có thể khảo sát tích phân này (thường là làm trội môđun của nó), và nhờ vậy ước lượng sự sai khác có thể có giữa $f(b)$ và đa thức $\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. Vì (chẳng hạn với $a \le b$):

$$\left|\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x\right| \le \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{d}x$$

$$= \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

nên ta có: $$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f^{(n+1)}(x)$$

Bất đẳng thức cuối này được gọi là **bất đẳng thức Taylor – Lagrange.**

Bài tập

◊ **6.4.15** Chứng minh rằng với mọi $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \le \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

◊ **6.4.16** Xác định các số thực α, a, b, c sao cho với mọi đa thức P thuộc $\mathbb{R}[X]$ có bậc ≤ 5, ta có:

$$\int_0^{\pi} P(\cos\theta)\mathrm{d}x = \alpha\,(P(a) + P(b) + P(c))$$

◊ **6.4.17** Khảo sát hàm sau đây (tập nguồn và tập đích: $\mathbb{R}$)

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}\mathrm{d}t$$

◊ **6.4.18**

a) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại một đa thức duy nhất $P_n \in \mathbb{R}[X]$ sao cho:

$$X^{4n}(1 - X)^{4n} = (1 + X^2)\,P_n(X) + (-1)^n\,4^n$$

b) Ký hiệu. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \displaystyle\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x$. Chứng minh rằng:

$$\forall x \in \mathbb{N}^*,\ |\pi - a_n| < \frac{1}{4^{5n-1}}$$

◊ **6.4.19 Bất đẳng thức Young**

Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0; a] \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 sao cho: $\begin{cases} \forall x \in [0; a], & f'(x) > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Ta ký hiệu (một cách lạm dụng) f^{-1}: $[0; f(a)] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ ngược của f.

a) Chứng minh rằng: $\forall x \in [0; a]$, $\displaystyle\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x)$

b) Từ đó suy ra: $\forall\, (x, y) \in [0, a] \times [0; f(a)]$, $\displaystyle\int_0^x f + \int_0^y f^{-1} \ge xy$.

◊ **6.4.20** Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho $f' > 0$, và $g : [0; f(a)] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\forall x \in [0; a]$, $g(f(x)) \ge x$.

Chứng minh rằng: $\forall (x, y) \in [0; a] \times [0; f(a)]$, $\displaystyle\int_0^x f + \int_0^x g \ge xy$ (sử dụng bài tập 6.4.19 *b)*).

◊ **6.4.21** Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Tìm tất cả ánh xạ $f : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$ thuộc lớp C^1 trên $[0; +\infty[$ sao cho $f' > 0$, $f(0) = 0$ và : $\forall x \in [0; +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1} = \alpha \int_0^x f$ (sử dụng bài tập 6.4.19 *a)*).

6.4.6 Xấp xỉ một tích phân, phương pháp hình chữ nhật, phương pháp hình thang

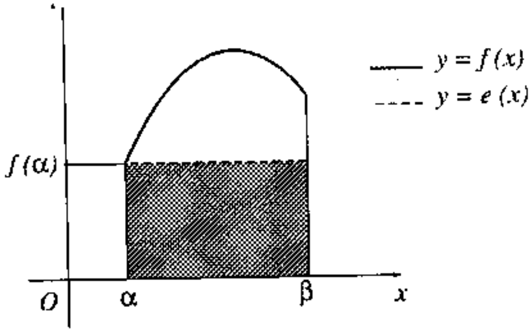
Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$, và f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ thuộc lớp thích hợp. ở đây chúng ta muốn có một giá trị gần đúng của $\int_a^b f$ bằng cách sử dụng các giá trị của f tại các điểm a_i của một phân hoạch đều $[a; b]$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $a_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$).

1) Phương pháp hình chữ nhật

a) Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, sao cho $\alpha < \beta$, và $f : [\alpha ; \beta] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1.

Xét ánh xạ hằng

$$e: [\alpha ; \beta] \to \mathbf{R}$$
$$x \to f(\alpha)$$



Ta có:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta e(x)\,dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta (f(x) - f(\alpha))\,dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x) - f(\alpha)|\,dx.$$

Vì f thuộc lớp C^1 trên $[\alpha ; \beta]$, nên theo định lý số gia hữu hạn (5.2.2):

$$\forall x \in [\alpha ; \beta],\quad |f(x) - f(\alpha)| \le (x - \alpha)\, M_1(f),$$

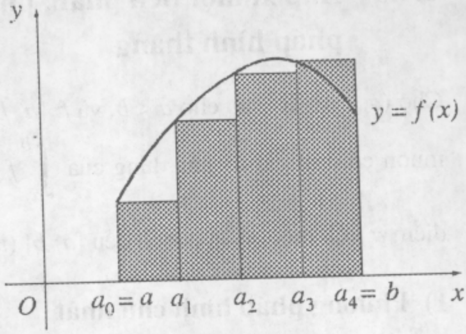
trong đó ta ký hiệu $M_1(f) = \|f'\|_\infty = \sup\limits_{t\in[\alpha;\beta]} |f'(t)|$.

Suy ra: $$\int_\alpha^\beta |f(x) - f(\alpha)|\,dx \le M_1(f)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} M_1(f).$$

b) Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$, $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1, $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_n)$ là phân hoạch đều $[a; b]$ được định nghĩa bởi:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ a_i = a + i\,\frac{b-a}{n}.$$

Bằng cách áp dụng kết quả của *a)* trên mỗi khoảng $[a_i; a_{i+1}]$ $(0 \le i \le n-1)$ và cộng lại, ta có:



$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{i+1}-a_i)f(a_i)\right|$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(a_{i+1}-a_i)^2}{2} \sup_{t\in[a_i;a_{i+1}]}\left|f'(t)\right|$$

$$\le \frac{1}{2}n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M_1(f) = \frac{(b-a)^2}{2n}M_1(f),$$

ở đây ta đã ký hiệu $M_1(f) = \|f'\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a;b]}\left|f'(t)\right|$.

Mặt khác $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i) = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(a_i)$.

Tóm lại:

♦ **Mệnh đề: (Phương pháp hình chữ nhật)**

Giả sử $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, sao cho $a \le b$, f: $[a;b] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1, $n \in \mathbb{N}^*$,

$a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, \left(0 \le i \le n-1\right)$. Khi đó ta có:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a_i)\right| \le \frac{(b-a)^2}{2n}M_1(f).$$

Trong đó $M_1(f) = \|f'\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a;b]}\left|f'(t)\right|$.

Nhận xét

1) Kết quả trên đôi khi được gọi là "phương pháp hình chữ nhật bên trái", còn "phương pháp hình chữ nhật bên phải" là cách xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{bởi} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}).$$

2) Nếu f liên tục và đơn điệu, chẳng hạn tăng (không nhất thiết thuộc lớp C^1) thì ta dùng công thức kẹp:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}).$$

Mà biên độ là:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(a_{i+1})-f(a_i)\big)$$

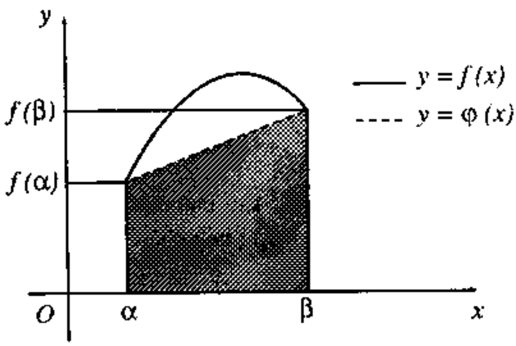
$$= \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)$$

2) Phương pháp hình thang

a) Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, sao cho $\alpha < \beta$, và f: $[\alpha; \beta] \to \mathbf{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^2.

Xét ánh xạ afin φ: $[a;b] \to \mathbf{R}$ trùng với f tại α và β (nghĩa là: $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ và $\varphi(\beta) = f(\beta)$), và ký hiệu: $g = f - \varphi$

Rõ ràng là g thuộc lớp C^2 và $g'' = f''$, $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.



Cho $x \in [\alpha;\beta]$.
Bằng cách tích phân từng phần ta có:

$$g(x) = \int_\alpha^x g'(t)\mathrm{d}t = [(t-\alpha)g'(t)]_\alpha^x - \int_\alpha^x (t-\alpha)g''(t)\mathrm{d}t$$

$$= (x-\alpha)g'(x) - \int_\alpha^x (t-\alpha)g''(t)\mathrm{d}t$$

và tương tự:

$$g(x) = (x-\beta)g'(x) - \int_\beta^x (t-\beta)g''(t)\mathrm{d}t = -(\beta-x)g'(x) - \int_x^\beta (\beta-t)g''(t)\mathrm{d}t.$$

Từ đó:

$$(\beta-\alpha)\,g(x) = (\beta-x)\,g(x) + (x-\alpha)\,g(x)$$
$$= -(\beta-x)\int_{\alpha}^{x}(t-\alpha)g''(t)\mathrm{d}t - (x-a)\int_{x}^{\beta}(\beta-t)g''(t)\mathrm{d}t\,.$$

Vì vậy, với ký hiệu $M_2(f) = \|f''\|_\infty = \|g''\|_\infty$, ta được:

$$(\beta-\alpha)\left|g(x)\right| \le \left((\beta-x)\int_{\alpha}^{x}(t-\alpha)\mathrm{d}t + (x-\alpha)\int_{x}^{\beta}(\beta-t)\mathrm{d}t\right)M_2(f)$$
$$= \frac{(\beta-\alpha)\,(x-\alpha)\,(\beta-x)}{2}M_2(f)\,.$$

Như vậy ta đã chứng minh rằng:

$$\forall x\in[\alpha;\beta] \quad , \quad \left|f(x)-\varphi(x)\right| \le \frac{(x-\alpha)\,(\beta-x)}{2}M_2(f)\,.$$

Từ đấy suy ra:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x - \int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-\varphi(x)\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}M_2(f)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)\mathrm{d}x\,.$$

Bằng cách tích phân từng phần ta có:

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\ (\beta-x)\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(\beta-x)\right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x-\alpha)^2}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(\beta-x) + \frac{(x-\alpha)^3}{6}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\,.$$

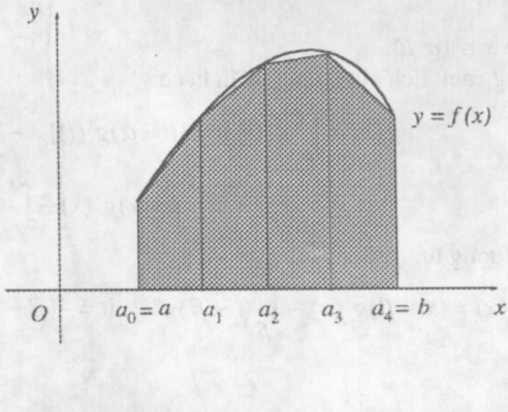
Ta kết luận: $$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x - \int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}M_2(f)\,.$$

Mặt khác: $$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ \ (f(\alpha)+f(\beta))\,.$$

b) Cho $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $a\le b$, $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^2, $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, n_n)$ phép phân hoạch đều của $[a;b]$ định nghĩa bởi:

$$\forall i\in\{0,\ldots,n-1\},\, a_i = a + i\frac{b-a}{n}\,.$$

Bằng cách áp dụng kết quả của *a*) trên mỗi khoảng $[a_i; a_{i+1}]$ $(0\le i\le n-1)$ và cộng lại, ta thu được:



$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\ \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(a_{i+1}-a_i)(f(a_i)+f(a_{i+1}))\right|$$

$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{12}(a_{i+1}-a_i)^3 \sup_{t\in[a;\,b]}|f''(t)| \leq \frac{1}{12}n\left(\frac{(b-a)^3}{n}\right)M_2(f) = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2(f)$, trong đó ta đã ký hiệu $M_2(f) = \sup_{t\in[a;b]}|f''(t)|$.

Mặt khác:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a_i)+f(a_{i+1})\right).$$

Tóm lại ta có:

• **Mệnh đề (Phương pháp hình thang)**

Cho $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $a\leq b$, $f:[a\,;b]\to\mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, $n\in\mathbb{N}^*$,

$a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, (0\leq i\leq n-1)$. Khi đó ta có:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a_i)+f(a_{i+1})\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2(f),$$

trong đó ta ký hiệu $M_2(f) = \|f''\|_\infty = \sup_{t\in[a;b]} f''(t)$.

Nhận xét

Với $n\in\mathbb{N}$, ta ký hiệu:

$$R_t(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a_i), R_p(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a_{i+1}), T(n) = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a_i)+f(_{i+1})\right)$$

là các giá trị gần đúng của $\int_a^b f(x)dx$ tương ứng với phương pháp hình chữ nhật bên trái, hình chữ nhật bên phải và hình thang.

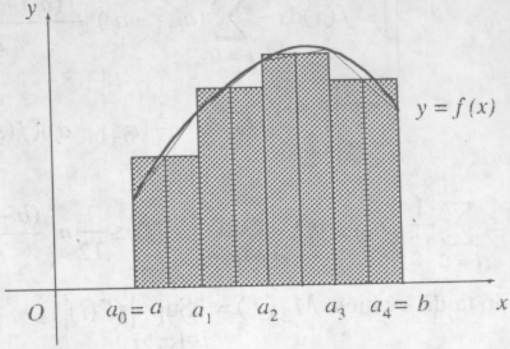
1) Rõ ràng là: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$T(n) = \frac{1}{2}(R_t(n)+R_p(n)).$$

2) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có

$$T(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}$$

Vậy $T(n)$ là tổng các diện tích đại số) của các hình chữ nhật có đáy là $[a_i; a_{i+1}]$ và chiều cao $\dfrac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}$.



Nói cách khác, $T(n)$ thu được bằng cách thay f trên mỗi $[a_i; a_{i+1}]$, $[0 \le i \le n-1)$, bởi trung bình cộng các giá trị của f tại a_i và a_{i+1}

3) Khi n tiến tới $+\infty$:

$$R_t(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + 0\left(\frac{1}{n}\right), \qquad R_p(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$T(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Như vậy, khi n lớn, phương pháp hình thang, nói chung, cho giá trị gần đúng của $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ tốt hơn là phương pháp hình chữ nhật.

Phần thứ hai

CHỈ DẪN & TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 1

1.1.1 *a)* $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m > n$, từ đó suy ra sự tồn tại của $p \in \mathbf{N}^*$ sao cho $m = n + p$. Như thế $m^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2np + p^2 = n^2 \Rightarrow n^2 > p^2 \Rightarrow n > p$, vậy tồn tại $q \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n = p + q$. Rồi $2np + p^2 = n^2 \Leftrightarrow q^2 = 2p^2$. Điều này chứng tỏ rằng nếu mỗi cặp (m,n) thích hợp, thì tồn tại cặp (p,q) thích hợp sao cho $q < n < m$ và $p < n$. Vậy $q \leq m - 1$ và $p \leq n - 1$. Vì m, n, p, q là những số tự nhiên nên việc xây dựng như trên không thể tiến hành vô hạn được.

b) $2 \mid 2n^2 = m^2$ và 2 là số nguyên tố nên $2 \mid m$. Tồn tại $m' \in \mathbf{N}^*$ sao cho $m = 2m'$, suy ra $n^2 = 2(m')^2$. Với cùng lý do đó, 2 chia hết n.

c) $n \mid n^2 = m^2 - n^2$. Mặt khác, nếu một số nguyên d chia hết m và $m - n$ thì nó cũng chia hết m vì $m = (m - n) + n$; từ đó ƯCLN $(m, m - n) = 1$, cũng như vậy ƯCLN $(n, m + n) = 1$. Suy ra ƯCLN$(n, (m - n)(m + n)) = 1$, $n = 1$, $m^2 = 2$, mâu thuẫn.

d) $m^2 \equiv 0$ hoặc 1 [3] và $2n^2 \equiv 0$ hoặc 2 [3], vậy $m^2 - 2n^2 \equiv 0$ [3]. Suy ra 3, vốn là số nguyên tố, chia hết m và n.

1.2.1 Cho $f : (x,y) \mapsto xy$; nếu (g,h) tồn tại thì:

$$\forall y \in \mathbf{R},\ g(0) + h(y) = f(0,y) = 0,$$

vậy h không đổi, g cũng vậy và f cũng vậy.

◊ **Trả lời:** $f : (x,y) \mapsto xy$.

1.2.2

a) $\begin{cases} x + y = z \\ z^2 = xy \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.

◊ **Trả lời:** $\varnothing$.

b) Bằng cách trừ, suy ra $(x - y)(x + y - 2z - 1) = 0$.

- Nếu $x = y = z$, hệ dẫn tới $3x^2 = x$.
- Nếu $x = y \neq z$, hệ dẫn tới $\begin{cases} x^2 + 2xz = x \\ x + z - 2y - 1 = 0 \end{cases}$, nghĩa là $\begin{cases} x(x + 2z - 1) = 0 \\ z = x + 1 \end{cases}$.
- Nếu x, y, z khác nhau từng đôi, ta suy ra: $\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2y - 1 = 0 \end{cases}$ từ đó $y = z$, mâu thuẫn.

◊ **Trả lời**

$$\left\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

c) Rút $y = 7z - xz$ và thế vào

$$\begin{cases} x+(7z-xz)z = 8z \\ x+7z-xz+z = 12 \end{cases}, \text{ có thể quy về } \begin{cases} (1-z^2)x = 8z - 7z^2 \\ (1-z)x = 12-8z \end{cases}$$

Rõ ràng là $z \neq 1$, từ đó $x = \dfrac{12-8z}{1-z}$ và thế trở lại : $z^2 + 4z - 12 = 0$

◊ **Trả lời:** $\left\{(4,6,2),\left(\frac{60}{7},\frac{66}{7},-6\right)\right\}$.

d) Bằng cách trừ, ta suy ra $\begin{cases} (1) \quad x(1-x^2)+y(y-1)+z^2(z-1)=0 \\ (2) \quad y(1-y^2)+z(z-1)+x^2(x-1)=0 \end{cases}$.

Thực hiện (1) − z(2): $x(1-x)(1+x+xz) = y(1-y)(1+z+yz)$, và do hoán vị vòng quanh: $y(1-y)(1+y+yx) = z(1-z)(1+x+zx)$.

Các hệ thức trên chứng tỏ rằng, nếu $(x,y,z) \neq (1,1,1)$ thì $(x>1, y>1, z>1)$ hoặc $(x<1, y<1, z<1)$.

Nhưng trong cả hai trường hợp $x + y^2 + z^3 \neq 3$.

◊ **Trả lời:** $\{(1,1,1)\}$.

1.2.3 Vấn đề thực chất là rút gọn một dạng toàn phương bằng phương pháp Gauss.

a) $3x^2+y^2+z^2-2x(y+z) = 3\left(x^2-\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}xz\right)+y^2+z^2$

$$= 3\left(x-\frac{y}{3}-\frac{z}{3}\right)^2-\frac{1}{3}(y+z)^2+y^2+z^2 = 3\left(x-\frac{y}{3}-\frac{z}{3}\right)^2+\frac{2}{3}y^2-\frac{2}{3}yz+\frac{2}{3}z^2$$

$$= 3\left(x-\frac{y}{3}-\frac{z}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{1}{2}z^2.$$

◊ **Trả lời:** $\{(0,0,0)\}$.

b) Cũng như với *a)* ta có:

$$3x^2+4y^2+18z^2-4xy-12xz = 3\left(x-\frac{2}{3}y-2z\right)^2+\frac{8}{3}\left(y-\frac{3}{2}z\right)^2.$$

◊ **Trả lời:** $\left\{\left(3z,\frac{3}{2}z,z\right);\ z\in\mathbf{R}\right\}$ hoặc $\{(6t,3t,2t);\ t\in\mathbf{R}\}$.

1.2.4 Kiểm chứng bằng cách khai triển:

$$\left(x^2+y^2-2\right)^2+\left(z^2+t^2-2\right)^2+2(xz-yt)^2=\left(x^2+z^2-2\right)^2+\left(y^2+t^2-2\right)^2+2(xy-zt)^2.$$

1.2.5 $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+...+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2=$

$$=2\left(x_1^2+...+x_n^2\right)-2(x_1x_2+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1)=0.$$

1.2.6 *a)* Quy nạp theo n:

$$\prod_{k=0}^{n+1}\left(x^{2^k}+1\right)=\left(\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}+1\right)\right)\left(x^{2^{n+1}}+1\right)=\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}\left(x^{2^{n+1}}+1\right)=\frac{x^{2^{n+2}}-1}{x-1}.$$

b) Cùng phương pháp với *a)*.

1.2.7 Ký hiệu $f(x)=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}$.

- Nếu $x\le 0$ thì $f(x)=\left(x^6+x^4+x^2+\frac{3}{4}\right)-\left(x^5+x^3+x\right)>0$.
- Nếu $x\ge 1$ thì $f(x)=\left(x^5+x^3+x\right)(x-1)+\frac{3}{4}>0$.
- Nếu $0<x<1$, thì $f(x)=-x(1-x)\left(x^4+x^2+1\right)+\frac{3}{4}$ và $0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$,

  $0\le x^4+x^2+1<3$ vậy $f(x)>0$.

1.2.8 *a)* Ký hiệu $s=a+b$, và $p=ab$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\forall\ (s,p)\in(\mathbf{R}_+)^2$, $(s^2-4p\ge 0\ \Rightarrow s^3-3sp+2\ge 2p+s)$,

nghĩa là: $\forall(s,p)\in(\mathbf{R}_+)^2$, $\left(s^2-4p\ge 0\ \Rightarrow p\le\frac{s^2-s+2}{3s+2}\right)$,

hoặc tiếp theo: $\forall s\in\mathbf{R}_+$, $\frac{s^2}{4}\ \le\ \frac{s^2-s+2}{3s+2}$.

Với $s\ge 0$, bất đẳng thức cuối trở thành: $(s-2)^2(s+2)\ge 0$.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi: $a\ge 0$ và $b\ge 0$ và $a+b=2$.

b) Ký hiệu: $x=\frac{b}{a}>0$: $(n-1)\,a^n+b^n\ge n\,a^{n-1}b\Leftrightarrow x^n-1-n(x-1)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1-n)\ge 0$$

- Nếu $x>1$, thì $x^{n-1}+...+1>n$.
- Nếu $x<1$, thì $x^{n-1}+...+1<n$.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

c) Phương pháp 1: như trong bài tập 1.2.3 *a)* :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2.$$

Phương pháp 2: Sử dụng số phức $\mathrm{j} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \left(a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2\right)\left(a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right) = \left|a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2\right|^2.$$

Phương pháp 3: $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $b^2 + c^2 \ge 2bc$, $c^2 + a^2 \ge 2ca$ và cộng lại.

◊ **Trả lời**: Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

d) • Nếu trong vế 2, một thừa số ≤ 0 còn hai thừa số khác ≥ 0, thì có bất đẳng thức.

- Nếu trong vế 2, ít nhất có hai thừa số ≤ 0, chẳng hạn $a + b - c \le 0$ và $b + c - a \le 0$, thì ta suy ra $2b \le 0$, vậy $b = 0$ và $a = c$.
- Giả sử cả 3 thừa số trong 2 vế đều ≥ 0; kí hiệu $\gamma = a + b - c$, $\alpha = b + c - a$, $\beta = c + a - b$; bất đẳng thức dẫn tới: $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \ge 8\alpha\beta\gamma$.

  Chú ý rằng $(\alpha + \beta)^2 \ge 4\alpha\beta$, hoán vị vòng quanh rồi nhân.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} c = 0 \\ a = b \end{cases} \text{ hoặc } a = b = c.$$

e) Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = (a-b)(a-c)(a+c) + (b-c)^2(b+c).$$

Có bất đẳng thức nếu a không nằm giữa b và c. Hoán vị vòng quanh, vẫn có bất đẳng thức nếu b không ở giữa a và c hoặc nếu c không nằm giữa a và b.

◊ **Trả lời:** có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

f) • Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho (ab, bc, ca) và (ca, ab, bc) để có bất đẳng thức đầu.

• Bất đẳng thức thứ hai suy ra từ *c)* áp dụng vào (a^2, b^2, c^2).

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức ở bất đẳng thức thứ nhất khi và chỉ khi $a = b = 0$ hoặc $b = c = 0$ hoặc $c = a = 0$, hoặc $a = b = c$, và ở bất đẳng thức thứ hai, khi và chỉ khi $a^2 = b^2 = c^2$.

g) Chú ý rằng $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} - 2\frac{a}{c}$, từ đó hoán vị vòng quanh và cộng lại:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{b}\right)^2\right).$$

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

h) Quy đồng mẫu số, bất đẳng thức dẫn đến $N \geq 0$ mà

$N = \left(bc(1+c)(1+a)+ca(1+a)(1+b)+ab(1+b)(1+c)\right)(1+abc)-3abc(1+a)(1+b)(1+c)$ khai triển và chú ý rằng $N = ab(1+b)(1-ac)^2 + bc(1+c)(1-ba)^2 + ca(1+a)(1-cb)^2$.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$.

i) • Áp dụng $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \geq \alpha\beta$ vào $\alpha = \dfrac{a^5}{b^3c^3}$ và $\beta = \dfrac{b^5}{c^3a^3}$, suy ra:

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^5}{b^3c^3}+\dfrac{b^5}{c^3a^3}\right) \geq \dfrac{ab}{c^3}$; hoán vị vòng quanh rồi cộng lại để suy ra:

$$\frac{ab}{c^3}+\frac{bc}{a^3}+\frac{ca}{b^3} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

• Cùng nguyên tắc, áp dụng vào $\alpha = \dfrac{ab}{c^3}$ và $\beta = \dfrac{bc}{a^3}$ suy ra:

$$\frac{ab}{c^3}+\frac{bc}{a^3}+\frac{ca}{b^3} \geq \frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}.$$

• Tiếp tục, với $\alpha = \dfrac{b}{ca}$, $\beta = \dfrac{c}{ab}$ ta suy ra:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

1.2.9 $xy = 3-(x+y)z = z^2-5z+3$ và $4xy = (x+y)^2-(x-y)^2 \leq (x+y)^2 = (5-z)^2$, từ đó $4(z^2-5z+3) \leq (5-z)^2$. Giải ra, ta thu được $-1 \leq z \leq \dfrac{13}{3}$.

1.2.10 *Cách giải 1*: $\alpha+\beta+\gamma = \left(a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)$ và chú ý rằng $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$ với mọi $x \in \mathbf{R}_+^*$, từ đó suy ra $\alpha+\beta+\gamma \geq 6$ Nếu Max $\alpha+\beta+\gamma < 2$ thì $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma < 2$ từ đó $\alpha+\beta+\gamma < 6$.

Cách giải 2: giả sử $0 < a \leq b \leq c$, thế thì $\dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$, từ đó $b+\dfrac{1}{b} \leq c+\dfrac{1}{a} = \gamma$; nhưng $b+\dfrac{1}{b} \geq 2$ (vì $(b-1)^2 \geq 0$) nên $\gamma \geq 2$.

1.2.11 Khai triển $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$, làm xuất hiện tổng $\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$ và mọi số hạng đều ≥ 0.

Ta cũng có thể lập luận bằng quy nạp:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = \left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right)(1+a_{n+1}) \geq \left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)(1+a_{n+1})$$

$$= 1+\sum_{i=1}^{n+1}a_i+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)a_{n+1} \geq 1+\sum_{i=1}^{n+1}a_i.$$

Trường hợp đẳng thức:

- Nếu $n = 1$: hiển nhiên.
- Nếu $n \geq 2$ vì $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \geq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$, nên ta suy ra $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = 0$,

vậy $(1 \leq i < j \leq n \Rightarrow a_i a_j = 0)$.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi có nhiều nhất một a_i $(1 \leq i \leq n) \neq 0$.

1.2.12 Áp dụng bài tập 1.2.11 đối với $(a_i - 1)_{1 \leq i \leq n}$.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi có nhiều nhất một a_i $(1 \leq i \leq n) \neq 1$.

1.2.13 Đặt $b_i = \dfrac{a_i - 1}{2} \in [0, +\infty[$, bất đẳng thức cần có tương đương với:

$\prod_{i=1}^{n}(1+b_i) \geq 1+\dfrac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} b_i$, đây là hệ quả của bài tập 1.2.11 (vì $\dfrac{2}{n+1} \leq 1$).

1.2.14 $\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{2n} x^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x^k + x^{2n-k}\right) + x^n$.

Với $k \in \{0,...,n-1\}$ và $x > 0$: $x^k + x^{2n-k} - 2x^n = x^n\left(x^{k-n} - 2 + x^{n-k}\right)$;

chú ý rằng $t - 2 + \dfrac{1}{t} \geq 0$ với mọi $t \in \mathbf{R}_+^*$.

Ta suy ra $x^k + x^{2n-k} \geq 2x^n$, sau đó, nhờ phép cộng suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

1.2.15
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_j - \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i = \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i$$
$$= -(n-1)x_1 + \sum_{k=2}^{n-1}\big((k-1)-(n-k)\big)x_k + (n-1)x_n$$
$$= -(n-1)x_1 - (n-3)x_2 - ... + (n-3)x_{n-1} + (n-1)x_n$$

Tổng này đạt giá trị lớn nhất nếu các x_i có hệ số ≤ 0 đều bằng 0 và các x_i có hệ số > 0 đều bằng 1. Ta phân biệt 2 trường hợp sau tuỳ theo tính chẵn lẻ của n.

- Nếu $n = 2p$, $p \in \mathbf{N}^*$, giá trị lớn nhất bằng: $1 + 3 + ... + (2p - 1)$ nghĩa là bằng p^2
- Nếu $n = 2p + 1$, $p \in \mathbf{N}^*$, giá trị lớn nhất bằng: $2 + 4 + ... + 2p$ nghĩa là bằng $p^2 + p$

◊ **Trả lời:** p^2 nếu $n = 2p$, $p^2 + p$ nếu $n = 2p + 1$. ($p \in \mathbf{N}^*$) hay $\mathbf{E}\left(\dfrac{n^2}{4}\right)$.

1.2.16 Quy nạp theo n. Đặt u_n là vế phải của bất đẳng thức; ta có:

$$u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 > (2n+3)\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2 = \frac{(2n+4)^2}{2n+3}$$

và chứng minh $(2n+4)^2 > (2n+3)(2n+5)$.

1.2.17 Quy nạp theo n. Trường hợp $n = 1$ thấy ngay; nếu $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x+i)^2} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$ thì:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(x+i)^2} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} + \left(\frac{-1}{(x+n)(x+n+1)} + \frac{1}{(x+n+1)^2}\right) \le \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}.$$

1.2.18 *a)* $\left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right| \le 1 - \frac{1}{n} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{i} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 \le \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{i^2} - \frac{4}{i}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{n} \le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(i-n)(i-1)}{i^2 n} \le 0$$

$\Leftarrow 1 \le i \le n$.

b) $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{i} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)x_i\right|$ vì $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$; sau đó

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right)x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right||x_i| \le \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

1.2.19 *a)* Ký hiệu $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}$.

- Với mọi $p \in \mathbb{N}^*$: $u_{2p} = \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2p}$, từ đó $0 < u_{2p} \le u_2 = \frac{3}{4}$.

- Với mọi $p \in \mathbb{N}^*$: $u_{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2p+1}$,

từ đó: $-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{2p+1} \le u_{2p+1} \le \frac{1}{2^{2p+1}} \le \frac{1}{8}$.

- Và $u_1 = -\frac{1}{2}$.

Cuối cùng : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2} = u_1 \le u_n \le u_2 = \frac{3}{4}$.

◊ **Trả lời:** $\mathrm{Inf}_{\mathbb{R}}(E) = -\frac{1}{2}$ và $\mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(E) = \frac{3}{4}$; đó cũng là phần tử bé nhất và phần tử lớn nhất.

b) Ký hiệu $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n} - n^2$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \le \dfrac{2}{n} - n^2 \le 2 - n^2$, vậy $\{u_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ không bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $u_n \le 2 - n^2 \le 2 - 4 = -2$ và $u_1 = -1$.

◊ **Trả lời:** $\mathrm{Inf}_{\mathbb{R}}(E)$ không tồn tại và $\mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(E) = -1$, ở đây biên trên này cũng là phần tử lớn nhất.

1.2.20 *a)* $A, B, A + B$ là những bộ phận không rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, vậy chúng có các biên trên trong $\mathbb{R}$.

- Cho $c \in A + B$; tồn tại $(a, b) \in A \times B$ sao cho $c = a + b$, từ đó suy ra $c \le \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$. Điều này chứng tỏ $\mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$ là một chặn trên của $A + B$ trong $\mathbb{R}$.

Vậy $\mathrm{Sup}(A + B) \le \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.

- Cho $b \in B$; ta có $\forall a \in A$, $a + b \le \mathrm{Sup}(A + B)$ (vì $a + b \in A + B$). Vậy $\mathrm{Sup}(A + B) - b$ là một chặn trên của A trong $\mathbb{R}$. Theo định nghĩa $\mathrm{Sup}(A)$ ta có: $\mathrm{Sup}(A) \le \mathrm{Sup}(A + B) - b$.

Điều này chứng tỏ: $\forall b \in B$, $b \le \mathrm{Sup}(A + B) - \mathrm{Sup}(A)$; $\mathrm{Sup}(A + B) - \mathrm{Sup}(A)$ là một chặn trên của B trong $\mathbb{R}$, từ đó theo định nghĩa của $\mathrm{Sup}(B)$: $\mathrm{Sup}(B) \le \mathrm{Sup}(A + B) - \mathrm{Sup}(A)$.

b) • $\forall a \in A$, $a \le \mathrm{Sup}(A)$ vậy $\forall\, a' \in -A$, $a' \ge -\mathrm{Sup}(A)$.

Điều này chứng tỏ rằng $-\mathrm{Sup}(A)$ là một chặn dưới của $-A$ trong $\mathbb{R}$.

- Cho m là một chặn dưới của $-A$ trong $\mathbb{R}$: $\forall a \in A$, $m \le -a$. Thế thì $-m$ là một chặn trên của A trong $\mathbb{R}$. Vậy $\mathrm{Sup}(A) \le -m$, nghĩa là $m \le -\mathrm{Sup}(A)$. Như vậy $-\mathrm{Sup}(A)$ là chặn dưới lớn nhất của $-A$ trong $\mathbb{R}$ và $-\mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Inf}(-A)$.

c) Ký hiệu $\alpha = \mathrm{Sup}(A)$, $\beta = \mathrm{Sup}(B)$, $\gamma = \mathrm{Max}(\mathrm{Sup}(A), \mathrm{Sup}(B))$. Tập hợp các chặn trên của $A \cup B$ trong $\mathbb{R}$ là $[\alpha;+\infty[\cap [\beta;+\infty[$, tức là $[\gamma;+\infty[$. Nó có số bé nhất là γ.

d) Vì A và B bị chặn nên A_+, B_+, A_-, B_- cũng bị chặn.

α) Nếu $A_+ = \{0\}$ hoặc $B_+ = \{0\}$ thì thấy ngay. Ta giả thiết $A_+ \ne \{0\}$ và $B_+ \ne \{0\}$ và ký hiệu $\alpha = \mathrm{Sup}(A_+), \beta = \mathrm{Sup}(B_+)$.

- $\forall (a, b) \in A_+ \times B_+$, $ab \le \alpha\beta$ vậy $\alpha\beta$ là một chặn trên của A_+, B_+ trong $\mathbb{R}$.

- Cho M là một chặn trên của A_+, B_+ trong $\mathbb{R}$: $\forall (a, b) \in A_+B_+$, $ab \le M$. Giả sử $b \in B_+ - \{0\}$; vì $\left(\forall a \in A_+, a \le \dfrac{M}{b}\right)$ nên $\dfrac{M}{b}$ là một chặn trên của A_+ trong $\mathbb{R}$. Vậy (theo định nghĩa của α):

$\alpha \le \dfrac{M}{b}$, $\alpha\beta \le M$. Bất đẳng thức cuối vẫn đúng khi $b = 0$.

Như vậy $\dfrac{M}{\alpha}$ là một chặn trên của B_+ trong $\mathbb{R}$ (chú ý là $\alpha > 0$).

Do đó (theo định nghĩa của β): $\beta \le \dfrac{M}{\alpha}$, $\alpha\beta \le M$.

Ta đã chứng minh rằng $\alpha\beta$ là chặn trên bé nhất của A_+B_+ trong $\mathbf{R}$.

β) $\operatorname{Sup}(A_+B_-) = \operatorname{Sup}(-A_+(-B_-)) = -\operatorname{Inf}(A_+(-B_-)) = -\operatorname{Inf}(A_+)\operatorname{Inf}(-B_-)$

$= -\operatorname{Inf}(A_+)\operatorname{Sup}(B_-)$, sau khi có quan hệ giữa các biên dưới tương tự như ở *d) α)*.

◊ **Trả lời:** $\operatorname{Sup}(A_+B_-) = -\operatorname{Inf}(A_+)\operatorname{Sup}(B_-)$, $\operatorname{Sup}(A_-B_+) = -\operatorname{Sup}(A_-)\operatorname{Inf}(B_+)$,

$\operatorname{Sup}(A_-B_-) = \operatorname{Inf}(A_-)\operatorname{Inf}(B_-)$.

γ) Sử dụng *c)*

δ) $\operatorname{Inf}(AB) = -\operatorname{Sup}((-A)B)$ và $(-A)_+ = -A_-$, $(-A)_- = -A_+$.

◊ **Trả lời:**

$\operatorname{Inf}(AB) = \operatorname{Min}\big(\operatorname{Inf}(A_+)\operatorname{Inf}(B_+), \operatorname{Sup}(A_+)\operatorname{Inf}(B_-), \operatorname{Inf}(A_-)\operatorname{Sup}(B_+), \operatorname{Sup}(A_-)\operatorname{Sup}(B_-)\big)$

e) Lập luận như ở *b)* sử dụng phần tử nghịch đảo, thay vì phần tử đối.

1.2.21 *a)* Chú ý: $5\sqrt{2} + 7 = \left(\sqrt{2} + 1\right)^3$.

◊ **Trả lời:** 2.

b) Ký hiệu $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$, $b = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$, $x = a - b$.

Khi đó $6 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)(x^3 + 3ab) = x(x^2 + 5)$ bởi vì:

$$ab = \sqrt[3]{-9 + \left(9 + \frac{125}{27}\right)} = \frac{5}{3}.$$

Cuối cùng: $x^3 + 5x - 6 = (x-1)(x^2 + x + 6)$.

◊ **Trả lời:** 1.

1.2.22 ◊ **Trả lời:** $\left[-1; 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right]$.

1.2.23 Trước hết: $x \in [-313; 313]$, rồi đến:

$$\sqrt[4]{313 + x} + \sqrt[4]{313 - x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{313 + x} + \sqrt{313 - x} = 36 - 2\sqrt[4]{313^2 - x^2}$$

Ký hiệu $y = \sqrt[4]{313^2 - x^2}$. Phương trình quy về $\begin{cases} y \le 18 \\ 626 + 2y^2 = 1296 - 144y + 4y^2 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** $\{-312, 312\}$.

1.2.24 *a)* Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, hệ tương đương với $\begin{cases} S^2 - P = 1 \\ S^2 - 4P = S \end{cases}$

nghĩa là: $\begin{cases} 3S^2 + S - 4 = 0 \\ P = S^2 - 1 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** $\{(1,0), (0,1)\}$.

b) ◊ **Trả lời:** $\{(37, 12)\}$.

1.2.25 *a)* Từ các phương trình đã cho suy ra:

$1 = (x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$, từ đó: $xy - xz + yz = 24$.

Vì $xy + xz + yz = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$ nên suy ra $xy + yz = 12$ và $xz = -12$.

Rồi $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 49$, từ đó $x + y + z = 7$ hoặc -7.

◊ **Trả lời:**

$$\left\{(-2, 3, 6),\ (6, 3, -2), \left(-\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{57}\right), -4, \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{57}\right)\right), \left(\frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{57}\right), -4, -\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{57}\right)\right)\right\}.$$

b) Ký hiệu $X = \sqrt{x}, Y = \sqrt{y-1}, Z = \sqrt{z-2}$, khi đó:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 11) \\
&\Leftrightarrow 2(X + 2Y + 3Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + 14 \\
&\Leftrightarrow \left(X^2 - 2X\right) + \left(Y^2 - 4Y\right) + \left(Z^2 - 6Z\right) + 14 = 0 \\
&\Leftrightarrow (X - 1)^2 + (Y - 2)^2 + (Z - 3)^2 = 0 .
\end{aligned}$$

◊ **Trả lời:** $\{(1, 5, 11)\}$.

1.2.26 *a)* $z + t = -x - y$ và $zt = \frac{1}{2}\left((z+t)^2 - z^2 - t^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2\right) = xy$ vậy $(-x, -y)$ và (z, t) là những nghiệm của cùng một phương trình bậc 2. Do đó $(z = -x$ và $t = -y)$ hoặc $(z = -y$ và $t = -x)$.

◊ **Trả lời:** $\left\{(x, y, -y, -x), (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ và } x < y\right\}$.

b) Đặt $p = -xyzt$, ta suy ra: $x^2 - 2x = y^2 - 2y = z^2 - 2z = t^2 - 2t = p$. Vì phương trình bậc hai: $u^2 - 2u - p = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm trong $\mathbf{R}$, nên kết quả là, chính xác đến thứ tự, $(x = y$ và $z = t)$ hoặc $x = y = z$.

◊ **Trả lời:** $\left\{(1,1,1,1), (-1,-1,-1,3) \text{ và các hoán vị}\right\}$, 5 nghiệm.

1.2.27 Bất đẳng thức là tầm thường nếu $n = 1$.

Với $n \geq 2$, bằng cách khai triển theo nhị thức Newton:

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n > 1 + C_n^2 \frac{2}{n} = n .$$

1.2.28 *Cách giải 1*

Ký hiệu $P = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} z_\sigma = x_1^6 x_2^6 x_3^6 x_4^6 y_1^6 y_2^6 y_3^6 y_4^6 = \prod_{i=1}^{4} (x_i y_i)^6$.

Vì $(x_i \ge 0, y_i \ge 0, x_i + y_i \ge 0)$, nên ta thấy $0 \le x_i y_i = x_i(1 - x_i) \le \frac{1}{4}$, từ đó $P \le \frac{1}{4^{24}}$, vì $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ chứa 24 phần tử nên ít nhất một trong các z_σ là không lớn hơn $\frac{1}{4}$.

Cách giải 2

Trước hết chú ý rằng $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4$ đều thuộc $[0; 1]$.

- Nếu tồn tại $j, k \in \{1, \ldots, 4\}$ phân biệt sao cho $x_j \le \frac{1}{2}$ và $x_k \le \frac{1}{2}$ thì tồn tại $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ sao cho $\sigma(1) = j$, $\sigma(2) = k$, $z_\sigma \le \frac{1}{4}$.
- Nếu không, tồn tại ít nhất là hai (và cả 3) chỉ số $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ phân biệt, sao cho $x_j \ge \frac{1}{2}$ và $x_k \ge \frac{1}{2}$ thì $y_j \le \frac{1}{2}$ và $y_k \le \frac{1}{2}$, và ta sử dụng hoán vị $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ sao cho $\sigma(3) = j$ và $\sigma(4) = k$.

1.2.29

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{r} = \frac{1}{r}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}\right) = \frac{1}{r} \frac{a_n - a_1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

1.2.30 *a)* • $\forall (a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ như ta thấy bằng cách so sánh các bình phương.

- $\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \sqrt{x_i}\sqrt{x_j} \ge \sum_{i=1}^{n} x_i$ từ đó suy ra: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

b) $\sqrt{|b|} + \sqrt{|a - b|} \ge \sqrt{|b| + |a - b|} \ge \sqrt{|a|}$.

1.2.31 *a)* Quy nạp hai bước theo n:

- Tính chất là hiển nhiên với $n = 1$ và $n = 2$.
- Nếu $\begin{cases} \omega^{n-2} \le \phi_n \le \omega^{n-1} \\ \omega^{n-1} \le \phi_{n+1} \le \omega^n \end{cases}$, thì $\omega^{n-2}(1+\omega) \le \phi_{n+2} \le \omega^{n-1}(1+\omega)$, từ đó suy ra $\omega^n \le \phi_{n+2} \le \omega^{n+1}$ vì $1 + \omega = \omega^2$.

b) $\omega n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow (\omega - 1)n^2 - 2n - 1 > 0$.

Tam thức $(\omega - 1)X^2 - 2X - 1$ có các không điểm:

$$\frac{1 - \sqrt{\omega}}{\omega - 1} \ (< 0) \quad \text{và} \quad \frac{1 + \sqrt{\omega}}{\omega - 1} \quad (\approx 3{,}68) < 4$$

c) Quy nạp theo n:

- Tính chất là hiển nhiên với $n = 13$.
- Nếu $\omega^{n-2} > n^2$ thì $\omega^{n-1} > \omega n^2 > (n+1)^2$ (vì $n \geq 13 \geq 4$).

d) $\phi_n = n^2 \Leftrightarrow n^2 > \omega^{n-2} \Rightarrow n \leq 12$. Tính $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{12}$

◊ **Trả lời:** $\{n \in \mathbf{N};\ \phi_n = n^2\} = \{0, 1, 12\}$.

1.2.32 Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{1\leq k\leq n}$ và $\left(a_k\sqrt{k}\right)_{1\leq k\leq n}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right).$$

- Chứng minh: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

Phương pháp 1: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{n} - 1 \leq 2\sqrt{n}$.

Phương pháp 2: Quy nạp theo n. Nếu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$ thì:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} = 2\sqrt{n+1} - \left(2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2\sqrt{n+1} - \left(\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \leq 2\sqrt{n+1} - \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\leq 2\sqrt{n+1}.$$

1.2.33 Ký hiệu $\alpha_i = \sqrt{a_i}$, $1 \leq i \leq n$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} + \sqrt{0^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} + \ldots + \sqrt{0^2 + \ldots + 0^2 + \alpha_n^2}$$

$$\leq \sqrt{\alpha_1^2 + (2\alpha_2)^2 + \ldots + (n\alpha_n)^2}.$$

theo bất đẳng thức Minkowski với n phần tử (xem 1.2.32).

1.2.34 *a)* Bất đẳng thức là hiển nhiên nếu $xyz = 0$. Giả sử $xyz \neq 0$; ta có:

$$\sum \frac{xy(x+y)}{xyz} = \sum \frac{(x+y)}{z} = \sum\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

(trong đó Σ chỉ tổng thu được bằng cách hoán vị vòng quanh) và $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$

$\left(\text{do } \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2 = \dfrac{(x-y)^2}{xy}\right)$.

b) Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, áp dụng cho (x^3, y^3, z^3):

$$xyz = \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \le \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

1.2.35 Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân vào $\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_n}{a_1}\right)$.

1.2.36 • $n + H_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \ge n\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = n\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = n\,(n+1)^{\frac{1}{n}}$.

• $n - H_n = \sum_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \ge (n-1)\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}$

$$= (n-1)\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = (n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

1.2.37 *a)* $(n+1)^n \ge 2^n n! \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n \frac{1}{n^n} \ge n! \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \ge \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Điều đó là kết quả của sự so sánh các trung bình cộng và trung bình nhân của (1,2,...,n).

b) Cũng như *a)*, với $(1^2, 2^2, \ldots, n^2)$, biết rằng $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.2.38 *a)* $E(x) \le x \le y < E(y) + 1$, suy ra $E(x) \le E(y)$, vì $E(x)$ và $E(y)$ đều là những số nguyên.

b) $E(x) < x < E(x) + 1 \Rightarrow -E(x) - 1 < -x < -E(x)$.

c) $E(x) + E(y) \le x + y < E(x) + E(y) + 2$, vậy: $E(x+y) \in \{E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 1\}$.

d) $E(x) + \alpha \le x + \alpha < E(x) + 1 + \alpha$ và $E(x) + \alpha \in \mathbf{Z}$.

1.2.39 *a)* Dùng biểu thức liên hợp.

b) Cộng các bất đẳng thức thu được ở *a)* với *n* từ 1 đến *N* ($N \in \mathbf{N}^*$) ta thu được:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right),$$

nghĩa là: $\left(\sqrt{N+1} - 1\right) < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{N}$.

Trường hợp riêng: $\sqrt{10\,000} - 1 < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10\,000}\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{10\,000} = 100$

Vậy $\left(\sqrt{10\,000} - 1\right) \approx 99{,}005$.

◊ **Trả lời:** 99.

1.2.40 Xét 6 trường hợp tùy theo lớp modulo 6 của n. Ví dụ nếu $n = 6p + 4$ $(p \in \mathbf{N})$:

$$\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right) = 2p+1, \mathrm{E}\left(\frac{n+2}{6}\right) = p+1, \mathrm{E}\left(\frac{n+4}{6}\right) = p+1, \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right) = 3p+2, \mathrm{E}\left(\frac{n+3}{6}\right) = p+1$$

1.2.41 Ký hiệu $f: \begin{array}{l}\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\end{array}$

- Vì $x\frac{1}{x} = 1$ nên ta có: ($x \geq 1$ hoặc $\frac{1}{x} \geq 1$), vậy $\mathrm{E}(x) \geq 1$ hoặc $\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$, từ đó $f(x) \geq 1$.
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$.

◊ **Trả lời:** 1.

1.2.42 Với $n \in \mathbf{N}$, ký hiệu $u_n = \mathrm{E}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \in \mathbf{N}^*$. Vì $\left(\frac{3}{2}\right)^n \notin \mathbf{N}^*$ (3^n là số lẻ) nên ta có:

$$u_n < \left(\frac{3}{2}\right)^n < u_n + 1.$$

Từ đó ta suy ra: $0 < 3^n - 2^n u_n < 2^n$. Nhưng $3^n - 2^n u_n$ và 2^n là số nguyên, vậy $3^n - 2^n u_n + \frac{1}{2} < 2^n$.

Từ đó: $u_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$.

1.2.43 Chú ý rằng, với mọi k thuộc $\mathbf{N}^*$:

- $\frac{k+3\sqrt{k}}{k} \geq 1$
- $\frac{k+3\sqrt{k}}{k} < 2 \Leftrightarrow k \geq 10$.

◊ **Trả lời:** $S_n = \begin{cases} 4 & \text{nếu } n = 1 \\ 2n+3 & \text{nếu } 2 \leq n \leq 9 \\ n+12 & \text{nếu } n \geq 10 \end{cases}$.

1.2.44 $$\sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right) = \sum_{k=1}^{3} 1 + \sum_{k=4}^{8} 2 + \ldots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} (n-1) + n$$

$$= 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + \ldots + (2n-1)(n-1) + n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k-1) + n = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + 2n$$

$$= 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{1}{6}n(4n^2 - 3n + 5)$.

1.2.45 Ký hiệu $u_n = \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}, v_n = \left(\sqrt{3}-1\right)^{2n}$. Bằng cách khai triển theo nhị thức Newton, ta có:

$$u_n + v_n = \left(4+2\sqrt{3}\right)^n + \left(4-2\sqrt{3}\right)^n = 2^n\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

$$= 2^n\left(2\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ chẵn}}}^{n} \mathrm{C}_n^k 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k\right) = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} \mathrm{C}_n^{2k} 2^{n-2k} 3^k \in 2^{n+1}\mathbf{N}.$$

Đặc biệt, vì $u_n + v_n \in \mathbf{Z}$ và $0 < v_n < 1$ nên ta có $u_n + v_n = \mathrm{E}(u_n) + 1$.

1.2.46 Ký hiệu q và r là thương và dư của phép chia Euclide $\mathrm{E}(a)$ cho n:

$$\mathrm{E}(a) = nq + r,\ (q,r) \in \mathbf{N}^2,\ 0 \le r \le n-1.$$

Khi đó: $\forall k \in \{0,\dots,n-1\},\ q + \dfrac{r+k}{n} \le \dfrac{a+k}{n} < q + \dfrac{r+k+1}{n}$.

Cho $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

- Nếu $\dfrac{r+k+1}{n} \le 1$ thì: $q \le q + \dfrac{r+k}{n} \le \dfrac{a+k}{n} < q+1$, vậy $\mathrm{E}\left(\dfrac{a+k}{n}\right) = q$.

- Nếu $\dfrac{r+k+1}{n} > 1$ thì $r+k \ge n$ từ đó:

$$q+1 \le q + \frac{r+k}{n} \le \frac{a+k}{n} < q + \frac{r+k+1}{n} \le q + \frac{2n-1}{n} < q+2$$

do đó $\mathrm{E}\left(\dfrac{a+k}{n}\right) = q+1$.

Vậy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}\left(\frac{a+k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-r-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1}(q+1) = (n-r)q + r(q+1) = nq + r = \mathrm{E}(a)$.

1.2.47 Cho $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x < y$.

- Nếu $x \ge 0$ thì $\sqrt{x} < \sqrt{y}$; tồn tại $q \in \mathbf{Q}$ sao cho $\sqrt{x} < q < \sqrt{y}$, từ đó $x < q^2 < y$ và $q^2 \in D$.
- Nếu $y \le 0$ thì $\sqrt{-y} < \sqrt{-x}$; tồn tại $q \in \mathbf{Q}$ sao cho $\sqrt{-y} < q < \sqrt{-x}$, từ đó: $x < -q^2 < y$ và $-q^2 \in D$.
- Nếu $x < 0$, và $y > 0$ thì ta có thể chọn $q = 0$.

1.2.48 Cho $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x < y$. Vì D trù mật trong $\mathbf{R}$ nên tồn tại $d \in D$ sao cho $x > d > y$, vậy $d \in E$ và $x < d < y$.

1.2.49 Cho $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x < y$ và $\varepsilon = y - x > 0$. Tồn tại $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho $\varepsilon > 1$. Vậy $0 < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n} = 2$. Ký hiệu $m = \mathrm{E}\left(2^n x\right) + 1$, ta có $m - 1 \le 2^n x < m$, từ đó:

$$x < \frac{m}{2^m} < x + \frac{1}{2^n} < x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y .$$

1.2.50 Cho $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x < y$. Vì D trù mật trong $\mathbf{R}$ nên có vô số phần tử của D trong $]x; y[$. Vì F hữu hạn nên tồn tại ít nhất một phần tử của $D - F$ trong $]x; y[$.

1.2.51 Lập luận phản chứng.

a) Ký hiệu $q = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ và giả sử $q \in \mathbf{Q}$. Ta có $q = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(q - \sqrt{6}\right)^{2+1} \Leftrightarrow q^2 + 1 = 2(q+1)\sqrt{6} \Leftrightarrow \left(q^2 + 1 = 0 \text{ và } q + 1 = 0\right)$ vì $\sqrt{6} \notin \mathbf{Q}$ (như trong bài tập 1.1.1). Ta đi đến một mâu thuẫn.

b) Ký hiệu $q = \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3}$ và giả sử là $q \in \mathbf{Q}$. Ta có:

$$\begin{aligned}
q = \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} &\Leftrightarrow \left(q + \sqrt[4]{3}\right)^3 = 5 \\
&\Leftrightarrow q^3 - 5 + 3q^2\sqrt[4]{3} + 3q\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt[4]{3} = 0 \\
&\Rightarrow \left(q^3 - 5 + 3q\sqrt{3}\right)^2 = \left(3q^2 + \sqrt{3}\right)^2\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \left(q^6 - 10q^3 + 9q^2 + 25\right) - 3\left(q^4 + 10q + 1\right)\sqrt{3} = 0 \\
&\Rightarrow q^4 + 10q + 1 = 0
\end{aligned}$$

(vì $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$, mâu thuẫn vì $q > 0$).

1.2.52 Trước hết chú ý rằng $cx + d \neq 0$ bởi vì $(c, d) \in \mathbf{Q}^2$, $(c, d) \neq (0, 0)$, $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Đặt $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, ta suy ra $x(cy - a) = b - dy$. Nếu $cy - a = 0$, thì $b - dy = 0$, suy ra $ad - bc = 0$, mâu thuẫn. Từ đó suy ra $x = \dfrac{b - dy}{cy - a}$; nếu $y \in \mathbf{Q}$ thì $x \in \mathbf{Q}$, mâu thuẫn.

1.2.53 Đặt $\delta = x - \sqrt{5}$, $y = \dfrac{2x+5}{x+2}$, $\delta' = y - \sqrt{5}$. Ta có:

$$\delta' = \frac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5} = \frac{\left(2 - \sqrt{5}\right)x + 5 - 2\sqrt{5}}{x+2} = \frac{2 - \sqrt{5}}{x+2}\delta ,$$

từ đó: $\left|\delta'\right| = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{x+2}\left|\delta\right| \le \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2}\left|\delta\right| \le \left|\delta\right|$.

1.2.54 $\sqrt{7} - \dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow 7b^2 > a^2$, và cũng vậy $\sqrt{7} - \dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{ab} \Leftrightarrow 7b^2 > a^2 + 2 + \dfrac{1}{a^2}$.

- Giả sử $a > 1$. Vì $7b^2$ và a^2 là những số nguyên, để chứng minh $7b^2 > a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$, chỉ cần chứng minh $7b^2 \neq a^2 + 1$ và $7b^2 \neq a^2 + 2$. Nhằm mục đích này ta dùng các lớp đồng dư Modulo 8, biết rằng:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} n \equiv 0 \ [2] & \Rightarrow \ n^2 \equiv 0 \ \text{hay} \ 4 \quad [8] \\ n \equiv 1 \ [2] & \Rightarrow \ n^2 \equiv 1 \quad [8] \end{cases}$$

	$7b^2$	a^2+1	a^2+2
$\begin{cases} a \text{ chẵn} \\ b \text{ chẵn} \end{cases}$	0 hoặc 4	1 hoặc 5	2 hoặc 6
$\begin{cases} a \text{ chẵn} \\ b \text{ lẻ} \end{cases}$	7	1 hoặc 5	2 hoặc 6
$\begin{cases} a \text{ lẻ} \\ b \text{ chẵn} \end{cases}$	0 hoặc 4	2	3
$\begin{cases} a \text{ lẻ} \\ b \text{ lẻ} \end{cases}$	7	2	3

Từ đó $7b^2 \neq a^2 + 1$ và $7b^2 \neq a^2 + 2$.

- Nếu $a = 1$, thì $7b^2 > 1$, $7b^2 \geq 7 > 4$.

1.2.55 Hai tập hợp E, F được gọi là có cùng lực lượng khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ E lên F; khi đó ta ký hiệu $E \leftrightarrow F$.

1) • $[0;1] \leftrightarrow [a;b]$, với $a < b$; nhờ ánh xạ afin $x \mapsto (b-a)x + a$.

- Chứng minh cùng cách đó: $]0;\ 1] \leftrightarrow]a;\ b]$, $[0;\ 1[\leftrightarrow [a;\ b[$, $]0;\ 1[\leftrightarrow]a;\ b[$, $]-\infty; 0] \leftrightarrow]-\infty; a]$, $]-\infty;\ 0[\leftrightarrow]-\infty;\ a[$, $[0, +\infty[\leftrightarrow [b;\ +\infty[$, $]0, +\infty[\leftrightarrow]b;\ +\infty[$.

2) $]0;\ 1] \leftrightarrow [0;\ 1[$ bởi ánh xạ afin $x \mapsto 1 - x$. Chứng minh tương tự: $]-\infty;\ 0] \leftrightarrow [0;\ +\infty[$, $]-\infty;\ 0[\leftrightarrow]0;\ +\infty[$.

3) $[0;\ 1[\leftrightarrow [0;\ +\infty[$ bởi $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$. Cũng như thế, chứng minh:

$]0;\ 1[\leftrightarrow]0;\ +\infty[$, $\mathbb{R} \leftrightarrow]0;\ +\infty[$.

4) $[0;1] \leftrightarrow [0;1[$ bởi $\varphi: [0;1] \to [0;1[$ xác định bởi:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{nếu tồn tại } n \in \mathbf{N}^* \text{ sao cho } x = \dfrac{1}{n}. \\ x & \text{nếu không} \end{cases}$$

5) $]0;1] \leftrightarrow]0;1[$ qua thu hẹp của φ với nguồn là $]0;1]$ và đích là $]0;1[$ $(\varphi(0) = 0)$.

C 1.1 *1)* Tính chất là tầm thường với $m = 0$; và là hiển nhiên với $m = 1$. Nếu tính chất đã đúng với $m \in \mathbf{N}$, thì với mọi $(a_1,\dots,a_{2^{m+1}}) \in (\mathbf{R}_+)^{2^{m+1}}$:

$$\mathcal{G}(a_1,\dots,a_{2^{m+1}}) = (a_1 \dots a_{2^{m+1}})^{\frac{1}{2^{m+1}}} = \left((a_1 \dots a_{2^m})^{\frac{1}{2^m}} (a_{2^m+1} \dots a_{2^{m+1}})^{\frac{1}{2^m}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathcal{G}(\mathcal{G}(a_1,\dots,a_{2^m}), \mathcal{G}(a_{2^m+1},\dots,a_{2^{m+1}}))$$

$$\le \mathcal{A}(\mathcal{G}(a_1,\dots,a_{2^m}), \mathcal{G}(a_{2^m+1},\dots,a_{2^{m+1}})) \quad (\text{trường hợp } m = 1)$$

$$\le \mathcal{A}(\mathcal{A}(a_1,\dots,a_{2^m}), \mathcal{A}(a_{2^m+1},\dots,a_{2^{m+1}})) = \mathcal{A}(a_1,\dots,a_{2^{m+1}})$$

2) $\mathcal{A}(a_1,\dots,a_{2^{m+1}}) \ge \mathcal{G}(a_1,\dots,a_{2^{m+1}})$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{m+1}} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i + (2^{m+1} - n)a \right) \ge \left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) a^{2^{m+1}-n} \right)^{\frac{1}{2^{m+1}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{m+1}} (na + (2^{m+1} - n)a) \ge \left(\mathcal{G}(a_1,\dots,a_n) a^{2^{m+1}-n} \right)^{\frac{1}{2^{m+1}}}$$

$$\Leftrightarrow a \ge (\mathcal{G}(a_1,\dots,a_n))^{\frac{n}{2^{m+1}}} a^{1-\frac{n}{2^{m+1}}}$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{n}{2^{m+1}}} \ge (\mathcal{G}(a_1,\dots,a_n))^{\frac{n}{2^{m+1}}} \Leftrightarrow a \ge \mathcal{G}(a_1,\dots,a_n).$$

C 1.2 A *1) a)* Cho E là một tập đếm được và F là một bộ phận vô hạn của E ; tồn tại một song ánh $f: E \to \mathbf{N}$. Vì ánh xạ $\begin{array}{c} F \to f(F) \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ là một song ánh nên chỉ cần chứng minh $f(F)$ đếm được. Chứng minh rằng $\varphi: \mathbf{N} \to f(F)$ xác định bởi:

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = \mathrm{Min}(F) \\ &\varphi(1) = \mathrm{Min}(f(F) - \{\varphi(0)\}) \\ &\quad \vdots \\ &\varphi(n) = \mathrm{Min}(f(F) - \{\varphi(0),\dots,\varphi(n-1)\}) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

là một ánh xạ và là một song ánh.

b) Cho E, F là hai tập hợp đếm được.

Trường hợp 1: $E \cap F = \varnothing$. Tồn tại hai song ánh : $f : \mathbf{N} \to E$, $g : \mathbf{N} \to F$; kiểm chứng rằng

$$h : \begin{array}{l} \mathbf{N} \to E \cup F \\ n \mapsto \begin{cases} f(p) & \text{nếu } n = 2p, \quad p \in \mathbf{N} \\ g(p) & \text{nếu } n = 2p+1, p \in \mathbf{N} \end{cases} \end{array}$$ là một song ánh.

Trường hợp 2 : $E \cap F \neq \varnothing$. Xét $E' = E \times \{0\}$ và $F' = F \times \{1\}$ chúng đều đếm được và không giao nhau ; theo trường hợp 1 , $E' = F'$.

Mặt khác, đặt $G = (E \times \{0\} \cup \{(x,1) \,;\, x \in F \text{ và } x \notin E\}$,

Ánh xạ $\varphi : E \cup F \to G$ được xác định bởi:

$$\forall x \in E \cup F, \ \varphi(x) = \begin{cases} (x,0) & \text{nếu } x \in E \\ (x,1) & \text{nếu } x \in F \ v\mu \ x \notin E \end{cases}$$

là một song ánh. G đếm được, vậy $E \cup F$ cũng đếm được.

2) • Cho $N \in \mathbf{N}^*$; tồn tại $n \in \mathbf{N}$ duy nhất sao cho ($2^n \mid N$ và $2^{n+1} \nmid N$), rồi tồn tại $m \in \mathbf{N}$ sao cho $N + (2m+1)2^n$.

• Nếu $N = (2m+1)2^n$ thì n là số mũ của 2 trong dạng phân tích N ra thừa số nguyên tố , từ đó suy ra tính duy nhất của n rồi của m.

3) • $\mathbf{N}^*$ đếm được ($\begin{array}{l} \mathbf{N} \to \mathbf{N}^* \\ n \mapsto n+1 \end{array}$ là một song ánh) ; theo A *2)* suy ra $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ đếm được.

• $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{N}^2 \cup (\mathbf{N} \times (-\mathbf{N})) \cup ((-\mathbf{N}) \times (\mathbf{N}) \cup ((-\mathbf{N}) \times (-\mathbf{N}))$ là tập đếm được (xem *1) b*).

• Tập hợp $Q = \{(m,n) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^* \,;\, \text{ƯCLN}(m,n) = 1\} \cup \{(0,1)\}$ là một bộ phận vô hạn của $\mathbf{Z}^2$, tập này đếm được, vậy Q cũng đếm được (xem *1) a*)).

• Ánh xạ $\begin{array}{l} Q \to \mathbf{Q} \\ (m,n) \mapsto \dfrac{m}{n} \end{array}$ là song ánh, vậy $\mathbf{Q}$ đếm được.

B *1)* Cho $n \in \mathbf{N}$; vì $b_n \neq a_{n,n}$ và $0, a_{n,1}a_{n,2}...a_{n,n}...$ và $0, b_1, b_2,...b_n,...$ đều là các biểu diễn thập phân riêng của θ (n) và x nên ta có $x \neq \theta(n)$ với bất kỳ $n \in \mathbf{N}$.

Vậy θ không phải là song ánh.

2) Vì không tồn tại một toàn ánh nào từ $\mathbf{N}^*$ lên $[0 \,;\, 1[$ nên không tồn tại một song ánh nào từ $\mathbf{N}^*$ lên $[0; 1[$. Vậy $[0 \,;\, 1[$ không đếm được. Nếu $\mathbf{R}$ đếm được thì $[0 \,;\, 1[$ là một bộ phận vô hạn của nó cũng đếm được (xem A *1) a*)), mâu thuẫn. Vậy $\mathbf{R}$ không đếm được.

C 1.3 *1) α)* ∘ Cho $x \in A + B$, tồn tại $(a,b) \in A \times B$ sao cho $x = a + b$. Vì ($a_1 \le a \le a_2$ và $b_1 \le b \le b_2$ ta suy ra $a_1 + b_1 \le b \le a_2 + b_2$. Từ đó $A + B \subset [a_1 + a_2 \,;\, b_1 + b_2]$

• Đảo lại

Cho $x \in [a_1 + a_2 \,;\, b_1 + b_2]$. Chú ý rằng: $a_1 + a_2 \le a_1 + b_2 \le b_1 + b_2$.

Nếu $a_1 + a_2 \le x \le a_1 + b_2$ thì $x = a_1 + (x - a_1)$ với $a_1 \in A$ và $x - a_1 \in B$.

Nếu $a_1 + b_2 \le x \le a_2 + b_2$ thì $x = (x - b_2) + b_2$ với $x - b_2 \in A$ và $b_2 \in B$.

β) Đặt $m = \text{Min}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$, $M = \text{Max}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$.

• Vì tất cả $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$ đều trong AB nên $m \in AB$ và $M \in AB$.

• Cho $(a,b) \in A \times B$: $\begin{cases} a_1 \le a \le a_2 \\ b_1 \le b \le b_2 \end{cases}$

Ta suy ra (theo dấu của b, a_1, a_2) là : $\begin{cases} ab & \text{ở giữa} & a_1b \text{ và } a_2b \\ a_1b & \text{ở giữa} & a_1b_1 \text{ và } a_1b_1 \\ a_2b & \text{ở giữa} & a_2b_1 \text{ và } a_2b_2 \end{cases}$

Vậy $m \le ab \le M$.

Điều này chứng tỏ $AB \subset [m ; M]$.

• Ở đây ta ký hiệu, với mọi $(\alpha\beta) \in \mathbf{R}^2$: $|\alpha ; \beta| = \begin{cases} [\alpha ; \beta] & \text{nếu } \alpha \le \beta \\ [\beta ; \alpha] & \text{nếu } \alpha \ge \beta \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} AB &\supset (\{a_1\}B) \cup (\{a_2\}B) \cup (A\{b_1\}) \cup (A\{b_2\}) \\ &= |a_1b_1 ; a_1b_2| \cup |a_2b_1 ; a_2b_2| \cup |a_1b_1 ; a_2b_1| \cup |a_1b_2 ; a_2b_2| \\ &= (|a_1b_1 ; a_1b_2| \cup |a_1b_2 ; a_2b_2|) \cup (|a_2b_1 ; a_2b_2| \cup |a_1b_1 ; a_2b_1|) \\ &= [\text{Min}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2) ; \text{Max}(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2)] \cup [\text{Min}(a_1b_1, a_2b_1, a_2b_2) ; \\ &\quad \text{Max}(a_1b_1, a_2b_1, a_2b_2)] \\ &= [\text{m}, \text{M}]. \end{aligned}$$

2) Các tính chất từ *a)* đến *f*), được thấy ngay, bằng cách sử dụng định nghĩa $A + B$ và $A.B$.

g) Nếu $A \ne [0 ; 0]$ và $B \ne [0 ; 0]$ thì tồn tại $a \in A$ sao cho $a \ne 0$, và $b \in B$ sao cho $b \ne 0$. Do đó $ab \ne 0$ và $ab \in AB$, vậy $AB \ne [0 ; 0]$.

h) α) • $\forall a \in \mathbf{R}$, $[a ; a] + [-a ; -a] = [0 ; 0]$

• Nếu $A = [a_1 ; a_2]$ có phần tử đối xứng $B = [b_1 ; b_2]$ đối với phép + thì $a_1 + b_1 = a_1 + b_2 = a_2 + b_1 = a_2 + b_2 = 0$, vậy $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2 = -a_1$.

β) • $\forall a \in \mathbf{R}^*$, $[a ; a][a^{-1} ; a^{-1}] = [1 ; 1]$.

• Nếu $[a_1 ; a_2]$ có phần tử đối xứng $B = [b_1 ; b_2]$ đối với phép . thì $a_1b_1 = a_1b_2 = a_2b_1 = a_2b_2 = 1$ với $a_1 \ne 0$; $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2 = a_1^{-1}$.

i) • Cho $x \in A(B + C)$; tồn tại $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ sao cho $x = a(b + c)$

Từ đó $x = ab + ac \in (AB) + (AC)$.

• Có thể xảy ra là $A(B + C) \ne (AB) + (AC)$ như đã thấy trong ví dụ $A = [-1 ; 1]$, $B = [-1 ; 0]$, $C = [0 ; 1]$; trong đó ta có :

$$\begin{cases} B + C = [-1 ; +1] \text{ . } A(B + C) = [-1 ; +1] \\ AB = [-1 ; +1] \text{ , } AC = [-1 ; +1] \text{ , } (AB) + (AC) = [-2 ; +2] \end{cases}$$

j) Ta giả sử $\forall(b, c) \in B \times C$, $bc \geq 0$.
Đẳng thức $A(B + C) = (AB) + (AC)$ là hiển nhiên nếu $B = [0 ; 0]$ hay $C = [0 ; 0]$. Giả sử $B \neq [0 ; 0]$ và $C \neq [0 ; 0]$. Khi đó tồn tại $b_0 \in B$ với $b_0 \neq 0$ và $c_0 \in C$ sao cho $c_0 \neq 0$. Chú ý rằng trường hợp $b_0 < 0$ có thể đưa vào trường hợp $b_0 > 0$ (bằng cách xét $-B$ và $-C$). Do vậy giả sử $b_0 > 0$. Vì ($\forall c \in C$, $b_0c \geq 0$) ta suy ra $C \subset \mathbf{R}_+$ đặc biệt $c_0 > 0$; sau đó , vì ($\forall b \in B$, $bc_0 \geq 0$) ta suy ra $B \subset \mathbf{R}_+$. Vậy tồn tại $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ sao cho $A = [a_1 ; a_2]$, $B = [b_1 ; b_2]$, $C = [c_1 ; c_2]$, $a_1 \leq a_2$; $0 \leq b_1 \leq b_2$; $0 \leq c_1 \leq c_2$.

Vì ($a_1b_1 \leq a_2b_1$, $a_1b_2 \leq a_2b_2$, $a_1c_1 \leq a_2c_1$, $a_1c_2 \leq a_2c_2$ nên ta có:

$(AB)+(AC)=[\mathrm{Min}(a_1b_1, a_1b_2); \mathrm{Max}(a_2b_1, a_2b_2)] + [\mathrm{Min}(a_1c_1, a_1c_2); \mathrm{Min}(a_2c_1, a_2c_2)]=[\alpha_1 ; \alpha_2]$

Trong đó $\begin{cases} \alpha_1 = \mathrm{Min}(a_1b_1, a_1b_2) + \mathrm{Min}(a_1c_1, a_1c_2) \\ \alpha_{21} = \mathrm{Max}(a_2b_1, a_2b_2) + \mathrm{Max}(a_2c_1, a_2c_2) \end{cases}$

- Nếu $a_1 \geq 0$ thì $\alpha_1 = a_1b_1 + a_1c_1 = a_1(b_1 + c_1) \in A(B + C)$
- Nếu $a_1 \leq 0$ thì $\alpha_1 = a_1b_2 + a_1 c_2 = a_1(b_2 + c_2) \in A(B + C)$

Điều này chỉ ra rằng $\alpha_1 \in A(B + C)$, cũng vậy $\alpha_2 \in A(B + C)$ nhưng $A(B + C)$ là một đoạn, vậy $[\alpha_1; \alpha_2] \subset A(B + C)$.

B *1)* Trước hết $X \not\subset \mathbf{R}_+$ và $X \not\subset \mathbf{R}_-$, vậy $X = [x_1 ; x_2]$ với $x_1 < 0 < x_2$.

Khi đó $[2 ; 3]X = [-1 ; 2] \Leftrightarrow [3x_1 ; 3x_2] = [-1 ; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -1 \\ 3x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

và quả là : $-\dfrac{1}{3} < 0 < \dfrac{2}{3}$

◊ **Trả lời:** $\left\{\left[-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right]\right\}$.

2) Chứng minh $X \subset \mathbf{R}_+$, từ đó $X = [x_1 ; x_2]$ với $0 \leq x_1 \leq x_2$.

Vậy : $[1 ; 2] X = [2 ; 4] \Leftrightarrow [x_1 ; 2x_2] = [2 ; 4] \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2$,

và quả là $0 \leq 2$.

◊ **Trả lời:** $\{[2 ; 2]\}$.

3) Chứng minh $X \subset \mathbf{R}_+$, từ đó $X = [x_1 ; x_2]$ với $0 \leq x_1 \leq x_2$.

Vậy : $[1 ; 4]X = [1 ; 2] \Leftrightarrow [x_1 ; 4x_2] = [1 ; 2] \Leftrightarrow (x_1 = 1 , x_2 = \dfrac{1}{2}$), mâu thuẫn.

◊ **Trả lời:** $\varnothing$

4) chứng minh $X \subset \mathbf{R}_+$ và $X \subset \mathbf{R}_-$, suy ra $0 \in X$, rồi $0 \in [-3 ; 1]X$, mâu thuẫn.

◊ **Trả lời:** $\varnothing$

5) • Nếu $X \in \mathbf{R}_+$ thì : $[-1\ ;\ 2]X = [-2\ ;\ 4] \Leftrightarrow [-x_2\ ;\ 2x_2] = [-2\ ;\ 4] \Leftrightarrow x_2 = 2$ và x_1 là điểm bất kỳ trong $[0\ ;\ 2]$.

• Nếu $X \notin \mathbf{R}_-$ thì : $[-1\ ;\ 2]X = [-2\ ;\ 4] \Leftrightarrow [2x_1\ ;\ -x_1] = [-2\ ;4] \Leftrightarrow (x_1 = -1\ ,\ x_1 = -4)$, vô lý

• Nếu $X \notin \mathbf{R}_+$ và $X \notin \mathbf{R}_-$ thì $x_1 < 0 < x_2$ và: $[-1\ ;\ 2]X = [-2\ ;\ 4] \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Min}(2x_1, -x_2) = -2 \\ \mathrm{Max}(-x_1, 2x_2) = 4 \end{cases}$

Xét riêng hai trường hợp $(2x_1 \le -x_2\ ,\ 2x_1 \ge -x_2)$, chứng minh rằng ta đi đến $x_1 = -1, x_2 = 2$.

◊ **Trả lời:** $\{[x_1\ ;\ 2]\ ;\ x_1 \in [-1\ ;\ 2]\}$.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 2

2.2.1 Kiểm chứng lại rằng với mọi $(x, y, x', y') \in \mathbf{R}^4$:

$$\begin{cases}\varphi\big((x+\mathrm{i}y)+(x'+\mathrm{i}y')\big)=\varphi(x+\mathrm{i}y)+\varphi(x'+\mathrm{i}y')\\ \varphi\big((x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')\big)=\varphi(x+\mathrm{i}y)\varphi(x'+\mathrm{i}y')\end{cases}$$

bằng cách chú ý: $J^2 = -I$, hơn nữa $\varphi(1) = I$.

Thấy ngay φ là song ánh.

2.2.2 *a)* $\deg(X^2+1) = 2$ và biệt thức của X^2+1 âm.

b) Kiểm chứng rằng $(C\ ,\ \hat{+}, \hat{\bullet})$ là một vành, và θ là một đẳng cấu vành; tiếp theo, vì $\mathbf{C}$ là một thể nên C cũng vậy.

2.2.3 • Nếu f thích hợp, áp dụng giả thiết đối với z và $-z$ để có $(1+z^2)f(z) = 1+z^2$. Xét riêng từng trường hợp $z = \mathrm{i}$, $z = -\mathrm{i}$, $z \neq \mathrm{i}$, $z \neq -\mathrm{i}$.

• Đảo lại, xét xét xem các ánh xạ tìm được có thích hợp hay không.

◊ **Trả lời:**

$$\left\{f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad z \mapsto \begin{cases}1 & \text{nếu } z \neq \mathrm{i} \text{ và } z \neq -\mathrm{i}\\ \alpha & \text{nếu } z = \mathrm{i}\\ \mathrm{i}\alpha+1-\mathrm{i} & \text{nếu } z = -\mathrm{i}\end{cases}\ ;\ \alpha \in \mathbf{C}\right\}$$

2.2.4

$$x^{m+1}\sum_{k=0}^{n} y^k \mathrm{C}_{m+k}^{k} = x^m \sum_{k=0}^{n}\left(y^k - y^{k+1}\right)\mathrm{C}_{m+k}^{k} = x^m \sum_{k=0}^{n} y^k \mathrm{C}_{m+k}^{k} - x^m \sum_{k=0}^{n} y^{k+1}\mathrm{C}_{m+k}^{k}$$

$$= x^m \sum_{k=0}^{n} y^k \mathrm{C}_{m+k}^{k} - x^m \sum_{l=1}^{n+1} y^l \mathrm{C}_{m+l-1}^{l-1}$$

$$= x^m \sum_{k=0}^{n} y^k\left(\mathrm{C}_{m+k}^{k} - \mathrm{C}_{m+k-1}^{k-1}\right) - x^m y^{n+1}\mathrm{C}_{m+n}^{n}.$$

(ở đó $\mathrm{C}_p^{-1} = 0$ với mọi $p \in \mathbf{N}$).

Ký hiệu $u_{m,n}$ là biểu thức cần xét, ta có:

$$u_{m,n} = x^m \sum_{k=0}^{n} y^k \mathrm{C}_{m+k-1}^{k} - x^m y^{n+1}\mathrm{C}_{m+n}^{n} + y^{n+1}\sum_{l=0}^{m} x^l \mathrm{C}_{n+l}^{l}$$

$$= x^m \sum_{k=0}^{n} y^k \mathrm{C}_{(m-1)+k}^{k} + y^{n+1}\sum_{l=0}^{m-1} x^l \mathrm{C}_{n+l}^{l}$$

$$= u_{m-1,n}.$$

Suy ra $u_{m,n} = u_{m-1,n} = ... = u_{0,n}$ và do tính đối xứng, $u_{0,n} = u_{0,n-1} = ... = u_{0,0} = x + y = 1$.

2.2.5 Với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, đặt $z = x + iy$, ta có:

$$(x,y) \in E \cap F \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i\left(2xy + \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + 3i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{x - iy}{x^2+y^2} + 3i \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{z} + 3i$$

$$\Leftrightarrow z^3 - 3iz - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 - 3ix + 3y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in G \cap H.$$

2.2.6 Ký hiệu: $S = x + y,\ P = xy$; khi đó $\begin{cases} S = 1 \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases}$, vậy $P = -\frac{1}{2}$, rồi:

$x^3 + y^3 = S^3 - 3PS = \frac{5}{2} \neq 3.$

◊ **Trả lời:** Không.

2.2.7 $x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2zx \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2z-1) = 0$

rồi: $0 = (x+y-2z-1) + (y+z-2x-1) + (z+x-2y-1) = -3.$

◊ **Trả lời:** $\varnothing$.

2.2.8 Bằng cách nhân, suy ra: $xyz = 0$ hoặc $xyz = 1$.

◊ **Trả lời:** $\{(0,0,0), (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1)(-1,-1,1)\}$.

2.2.9 • $(f(i))^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$. Vậy tồn tại $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ sao cho $f(i) = \varepsilon\, i$.

• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + iy) = f(x) + f(iy) = f(x) + f(i)f(y) = x + \varepsilon\, i\, y$.

2.2.10 Ký hiệu $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có: $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i \Leftrightarrow (8x = 3, -4y = 2)$.

◊ **Trả lời:** $\left\{\frac{3}{8} - \frac{1}{2}i\right\}$.

2.2.11 Nếu $z \neq 0$, $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

◊ **Trả lời:** $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

2.2.12 $0 = \overline{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ca+ab}{abc}$, từ đó $a^2 = -a(b+c)$, rồi $a^3 = abc$ và theo tính đối xứng của a, b, c.

2.2.13

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = |z|^2 + z\overline{z'} + \bar{z}z' + |z'|^2 + |z|^2 - z\overline{z'} - \bar{z}z' + |z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

2.2.14 • $|z\overline{z'}+1|^2 + |z-z'|^2 = |z\overline{z'}|^2 + z\overline{z'} + \bar{z}z' + 1 + |z|^2 - z\overline{z'} - \bar{z}z' + |z'|^2 = \left(|z|^2+1\right)\left(|z'|^2+1\right)$

- Tính tương tự đối với $\left|z\,\overline{z}'-1\right|^2-\left|z-z'\right|^2$.

2.2.15 $\begin{cases} \left|z+\overline{z'}\right|^2 = z\overline{z}+zz'+\overline{z'}\overline{z}+\overline{z'}z' \\ -\left|z-\overline{z'}\right| = -z\overline{z}+zz'+\overline{z'}\overline{z}-\overline{z'}z' \\ \mathrm{i}\left|z+\mathrm{i}\overline{z'}\right|^2 = \mathrm{i}\,z\overline{z}+zz'-\overline{z'}\overline{z}+\mathrm{i}\,\overline{z'}z' \\ -\mathrm{i}\left|z-\mathrm{i}\overline{z'}\right|^2 = \mathrm{i}\,z\overline{z}+zz'-\overline{z'}\overline{z}-\mathrm{i}\,\overline{z'}z' \end{cases}$, rồi cộng lại.

2.2.16 Với mọi $(x,z)\in(\mathbf{C}-\{\mathrm{i}\})\times(\mathbf{C}-\{1\})$:

$$z=\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\Leftrightarrow x=\mathrm{i}\frac{z+1}{z-1}.$$

Nếu $|z|=1$ và $z\neq 1$ và $x=\mathrm{i}\dfrac{z+1}{z-1}$ thì $\overline{x}=-\mathrm{i}\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=-\mathrm{i}\dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}=\mathrm{i}\dfrac{z+1}{z-1}=x$.

Tổng quát hơn, $2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(x)=x-\overline{x}=\mathrm{i}\dfrac{z+1}{z-1}+\mathrm{i}\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=\dfrac{2\mathrm{i}\left(|z|^2-1\right)}{|z-1|^2}$,

suy ra $\begin{cases}|z|=1\\ z\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbf{R}$.

2.2.17 $\Rightarrow$: Quy nạp theo n.

- Với $n=1$ tính chất là tầm thường; với $n=2$ tính chất đã biết (xem 2.2.3, Tính chất 9).
- Cho $n\in\mathbf{N}-\{0;1\}$ và giả sử: $\forall\,(z_1,\dots,z_n)\in\mathbf{C}^n$:

$$\left(\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\Rightarrow\left(\exists u\in\mathbf{C},\exists\,(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in(\mathbf{R}_+)^n,\ \forall k\in\{1,\dots,n\},\ z_k=\alpha_k u\right)\right).$$

Cho $(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbf{C}^{n+1}$ sao cho $\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|=\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$.

Vì $\left|\sum_{k=1}^{n+1}z_k\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|+|z_{n+1}|\le\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$ ta suy ra các đẳng thức

$$\begin{cases}(1)\ \left|\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)+z_{n+1}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|+|z_{n+1}|\\[2mm] (2)\ \left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\end{cases}$$

• Giả sử $\sum_{k=1}^{n} z_k \neq 0$ .Hệ thức (2) và giả thiết truy hồi cho thấy tồn tại $u\in \mathbf{C}$, $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ sao cho $\forall k \in \{1,...,n\}$, $z_k = \alpha_k u$. Vậy hệ thức (1) và kết quả của trường hợp $u = 2$ (xem 2.2.3, Tính chất 9) cho biết tồn tại $\alpha \in \mathbf{R}_+$ sao cho $z_{n+1} = \alpha\sum_{k=1}^{n} z_k$ từ đó $z_{n+1} = \alpha_{n+1}u$, với

$\alpha_{n+1} = \alpha\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \in \mathbf{R}_+$.

• Nếu $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$, hệ thức (2) cho thấy $z_1 =...= z_n = 0$, vậy:

$$\left(u = z_{n+1}, \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0, \alpha_{n+1} = 1\right) \text{ thích hợp.}$$

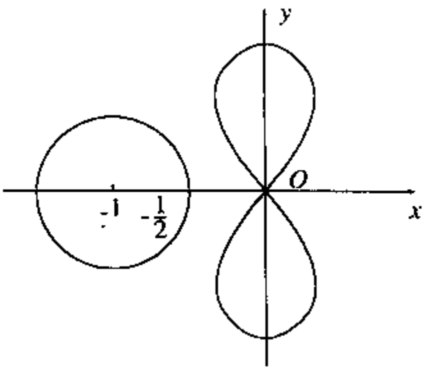
2.2.18 $\left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) - |a+b|^2 = 1+|a|^2|b|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b = |1-\overline{a}b|^2$.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi: $1-\overline{a}b = 0$ nghĩa là $a \neq 0$ và $b = \dfrac{a}{|a|^2}$.

2.2.19 $\left|(1+i)z^3 + iz\right| \leq 2|z|^3 + |z| < 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

2.2.20 Lập luận phản chứng : Giả sử tồn tại $z \in \mathbf{C}$ sao cho $|1+z| < \dfrac{1}{2}$ và $\left|1+z^2\right| < 1$.

Đặt $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, ta có: $\left|1+z^2\right| < 1 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 + 2\left(x^2-y^2\right) < 0 \Rightarrow x^2 < y^2$ và: $|1+z| < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2+2x+\dfrac{3}{4} < 0$.



Từ đó $\begin{cases} \left|1+z^2\right| < 1 \\ |1+z| < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x+\dfrac{3}{4} < 0$, mâu thuẫn.

Vấn đề quy về việc chứng minh rằng đĩa

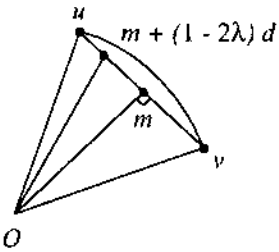
$$\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2; \left(x^2+1\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$$

và phần mặt phẳng:

$$\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2; \left(x^2+y^2\right)^2 + 2\left(x^2-y^2\right) < 0\right\}$$

nằm bên trong đường lemniscate không giao nhau.

2.2.21 Việc khảo sát trường hợp $a = 0$ hoặc $b = 0$ là dễ dàng. Giả sử $a \neq 0$, và $b \neq 0$ và ký hiệu $u = \frac{a}{|a|}$, $v = \frac{-b}{|b|}$.



Bất đẳng thức cần xét tương đương với:

$$\left|\frac{|a|}{|a|+|b|}u + \frac{|b|}{|a|+|b|}v\right| \geq \frac{1}{2}|u+v|$$

Ký hiệu $\lambda = \frac{|a|}{|a|+|b|} \in]0;1[$, $m = \frac{1}{2}(u+v)$, $d = \frac{1}{2}(v-u)$, ta lại quy về $|m + (1-2\lambda)d| \geq |m|$. Chú ý rằng $\mathrm{Re}(m\overline{d}) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{4}(u\overline{v} - \overline{u}v)\right) = 0$ vì $|u|^2 = |v|^2$ $(=1)$.

Quan hệ $|m + (1-2)d| \geq m$ cũng thấy được trên sơ đồ, bởi vì tam giác tạo nên bởi các điểm có toạ vị 0, m, $m + (1 - 2\lambda)d$ là tam giác vuông, góc vuông tại điểm có toạ vị m.

2.2.22 $2|z_1| - |z_2 + z_3| \leq |2z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3|$, từ đó:

$$2|z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| + |z_2 + z_3|.$$

Hoán vị vòng quanh, ta có 4 bất đẳng thức; cộng vế với vế.

2.2.23 Đặt $Z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $z_k = x_k + iy_k$, $(x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz (xem 1.2.2):

$$a^2b^2 = |ab|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Nếu $|a| > \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, thì $|b| < \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$; từ đó:

$$a^2 = b^2 + \sum_k \left(x_k^2 - y_k^2\right) < \sum_k y_k^2 + \sum_k \left(x_k^2 - y_k^2\right) = \sum_k x_k^2, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vì vậy: $|a| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$; và cuối cùng $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2$ điều mà chúng ta sẽ thấy khi khai triển biểu thức có dấu bình phương.

2.2.24 Đặt: $P = \sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} \in \mathbf{C}(X)$, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = P'(z) = \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}.$$

Từ đó: $$\left|\frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} k|z|^{k-1} = \frac{1 - (n+1)|z|^n + n|z|^{n+1}}{(1-|z|)^2}.$$

2.2.25 Ký hiệu M_1, M_2 là hai vế của đẳng thức cần chứng minh, và $S = |a|+|b|+|c|$, $T = |a+b+c|$, $U = |a+b|+|b+c|+|c+a|$ ta có: $M_1 = (S+T-U)(S+T)$ và

$$M_2 = 2\big(|a||b|+|a||c|+|b||c|\big)+\left(|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2\right) - SU + 2ST - TU = M_1 + V$$

với $V = -S^2 - T^2 + 2\big(|a||b|+|b||c|+|c||a|\big)+\left(|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2\right)$

$$= -2\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right) - 2\,\mathrm{Re}\big(a\bar{b}+a\bar{c}+b\bar{c}\big)+\Big(|b|^2+|c|^2+2\,\mathrm{Re}(b\bar{c})+|c|^2$$

$$+|a|^2+2\,\mathrm{Re}|c\bar{a}|+|a|^2+|b|^2+2\,\mathrm{Re}(a\bar{b})\Big) = 0$$

b) • Nếu $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| = 0$ thì $a = b = c = 0$ và bất đẳng thức là hiển nhiên.

• Nếu không, hãy chú ý bất đẳng thức tam giác: $\begin{cases} |b|+|c|-|b+c| \ge 0 \\ |a|-|b+c|+|a+b+c| \ge 0 \end{cases}$

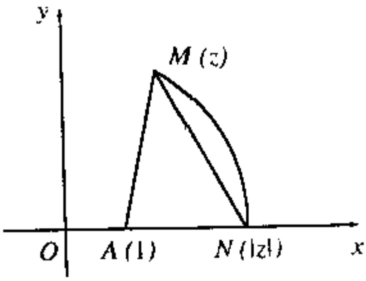
2.2.26 $|z-1| \le \big||z|-1\big| + \big|z-|z|\big|$ và đặt $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \rho \in \mathbf{R}_+, \theta \in \mathbf{R}$:

$$\big|z-|z|\big| = \rho|\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta - 1| = \rho\left((1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \rho\big(2(1-\cos\theta)\big)^{\frac{1}{2}} = \rho\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right).$$

Ta biết rằng: $\forall t \in \mathbf{R},\ |\sin t| \le |t|$, vậy $\big|z-|z|\big| \le \rho|\theta| = |z||\mathrm{Arg}(z)|$

(ở đây, $|\mathrm{Arg}(z)| = \mathrm{Inf}\{|\theta|;\ \theta = \mathrm{Arg}(z)\ \ [2\pi]\}$).

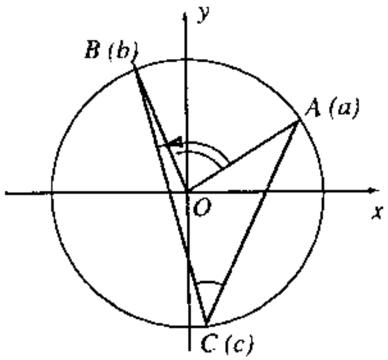
Đặt $A(1), M(z), N(|z|)$, ta có: $AM \le AN + NM$ và $NM \le \widehat{NM}$.



2.2.27 $$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{b-c}{a-c}\,\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b}{a} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b}.$$

Vậy $Arg\left(\left(\frac{c\text{-}b}{c\text{-}a}^2\right)\frac{a}{b}\right) = 0\ [\pi]$. Từ đây có hệ thức cần tìm.

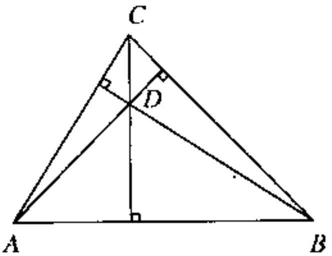
Kết quả được biểu diễn hình học: góc nội tiếp $\angle ACB$ bằng một nửa góc ở tâm $\angle AOB$.



2.3.1 $(d-a)(\overline{b}-\overline{c})+(d-b)(\overline{c}-\overline{a})+(d-c)(\overline{a}-\overline{b})=(b\overline{a}-a\overline{b})+(c\overline{b}-b\overline{c})+(a\overline{c}-c\overline{a})\in i\mathbf{R}$.

và $\dfrac{d-a}{b-c}=\dfrac{1}{|b-c|^2}(d-a)(\overline{b}-\overline{c})$,...

Biểu diễn hình học: trong một tam giác, các đường cao đồng quy.



2.3.2 *a)* Ký hiệu $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, ta có: $|z|=2|z-i|\Leftrightarrow x^2+y^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right)$.

◊ **Trả lời:** Đường tròn tâm $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$ và bán kính $\dfrac{2}{3}$.

b) $\dfrac{z^2}{z+i}=\dfrac{z^2(\overline{z}-i)}{|z+i|^2}$ và:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(z^2(\overline{z}-i)\right)&=\mathrm{Re}\left((x^2-y^2+2ixy)(x-(y+1)i)\right)=x(x^2-y^2)+2xy(y+1)\\&=x(x^2+y^2+2y).\end{aligned}$$

◊ **Trả lời:** Hợp của $(y'y)$ và đường tròn tâm $(0,-1)$ bán kính 1 bỏ đi điểm $(0,-1)$

2.3.3 ABC là tam giác đều thuận khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC}$ được suy ra từ $\overrightarrow{BA}$ bởi phép quay vectơ với góc $-\dfrac{\pi}{3}$, điều kiện này thể hiện bởi: $c-b=e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-b)$. Rồi đặt $e^{-i\frac{\pi}{3}}=-j$.

2.4.1 Ký hiệu $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}$.

$$\left|z^3 - z + 2\right|^2 = \left(e^{3i\theta} - e^{i\theta} + 2\right)\left(e^{-3i\theta} - e^{-i\theta} + 2\right) = 6 - 4\cos\theta - 2\cos 2\theta + 4\cos 3\theta$$

$$= 8 - 16\cos\theta - 4\cos^2\theta + 16\cos^3\theta.$$

Xét sự biến thiên của P: $\begin{array}{l} [-1;1] \to \mathbf{R} \\ t \mapsto 4\left(2-4t-t^2+4t^3\right)\end{array}$

◊ **Trả lời:** $\sqrt{13}$.

2.4.2 $e^{ia} + e^{i(a+x)} + e^{i(a+y)} = 0 \Leftrightarrow 1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$$

◊ **Trả lời:** $\left\{\left(\varepsilon\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\varepsilon\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right);\ (\varepsilon, k, l) \in [-1;1] \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\right\}$

2.4.3 *a)* **Trả lời:** $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$ nếu $\theta \neq 0 \quad [\pi]$, $\{1\}$ nếu $\theta = 0 \quad [2\pi]$,

$\{-1\}$ nếu $\theta = \pi \quad [2\pi]$.

b) Ký hiệu $z = ix$ ($x \in \mathbf{R}$) là một không điểm thuần ảo:

$$z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow -i x^3 - (1-2i)x^2 + (1-i)i\,x - 2i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x = 0 \\ -x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 1$$

rồi: $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = (z-i)\left(z^2 + (1-i)z + 2\right)$.

◊ **Trả lời:**

$$\left\{i,\ \frac{1}{2}\left(\left(-1-\sqrt{\sqrt{17}-4}\right) + \left(1+\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)i\right),\ \frac{1}{2}\left(\left(-1\sqrt{\sqrt{17}-4}\right) + \left(1-\sqrt{\sqrt{17}+4}\right)i\right)\right\}.$$

c) Cùng phương pháp như ở *a)* và *b)*.

◊ **Trả lời:** $\{-3, 3i, 1-2i, 2-i\}$.

d) j và $j^2 (= \bar{j})$ là nghiệm, rồi $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = \left(z^2 + z + 1\right)\left(z^2 - 2z + 2\right)$.

◊ **Trả lời:** $\left\{j, j^2, 1-i, 1+i\right\}$ $X^4 - X^3 + X^2 + 2 = \left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - 2X + 2\right)$.

e) $\left(z^2 - 4z + 5\right)^2 + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon \in \{-1, 1\},\ z^2 - 4z + 5 + \varepsilon i(z+1) = 0\right)$.

◊ **Trả lời:**

$\{1-i, 1+i, 3-2i, 3+2i\}$; $\left(X^2 - 4X + 5\right)^2 + (X+1)^2 = \left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^2 - 6X + 13\right)$.

f) Với $Z = z^2 - 8z$, ta quy về $Z^2 + 40Z + 375 = 0$.

◊ **Trả lời:** $\{3, 5, 4 - 3i, 4 + 3i\}$.

g) Khai triển: $(z+\mathrm{i})^4+(z^2+1)^2+(z-\mathrm{i})^4=0 \Leftrightarrow 3z^4-10z^2+3=0$.

◊ **Trả lời:** $\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right\}$.

h) $(6z^2+3z-1)^2-(6z^2+3z-1)(3z^2+6z+1)+(3z^2+6z+1)^2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(6z^2+3z-1)+\mathrm{j}(3z^2+6z+1)=0\\ \text{hoặc}\\ (6z^2+3z-1)+\mathrm{j}^2(3z^2+6z+1)=0\end{array}\right.$$

◊ **Trả lời:** $\left\{-\frac{2+\mathrm{j}}{3},-\frac{1+2\mathrm{j}}{3},\frac{-1+\mathrm{j}}{3},\frac{1+2\mathrm{j}}{3}\right\}$ hay còn:

$$\left\{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6},-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6},\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

2.4.4 Trước hết tính căn bậc hai của Z; ta thu được $2a+(1-a^2)\mathrm{i}$ và phần tử đối của nó. Sau đó tính căn bậc 2 của hai số phức này.

◊ **Trả lời:**

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}((1+a)+(1-a)\mathrm{i}),-\frac{1}{\sqrt{2}}((1+a)+(1-a)\mathrm{i}),\frac{1}{\sqrt{2}}((1-a)-(1+a)\mathrm{i}),\frac{1}{\sqrt{2}}(-(1-a)+(1+a)\mathrm{i})\right\}.$$

2.4.5 *a)* Nếu $z\neq 0$, đặt $z=\rho e^{i\theta}$, $\rho\in\mathbf{R}_+^*$, $\theta\in\mathbf{R}$:

$$z^4=z+\bar{z}\Leftrightarrow \rho^4e^{4i\theta}=2\rho\cos\theta\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos\theta>0\\ \rho^4=2\rho\cos\theta\\ 4\theta=0\ [2\pi]\end{cases}\ \text{hoặc}\ \begin{cases}\cos\theta<0\\ \rho^4=-2\rho\cos\theta\\ 4\theta=\pi\ \ [2\pi]\end{cases}\right)$$

◊ **Trả lời:** $\left\{0,2^{\frac{1}{3}},2^{-\frac{1}{3}}(-1-\mathrm{i}),2^{-\frac{1}{3}}(-1+\mathrm{i})\right\}$.

b) $\overline{z^7}=\frac{1}{z^3}\Rightarrow|z|^7=\frac{1}{|z|^3}\Rightarrow|z|=1$ rồi $\overline{z^7}=\frac{1}{z^3}\Leftrightarrow z^4|z|^3=1\Leftrightarrow z^4=1$.

◊ **Trả lời:** $\{-1,1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$.

2.4.6 *a)* $\begin{cases}(x+y)(x^3-y^3)=819\\ (x-y)(x^3+y^3)=399\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)=819\\ (x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)=399\end{cases}$

$$\begin{cases}(x^2-y^2)(x^2+y^2)=609\\ (x^2-y^2)2xy=420\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-y^2)(x+y)^2=1029\\ (x^2-y^2)(x-y)^2=189\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv^3=1029\\ u^3v=189\end{cases},$$

với $u=x-y$, $v=x+y$.

Suy ra: $u^8 = \dfrac{(189)^3}{1029} = 3^8$.

◊ **Trả lời:**
$\{(5,2), (-2\omega,-5\omega), (5i,2i), (-2i\omega,-5i\omega), (-5,-2), (2\omega,5\omega), (-5i,-2i), (2i\omega,5i\omega)\}$, ở đây $\omega = e^{2i\frac{\pi}{8}} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Suy ra $x = y^2 = z^4 = x^8$, từ đó $x = 0$ hoặc $x^7 = 1$.

◊ **Trả lời:** $\{(0,0,0)\} \cup \{(\omega_k, \omega_k^4, \omega_k^2); k = \{0,\ldots,6\}\}$, ở đây $\omega_k = e^{2\frac{ik\pi}{7}}$.

2.4.7 Chú ý rằng: $a_k^2 + a_k b_k + b_k^2 = |a_k - jb_k|^2$, từ đó:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right) = \left|\prod_{k=1}^{n}(a_k - jb_k)\right|^2.$$

Số phức $\prod_{k=1}^{n}(a_k - jb_k)$ có dạng A - jB với $(A, B) \in \mathbf{Z}^2$. (lưu ý rằng $j^2 = -1 - j$).

2.4.8 *a)* Đặt $P = \sum_{k=0}^{n} X^k \in \mathbf{C}[X]$, ta có:

$$P = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} \in \mathbf{C}[X] \text{ và } P' = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = \left(\frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}\right)' = \frac{1 - (n+1)X^n + nX^{n+1}}{(1 - X)^2}.$$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} \dfrac{n}{\omega - 1} & \text{nếu } \omega \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{nếu } \omega = 1 \end{cases}$

b) $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1}(\omega^p)^k = \dfrac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = 0$ nếu $\omega^p \neq 1$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } \omega^p \neq 1 \\ n & \text{nếu } \omega^p = 1 \end{cases}$.

c) $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k = (1+\omega)^n - \omega^n = \left(\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^n - 1$

$$= \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n - 1.$$

◊ **Trả lời:** $-2^n\cos^n\dfrac{\pi}{n} - 1$.

2.4.9 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\omega^k b\right)\right| = \left|na+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right)b\right| = |na|$, từ đó: $n|a| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a+\omega^k b\right|$.

Cũng vậy: $n|b| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|b+\omega^k a\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega^{-k}b+a\right| = \sum_{l=1}^{n}\left|\omega^{-(n-l)}b+a\right|$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left|\omega^l b+a\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega^k b+a\right|.$$

2.4.10 Cho $k=\{1,2,3,4\}$ và $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$. Ta có: $\left(\omega_k-\omega_k^4\right)^2 = -2+\omega_k^2+\omega_k^3$ rồi

$\left(\omega_k-\omega_k^4\right)^4+5\left(\omega_k-\omega_k^4\right)^2+5 = -1+\omega_k^2+\omega_k^3+\omega_k^4+2\omega_k^5+\omega_k^6 = 0$.

Đặt $\omega=\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, các không điểm là $\omega-\omega^4$, $\omega^2-(\omega^2)^4$, $\omega^3-(\omega^3)^4$, $\omega^4-(\omega^4)^4$.

◊ **Trả lời:** $\left\{\omega-\omega^4,\ \omega^2-\omega^3,\ \omega^3-\omega^2,\ \omega^4-\omega\right\}$ với $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

2.5.1 $C_n+\mathrm{i}\,S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}(a+kb)} = e^{\mathrm{i}a}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{\mathrm{i}b}\right)^k$.

Nếu $e^{\mathrm{i}b}\neq 1$: $C_n+\mathrm{i}S_n = e^{\mathrm{i}a}\dfrac{\left(e^{\mathrm{i}b}\right)^{n+1}-1}{e^{\mathrm{i}b}-1} = e^{\mathrm{i}a}\dfrac{e^{\mathrm{i}\frac{(n+1)b}{2}}2\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)b}{2}}{e^{\mathrm{i}\frac{b}{2}}2\mathrm{i}\sin\frac{b}{2}} = e^{\mathrm{i}\left(a+\frac{nb}{2}\right)}\dfrac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$,

sau đó lấy phần thực và phần ảo.

◊ **Trả lời:** $C_n = \begin{cases}\cos\left(a+\dfrac{nb}{2}\right)\dfrac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}} & \text{nếu } b\notin 2\pi\mathbf{Z}\\ (n+1)\cos a & \text{nếu } b\in 2\pi\mathbf{Z}\end{cases}$

$$S_n = \begin{cases}\sin\left(a+\dfrac{nb}{2}\right)\dfrac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}} & \text{nếu } b\notin 2\pi\mathbf{Z}\\ (n+1)\sin a & \text{nếu } b\in 2\pi\mathbf{Z}\end{cases}.$$

2.5.2 $\cos^3 kx = \frac{1}{4}\left(\cos 3kx+3\cos kx\right)$ và bài tập 2.5.1.

◊ **Trả lời:**

$$\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3nx}{2}\frac{\sin\frac{3(n+1)x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}+3\cos\frac{nx}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-4\right) \text{ nếu } x\notin 2\pi\mathbf{Z};\ n \text{ nếu } x\in 2\pi\mathbf{Z}.$$

2.5.3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\sin k| = \sum_{k=0}^{n}|\sin k| \geq \sum_{k=0}^{n}\sin^2 k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(1-\cos 2k) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos 2k$

và $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\cos 2k\right| = \left|\cos n\frac{\sin(n+1)}{\sin 1}\right| \leq \frac{1}{\sin 1}$.

2.5.4 $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\cos k\theta\right) + \mathrm{i}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\sin k\theta\right) = \sum_{k=0}^{n}x^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}\left(xe^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$.

Nếu $xe^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, thì:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(xe^{\mathrm{i}\theta}\right)^k = \frac{1-\left(xe^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1-xe^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\left(1-x^{n+1}e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)\left(1-xe^{-\mathrm{i}\theta}\right)}{\left(1-xe^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-xe^{-\mathrm{i}\theta}\right)}$$
$$= \frac{\left(1-x^{n+1}\cos(n+1)\theta - \mathrm{i}\,x^{n+1}\sin(n+1)\theta\right)\left(1-x\cos\theta+\mathrm{i}\,x\sin\theta\right)}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

rồi lấy phần thực và phần ảo.

◊ **Trả lời:**

$$\sum_{k=0}^{n}x^k\cos k\theta = \begin{cases} n+1 & \text{nếu } \left(\begin{cases}x=1\\ \theta\equiv 0\ [2\pi]\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x=-1\\ \theta\equiv\pi\ [2\pi]\end{cases}\right) \\ \dfrac{1-x\cos\theta - x^{n+1}\cos(n+1)\theta + x^{n+2}\cos n\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} & \text{nếu không} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n}x^k\sin k\theta = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \left(\begin{cases}x=1\\ \theta\equiv 0\ [2\pi]\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x=-1\\ \theta\equiv\pi\ [2\pi]\end{cases}\right) \\ \dfrac{x\sin\theta - x^{n+1}\sin(n+1)\theta + x^{n+2}\sin n\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} & \text{nếu không} \end{cases}$$

Chú ý: nếu $|x|<1$, bằng cách cho n tiến tới $+\infty$, ta thu được tổng của các chuỗi sau:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\cos k\theta = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},\quad \sum_{k=0}^{+\infty}x^k\sin k\theta = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

có thể coi chúng là các chuỗi nguyên (đối với x) hoặc lượng giác (đối với θ).

2.5.5 • $\displaystyle A_n(x) = 1+\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+\ldots+\left(e^{inx}+e^{-inx}\right) = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx = -1+2\sum_{k=0}^{n}\cos kx$

$$= -1+2\cos\frac{nx}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{(xem bài tập 2.5.1)}$$

$$= -1 + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

- $B_n(x) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$ (xem bài tập 2.5.1).

◊ **Trả lời:** $A_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$, $B_n(x) = \left(\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$.

Bổ sung

C.2.1 *1) a)* Tìm các điểm bất động nếu có của $T_{a,b}$:

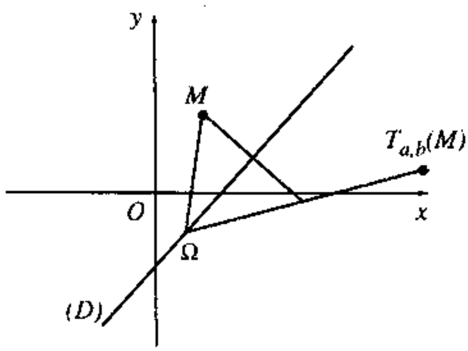
$$g_{a,b}(z) = z \iff z = a\bar{z} + b \iff \begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ \bar{z} = \bar{a}z + \bar{b} \end{cases} \Rightarrow z = a(\bar{a}z + \bar{b}) + b \iff z = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}..$$

Đảo lại, đặt $\omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$, ta có: $g_{a,b}(\omega) = a\frac{\bar{a}b + \bar{b}}{1 - |a|^2} + b = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2} = \omega$.

Rồi $\forall z \in \mathbf{C}$, $g_{a,b}(z) - \omega = (a\bar{z} + b) - (a\bar{\omega} + b) = a\overline{(z - \omega)}$, từ đó:

$$\begin{cases} |g_{a,b}(z) - \omega| = |a||z - \omega| \\ \operatorname{Arg}(g_{a,b}(z) - \omega) + \operatorname{Arg}(z - \omega) = \operatorname{Arg}(a) \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ta chuyển từ $\overrightarrow{\Omega M}$ đến $\overrightarrow{\Omega T_{a,b}(M)}$ bởi phép hợp giao hoán của phép vị tự vectơ với tỉ số $|a|$ và phép đối xứng trực giao qua đường thẳng vectơ có góc cực $\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(a) \quad [\pi]$.



b) $g^2_{a,b}(z) = a\overline{(a\overline{z}+b)}+b = |a|^2 z + a\overline{b} + b = z + (a\overline{b}+b)$, vậy $T^2_{a,b} = t^2_{\vec{u}}$ ở đây $\vec{u}$ là vectơ có toạ vị $\frac{1}{2}(a\overline{b}+b)$. Đặt $U_{a,b} = T_{a,b} \circ t_{-\vec{u}}$ và $h_{a,b} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ là ánh xạ mà với mỗi , $z \in \mathbf{C}$ ứng với toạ vị của $U_{a,b}(M)$, trong đó M có toạ vị là z.

Ta có: $h_{a,b}(z) = a\overline{\left(z - \frac{1}{2}(a\overline{b}+b)\right)} + b = a\overline{z} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\overline{b}$, từ đó $h_{a,b}(z) - \frac{1}{2}b = a\overline{\left(z - \frac{1}{2}b\right)}$.

Như vậy, $U_{a,b}$ là phép đối xứng trục giao qua đường thẳng đi qua điểm có toạ vị $\frac{1}{2}$ và góc cực $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}(a) \quad [\pi]$.

2) Sử dụng những lập luận ở *1)* với chiều ngược lại.

C.2.2 *1) a)* **Trả lời:** $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $y' = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

b) Với $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$: $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{|z|}{|z|^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

c) **Trả lời:**

- Ảnh của đường tròn (bán kính > 0) đi qua O (bỏ đi điểm O) là đường thẳng không đi qua O.
- Ảnh của đường tròn không đi qua O là đường tròn không đi qua O.
- Ảnh của đường thẳng không đi qua O là đường tròn đi qua O (bỏ đi điểm O).
- Ảnh của đường thẳng đi qua O (bỏ đi điểm O) là chính nó.

2) a) $$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}\right)}.$$

b) Chú ý rằng $T_{\frac{a}{c}}$, $\mathrm{Sim}_{\frac{bc-ad}{c^2}}$, $S_{(x'x)}$, $I_{0,1}$, $T_{\frac{d}{c}}$ biến đường tròn hoặc đường thẳng thành đường tròn hoặc đường thẳng. Sự biến đổi đường tròn - đường thẳng có thể xảy ra "trong chừng mực" của phép nghịch đảo.

Chỉ dẫn và trả lời

các bài tập chương 3

3.1.1 • Nếu $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là dãy dừng thì tồn tại $N\in\mathbf{N}$ sao cho: $\forall n\in\mathbf{N}, (n\ge N \Rightarrow u_n = l)$. Rõ ràng là $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ tới l.

• Đảo lại, giả sử $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ và ký hiệu giới hạn của nó là l. Tồn tại $N\in\mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n\in\mathbf{N}, (n\ge N \Rightarrow |u_n - l| \le \frac{1}{3}).$$

Khi đó ta có: $\forall n\in\mathbf{N}, (n\ge N, \Rightarrow |u_n - u_N| \le |u_n - l| + |l - u_n| < 1)$ vì u_n và u_N đều thuộc $\mathbf{Z}$, suy ra $u_n = u_N$. Như vậy $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là dãy dừng (và hội tụ đến u_N).

3.1.2 $\forall n\in\mathbf{N}, 0\le a - u_n \le (a-u_n)+(b-v_n) = (a+b)-(u_n+v_n)$ và $(a+b)-(u_n+v_n)\xrightarrow[n\infty]{}0$. Định lý kẹp cho phép kết luận rằng $u_n\xrightarrow[n\infty]{}a$, rồi $(u_n+v_n)-u_n\xrightarrow[n\infty]{}b$.

3.1.3 Sử dụng: $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \begin{cases}\mathrm{Sup}(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)\\ \mathrm{Inf}(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y-|x-y|\right)\end{cases}$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x_n\xrightarrow[n\infty]{}\mathrm{Sup}\left(\lim\limits_{n\infty}u_n, \lim\limits_{n\infty}v_n\right)\\ y_n\xrightarrow[n\infty]{}\mathrm{Inf}\left(\lim\limits_{n\infty}u_n, \lim\limits_{n\infty}v_n\right)\end{cases}$.

3.1.4 *a)* $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, từ đó, cộng lại, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

◊ **Trả lời:** 1.

b) Sử dụng $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ để suy ra: $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}(3k+1)}{\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+3)}=\dfrac{3n^2+5n+2}{2n^2+8n+6}$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{3}{2}$.

c) $\forall n\in\mathbf{N}^*$,

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{2} & \le & \sqrt[n]{3+\sin n} & \le & \sqrt[n]{4}\\ & \searrow_{n\infty} & & \swarrow_{n\infty} & \\ & & 1 & & \end{array}$$

◊ **Trả lời:** 1.

3.1.5 Ký hiệu $x_n = \mathrm{Re}(u_n)$ và $y_n = \mathrm{Im}(u_n)$.

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}$, ($x_{n+1} = x_n$ và $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{5}$), từ đó suy ra $u_n = x_0 + \dfrac{\mathrm{i}}{5^n} y_0 \xrightarrow[n\infty]{} x_0$.

◊ **Trả lời:** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến $\mathrm{Re}(u_0)$.

3.1.6 Viết u_0 dưới dạng lượng giác $u_0 = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, ($\rho \in \mathbf{R}_+^*$, $\theta \in [0; 2\pi[$), chứng minh bằng quy nạp theo n: $u_1 = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \cos\dfrac{\theta}{2}, \ldots, u_n = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}} \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}, \ldots, \cos\dfrac{\theta}{2^n}$.

Nếu $\theta \neq 0$ thì với bất kỳ $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}} \frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{4}} \cdots \frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\theta}{2^n}} = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}} \frac{\sin\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow[n\infty]{} \rho\frac{\sin\theta}{\theta},$$

áp dụng $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

◊ **Trả lời:** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến $|u_0|\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ (trong đó $\theta = \mathrm{Arg}(u_0) \in\,]0; 2\pi[$) nếu $u_0 \notin \mathbf{R}_+$ và $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến u_0, nếu $u_0 \in \mathbf{R}_+$.

3.1.7 *a)* Tồn tại $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ sao cho $\underset{1\le i\le p}{\mathrm{Max}}\, a_i = a_{i_0}$.

Ta có: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} = a_{i_0}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_{i_0}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$, từ đó:

$$\lambda_{i_0}^{\frac{1}{n}} a_{i_0} \le \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} a_{i_0}$$

$$\lambda_{i_0}^{\frac{1}{n}} a_{i_0} \xrightarrow[n\infty]{} a_{i_0} \xleftarrow[n\infty]{} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} a_{i_0}$$

b) $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} = \left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(a_i^{-1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \xrightarrow[n\infty]{} \underset{1\le i\le p}{\mathrm{Max}}\left(a_i^{-1}\right)^{-1} = \underset{1\le i\le p}{\mathrm{Min}}\, a_i$ bằng cách áp dụng *a)*.

3.1.8 Bằng cách viết một tam thức dưới dạng chính tắc, với mọi $n \in \mathbf{N}$:

$$a\left(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2\right) = \left(au_n + \frac{bv_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4}\right)v_n^2.$$

suy ra: $\begin{cases} 0 \le \left(au_n + \dfrac{bv_n}{2}\right)^2 \le a\left(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2\right) \\ 0 \le \left(\dfrac{4ac-b^2}{4}\right)v_n^2 \le a\left(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2\right) \end{cases}$, vì $4ac - b^2 > 0$.

3.1.9 Cho $A > 0$ cố định; vì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \ge N_1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \ge A+1).$$

Vậy với mọi $n \in \mathbf{N}$ thoả mãn $n \ge N_1$, ta có: $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \ge A+1$, $\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \ge A+1, \ldots, \dfrac{u_{N_1+1}}{u_{N_1}} \ge A+1$.

Từ đó, nhân và ước lược: $\dfrac{u_n}{u_{N_1}} \ge (A+1)^{n-N_1}$, vậy $u_n^{\frac{1}{n}} \ge (A+1)\left(\dfrac{u_{N_1}}{(A+1)^{N_1}}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Vì $\left(\dfrac{u_{N_1}}{(A+1)^{N_1}}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, nên tồn tại $N_2 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left(n \ge N_2 \Rightarrow \left(\frac{u_{N_1}}{(A+1)^{N_1}}\right)^{\frac{1}{n}} \ge \frac{A}{A+1}\right).$$

Ta suy ra: $\forall n \in \mathbf{N}, (n \ge \mathrm{Max}(N_1, N_2) \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \ge A)$. Vậy $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3.1.10 • Giả sử $\sin n\alpha \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbf{R}$.

Ta có: $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos n\alpha$,

từ đó $\forall n \in \mathbf{N}$, $\cos n\alpha = \dfrac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Suy ra $\cos n\alpha \xrightarrow[n\infty]{} l' = l\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

•Cũng vậy, nếu $\cos n\alpha \xrightarrow[n\infty]{} l' \in \mathbf{R}$, ta suy ra (sử dụng: $\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha$):

$$\sin n\alpha \xrightarrow[n\infty]{} l = \frac{l'(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

• Đặt $t = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ta có: $\begin{cases} l' = lt \\ l = -l't \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l' = lt \\ l(1+t^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow l = l' = 0$.

• Nhưng ($\forall n \in \mathbf{N}$, $\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha = 1$), nên chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$: $l^2 + l'^2 = 1$, mâu thuẫn với $l = l' = 0$.

◊ **Trả lời:** Với $\forall\alpha \in \mathbf{R}$ sao cho $\dfrac{\alpha}{\pi} \notin \mathbf{Z}$, hai dãy $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ và $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ phân kỳ.

3.1.11 Để có ước lượng cận: ($\forall x \in \mathbf{R}_+,\ x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$), ta khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto \ln(1+x)-x$ và $x \mapsto \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ (xem 5.3.1). Áp dụng với $x=\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}$ rồi cộng lại, với k từ 1 đến n. Cuối cùng:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)=1+\frac{n(n+1)}{2n^2}\xrightarrow[n\infty]{}\frac{3}{2}$$

và $0 \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^2 \le n\left(\frac{1}{n}+\frac{u}{n^2}\right)^2=\frac{4}{n}\xrightarrow[n\infty]{}0$.

◊ **Trả lời:** $e^{3/2}$.

3.1.12 • Nếu $a \in]0;1[$, thì với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(\mathrm{E}(a^n)\right)^{\frac{1}{n}}=0$.

• Nếu $a=1$, thì với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(\mathrm{E}(a^n)\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

• Giả sử $a>1$; với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, ta có: $a\left(1-a^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}<u_n \le a$

và $\ln\left(\left(1-a^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(1-a^{-n}\right)\underset{n\infty}{\sim}-\frac{a^{-n}}{n}\xrightarrow[n\infty]{}0$.

◊ **Trả lời:** $\left(\mathrm{E}(a^n)\right)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\infty]{}\begin{cases}0 & \text{nếu}\quad 0<a<1\\ a & \text{nếu}\quad a\ge 1\end{cases}$.

3.1.13 *a)* Chú ý rằng với mọi $n \in \mathbf{N}$:
$(n+3)(n+2)(n+1)u_{n+1}=(n+2)(n+1)nu_n-(n+2)$, rồi cộng từ 1 đến n; ký hiệu $v_n=(n+2)(n+1)nu_n$, ta suy ra:

$v_n=v_0-\left(2+3+\ldots+(n+1)\right)=-\frac{n^2+3n}{2}$, từ đó $u_n=-\frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

◊ **Trả lời:** $u_n\xrightarrow[n\infty]{}0$.

b) $$\left\{\begin{array}{l} u_n^2=u_{n-1}^2+\frac{1}{2^{n-1}}\\ \vdots\\ u_2^2=u_1^2+\frac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow u_n^2=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

◊ **Trả lời:** $u_n\xrightarrow[n\infty]{}\sqrt{2}$.

c) $\forall n\ge 2,\ (n+1)u_{n+1}=u_0+\ldots+u_n=(u_0+\ldots+u_{n-1})+u_n=nu_n+u_n=(n+1)u_n$, và vì thế $(u_n)_n$ là dãy dừng tại u_2.

◊ **Trả lời:** $u_n\xrightarrow[n\infty]{}\frac{u_0+u_1}{2}$.

d) $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = \left(u_1 + \frac{u_2}{2} + \ldots + \frac{u_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{u_n}{n} = u_n + \frac{u_n}{n} = \frac{n+1}{n} u_n$.

Suy ra: $\forall n \geq 3,\ u_n = \frac{n}{n-1} u_{n-1}$ rồi (bằng cách nhân): $\forall n \geq 3.\ u_n = \frac{n u_2}{2}$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3.1.14 *a)* $\left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$.

◊ **Trả lời:** 0.

b) $\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$.

◊ **Trả lời:** 1.

c) $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{n}{\sqrt{3}}$.

◊ **Trả lời:** $+\infty$.

d)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{E}(kx) \leq \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} x \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{E}(kx) \geq \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 x - k\right) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} x - \dfrac{n+1}{2n^2} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{x}{3} \end{cases}$$

◊ **Trả lời:** $\frac{x}{3}$.

e) Chú ý rằng khi khai triển tích (xem bài tập 1.2.11)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = 1 + \frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty.$$

◊ **Trả lời:** $+\infty$.

3.1.15 *a)* Quy nạp theo n.

- Tính chất là tầm thường khi $n = 0$.
- Nếu $\prod_{k=1}^{n}\left(1-z^{2^k}\right) = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} z^l$, thì:

$$\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+z^{2^k}\right) = \left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)\right)\left(1+z^{2^{n+1}}\right)$$
$$= \left(\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} z^l\right)\left(1+z^{2^{n+1}}\right) = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} z^l + \sum_{m=2^{n+1}}^{2\cdot 2^{n+1}-1} z^m = \sum_{l=0}^{2^{n+2}-1} z^l$$

Cũng có thể lưu ý rằng mọi số nguyên thuộc $[0;\ 2^{n+1}-1]$ có một biểu diễn duy nhất theo hệ cơ số 2.

b) $\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} z^l = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{1-z}$.

3.1.16 Bằng cách đặt $\alpha = 1-q$, $a_k = 1-q^{2^k}$ $(k \in \mathbf{N})$, ta có, theo bài tập 3.1.15 *a)*:

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1-q^{2^k}}{1+q^{2^k}}\right)^{\frac{1}{2^k}} = \frac{\alpha}{a_0}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha\, a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}}{a_k}\right)^{\frac{1}{2^k}}$$

$$= \frac{1}{a_0}\alpha^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\,\frac{a_0^{\frac{1}{2}}(a_0\, a_1)^{\frac{1}{2}}\ldots(a_0\, a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{2^n}}}{a_1^{\frac{1}{2}}\, a_2^{\frac{1}{2^2}}\ldots a_n^{\frac{1}{2^n}}}$$

$$= \alpha^{2-\frac{1}{2^{n+1}}}\, a_0^{-\frac{1}{2^n}}\, a_1^{-\frac{1}{2^n}}\ldots a_n^{-\frac{1}{2^n}}$$

$$= \alpha^{2+\frac{1}{2^{n+1}}}\left(1-q^{2^{n+1}}\right)^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Vì $\ln\left(\left(1-q^{2^{n+1}}\right)^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -\frac{1}{2^n}\ln\left(1-q^{2^{n+1}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{q^{2^{n+1}}}{2^n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, ta đi đến kết luận.

3.1.17 *a)* Lập luận bằng phản chứng: Giả sử $u_n \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} \frac{l}{3}$.

Khi đó tồn tại $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ sao cho: $\forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}$, ($n \ge N$ và $\left|u_n - \frac{l}{3}\right| > 2\varepsilon$).

Vì $2u_n + u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} l$, nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \left(n \ge N_1 \Rightarrow \left|2u_n + u_{2n} - l\right| \le \varepsilon\right).$$

Nói riêng, tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho $n > N_1$ và $\begin{cases} \left|2u_n + u_{2n} - l\right| \le \varepsilon \\ \left|u_n - \frac{l}{3}\right| > 2\varepsilon \end{cases}$.

Khi đó: $\left|2\left(u_n - \frac{l}{3}\right)\right| - \left|u_{2n} - \frac{l}{3}\right| \le \left|2\left(u_n - \frac{l}{3}\right) + \left(u_{2n} - \frac{l}{3}\right)\right| \le \varepsilon$,

vậy $\left|u_{2n} - \frac{l}{3}\right| \ge \left|2\left(u_n - \frac{l}{3}\right)\right| - \varepsilon > 3\varepsilon$.

Chứng minh, bằng quy nạp theo k: $\forall k \in \mathbf{N}$, $\left|u_{2^k n} - \frac{l}{3}\right| > \left(2^k + 1\right) \le \varepsilon$.

Nếu bất đẳng thức thoả mãn với k, thì:

$$\left|2\left(u_{2^k n} - \frac{l}{3}\right)\right| - \left|u_{2^{k+1} n} - \frac{l}{3}\right| \le \left|2\left(u_{2^k n} - \frac{l}{3}\right) + \left(u_{2^{k+1} n} - \frac{l}{3}\right)\right| \le \varepsilon.$$

Từ đó $\left|u_{2^{k+1} n} - \frac{l}{3}\right| \ge \left|2\left(u_{2^k n} - \frac{l}{3}\right)\right| - \varepsilon > 2\left(2^k+1\right)\varepsilon - \varepsilon = \left(2^{k+1}+1\right)\varepsilon$.

Nhưng kết quả thu được trái với tính chất bị chặn của $(u_n)_n$ vì $\left(2^k+1\right)\varepsilon \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

b) **Trả lời:** $u_n = \begin{cases} 2(-1)^p n & \text{nếu tồn tại } p \in \mathbb{N} \text{ sao cho } n = 2^p \\ 0 & \text{nếu không} \end{cases}$.

c) **Trả lời:** $u_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu tồn tại } (p,\ m) \in \mathbb{N}^2 \text{ sao cho } n = 4^p(2m+1) \\ 1 & \text{nếu không} \end{cases}$.

3.1.18 *a)* $\mathrm{H}_{2^{m+1}} - \mathrm{H}_{2^m} = \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq (2^{m+1} - 2^m)\frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}$.

b) • Cộng các bất đẳng thức ở *a)* với n từ 0 đến p ($p \in \mathbb{N}$), ta thu được:

$$\mathrm{H}_{2^{p+1}} - \mathrm{H}_1 \geq \frac{p+1}{2}, \text{ từ đó } \mathrm{H}_{2^{p+1}} \xrightarrow[p\infty]{} +\infty .$$

• Chú ý rằng $(\mathrm{H}_n)_n$ tăng (xem 3.2.1, Định nghĩa).

3.1.19 Ký hiệu $l = \operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, vốn tồn tại trong $\mathbb{R}_+$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định; tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $l \leq v_N < l + \frac{\varepsilon}{2}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq N$, bằng phép chia Euclide n cho N, ta được $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ sao cho: $n = Nq + r$ và $0 \leq r \leq N - 1$.

Khi đó ta có: $u_n = u_{Nq+r} \leq u_{Nq}u_r \leq (u_N)^q u_r$; từ đó:

$$l \leq v_n = \frac{\ln u_n}{n} \leq \frac{q\ln u_N + \ln u_r}{Nq+r} \leq \frac{\ln u_N}{N} + \frac{\ln u_r}{n} < l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\ln u_r}{n}.$$

Ký hiệu $M_N = \operatorname*{Max}_{0\leq r\leq N-1} \ln u_r$, nó cố định độc lập với n. Như vậy ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N \Rightarrow l \leq v_n < l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M_N}{n}).$$

Vì $\frac{M_N}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N_1 \Rightarrow \frac{M_N}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$). Ký hiệu $N_2 = \mathrm{Max}(N, N_1)$, cuối cùng ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N_2 \Rightarrow l \leq v_n < l + \varepsilon)$, và $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

3.2.1 Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ và $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} = \frac{(U_n + u_{n+1})V_n - (V_n + v_{n+1})U_n}{V_nV_{n+1}} = \frac{u_{n+1}V_n - v_{n+1}U_n}{V_nV_{n+1}},$$

và $u_{n+1}V_n - v_{n+1}U_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{n+1}v_k - v_{n+1}u_k) = \sum_{k=0}^{n} v_kv_{n+1}\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_k}{v_k}\right) \geq 0$.

3.2.2 *a)* • $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} = \left(1 + \frac{1}{4(n^2+n)}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$.

Vậy $(u_n)_{n\geq 1}$ tăng nghiêm ngặt.

- $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4(n^2+n)}\right) \le \frac{1}{8(n^2+n)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, từ đó cộng lại:

$$\sum_{p=1}^{n}\left(\ln u_{p+1} - \ln u_p\right) \le \frac{1}{8}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{8}.$$

nghĩa là $\ln u_{n+1} < \ln u_1 + \frac{1}{8}$.

Như vậy $(u_n)_{n\ge1}$ bị chặn trên (bởi $u_1 e^{\frac{1}{8}}$).

Ta kết luận $(u_n)_{n\ge1}$ hội tụ.

b) • Vì $(u_n)_{n\ge1}$ tăng nghiêm ngặt và hội tụ tới l nên ta có: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n < l$.

- Ta đã thấy trong lời giải của *a)*: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln u_{n+1} - \ln u_n < \frac{1}{8n} - \frac{1}{8(n+1)}$.

Dãy $\left(\ln u_n + \frac{1}{8n}\right)_{n\ge1}$ giảm nghiêm ngặt và hội tụ đến $\ln l$, từ đó:

$\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln u_n + \frac{1}{8n} > l$, nghĩa là: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > l e^{-\frac{1}{8n}}$.

3.2.3 Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \ge N \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} - l\right| \le \varepsilon).$$

Cho $p, n \in \mathbf{N}$ sao cho $p > n > N$. Ta có:

$$\begin{cases} \left|(u_{n+1} - lv_{n+1}) - (u_n - lv_n)\right| \le \varepsilon(v_n - v_{n+1}) \\ \vdots \\ \left|(u_p - lv_p) - (u_{p-1} - lv_{p-1})\right| \le \varepsilon(v_{p-1} - v_p) \end{cases},$$

từ đó cộng lại: $\left|(u_p - lv_p) - (u_n - lv_n)\right| \le \varepsilon(v_n - v_p)$.

Với $n \in \mathbf{N}$ (sao cho $n > N$) cố định, cho p tiến tới $+\infty$ trong kết quả trên, ta có: $|u_n - lv_n| \le \varepsilon v_n$.

Như vậy chúng ta đã chứng minh được: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ ($n \ge N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| \le \varepsilon$),

nghĩa là $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\infty]{} l$.

3.2.4 *a)* • Bằng một phép quy nạp đơn giản, ta được: $\forall n \in \mathbf{N}$, ($u_n > 0$ và $v_n > 0$).

- $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{(v_n - u_n)^2}{4} \ge 0$, từ đó: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $v_n \ge u_n$.

- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \le 0$, vậy $(v_n)_{n\ge1}$ giảm.

• $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \geq 0$, vậy $(u_n)_{n\geq 1}$ tăng.

Vậy ta được: $\forall\, n \in \mathbf{N}^*, u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \ldots \leq v_1$.

$$\begin{cases} (u_n)_{n\geq 1} \text{ tăng và bị chặn trên (bởi } v_1\text{) nên hội tụ tới một số thực } l\,. \\ (v_n)_{n\geq 1} \text{ giảm và bị chặn dưới (bởi } u_1\text{) nên hội tụ tới một số thực } l' \end{cases}$$

Chuyển qua giới hạn trong ($\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$), ta suy ra $l' = l$.

b) $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n.v_n}}{2} = \dfrac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2} = \dfrac{(v_n - u_n)^2}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})^2}$

và $2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})^2 \geq 2(2\sqrt{u_1})^2 = 8\sqrt{ab}$.

c) *α)* $\dfrac{v_n - u_n}{8\sqrt{ab}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

β) Ký hiệu $\delta_n = \ln(v_n - u_n)$, $\alpha = \ln(8\sqrt{ab})$, với mọi $n \in \mathbf{N}$, sao cho $n > n_0$

ta có:

$$\begin{cases} \delta_n \leq 2\delta_{n-1} - \alpha \\ \delta_{n-1} \leq 2\delta_{n-1} - \alpha \\ \vdots \\ \delta_{n_0+1} \leq 2\delta_{n_0} - \alpha \end{cases}, \text{ từ đó kết hợp lại: } \delta_n \leq 2^{n-n_0}\delta_{n_0} - \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-n_0-1}\right)\alpha,$$

nghĩa là $\delta_n \leq 2^{n-n_0}\left(\delta_{n_0} - \alpha\right) + \alpha$, vậy $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}}\right)^{2^{n-n_0}} 8\sqrt{ab}$.

3.2.5 Một phép quy nạp đơn giản cho thấy, với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n, v_n, w_n là tồn tại và dương

• $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1}v_{n+1}w_{n+1} = u_n v_n w_n = \ldots = u_0 v_0 w_0$.

• $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n w_n)^2 + (w_n u_n)^2 + (u_n v_n)^2 - (v_n w_n)(w_n u_n) - (w_n u_n)(u_n v_n) - (u_n v_n)(v_n w_n)}{(v_n w_n + w_n u_n + u_n v_n)(u_n + v_n + w_n)} \geq 0$$

(xem bài tập 1.2.8 *c)*).

• $\forall n \in \mathbf{N}$, $w_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 - u_n v_n - v_n w_n - w_n u_n}{3(u_n + v_n + w_n)} \geq 0$. (cũng như trên)

• $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n(w_n - u_n) + w_n(v_n - u_n)}{v_n w_n + w_n u_n + u_n v_n} \geq 0$

• $\forall n \in \mathbf{N}, w_{n+1} - w_n = \dfrac{(u_n - w_n) + (v_n - u_n)}{3} \leq 0$.

Như vậy, $(u_n)_{n\geq 0}$ tăng và bị chặn trên (bởi w_0), nên hội tụ tới một số thực $\lambda > 0$, $(w_n)_{n\geq 0}$ giảm và bị chặn dưới (bởi u_0) nên hội tụ tới một số thực $\gamma > 0$. Cuối cùng:

$$v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n \xrightarrow[n\infty]{} 2\gamma - \lambda, \text{ ký hiệu là } \mu.$$

Cho n tiến tới $+\infty$ trong các công thức định nghĩa trong đề bài ta suy ra: $\lambda^2 - 5\lambda\nu + 4\nu^2 = 0$, từ đấy suy ra ($\lambda = \nu$ và $\mu = \nu$) hoặc ($\lambda = 4\nu$ và $\mu = -2\nu$).

Vì γ, μ, γ đều > 0 và $u_n v_n w_n = u_0 v_0 w_0$ nên ta kết luận $\lambda = \mu = \gamma = (u_0 v_0 w_0)^{\frac{1}{3}}$.

3.2.6 *a)* • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2+1} \geq 0$, vậy $(u_n)_n$ tăng.

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{-(n-1)^2+3}{2(n^2+2n+2)n^2(n+1)^2} \leq 0$,

sau khi tính toán.

b) • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha (n+1)!} > 0$, vậy $(u_n)_n$ tăng.

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1} n!} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha (n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha+1}(n+1)!} - \dfrac{1}{n^{\alpha+1} n!} = \dfrac{a_n}{n^{\alpha+1}(n+1)^{\alpha+1}(n+1)!}$.

trong đó $a_n = (n+2)n^{\alpha+1} - (n+1)^{\alpha+2} \leq (n+2)n(n+1)^\alpha - (n+1)^{\alpha+2} = -(n+1)^\alpha \leq 0$.

3.2.7 *a)*

1) Giả sử A và B kề nhau. Vì tồn tại $(a_0, b_0) \in A \times B$ sao cho $b_0 - a_0 < 1$ nên A và B không rỗng. Hơn nữa, A bị chặn trên bởi b_0, và B bị chặn dưới bởi a_0. Từ đó suy ra A có một biên trên α và B có biên dưới β trong $\mathbf{R}$.

• Cho $a \in A$; vì $(\forall b \in B, a \leq b)$ nên a là một chặn dưới của B, vậy $a \leq \beta$.

Vì $(\forall a \in A, a \leq \beta)$ nên β là một chặn trên của A, vậy $\alpha \leq \beta$.

* Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $(a, b) \in A \times B$ sao cho $b - a < \varepsilon$. Từ đó, vì $\beta \leq b$ và $-a \leq -\alpha$ nên $\beta - \alpha < \varepsilon$. Như vậy: $(\forall \varepsilon > 0, \beta - \alpha < \varepsilon)$, từ đó $\beta - \alpha \leq 0$. Cuối cùng: $\alpha = \beta$.

2) Đảo lại, giả sử là $\alpha = \mathrm{Sup}(A)$ và $\beta = \mathrm{Inf}(B)$ tồn tại và bằng nhau:

• $\forall (a, b)\ A \times B, a \leq \alpha = \beta \leq b$.

• Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $a \in A$ sao cho $a + \dfrac{\varepsilon}{2} > \alpha$, và tồn tại $b \in B$ sao cho

$b - \dfrac{\varepsilon}{2} < \beta$. Ta suy ra $b - a < \varepsilon$.

b)

1) Vì các dãy $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ và $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ kề nhau, nên chúng hội tụ đến cùng một giới hạn l, và: $(\forall n \in \mathbf{N}, a_n \leq l \leq b_n)$.

Ta đã có: $\forall (a, b)\ A \times B, a \leq b$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ sao cho: $\left|a_{N_1} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ và $\left|b_{N_2} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Từ đó: $b_{N_2} - a_{N_1} = \left(b_{N_2} - l\right) + \left(l - a_{N_1}\right) < \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ rằng A và B là những bộ phận kề nhau của $\mathbf{R}$.

2) Xét ví dụ: $a_n = \dfrac{-1+(-1)^n}{2}$, $b_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

◊ **Trả lời:** Không.

3.3.1 Tồn tại $T \in \mathbf{N}^*$ sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+T} = u_n$. Cho $n_0 \in \mathbf{N}$ bất kỳ, ta có :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ u_{n_0+KT} = u_{n_0}.$$

Cho k tiến tới $+\infty$, vì $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ nên ta suy ra : $\lim\limits_{n\infty} u_n = u_{n_0}$.

3.3.2 • $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \le u_{2n} \le \dfrac{2n}{n^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, vậy $u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \le u_{2n+1} \le \dfrac{n+(n+1)}{n(n+1)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, vậy $u_{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Sau đó áp dụng Mệnh đề 2.

3.3.3 • $u_{2p+1} = u^2_{2p} + 2p \ge 2p \xrightarrow[p\infty]{} +\infty$, vậy $u_{2p+1} \xrightarrow[p\infty]{} +\infty$

• $u_{2p+1} = u^2_{2p+1} - (2p+1) \ge (2p)^2 - (2p+1) \xrightarrow[p\infty]{} +\infty$, vậy $u_{2p} \xrightarrow[p\infty]{} +\infty$.

Kết luận như trong Mệnh đề 2.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3.3.4 Giả sử $u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} l_1$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} l_2$, $u_{n^2} \xrightarrow[n\infty]{} l_3$.

Thì $\begin{cases} u_{4n^2} \xrightarrow[n\infty]{} l_1 \\ u_{4n^2} \xrightarrow[n\infty]{} l_3 \end{cases}$ và $\begin{cases} u_{4n^2+4n+1} \xrightarrow[n\infty]{} l_2 \\ u_{4n^2+4n+1} \xrightarrow[n\infty]{} l_3 \end{cases}$, từ đó $l_1 = l_2 = l_3$.

Kết luận nhờ Mệnh đề 2.

3.3.5 *a)* Ký hiệu $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$. Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n > N \Longrightarrow |u_n - l| \le \varepsilon).$$

Vì f là đơn ánh nên tập hợp $f^{-1}(\{0, \ldots, N\})$ là hữu hạn. Ký hiệu:

$$N_1 = \mathrm{Max}\,(f^{-1}\{0, \ldots, N\}) \in \mathbf{N}.$$

Ta có: $\forall n \in \mathbf{N}, (n > N, \Longrightarrow (\forall i \in \{0, \ldots, N\}, f(n) \ne i) \Longrightarrow f(n) > N \Longrightarrow |u_{f(n)} - l| \le \varepsilon)$.

Vậy $u_{f(n)} \xrightarrow[n\infty]{} l$.

b) Ký hiệu $l = \lim\limits_{n\infty} u_{f(n)}$. Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n > N \Longrightarrow |u_{f(n)} - l| \le \varepsilon)$. Tập hợp $f(\{0, \ldots, N\})$ là một bộ phận hữu hạn của $\mathbf{N}$; ký hiệu $N_1 = \mathrm{Max}(f(\{0,\ldots, N\})) \in \mathbf{N}$. Cho $n \in \mathbf{N}$ sao cho $n > N_1$. Vì f là toàn ánh nên tồn tại $p \in \mathbf{N}$ sao cho $n = f(p)$; vì $n > N$, nên $p \notin \{0,\ldots, N\}$ vậy $p > N$. Từ đó $|u_n - l| = |u_{f(p)} - l| \le \varepsilon$.

Cuối cùng là: $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

c) Suy ra một cách đơn giản từ *a)* và *b)*.

3.3.6 Lập luận phản chứng: giả sử $q_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$. Tồn tại $A \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \le N \text{ và } q_n < A).$$

Do đó tồn tại một hàm trích $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho $\forall k \in \mathbb{N}, q_{\delta(k)} < A$.

Nhưng $[1; A[\cap \mathbb{N}^*$ hữu hạn, do đó tồn tại một hàm trích r: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho $(q_{r(\delta(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy dừng. Ký hiệu q là số không đổi đó.

Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}, p_{\tau\circ\delta(k)} = u_{\tau\circ\delta(k)}\, q_{\tau\circ\delta(k)} \xrightarrow[k\infty]{} xq$.

Dãy $(p_{\tau\circ\delta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, nhận giá trị trong $\mathbb{Z}$ và hội tụ, do đó (xem bài tập 3.1.1) là dãy dừng. Vậy tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall k \in \mathbb{N}, (k \ge k_0 \Rightarrow p_{\tau\circ\delta(k)} = xq)$.

Vì vậy : $\forall k \in \mathbb{N}, (k \ge k_0 \Rightarrow u_{\tau\circ\delta(k)} = x)$ suy ra $x \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn.

Điều đó chứng tỏ: $q_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Vì $(\forall n \in \mathbb{N}, p_n = q_n u_n)$ và vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} x \in \mathbb{R}^*$, nên ta suy ra $|p_n| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3.4.1 Đặt $r_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là các nghiệm của phương trình đặc trưng. Tồn tại $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$. Ta tính (λ_1, λ_2) theo u_0 ($=1$) và u_1, từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{r_2 - r_1}((r_2 - u_1)r_1^n + (u_1 - r_1)r_2^n)$.

- Nếu $r_2 - u_1 \ne 0$, thì, vì $|r_1| > 1 > |r_2|$ và $r_1 < 0$, $(-1)^n u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, vì vậy các số hạng của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải đều thuộc $\mathbb{R}_+$.
- Nếu $r_2 - u_1 = 0$, thì $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r_2^n \ge 0$.

◊ **Trả lời:** $u_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.4.2

a) **Trả lời:** $u_n = \dfrac{2u_1 + u_0}{3} + \dfrac{u_1 - u_0}{3(-2)^{n-1}} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{2u_1 + u_0}{3}$.

b) **Trả lời:** $u_n = \mathrm{i}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^n - \mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n = \dfrac{2}{(\sqrt{2})^n} \sin\dfrac{n\pi}{4}$, $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ hội tụ đến 0.

3.4.3

- Bằng phép quy nạp đơn giản : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- Dãy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi $(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln u_n)$ là một dãy truy hồi tuyến tính có hệ số hằng số: $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \dfrac{1}{3}v_{n+1} + \dfrac{2}{3}v_n$.

Ta được : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{5}(2v_0 + 3v_1) + \dfrac{1}{5}(3v_0 - 3v_1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

◊ **Trả lời:** $u_n = u_0^{\frac{2}{5}+\frac{(-2)^n}{5.3^{n-1}}}\, u_1^{\frac{3}{5}-\frac{(-2)^n}{5.3^{n-1}}}$.

3.4.4 *a)* • Phép quy nạp đơn giản cho thấy, với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n tồn tại và $u_n > 0$.

• Dãy $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ xác định bởi ($\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$) thoả mãn : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+2} = \dfrac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.

Ta suy ra (xem bài tập 3.4.2 *a)*).

$$\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = 2v_1 + v_0 + \frac{v_0 - v_1}{3(-2)^{n-1}}.$$

◊ **Trả lời:** $u_n = \left(\dfrac{2}{n_1} + \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{3(-2)^{n-1}}\left(\dfrac{1}{u_0} - \dfrac{1}{u_1}\right)\right)^{-1} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{u_0 u_1}{2u_0 + u_1}$.

b) $\forall n \in \mathbf{N}$, $16u_{n+2} = 12u_{n+1} - \mathrm{i}\left(3\overline{u}_n + \mathrm{i}u_n\right) = 12u_{n+1} + 3\left(4u_{n+1} - 3u_n\right) + u_n$, từ đó $\forall n \in \mathbf{N}$,
$u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

◊ **Trả lời:** $u_n = 1 - \mathrm{i} + (1+\mathrm{i})2^{1-n} \xrightarrow[n\infty]{} 1 - \mathrm{i}$.

c) Ta có thể hình dung một sự tương tự với việc nghiên cứu các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số (xem Tập 2,11.2).

• Ta tìm dãy $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sao cho: $\forall n \in \mathrm{N}$: $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n + (-1)^n + 3^{n+1}$, dãy này có dạng: $\forall n \in \mathrm{N}$, $v_n = (\alpha n + \beta)(-1)^n + \gamma 3^n$.

Bằng phép tính sơ cấp ta có: $\alpha = \dfrac{1}{3}, \gamma = \dfrac{3}{4}$ ($\beta \in \mathbf{R}$ tùy ý).

• Dãy $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ định nghĩa bởi ($\forall n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n - v_n$) thoả mãn:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n$$

Từ đó suy ra tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ w_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n.$$

• Như vậy: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n + \dfrac{1}{2}n(-1)^n + \dfrac{3}{4}3^n$. Sử dụng (u_0, u_1) ta suy ra (λ, μ)

◊ **Trả lời:** $u_n = \dfrac{4}{3}(-1)^n + 2^n + \dfrac{1}{4}3^{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

3.4.5 Một phép quy nạp đơn giản cho thấy, với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n là tồn tại và $u_n > 0$. Các phép tính trên các số hạng đầu tiên cho thấy có khả năng là: $u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n$. Nếu hệ thức đó được thoả mãn thì:

$$\begin{aligned} u_{n+5}u_{n+2} &= 1 + u_{n+3}u_{n+4} = 1 + u_{n+3}\left(4u_{n+2} - u_n\right) = 4u_{n+2}u_{n+3} + \left(1 - u_n u_{n+3}\right) \\ &= 4u_{n+2}u_{n+3} - u_{n+1}u_{n+2} = u_{n+2}\left(4u_{n+3} - u_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Từ đó: $u_{n+5} = 4u_{n+3} - u_{n+1}$.

• Vì $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbf{Z}^4$ nên hệ thức thu được trên đây chỉ ra rằng (bằng cách quy nạp theo n):
$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_m \in \mathbf{Z}$. Cuối cùng là: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \in \mathbf{N}^*$.

3.4.6 *a)* Ta giả thiết rằng, với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n tồn tại và $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbf{R}$

Vì: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1}u_n - u_n + 2 = 0$, ta suy ra $l^2 - l + 2 = 0$, mâu thuẫn, vì ở đây biệt thức < 0.

◊ **Trả lời:** $(v_n)_n$ phân kỳ.

b) Một phép quy nạp đơn giản cho thấy, với mọi $n \in \mathbb{N}$, u_n tồn tại và $u_n > 0$.

• Nếu $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$, thì $l \in \mathbb{R}_+$, và vì ($\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1}(u_n + 1) - u_n^2 - 3 = 0$), bằng cách chuyển qua giới hạn, ta suy ra $l = 1$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2(u_n + 1)} = \dfrac{|u_n - 1|}{2(u_n + 1)}|u_n - 1| \le \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$, từ đó:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \le \dfrac{1}{2^n}|u_0 - 1|$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

c) Cho $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt[3]{7x-6} \end{array}$. Các điểm bất động của f là -3, 1, 2.

Ánh xạ f khả vi trên $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{6}{7}\right\}$, và $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{6}{7}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{7}{3\sqrt[3]{(7x-6)^2}} > 0$.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Các khoảng liên tiếp xác định bởi $-\infty$, -3, 1, 2, $+\infty$ đều ổn định đối với f, và trong mỗi khoảng đó f tăng, suy ra $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ đơn điệu.

Dấu của $f(x) - x$ được suy ra dễ dàng:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$		$-$		$+$		$-$	

• Nếu $u_0 < -3$, $(u_n)_n$ tăng và bị chặn trên (bởi -3), và điểm bất động duy nhất của f trong $]-\infty; -3]$ là -3.

• Nếu $u_0 = 3$, $(u_n)_n$ không đổi.

• Nếu $-3 < u_0 < 1$, $(u_n)_n$ giảm và bị chặn dưới (bởi -3), điểm bất động duy nhất của f trong $[-3; u_0]$ là -3.

• Nếu $u_0 = 1$, $(u_n)_n$ không đổi.

• Nếu $1 < u_0 < 2$. $(u_n)_n$ tăng và bị chặn trên (bởi 2) và điểm bất động duy nhất của f trong $[u_0; 2]$ là 2.

• Nếu $u_0 = 2$, $(u_n)_n$ không đổi.

• Nếu $u_0 > 2$, $(u_n)_n$ giảm và bị chặn dưới (bởi 2).

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} -3 & \text{nếu } u_0 < 1 \\ 1 & \text{nếu } u_0 = 1 \\ 2 & \text{nếu } u_0 > 1 \end{cases}$.

d) Một phép quy nạp đơn giản cho thấy, với mọi $n \in \mathbb{N}$, u_n tồn tại và $u_n > 0$ (biệt thức của tam thức $X^2 - X + 1$ là < 0).

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n} \geq 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n}{u_n} \leq 0$.

Như vậy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ giảm và bị chặn dưới (bởi 1), vậy hội tụ đến số thực l. Chuyển qua giới hạn trong: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(u_{n+1} - u_n + 1) = 1$, ta suy ra $l = 1$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

e) Đặt $v_n = u_n + 1$, ta có: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2$, từ đó: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{nếu } (u_0 < -2 \text{ hoặc } u_0 > 0) \\ 0 & \text{nếu } (u_0 = -2 \text{ hoặc } u_0 = 0) \\ -1 & \text{nếu } -2 < u_0 < 0 \end{cases}$.

f) Chứng minh, bằng cách quy nạp theo n: $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{2n} \in]-1; 0[\\ u_{2n+1} \in]1; 2[\end{cases}$.

◊ **Trả lời:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ phân kỳ.

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \ldots + \sqrt{u_0}}} = \sqrt{u_n + u_n} = \sqrt{2}\sqrt{u_n}$.

Đặt $v_n = \dfrac{1}{2}u_n$, từ đó ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = v_n^{\frac{1}{2}}$, từ đó $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1^{\frac{1}{2^{n-1}}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 2$.

h) Đặt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \int_0^1 |t - a|\, dt$.

Chứng minh: $\forall a \in \mathbb{R},\ F(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - a & \text{nếu } a \in]-\infty; 0] \\ a^2 - a + \dfrac{1}{2} & \text{nếu } a \in [0;\ 1] \\ a - \dfrac{1}{2} & \text{nếu } a \in [1;\ +\infty[\end{cases}$ và suy ra $\forall a \in \mathbb{R},\ F(a) \geq \dfrac{1}{4}$.

Vậy: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n + \dfrac{1}{4}$, rồi cộng lại: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 + \dfrac{n}{4}$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

i) • Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0; 1]$.

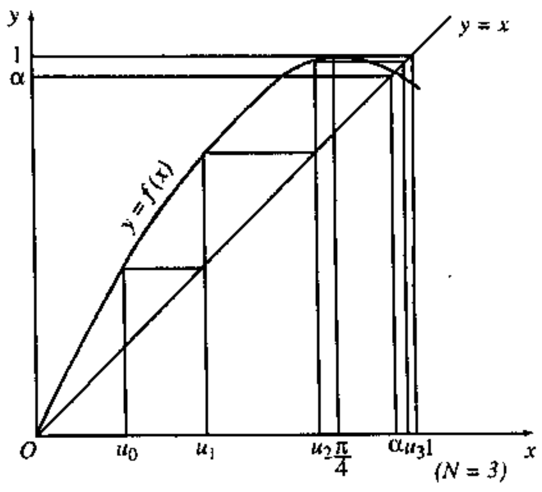
• Xét $f : \underset{x \mapsto \sin 2x}{[0;1] \to [0;1]}$ và $g : \underset{x \mapsto f(x) - x}{[0;1] \to \mathbb{R}}$.

Ánh xạ g khả vi 2 lần trên [0; 1] và: $\forall x \in [0;1]$ $\begin{cases} g'(x) = 2\cos 2x - 1 \\ g''(x) = -4\sin 2x \end{cases}$.

Ta suy ra sự biến thiên của g:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		α		1
$g''(x)$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$	$\searrow$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	< 0

Định lý về các giá trị trung gian và sự đơn điệu nghiêm ngặt của g trên $\left[\frac{\pi}{12}; 1\right]$ cho phép suy ra sự tồn tại và duy nhất của số thực $\alpha \in \left[\frac{\pi}{12}; 1\right]$ sao cho $g(\alpha) = 0$, một phép tính số cho biết $\alpha \approx 0{,}948$.



• Việc nghiên cứu trường hợp $u_0 = 0$ là đơn giản; ta có thể giả thiết $u_0 \in \left]0; 1\right]$.

Ta chứng minh bằng phản chứng rằng tồn tại $N \in \mathbf{N}^*$ sao cho $u_N \in \left[\frac{\pi}{4}; 1\right]$.

Giả sử $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Khi đó: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. Dãy $(u_n)_{n \geq 0}$ tăng và bị chặn trên bởi $\frac{\pi}{4}$. Vậy nó hội tụ tới một số thực $l \in \left[u_0; \frac{\pi}{4}\right]$, điều không thể được vì f liên tục trên [0; 1] và f chỉ có các điểm bất động là 0 và α.

• Ta vừa chứng minh rằng tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho $u_N \in \left[\frac{\pi}{4}; 1\right]$. Vì $f\left(\left[\frac{\pi}{4}; 1\right]\right) = [\sin 1; 1] \subset \left[\frac{\pi}{4}; 1\right]$, nên ta suy ra: $\forall n \in \mathbf{N},\ \left(n \geq N \Rightarrow u_n \in \left[\frac{\pi}{4}; 1\right]\right)$.

Trên $\left[\frac{\pi}{4};1\right]$, f thuộc lớp C^1 và: $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4};1\right], |f'(t)| = |2\cos 2t| \le 2\cos 2$.

Sử dụng định lý số gia hữu hạn (5.2. 2)) suy ra:

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};1\right], |f(x)-\alpha| = |f(x)-f(\alpha)| \le (2\cos 2)|x-\alpha|,$$

từ đó, $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n - \alpha| \le (2\cos 2)^n |u_0 - \alpha|$ và vì $0 \le 2\cos 2 < 1$ nên $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } u_0 = 0 \\ \alpha & \text{nếu } u_0 \in]0;1] \end{cases}$, trong đó α là số thực thuộc]0; 1] sao cho $\sin 2\alpha = \alpha$. ($\alpha \approx 0{,}948$).

3.4.7 • Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng, với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n tồn tại và $u_n \ge 0$.

• Cho $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto \frac{6}{2+x^2}$, đây là một hàm giảm.

Ta có: $\forall x \in \mathbf{R}_+, f\circ f(x) = \dfrac{3(2+x^2)^2}{(2+x^2)^2+18}$. Bằng phép tính sơ cấp ta thấy:

$\forall x \in \mathbf{R}_+, f\circ f(x) - x = \dfrac{(x-1)(x-2)P(x)}{(2+x^2)^2+18}$, trong đó $P = X^3 + 2X - 6$.

Trong $\mathbf{R}_+$, đa thức P có một không điểm duy nhất, ký hiệu α. Như vậy, tồn tại một tam thức $T \in \mathbf{R}[X]$ sao cho:

$$\begin{cases} X^3 + 2X - 6 = (X-\alpha)T(X) \\ \forall x \in \mathbf{R}_+, \ T(x) > 0 \end{cases}$$

x	0		α		$+\infty$
$P(x)$	-6	↗	0	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra dấu của $f\circ f(x) - x$:

x	0		1		α		2		$+\infty$
$f\circ f(x) - x$		+		−		+		−	

Mặt khác $f\circ f(x)$ là hàm tăng, ta có bảng:

x	0		1		α		2		$+\infty$
$f\circ f(x)$	$\frac{6}{11}$	↗	1	↗	α	↗	2	↗	$+\infty$

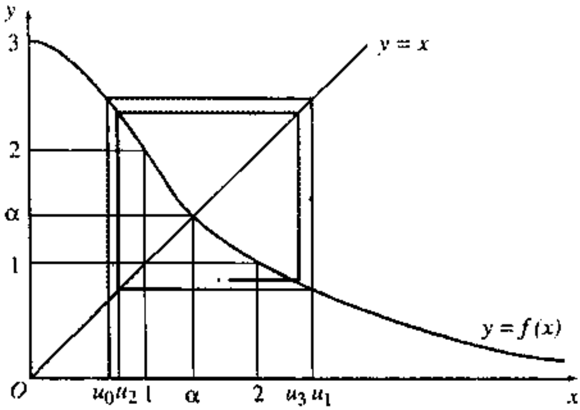
Như vậy, các khoảng liên tiếp xác định bởi 0, 1, α, 2, $+\infty$ là ổn định đối với $f\circ f$. Cuối cùng f giảm và ta có bảng biến thiên:

x	0	1	α	2	$+\infty$
$f(x)$	3 ↘	2 ↘	α ↘	1 ↘	0

Nếu $u_0 \in [0; 1]$, thì:

- $(u_{2n})_{n\geq 0}$ tăng và bị chặn trên bởi 1, vậy nó hội tụ đến điểm bất động của $f\circ f$ trong $[0;1]$, tức là hội tụ đến 1.

- $(u_{2n})_{n\geq 0}$ giảm và bị chặn dưới bởi 2, vậy nó hội tụ đến điểm bất động của $f\circ f$ trong $[2;+\infty[$, tức là hội tụ đến 2.



Các trường hợp khác khảo sát tương tự: $u_0 \in [1; \alpha[$, $u_0 = \alpha$, $u_0 \in]\alpha; 2]$, $u_0 \in [2; +\infty[$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} (u_n)_n & \text{phân kỳ nếu } u_0 \neq \alpha \\ u_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha & \text{nếu } u_0 = \alpha \end{cases}$

trong đó α là không điểm duy nhất của phương trình $x^3 + 2x - 6 = 0$, ẩn số là $x \in \mathbf{R}_+$; $\alpha \approx 1{,}456$.

3.4.8 • Chứng minh bằng quy nạp:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad \begin{cases} u_n = b\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\ldots\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cos^2\dfrac{\theta}{2^n} \\ v_n = b\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\ldots\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cos\dfrac{\theta}{2^n} \end{cases}$$

- $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = b\dfrac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2^2}}\cdots\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\theta}{2^n}} = \dfrac{b\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{b\sin\theta}{\theta}$,

rồi sau đó: $u_n = v_n\cos\dfrac{\theta}{2^n} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{b\sin\theta}{\theta}$.

◊ **Trả lời:** $(u_n)_{n\geq 0}$ và $(v_n)_{n\geq 0}$ cùng hội tụ tới $\dfrac{b\sin\theta}{\theta}$.

3.4.9 • Chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n \in \mathbf{N}$, u_n và v_n tồn tại và đều thuộc $[0; 3]$.

- Giả sử tồn tại $(l, l') \in \mathbf{R}^2$ sao cho $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ và $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l'$. Khi đó $\begin{cases} l = \sqrt{3-l'} \\ l' = \sqrt{3+l} \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} (l+l')(l-l'+1) = 0 \\ l^2 = 3-l' \end{cases}$ và: $l = 1$ và $l' = 2$.

- Với mọi $n \in \mathbf{N}$, đặt $a_n = u_n - 1$ và $b_n = v_n - 2$.

Ta có: $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1-b_n} - 1 = \dfrac{-b_n}{\sqrt{1-b_n}+1} \\ b_{n+1} = \sqrt{4+a_n} - 2 = \dfrac{a_n}{\sqrt{4+a_n}+2} \end{cases}$,

từ đó: $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} |a_{n+1}| \leq |b_n| \\ |b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n| \end{cases}$.

Ký hiệu $\mu_n = \mathrm{Max}\{|a_n|, |b_n|\}$, ta có: $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq \mu_{n+2} \leq \dfrac{1}{2}\mu_n$.

Từ đó rút ra: $\mu_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, sau đó $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và $b_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$ và $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 2$.

C 3.1 I *1)* Cho $\varepsilon > 0$ cố định; vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$, nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Cho $n \in \mathbf{N}$, sao cho $n \geq N_1 + 1$. Ta có:

$$|v_n - l| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - l| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k - l|.$$

Một mặt, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k - l| \leq \dfrac{1}{n}(n - N_1)\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Mặt khác, do $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - l| \xrightarrow[n\infty]{} 0$, nên tồn tại $N_2 \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Ký hiệu $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, ta có: $\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon)$, nghĩa là $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

2) Dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ định nghĩa bởi $(\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = (-1)^n)$ phân kỳ nhưng $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ vì

$$\begin{cases} v_n = 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ v_n = -\dfrac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

◊ **Trả lời:** Điều đảo lại của tính chất ở *1)* là sai.

II *1)* Áp dụng kết quả của I *1)* vào dãy $(u_n - u_{n-1})_{n\geq 1}$ với chú ý rằng:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \frac{1}{n}(u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{u_0}{n}.$$

2) Áp dụng một cách thích hợp phép chứng minh kết quả ở I *1)*.

3) Áp dụng một cách thích hợp phép chứng minh kết quả ở I *1)*.

III *1) a)* Áp dụng bổ đề bậc thang (II *1)*) vào dãy $(\ln v_n)_{n\geq 1}$, nếu $l \neq 0$. Xét riêng trường hợp $l = 0$.

b) • $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$

• $$\frac{C_{p(n+1)}^{n+1}}{C_{pn}^{n}} = \frac{(pn+p)!}{(n+1)!(pn+p-n-1)!}\frac{n!(pn-n)!}{(pn)!}$$

$$= \frac{(pn+1)(pn+2)...(pn+p)}{(n+1)(pn-n+1)(pn-n+2)...(pn-n+p-1)} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}.$$

• $$\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = 1 + \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1.$$

• $$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}\frac{n^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{4}{e}.$$

◊ **Trả lời:** $1, \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}, 1, \frac{4}{e}$.

2) a) Phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng, với bất kỳ $n \in \mathbf{N}$, u_n tồn tại và $u_n > 0$.

Mặt khác: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \le u_n$.

Dãy $(u_n)_{n\ge 0}$ giảm và bị chặn dưới, vậy nó hội tụ tới một số thực l và $l = \dfrac{l}{1+l^2}$, từ đó suy ra $l = 0$.

b) $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{(1+u_n^2)^2 - 1}{u_n^2} = 2 + u_n^2 \xrightarrow[n\infty]{} 2$.

c) Theo bổ đề bậc thang $\dfrac{U_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 2$, từ đó $\dfrac{1}{u_n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \sqrt{2}$, nghĩa là $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

C 3.2 I Trước hết ta chú ý rằng, vì $(u_n)_{n\ge 0}$ bị chặn nên với mọi $n \in \mathbf{N}$, tập hợp $\{u_p;\ p \ge n\}$ bị chặn, vì thế v_n và w_n tồn tại.

1) Với mọi $n \in \mathbf{N}$, $\{u_p; p \ge n\} \subset \{u_p;\ p \ge n\} \subset \{u_p;\ p \ge 0\}$ vậy $\begin{cases} v_n \le v_{n+1} \le w_0 \\ w_n \ge w_{n+1} \ge v_0 \end{cases}$.

Ví dụ

(I) $\liminf\limits_{n\infty} u_n = \limsup\limits_{n\infty} u_n = 0$

(II) $\liminf\limits_{n\infty} u_n = -1,\ \limsup\limits_{n\infty} u_n = 1$

(III) $\liminf\limits_{n\infty} u_n = -1,\ \limsup\limits_{n\infty} u_n = 1$.

2) • Giả sử $\liminf\limits_{n\infty} u_n = \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

Vì ($\forall n \in \mathbf{N},\ v_n \le u_n \le w_n$) nên định lý kẹp cho phép kết luận rằng u_n hội tụ và:

$\lim\limits_{n\infty} u_n = \liminf\limits_{n\infty} u_n = \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

• Đảo lại, giả sử $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \in \mathbf{R}$

Cho $\varepsilon > 0$ cố định; tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N}$, ($n \ge N \Rightarrow |u_n - l| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$)

Cho $n \in \mathbf{N}$ sao cho $n \ge N$. Ta có:

$$\forall p \in \mathbf{N}, (p \ge n \Rightarrow p \ge N \Rightarrow |u_p - l| \le \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2} \le u_p \le l + \frac{\varepsilon}{2}),$$

từ đó chuyển qua biên dưới và biên trên: $l - \dfrac{\varepsilon}{2} \le v_n \le w_n \le l + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vậy: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N},\quad \forall n \in \mathbf{N}, \left(n \ge N \Rightarrow \begin{cases} l - \varepsilon \le v_n \le l + \varepsilon \\ l - \varepsilon \le w_n \le l + \varepsilon \end{cases}\right)$.

và cuối cùng: $v_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ và $w_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

3) *a)* Ký hiệu $M = \limsup\limits_{n\infty} u_n$

Cho $\varepsilon > 0$ và $N \in \mathbf{N}$; tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho: $\left(n \ge N \text{ và } |w_n - M| \le \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Theo định nghĩa của $w_n = \operatorname{Sup}\{u_p;\ p \ge n\}$, tồn tại $p \in \mathbf{N}$ sao cho:

$$\left(p \ge n \quad \text{và} \quad w_n - \frac{\varepsilon}{2} \le u_p \le w_n\right).$$

Vậy ta có: $p \ge N$ và $M - \varepsilon \le w_n - \dfrac{\varepsilon}{2} \le u_p \le w_n \le M + \dfrac{\varepsilon}{2} \le M + \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ rằng: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\exists p \in \mathbf{N}$, ($p \ge N$ và $\left|u_p - M\right| \le \varepsilon$), vậy M là một giá trị đính của $(u_n)_n$.

Lập luận tương tự cho $\liminf\limits_{n\infty} u_n$ (hoặc còn dùng *4) a)*).

b) Tồn tại một hàm trích $\sigma: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sao cho $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$.

Vì ($\forall n \in N$, $v_{\sigma(n)} \le u_{\sigma(n)} \le w_{\sigma(n)}$), nên bằng cách chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$, ta suy ra: $\liminf\limits_{n\infty} u_n \le a \le \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

4) Sử dụng các kết quả của bài tập 1.2.20.

a) 1) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Inf}\limits_{p\ge n}(-a_p) = -\operatorname{Sup}\limits_{p\ge n} a_p$.

b) 1) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Inf}\limits_{p\ge n}(\lambda a_p) = \lambda \operatorname{Inf}\limits_{p\ge n} a_p$ nếu $\lambda \ge 0$.

c) 1) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Inf}\limits_{p\ge n}(a_p + b_p) \ge \operatorname{Inf}\limits_{p\ge n}(a_p) + \operatorname{Inf}\limits_{p\ge n}(b_p)$.

◊ **Trả lời:** Ví dụ $(u_n)_{n\ge 0}$ và $(v_n)_{n\ge 0}$ là 4–tuần hoàn.

và $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 1 \\ v_0 = 2,\ v_1 = 1,\ v_2 = 1,\ v_3 = 0 \end{cases}$.

II *1) a)* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|c_n\right| = \dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right| \le \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|u_k\right| \le \operatorname{Sup}\limits_{k\in\mathbf{N}}\left|u_k\right|$.

b) Cho $N, n \in \mathbf{N}$ sao cho $n > N$. Ta có:

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k, \text{ và } \left(1 - \frac{N}{n}\right)\operatorname*{Inf}_{k\ge N+1} u_k \le \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k \le \left(1 - \frac{N}{n}\right)\operatorname*{Sup}_{k\ge N+1} u_k,$$

từ đó: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \left(1 - \dfrac{N}{n}\right)v_{N+1} \le c_n \le \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N} u_k + \left(1 - \dfrac{N}{n}\right)w_{n+1}$.

Với N cố định, cho n tiến tới $+\infty$, ta suy ra:

$$v_{N+1} \le \liminf_{n\infty} c_n \le \limsup_{n\infty} c_n \le w_{N+1},$$

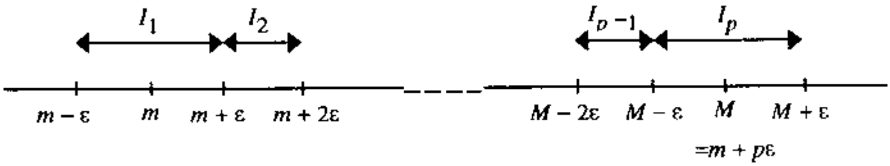
rồi cho N tiến tới $+\infty$: $\liminf\limits_{n\infty} u_n \le \liminf\limits_{n\infty} c_n \le \limsup\limits_{n\infty} c_n \le \limsup\limits_{n\infty} u_n$.

2) • Trường hợp $m = M$, khảo sát dễ dàng, vì khi đó $(u_n)_{n\ge\mathbf{N}}$ hội tụ.

• Giả sử $m < M$. Ta đã biết (xem **I** *3)*) $\mathrm{VA}\left((u_n)_{n\ge\mathbf{N}}\right) \subset [m; M]$.

Cho $N \in \mathbf{N}^*$ và $p \in \mathbf{N}$ sao cho $p \geq 3$; ký hiệu: $\varepsilon = \dfrac{M-m}{p}$. Xét các khoảng liên tiếp $I_1 = [m-\varepsilon; m+\varepsilon]$; $I_k = [m+(k-1)\varepsilon; m+k\varepsilon]$, với $k \in \{2,\ldots,p-1\}$, $I_p = [M-\varepsilon; M+\varepsilon]$.

Ta sẽ chứng minh rằng mỗi khoảng đó chứa ít nhất một trong các u_n mà $n > N$.



• Vì $\varepsilon_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên tồn tại $N' \in \mathbf{N}$ sao cho: $\begin{cases} N' \geq N \\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n > N' \Rightarrow 0 \leq \varepsilon_n < \varepsilon) \end{cases}$.

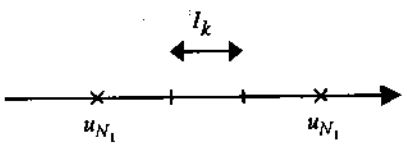
Theo định nghĩa $M = \limsup\limits_{n\infty} u_n$, nên tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho: $\begin{cases} N_1 > N' \\ M-\varepsilon < u_{N_1} < M+\varepsilon \end{cases}$,

rồi, tồn tại $N_2 \in \mathbf{N}$ sao cho: $\begin{cases} N_2 \geq N_1 \\ m-\varepsilon < u_{N_2} < m+\varepsilon \end{cases}$.

Đặt $E = \{u_n;\ N_1 \leq n \leq N_2\}$; ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng mỗi khoảng I_k $(k \in \{1,\ldots,p\})$ đều giao với E.

Xét $\begin{cases} U = \{k \in \{1,\ldots,p\}\}, & I_k \cap E \neq \varnothing \\ V = \{k \in \{1,\ldots,p\}\}, & I_k \cap E \neq \varnothing \end{cases}$, là những bộ phận bù nhau của $\{1,\ldots,p\}$.

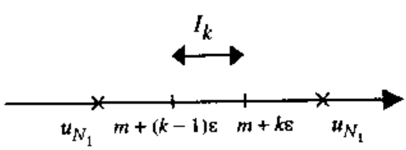
Giả sử $V \neq \varnothing$; tồn tại $k \in \{1,\ldots,p\}$ sao cho $I_k \cap E = \varnothing$. Vì $u_{N_1} \in I_p$ và $u_{N_2} \in I_1$, nên ta có: $2 \leq k \leq p-1$.



Xét $S = \left\{ n \in \mathbf{N} : \begin{cases} N_1 \leq n \leq N_2 \\ u_n > m+k\varepsilon \end{cases} \right\}$; S là một bộ phận hữu hạn không rỗng của $\mathbf{N}$ (vì $N_1 \in S$),

vậy có một phần tử lớn nhất, ký hiệu N_0. Vì $N_2 \notin S$, ta có: $N_1 \leq N_0 + 1 \leq N_2$.

Theo định nghĩa của N_0: $u_{N_0+1} \leq m + k\varepsilon$.



Nhưng $u_{N_0+1} \notin I_k$ (vì $I_k \cap S = \varnothing$), vậy $u_{N_0+1} < m + (k-1)\varepsilon$.

Do đó: $\begin{cases} u_{N_0} > m + k\varepsilon \\ u_{N_0+1} < m + (k-1)\varepsilon \end{cases}$, từ đó $u_{N_0+1} - u_{N_0} < -\varepsilon$, mâu thuẫn.

- Cho $a \in [m; M]$, tồn tại $k \in \{1, ..., p\}$ sao cho $a \in I_k$ (vì $\bigcup_{k=1}^{p} I_k \supset [m; M]$), rồi tồn tại $n \in \mathbf{N}$

sao cho: $n > N$ và $u_n \in I_k$ (chứng minh trên đây).

Vậy ta có: $|u_n - a| \le 2\varepsilon$.

Điều này chứng tỏ rằng: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} n > N \\ |u_n - a| \le 2\varepsilon \end{cases}$, vậy a là một trị dính của

$(u_n)_n$.

Cuối cùng: $[m; M] \subset \mathrm{VA}\ ((u_n)_{n\in\mathbf{N}})$.

3) $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{n(u_{n+1} - u_n) - u_n}{(n+1+u_{n+1})(n+u_n)} \ge -\varepsilon_n$, với $\varepsilon_n = \dfrac{u_n}{(n+1+u_{n+1})(n+u_n)}$.

Ta có: $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \le \varepsilon_n = \dfrac{1}{n+1+u_{n+1}} \dfrac{u_n}{n+u_n} \le \dfrac{1}{n+1}$.

(Ta có thể áp dụng *2)*).

C 3.3 *1) a)* $\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\right) \times \left(\mathbf{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}\right)$, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \dfrac{b-dy}{cy-a}$.

b) $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ được xác định khi và chỉ khí $\left\{\begin{array}{l} u_0 \ne t_0 \\ u_1 \text{ tồn tại và } u_1 \ne t_0 \\ \vdots \end{array}\right|$, điều này quy về $u_0 \ne t_n$

với mọi n mà t_n xác định.

2) $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1}(cu_n + d) = au_n + b$, từ đó chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$:
$l(cl + d) = al + b$.

3) ◊ **Trả lời:** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ phân kỳ, hoặc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ không xác định từ một số hạng nào đó.

Ví dụ: Ở đây $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 2$, vậy $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = -3 < 0$.

Trong ví dụ này $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ phân kỳ.

4) a) Giả sử $u_0 = \alpha$, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng: $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha$.

Nếu $u_n = \alpha$ thì $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \alpha$ (lưu ý rằng $t\alpha + d \ne 0$, vì nếu không thì $c\alpha + d = 0$ và $a\alpha + b = 0$, từ đó $ad - bc = 0$, loại).

b) $U_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha} = \left(\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\beta + b}{c\beta + d}\right)\left(\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}\right)^{-1}$

$$= \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \frac{(ad - bc)}{(ad - bc)} \frac{(u_n - \beta)}{(u_n - \alpha)} = \lambda U_n.$$

c) Theo *b)*: $\forall n \in \mathbf{N}, U_n = \lambda^n U_0$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} |\lambda| < 1 \;\Rightarrow\; u_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta \\ |\lambda| > 1 \;\Rightarrow\; u_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha \\ \lambda = -1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} (u_n)_n \text{ phân kỳ với các giá trị } u_0 \text{ và } u_n \text{ xen kẽ, nếu } u_0 \neq \beta \\ (u_n)_n \xrightarrow[n\infty\beta]{} \beta \text{ nếu } u_0 = \beta \end{cases} \end{cases}$

(trường hợp $\lambda = 1$ bị loại).

Ví dụ: $a = 1, b = 0; c = 1, d = 2; \Delta = 1, \alpha = -1, \beta = 0; \delta = \dfrac{1}{2}$. Vậy $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta = 0$.

5) a) Cũng lập luận như ở *4) a)*.

b) $U_{n+1} = (u_{n+1} - \alpha)^{-1} = \left(\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a-d}{2c}\right)^{-1} = \dfrac{2c(cu_n + d)}{c(a+d)u_n + 2bc - ad + d^2}$.

Vì $\Delta = 0$, ta có $2bc - ad + d^2 = \dfrac{1}{2}\left(-(d-a)^2 - 2ad + 2d^2\right) = -c(a+d)\alpha$, từ đó:

$$U_{n+1} = \frac{2(cu_n + d)}{(a+d)(u_n - \alpha)} = \frac{2c(u_n - \alpha) + 2(c\alpha + d)}{(a+d)(u_n - \alpha)} = \mu + U_n,$$

với chú ý là $2(c\alpha + d) = a + d$.

c) Vì $\mu \neq 0$ ta có $|U_n| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **Trả lời:** $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha$.

Ví dụ: $\alpha = 1, b = 0, c = 1, d = 1; \Delta = 0, \alpha = 0; u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

(Vả lại ta thấy dễ dàng rằng: $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$).

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 4

4.1.1 Giả sử tồn tại $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $f(a) \neq f(b)$; ta có $g(a) = g(b)$.

Rồi, với mọi $x \in \mathbf{R}$: $\begin{cases}(f(a)-f(x))(g(a)-g(x))=0\\(f(b)-f(x))(g(b)-g(x))=0\end{cases}$

Vì $g(b) = g(a)$, bằng phép trừ ta suy ra $(f(a) - f(b))\,(g(a) - g(x)) = 0$,
từ đó $g(x) = g(a)$.
Điều này chứng tỏ g là hàm hằng.

4.1.2 *a)* Thay x bởi 0 , rồi bởi -1 , để có mâu thuẫn.

◊ **Trả lời:** $\varnothing$

b) Giả sử f thích hợp. Áp dụng giả thiết cho x và cho $(1-x)$, suy ra
$(x^2 - x + 1) f(x) = (x^2 - x + 1)^2$ rồi $f(x) = (x^2 - x + 1)$.Kiểm chứng phần đảo.

◊ **Trả lời:** $f : \left\{\begin{matrix}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ x \mapsto x^2 - x + 1\end{matrix}\right\}$

c) Ta có liên tiếp:

- $f(0) = 0$
- $\forall\, y \in \mathbf{R}$, $f(y^2) = f(0+y^2) = f(0) + f(y) = f(y)$ và $f(y^4) = f(y^2)$
- $\forall\, y \in \mathbf{R}$, $0 = f((-y^2) + y^2) = f(y^4) + f(y)$

Cuối cùng $f(y) = 0$

◊ **Trả lời:** $\{0\}$

d) Phép đổi biến song ánh: $\begin{matrix}\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)\end{matrix}$ chứng tỏ rằng điều kiện

của đề bài tương đương với: $\forall\, (X, Y) \in \mathbf{R}^2$, $f(X) - f(Y) = X^3 - Y^3$

Điều kiện này quy về ánh xạ $\begin{matrix}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ X \mapsto f(X) - X^3\end{matrix}$ là ánh xạ hằng.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ x \mapsto x^3 + \lambda\end{matrix} \;:\; \lambda \in \mathbf{R}\right\}$

e) Chứng minh liên tiếp:

- $f(1) = \dfrac{1}{2}$ (bằng cách lấy $x = y = z = 1$)

- $f(0) = \frac{1}{2}$ $(x = y = 0, z = 1)$
- $f(y) \leq \frac{1}{2}$ $(x = 0, z = 1)$
- $f(x) \geq \frac{1}{2}$ $(y = z = 1)$

Ánh xạ thu được hiển nhiên thích hợp.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$.

4.1.3 *1)* $f + (g - f)^+ = f + \mathrm{Sup}(g - f, 0) = \mathrm{Sup}(f + (g - f), f + 0) = \mathrm{Sup}(g, f)$

2) Cho $x \in X$

- Nếu $f(x) \geq 0$: $(f^+ - f^-)(x) = f(x) - 0 = f(x)$ và $(f^+ - f^-)(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|$.
- Nếu $f(x) \leq 0$: $(f^+ - f^-)(x) = -(-f(x)) = f(x)$ và $(f^+ - f^-)(x) = -f(x) = |f(x)|$.

3) Cho $x \in X$, ta có $f(x) \leq g(x)$, vậy $\mathrm{Sup}(f(x), 0) \leq \mathrm{Sup}(g(x), 0)$.

4) $\mathrm{Sup}(f^+, f^-) = \frac{1}{2}(f^+ + f^- + |f^+ - f^-|) = \frac{1}{2}(|f| + |f|) = |f|$

5) $(f+g)^+(x) = \mathrm{Sup}(f(x) + g(x), 0) \leq \mathrm{Sup}(f(x), 0) + \mathrm{Sup}(g(x), 0) = f^+(x) + g^+(x)$.

4.1.4 Ta thu được dễ dàng các kết quả sau đối với fg :

	f chẵn	f lẻ
g chẵn	fg chẵn	fg lẻ
g lẻ	fg lẻ	fg chẵn

4.1.5 • Nếu f chẵn và g bất kỳ thì $g \circ f$ chẵn.

- Nếu f lẻ và g chẵn thì $f \circ g$ chẵn.
- Nếu f lẻ và g lẻ thì $f \circ g$ lẻ.

4.1.6 Ký hiệu $f: \begin{matrix} \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^{18} + x^{10} \end{matrix}$

Một mặt, f tăng nghiêm ngặt, mặt khác ta thấy $f(\sqrt{2}) = 2^9 + 2^5 = 544$.

◊ **Trả lời :** $\{\sqrt{2}\}$.

4.1.7 Cho $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $a < b$; giả sử $f(a) < f(b)$.

- Vì $f \circ f$ tăng nên $(f \circ f)(f(a)) \leq (f \circ f)(f(b))$.
- Vì $f \circ f$ giảm nghiêm ngặt nên $(f \circ f \circ f)(a) > (f \circ f \circ f)(b)$.

Suy ra mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ f giảm.

Vì $f \circ f \circ f$ giảm nghiêm ngặt, suy ra f giảm nghiêm ngặt.

4.3.1 *a)* Cho $x_0 \in \mathbb{R}$, vì $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ đều trù mật trong $\mathbb{R}$, nên $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\cos x_0$ và

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)=\sin x_0$. Từ đó suy ra là $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\sin x_0=\cos x_0$.

◊ **Trả lời:** f liên tục tại mọi điểm $\pi/4+n\pi$ ($n\in\mathbb{Z}$) và gián đoạn tại mọi điểm khác.

b) • Cho $x_0\in\mathbb{Q}_+$; vì $\mathbb{R}_+-\mathbb{Q}_+$ trù mật trong $\mathbb{R}_+$ nên tồn tại dãy $(v_n)_n\in\mathbb{N}$ trong $\mathbb{R}_+-\mathbb{Q}_+$ sao cho $v_n \xrightarrow[n\infty]{} x_0$. Vì $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ f(v_n)=0\\ f(x_0)\neq 0\end{cases}$, ta suy ra f gián đoạn tại x_0.

• Một mặt : $\forall u\in\mathbb{R}_+-\mathbb{Q}_+$, $f(u)=0$, mặt khác, giả sử $(u_n)_n$ là một dãy trong $\mathbb{Q}_+$ sao cho $u_n\xrightarrow[n\infty]{} x_0$. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, tồn tại $(p_n,q_n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ sao cho: $u_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ và ƯCLN $(p_n,q_n)=1$. Theo bài tập 3.3.6, $p_n\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$ và $q_n\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$,

vậy $f(u_n)=\dfrac{1}{p_n+q_n}\xrightarrow[n\infty]{}0$.

◊ **Trả lời:** f liên tục tại các điểm thuộc $\mathbb{R}_+-\mathbb{Q}_+$, và gián đoạn tại mọi điểm thuộc $\mathbb{Q}_+$.

4.3.2 *a)* Giả sử f phù hợp, ta chứng minh dễ dàng (bằng quy nạp theo n):

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=f\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

Cho n tiến tới $+\infty$ và sử dụng tính liên tục của f tại 0.

Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; & \lambda\in\mathbb{R}\\ x\mapsto\lambda & \end{matrix}\right\}$.

b) Đặt $\varphi:\ \begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{x}{1+x^2}\end{matrix}$ và với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_n=\varphi\circ\ldots\circ\varphi$ (n lần).

Cho $x\in\mathbb{R}_+$; chứng minh bằng quy nạp theo n : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f(x)=f(\varphi_n(x))$. Mặt khác $\varphi_n(x)\xrightarrow[n\infty]{}0$ (như trong 3.4.3, Ví dụ). Do f liên tục tại 0, suy ra $f(x)=f(0)$.

Cũng lập luận tương tự đối với trường hợp $x\le 0$.

Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; & \lambda\in\mathbb{R}\\ x\mapsto\lambda & \end{matrix}\right\}$

c) • Trước hết chứng minh f là hàm chẵn.

• Cho $x\in\mathbb{R}_+^*$; ta có : $f(x)=-f(x^{\frac12})=f(x^{\frac14})=-f(x^{\frac18})=\ldots=(-1)^n f(x^{\frac{1}{2^n}})$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ (bằng cách quy nạp theo n).

Vì $x^{\frac{1}{2^n}}\xrightarrow[n\infty]{}1$ và f liên tục tại 1, ta có: $f(x^{\frac{1}{2^n}})\xrightarrow[n\infty]{}f(1)$

Nếu $f(x) \neq 0$, dãy $((-1)^n f(x))_{n \in \mathbf{N}}$ phân kỳ, mâu thuẫn. Vậy $f(x) = 0$.

• $f(0) = -f(0^2)$, vậy $f(0) = 0$.

Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời:** $\{0\}$.

4.3.3 Giả sử f phù hợp

1) Chứng minh bằng quy nạp theo n : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, f(nx) = nf(x)$.

2) Sử dụng $nx + (-nx) = 0$, suy ra từ *1)*: $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

3) Cho $x \in \mathbf{Q}$; tồn tại $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ sao cho $x = \dfrac{p}{q}$. Theo *2)* ta có :

$$\begin{cases} f(p) = f(p1) = pf(1) \\ f(p) = f(q\dfrac{p}{q}) = qf(\dfrac{p}{q}) \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = \dfrac{p}{q} f(1) = x f(1)$.

4) Cho $x \in \mathbf{R}$. Vì $\mathbf{Q}$ trù mật trong $\mathbf{R}$ nên tồn tại dãy $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ trong $\mathbf{Q}$ sao cho:

$u_n \xrightarrow[n\infty]{} x$. Vì f liên tục tại x, suy ra $f(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$.

Nhưng theo *3)* $\forall n \in \mathbf{N}, f(u_n) = u_n f(1)$. Vậy $f(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} x f(1)$.

Cuối cùng, $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x f(1)$.

Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \lambda \in \mathbf{R} \\ x \mapsto \lambda x \end{matrix}\right\}$

4.3.4 Giả sử f phù hợp.

Lấy $(x = 1, y = 0)$, suy ra $f(0) = 0$.

Lấy $(x = 1, y = 1)$, suy ra $f(0) = a$, vậy $a = 0$.

Ta có: $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x-y) = f(x) - f(y)$.

Lấy $x = 0$ ta thấy f lẻ. Từ đó: $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x+z) = f(x) - f(z) = f(x) + f(z)$

và ta trở lại bài tập 4.3.3

◊ **Trả lời:** • $\varnothing$ nếu $a \neq 0$.

• $\left\{\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \lambda \in \mathbf{R} \\ x \mapsto \lambda x \end{matrix}\right\}$ nếu $a = 0$.

4.3.5 Phương pháp 1. Vì ƯCLN $(p, q) = 1$, ta có thể giả thiết, chẳng hạn, p lẻ.

Vì f^p liên tục nên $f = \sqrt[p]{f^p}$ cũng liên tục .

Phương pháp 2. (Có giá trị, tổng phát hơn đối với f và g nhận giá trị phức)

cho $x_0 \in I$.

• *Trường hợp 1*: $f(x_0) \neq 0$.

Lúc này $f^p(x_0) \neq 0$, từ đó vì f^p liên tục nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho :

$$\forall x \in I, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f^p(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0)$$

Theo định lý Bezout, tồn tại $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ sao cho $pu + qv = 1$. Do đó với mọi $x \in I$ ta có :

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) = ((f(x))^p)^u \ ((f(x))^q)^v.$$

Vì f^p và f^q đều liên tục tại x_0, ta suy ra f liên tục tại x_0.

• *Trường hợp 2*: $f(x_0) = 0$

Tồn tại $y > 0$ sao cho $\forall x \in I$, $(|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f^p(x) - f^p(x_0)| \leq \varepsilon^p)$

Từ đó $\forall x \in I$, $(|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x)|^p \leq \varepsilon^p \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại x_0

4.3.6 Giả sử $E \neq \{0\}$, và cho $f \in E - \{0\}$. Theo giả thiết, ta có $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

Cho $g \in E$; xét $h = f(x_0)g - g(x_0)f$, trong đó $x_0 \in I$ là một phần tử nào đó cố định. Ta có :

$h \in E$ và $h(x_0) = 0$. Từ đó $h = 0$ và $g = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} f \in \mathbf{R} f$. Tính chất liên tục không dùng đến .

4.3.7 *a)* **Trả lời:** $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbf{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

b) **Trả lời :** $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in \mathbf{Q} - \{1\} \\ 2 \text{ nếu } x = 1 \\ 1 \text{ nếu } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

4.3.8. Ánh xạ $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^{17} - x^{11} - 1$ liên tục trên $\mathbf{R}_+$ và có ít nhất một giá trị ≤ 0

$(f(0) = -1)$ và một giá trị ≥ 0 $(f(2) > 0)$. Áp dụng định lý các giá trị trung gian.

4.3.9. Cho $\lambda \in \mathbf{R}_+$; áp dụng định lý các giá trị trung gian vào ánh xạ

$$\varphi_\lambda: [0;1] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \varphi_\lambda(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

4.3.10 Ta lập luận phản chứng; giả sử $f \neq g$ và $f \neq -g$. Khi ấy tồn tại $(a, b) \in I^2$ sao cho $f(a) \neq g(a)$ và $f(b) \neq -g(b)$.

Suy ra: $f(a) = -g(a) \neq 0, f(b) = g(b) \neq 0$, một trong hai tích $f(a) f(b)$, $g(a) g(b)$ là âm.

Cuối cùng áp dụng định lý các giá trị trung gian đối với f hay g trên $[a; b]$ để có mâu thuẫn.

4.3.11 $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f(-x)| = f(|-x|) = f(|x|) = |f(x)|$, từ đó $(f(-x))^2 = (f(x))^2 > 0$.

Theo bài tập 4.3.10, suy ra : $(\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x))$ hay $(\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = -f(x))$ nghĩa là f chẵn hoặc lẻ . Nhưng f không thể lẻ vì $f > 0$.

4.3.12 Áp dụng định lý các giá trị trung gian vào $g: [a,b] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ liên tục trên $[a; b]$

và thoả mãn $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$.

4.3.13 Cho $(a, b) \in I^2$, cố định sao cho $a < b$, và $(x, y) \in I^2$ sao cho $x < y$. Xét ánh xạ $\varphi : [0; 1] \to \mathbf{R}$, định nghĩa bởi : $\forall t \in [0; 1]$, $\varphi(t) = f((1 - t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$, liên tục trên $[0;1]$. Ta có $\varphi(0) = f(b) - f(a)$, $\varphi(1) = f(y) - f(x)$.

Nếu $(f(y) - f(x))(f(b) - f(a)) < 0$ thì theo định lý các giá trị trung gian , tồn tại $\tau \in [0; 1]$ sao cho $\varphi(\tau) = 0$, từ đây suy ra, do f là đơn ánh : $(1 - \tau)(b - a) = -\tau(y - x)$, mâu thuẫn.

Vậy $f(y) - f(x)$ cùng dấu nghiêm ngặt như $f(b) - f(a)$, cuối cùng là f đơn điệu nghiêm ngặt.

4.3.14 *a)* Giả sử tồn tại f phù hợp; $f \circ f$ giảm nghiêm ngặt, là đơn ánh và do đó f cũng là đơn ánh. Theo bài tập 4.3.13, ta suy ra f đơn điệu nghiêm ngặt nhưng $f \circ f$ lại tăng nghiêm ngặt, mâu thuẫn.

b) Áp dụng *a)* với $\varphi(x) = -x$.

◊ **Trả lời:** Không.

4.3.15 Ánh xạ $\varphi : \begin{array}{l}[a;b] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}\end{array}$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\forall x \in [a;b]$, $\varphi(x) > 1$

Theo 4.3.4, Mệnh đề, tồn tại $\mu \in]1;+\infty[$ sao cho : $\forall x \in [a;b]$, $\varphi(x) > \mu$.

Ta lấy $\lambda = \mu - 1$.

4.3.16 Tồn tại $A \in \mathbf{R}_-$ và $B \in \mathbf{R}_+$ sao cho: $\begin{cases}\forall x \in]-\infty; A], \ f(x) \ge f(0) \\ \forall x \in [B, +\infty[, \ f(x) \ge f(0)\end{cases}$.

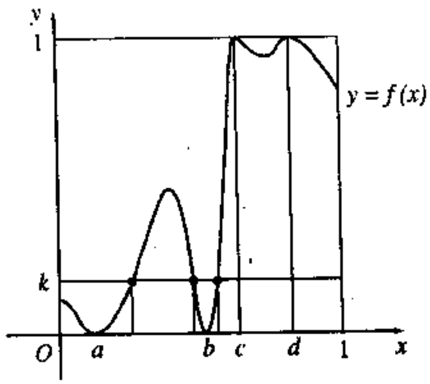
Mặt khác f liên tục trên đoạn $[A;B]$ nên tồn tại $x_0 \in [A;B]$ sao cho :

$$\forall x \in [A;B], \ f(x) \ge f(x_0).$$

Đặc biệt $A \le 0 \le B$ ta có $f(0) \ge f(x_0)$.

Cuối cùng $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \ge f(x_0)$.

4.3.17 Lập luận phản chứng: ta giả sử mọi phần tử của $[0;1]$ đều có đúng 2 điểm nguồn.



Trường hợp riêng, tồn tại $(a, b, c, d) \in [0;1]^4$ sao cho: $\begin{cases} a < b \text{ và } f(a) = f(b) = 0 \\ c < d \text{ và } f(c) = f(d) = 1\end{cases}$.

Nếu $a < b < c < d$, ta đặt $\alpha = \frac{1}{2}(a+b)$,

$k = \frac{1}{2} f(x)$.

Ta có $k > 0$ và k có ít nhất 3 điểm nguồn thuộc $]a;\alpha[$, $]\alpha; b[$, $]b; c[$.

Lập luận tương tự trong các trường hợp khác.

4.3.18 *1)* Giả sử g: $\begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \in \mathbf{Q} \\ x-1 & \text{nếu } x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}\end{array}$ hãy chứng minh $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$

(chú ý : $x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x+1 \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x-1 \in \mathbf{Q}$, suy ra f là song ánh).

2) Cho $x_0 \in \mathbf{R}$. Sử dụng tính trù mật của $\mathbf{Q}$ và $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$ để chứng minh $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbf{Q}}}{\not\longrightarrow} f(x_0)$ hoặc $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}}}{\not\longrightarrow} f(x_0)$.

4.3.19 $\forall (x, y) \in]-1;1[\times \mathbf{R}$, $(y = f(x) \Leftrightarrow yx^2 + x - y = 0)$.

Từ $x \in]-1; 1[$ suy ra rằng nếu $y \neq 0$ thì $x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$.

◊ **Trả lời:** $y \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$.

4.3.20 *a)* f tăng nghiêm ngặt, liên tục, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

b) Cho $x \in \mathbf{R}$.

• Nếu $f(x) = f^{-1}(x)$ thì $f \circ f(x) = x$; nếu $x < f(x)$ thì $f(x) < f \circ f(x) = x$, mâu thuẫn. Cũng tương tự nếu $x > f(x)$. Vậy $f(x) = x$.

• Đảo lại : $f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(x) \\ f(x) = x \end{cases} \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$.

• $f(x) = x \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

◊ **Trả lời:** $\{ 1 \}$.

4.3.21 *a) 1)* $\big||f|(x') - |f|(x'')\big| \leq |f(x') - f(x'')|$

2) $|(\lambda f + g)(x') - (\lambda f + g)(x'')| \leq |\lambda||f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|$

3) $\left|\dfrac{1}{g}(x') - \dfrac{1}{g}(x'')\right| = \dfrac{|g(x'') - g(x')|}{|g(x')||g(x'')|} \leq \dfrac{1}{C^2}|g(x') - g(x'')|$

4) Xem 4.1.2. và *1)*, *2)* ở trên.

b) Cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại $\eta > 0$ sao cho $\forall (y', y'') \in Y^2, (|y' - y''| < \eta \Rightarrow |g(y') - g(y'')| \leq \varepsilon)$

Sau đó tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $\forall\ (x', x'') \in X^2, (|x' - x''| < \alpha \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \eta)$.

Kết quả là ta có : $\forall (x', x'') \in X^2, (|x' - x''| \leq \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x') - (g \circ f)(x'')| \leq \varepsilon)$.

4.3.22 *1)* Giả sử f phù hợp.

• Cho $(x', x'') \in \mathbf{R}^2$ sao cho $x' \leq x''$. Cho $\varepsilon > 0$ và $\eta > 0$ tương ứng trong giả thiết. Ta có $x' - x'' \leq 0 \leq \eta$, vậy $f(x') - f(x'') \leq \varepsilon$, điều này chứng tỏ rằng: $(\forall \varepsilon > 0, f(x') - f(x'') \leq \varepsilon)$. Vậy, $f(x') \leq f(x'')$. Ta đã chứng minh rằng f tăng.

• Cho $\varepsilon > 0$ và $\eta > 0$ tương ứng trong giả thiết. Ta có với mọi $(x', x'') \in \mathbf{R}^2$:

$$|x' - x''| \leq \eta \Rightarrow \begin{cases} x' - x'' \leq \eta \\ x'' - x' \leq \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x') - f(x'') \leq \varepsilon \\ f(x'') - f(x') \leq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ f liên tục đều.

2) Chứng minh mệnh đề đảo .

◊ **Trả lời:** Tập hợp các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tăng và liên tục đều.

4.3.23 Ánh xạ $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ liên tục đều trên $[-1; 1]$ (vì liên tục trên một đoạn, định lý Heine) và Lipsit trên $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

◊ **Trả lời:** $f : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$.

4.3.24 *a) 1)* $\big||f|(x_1) - |f|(x_2)\big| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.

2) $\left|(f+g)(x_1)-(f+g)(x_2)\right| = \left|(f(x_1)-f(x_2))+(g(x_1)-g(x_2))\right| \le \left|f(x_1)-f(x_2)\right|$
$+\left|g(x_1)-g(x_2)\right| \le k\left|x_1-x_2\right| + k'\left|x_1-x_2\right| = (k+k')\left|x_1-x_2\right|$.

3) $\left|(\lambda f)(x_1)-(\lambda f)(x_2)\right| = |\lambda|\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le |\lambda| k \left|x_1-x_2\right|$.

4) $\left|\frac{1}{g}(x_1)-\frac{1}{g}(x_2)\right| = \frac{\left|g(x_1)-g(x_2)\right|}{\left|g(x_1)\right|\left|g(x_2)\right|} \le \frac{k}{C^2}\left|x_1-x_2\right|$.

5) $f(x_1) \le k\left|x_1-x_2\right| + f(x_2) \le k\left|x_1-x_2\right| + \left(\mathrm{Sup}(f,g)\right)(x_2)$ và
$g(x_1) \le k\left|x_1-x_2\right| + \left(\mathrm{Sup}(f,g)\right)(x_2)$.

Từ đó: $(\mathrm{Sup}(f,g))(x_1) \le k\left|x_1-x_2\right| + \mathrm{Sup}(f,g)(x_2)$.

Vậy: $(\mathrm{Sup}(f,g))(x_1) - (\mathrm{Sup}(f,g))(x_2) \le k\left|x_1-x_2\right|$.

Sử dụng vai trò đối xứng của x_1 và x_2 để kết luận.

Chú ý rằng khi sử dụng công thức $\mathrm{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g)+\left|f-g\right|$ dường như chỉ cho một kết luận yếu hơn : $\mathrm{Sup}(f,g)$ có tính $2k$–Lipschitz.

b) $\left|(g\circ f)(x_1)-(g\circ f)(x_2)\right| \le k'\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le k'k\left|x_1-x_2\right|$.

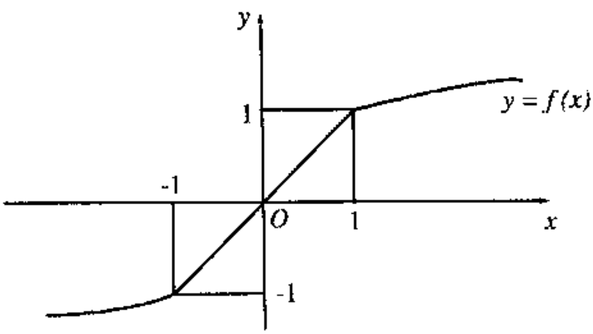
4.3.25 Ký hiệu $K = \mathrm{Max}(k, k')$. Cho $(x_1, x_2) \in [a; c]^2$

- Nếu $(x_1, x_2) \in [a; b]^2$, thì $\left|h(x_1)-h(x_2)\right| = \left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le k\left|x_1-x_2\right| \le K\left|x_1-x_2\right|$.
- Tương tự với trường hợp $(x_1, x_2) \in [b; c]^2$
- Nếu chẳng hạn, $(x_1, x_2) \in [a; b] \times [b; c]$, ta có :

$$\begin{aligned}\left|h(x_1)-h(x_2)\right| &\le \left|h(x_1)-h(b)\right| + \left|h(b)-h(x_2)\right| = \left|f(x_1)-f(b)\right| + \left|g(b)-g(x_2)\right| \\ &\le k\left|x_1-b\right| + k'\left|b-x_2\right| \\ &\le K\left(\left|x_1-b\right|+\left|b-x_2\right|\right) = K(b-x_1+x_2-b) = K(x_2-x_1) = K\left|x_2-x_1\right|.\end{aligned}$$

4.3.26 **Trả lời:** $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{nếu } x \ge 1 \\ x & \text{nếu } |x| \le 1 \\ -\sqrt{-x} & \text{nếu } x \le -1 \end{cases}$$



Chỉ dẫn và trả lời

các bài tập chương 5

5.1.1 $\dfrac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = h\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} - \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -f'(a)$

◊ **Trả lời**: $-f'(a)$

5.1.2 Vì $\mathbf{Q}$ và $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ đều trù mật trong $\mathbf{R}$, và vì $(\forall x \in \mathbf{R}, (x+1=3-x \Leftrightarrow x=1))$ nên trước hết ta thấy f không liên tục tại 1.

• $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x\in \mathbf{Q}}]{} 1$ và $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x\in \mathbf{R}-\mathbf{Q}}]{} -1$. Vậy f không khả vi tại $x=1$

5.1.3 Ánh xạ $h : I \longrightarrow \mathbf{R}$, xác định bởi $\forall x \in I$, $h(x) = f(x)\,g(a) - f(a)\,g(x)$ khả vi tại a và $h(a) = 0$.

◊ **Trả lời** : $f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)$.

5.1.4 *a)* áp dụng công thức Leibniz và chú ý là nếu $k \geq 4$ thì $\dfrac{d^4}{dx^4}(x^3+x^2+1) = 0$

◊ **Trả lời** : $(-1)^n\,(x^3 - (3n-1)\,x^2 + (3n^2-5n)\,x - (n^3-4n^2+3n-1)\,e^{-x}$.

b) Phân tích thành các phần tử đơn giản : $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{5/2}{(x-1)^2} + \dfrac{-1/4}{x-1} + \dfrac{1/4}{x+1}$

◊ **Trả lời** : $\dfrac{\frac{5}{2}(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} - \dfrac{\frac{1}{4}(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{\frac{1}{4}(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

5.1.5 Theo các định lý về đạo hàm của một tích và về đạo hàm của hàm số hợp, f_n khả vi vô hạn lần trên $]-1;+\infty[$.

Quy nạp theo n. Trường hợp $n=1$ là hiển nhiên.

Nếu công thức đúng với số nguyên n, thì theo công thức Leibniz :

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x\,f_n(x)) = x\,f_n^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^1 f_n^{(n)}(x)$$

$$= (n-1)!\,x\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} + (n+1)(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-k}{(1+x)^k} + \frac{k}{(1+k)^{k+1}} + \frac{n+1}{(1+x)^k}\right)$$

bằng cách phân tích $x = (x+1) - 1$.

Từ đó : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{(1+x)^k} + \sum_{l=2}^{n+1}\frac{l-1}{(1+x)^l}\right)$

$$= (n-1)!\left(\frac{n}{1+x} + \sum_{k=2}^{n}\frac{n}{(1+x)^k} + \frac{n}{(1+x)^{n+1}}\right) = n!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(1+x)^k}$$

Chú ý: nếu $x \neq 0$ ta có thể biến đổi tiếp kết quả :

$$(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k} = \frac{(n+1)!}{1=x}\frac{1-\frac{1}{(1+x)^n}}{1-\frac{1}{1+x}} = \frac{(n-1)!((1+x)^n-1)}{x(1+x)^n}$$

5.1.6 Vì Arctan khả vi trên $\mathbb{R}$, và ($\forall x \in \mathbb{R}$, (Arctan)' $x = \frac{1}{1+x^2}$) và $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$, nên ta kết luận : Arctan khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$.

- Quy nạp theo n.

1) Với $n = 1$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\,\text{Arctan}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\sin\left(\text{Arctan}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} = (\text{Arctan})'x$$

2) Giả sử công thức đúng với một số nguyên n. Khi đó ta có:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\text{Arctan}\,x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}(\text{Arctan}\,x)\right)$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\left(-\frac{n}{2}(1+x^2)^{-\frac{n}{2}-1}2x\sin\left(n\text{Arctg}\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left.+(1+x^2)^{-\frac{n}{2}}n\cos\left(n\text{Arctan}\frac{1}{x}\right)\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= (-1)^n n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\left(n\,\text{Arctan}\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cos\left(n\,\text{Arctan}\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= (-1)^n n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\left((n+1)\text{Arctan}\frac{1}{x}\right)$$

vì $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\text{Arctan}\frac{1}{x})$ và $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sin(\text{Arctan}\frac{1}{x})$

5.1.7 *a)* Ta chứng minh bằng quy nạp theo n ($n \in \mathbb{N}$) tính chất P_n sau đây :

$$\mathcal{P}_n \begin{cases} \bullet\ f \text{ khả vi } n \text{ lầntrên }]-1;1[\\ \bullet\ \text{tồn tại } P_n \in \mathbf{R}[X] \text{ sao cho } \forall x \in]-1;1[, f^{(n)}(x) = (1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}} P_n(x) \end{cases}$$

$\mathcal{P}_0$ là hiển nhiên ($P_0 = 1$)

Giả sử $\mathcal{P}_n$ đúng với một $n \in \mathbf{N}$ cố định. Thế thì f khả vi $(n+1)$ lần trên $]-1;1[$ và:

$\forall x \in]-1;1[$,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}} P'_n(x) - (n+\frac{1}{2})(1-x^2)^{-n-\frac{3}{2}}(-2x)P_n(x)$$

$$= (1-x^2)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}[(1-x^2)P'_n(x) + 2(n+1)x.P_n(x)]$$

Ký hiệu: $P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + (2n+1)\,X\,P_n$, là một đa thức thuộc $\mathbf{R}[X]$, ta có :

$\forall x \in]-1;1[$, $f^{(n+1)}(x) = (1-x^2)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} P_{n+1}(x)$, điều thiết lập $\mathcal{P}_{n+1}$

b) *α)* $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{1-x^2} f(x)$

β) Đạo hàm n lần kết quả ở *b), α)*, áp dụng công thức Leibniz:

$\forall x \in]-1;1[$,

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) + n(-2x)f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}(-2)f^{(n-1)}(x) - xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = 0 \ ,$$

sau đó thay $f^{(n-1)}, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ bằng các hàm của P_{n-1}, P_n, P_{n+1} theo *a)*

γ) $P_{n+1} - (2n+1)\,X\,P_n = n^2(1-X^2)\,P_{n-1} = (1-X^2)\,P'_n$ theo *b) β)* và *α)* .

δ) Theo *b) β)* với $n-1$ thay cho n: $P_n - (2n-1)\,X\,P_{n-1} - (n-1)^2\,(1-X^2)\,P_{n-2} = 0$.

Theo *b) γ)*: $P_{n-1} = \dfrac{1}{n^2}P'_n$ và $(n-1)^2\,P_{n-2} = P'_{n-1} = \dfrac{1}{n^2}P''_n$

c) Thay X bởi 0 trong kết quả của *b) β)*, ta có : $P_{n+1}(0) = -n^2 P_{n-1}(0)$. Vì $P_0 = 1$ và $P_1 = X$, ta có : $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$, và suy ra giá trị $P_n(0)$ bằng cách phân biệt hai trường hợp tuỳ theo tính chẵn, lẻ của n.

◊ **Trả lời:** $\forall p \in \mathbf{N} \begin{cases} P_{2p}(0) = (-1)^p 2^{2p}(p!)^2 \\ P_{2p+1}(0) = 0 \end{cases}$

5.1.8. a) Phần thuận đã rõ ràng.

Đảo lại, giả sử thu hẹp của f trên mọi đoạn $[a;b]$ của I đều khả vi trên $[a;b]$.

Cho $x_0 \in I$; nếu x_0 không phải là một mút có thể có của I thì tồn tại $(a;b) \in I^2$ sao cho $a < x_0 < b$ vì $f\,\big|_{[a;b]}$ khả vi trên $[a;b]$ nên f khả tại x_0. Cũng với phương pháp như vậy, xét trường hợp x_0 rồi vào mút của I.

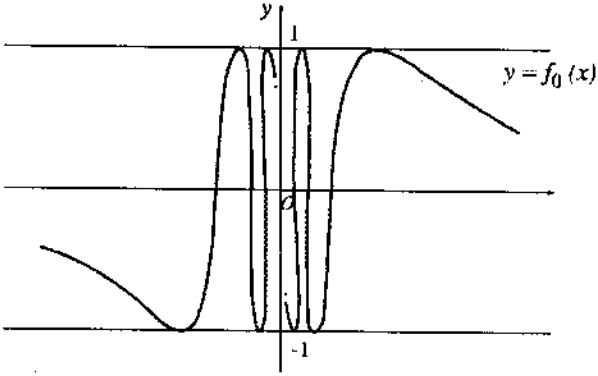
b) Cũng làm tương tự như a).

5.1.9. Vì f thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}$, nên ta có : $\forall n \in \mathbf{N}$, $P^{(n)}(0) = Q^{(n)}(0)\ (= f^{(n)}(0))$

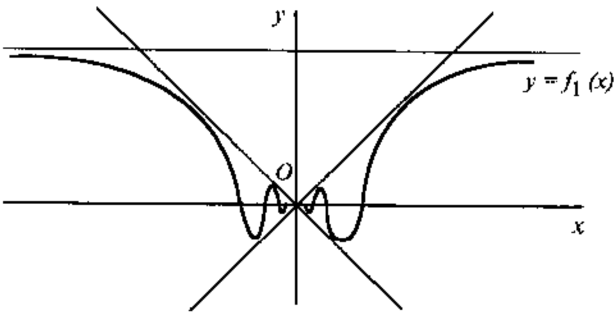
Ký hiệu $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k$, $Q = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k X^k$ (trong đó , $N \in \mathbf{N}$, $a_0, ..., a_N, b_0, ..., b_N \in \mathbf{R}$).

Ta có : $\forall k \in \{0,...,N\}$, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{Q^{(k)}(0)}{k!} = b_k$, vậy $P = Q$.

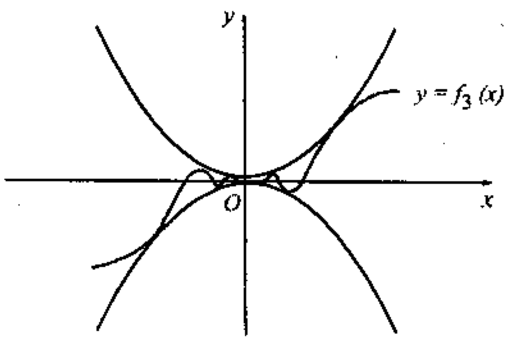
5.1.10



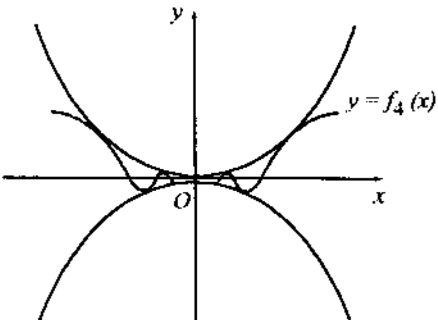
f_0 thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}^*$, và gián đoạn tại 0 vì f_0 không có giới hạn tại 0.



f_1 liên tục trên $\mathbf{R}$ (vì $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$), thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}^*$, nhưng không khả vi tại 0 vì $\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x} (= f_0(x))$ không có giới hạn khi x tiến tới 0



f_2 liên tục trên $\mathbf{R}$, khả vi trên $\mathbf{R}$ (vì $\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x} = f_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$), thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}^*$. Nhưng f_2' không liên tục tại 0, vì với mọi $x \in \mathbf{R}^*$, $f_2'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ không có giới hạn tại 0.



f_3 thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}^*$. Vì

$$f_3'(x) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{và}$$

vì $\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x} = f_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, f_3 thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}$.

5.1.11. Đặt $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là ánh xạ thuộc lớp C^2 trên $\mathbf{R}$ (khảo sát việc

$$t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ nếu } t \geq 0 \\ t^3 \text{ nếu } t < 0 \end{cases}$$

"ghép nối" tại 0).

Vì $h = f + \varphi \circ g$, h cũng thuộc lớp C^2.

5.1.12. 1) Giả sử $\bigcap_{k=1}^{p} Z(f_k) = \varnothing$. Đặt $f = \sum_{k=1}^{p} f_k{}^2$ thì $f \in C^n(I, \mathbf{R})$ và $f > 0$.

Lấy $u_k = \dfrac{f_k}{f}$

2) Đảo lại, giả sử tồn tại $u_1,\dots,u_p \in C^n(I, \mathbf{R})$ sao cho $\sum_{k=1}^{p} u_k f_k = 1$

Nếu tồn tại $x \in \bigcap_{k=1}^{p} Z(f_k)$, ta có ($\forall k \in \{1,\dots,p\}, f_k(x) = 0$) và $\sum_{k=1}^{p} u_k(x) = 0$, Mâu thuẫn.

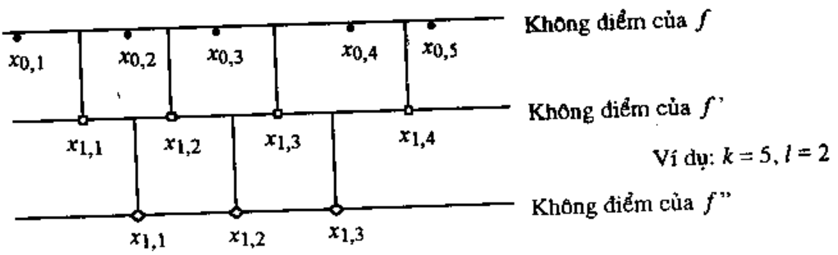
Vậy $\bigcap_{k=1}^{p} Z(f_k) = \varnothing$.

5.2.1. Sử dụng và điều chỉnh cho thích hợp phép chứng minh của định lý Rolle (5.2.1).

5.2.2. Theo giả thiết tồn tại $x_{0.1}, \dots x_{0.k} \in I$ sao cho $\begin{cases} x_{0.1} < x_{0.2} < \dots < x_{0.k} \\ \forall i \in \{1,\dots,k\}, f(x_{0.i}) = 0 \end{cases}$

Áp dụng định lý Rolle đối với f trên các đoạn $[x_{0.1}; x_{0.2}]..[x_{0.k-1}; x_{0.k}]$ ta được

$x_{1.1}..x_{1.k-1} \subset I$ sao cho $\begin{cases} x_{1.1} < x_{1.2} < \dots < x_{1.k-1} \\ \forall i \in \{1,\dots,k-1\}, f'(x_{1.i}) = 0 \end{cases}$. Lặp lại .

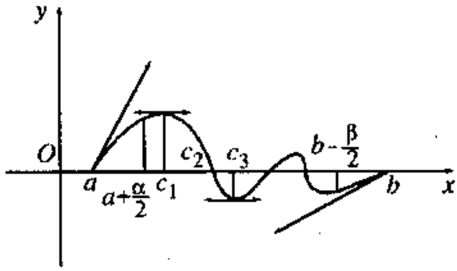


5.2.3. Áp dụng định lý Rolle đối với $\varphi : [a; b] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x).$$

trên $[a; b]$.

5.2.4



$\forall\, x \in\,]a;\, b]\,,\ \dfrac{f(x)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^+]{} f'(a) > 0,$

tồn tại $\alpha \in\,]0;\, b-a[$ sao cho :

$\forall\, x \in\,]a;\, a+\alpha[,\ f(x) > 0\,.$

Đặc biệt $f(a + \dfrac{\alpha}{2}) > 0\,.$

Tương tự, tồn tại $\beta \in\,]0;\, b-a[$ sao cho $f(b - \dfrac{\beta}{2}) < 0\,.$

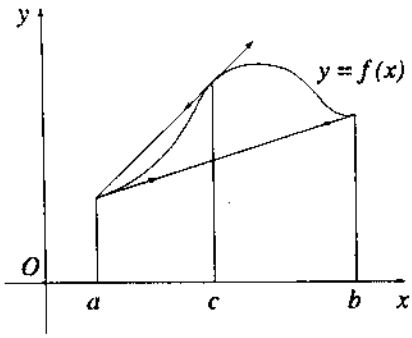
Vì f liên tục trên khoảng $\left[a+\dfrac{\alpha}{a}; b-\dfrac{\beta}{2}\right]$, nên định lý các giá trị trung gian đảm bảo sự tồn tại một phần tử $c_2 \in\,]a;\, b[$ sao cho $f(c_2) = 0\,.$

Áp dụng tiếp theo định lý Rolle đối với f trên $[a;\, c_2]$ và $[c_2;\, b]\,.$

5.2.5 Xét $g:\ [a;\, b] \to \mathbf{R}$ và ký hiệu $m = g(b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{nếu } x \neq a \\ f'(a) & \text{nếu } x = a \end{cases}$$

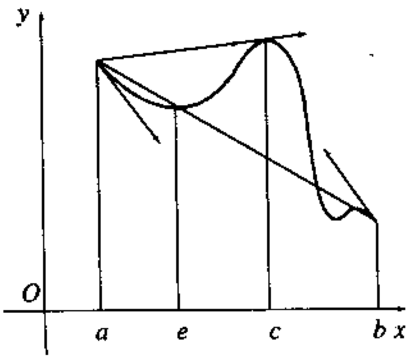
Trường hợp thứ nhất: $f'(a) = f'(b) = m$



Định lý Rolle áp dụng cho g trên $[a;\, b]$ chứng tỏ rằng tồn tại $c \in\,]a;\, b[$ sao cho $g(c) = 0$, nghĩa là sao cho :

$$f(c) - f(a) = f'(c)\,(c-a)$$

Trường hợp thứ hai : $f'(a) = f'(b) < m$ (trường hợp $f'(a) = f'(b) > m$ cũng tương tự, bằng cách thay f bởi $-f$).



Giả sử: $\forall x \in\,]a;\, b[,\ g(x) \le m$. Chuyển qua giới hạn khi x tiến tới a về bên phải, ta suy ra $f'(a) \le m$. Mặt khác:

$\forall x \in\,]a;\, b[\,,\ f(x) - f(b)$

$\le m\,(x-a) + f(a) - f(b) = m\,(x-b)$

Vậy: $\forall x \in\,]a;\, b[\,,\ \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \ge m\,.$

Chuyển qua giới hạn khi x tiến tới b ở phía trái, ta suy ra $f'(b) \ge m\,.$

Từ đó $f'(a) = f'(b) = m$, Mâu thuẫn.

Điều đó chứng minh rằng tồn tại $d \in]a; b[$ sao cho $g(d) > m$.

Vì g liên tục trên khoảng $[a; d]$ và $g(a) < m < g(d)$, nên tồn tại $e \in]a; d[$ sao cho $g(e) = m$. Cuối cùng áp dụng định lý Rolle cho g trên $[e; b]$.

5.2.6. • Nếu $g(a) = g(b)$ thì tồn tại $d \in]a; b[$ sao cho $g'(d) = 0$, mâu thuẫn.

Vậy: $g(b) - g(a) \neq 0$

• Ta có thể áp dụng định lý Rolle cho: $\varphi : [a; b] \to \mathbf{R}$
$$x \mapsto (f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$$

Xem thêm bài tập 5.2.3.

5.2.7 Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $\dfrac{f'(ct)}{g'(ct)} \xrightarrow[t \to x_0]{} l$, tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:

$$\forall\, t \in I - \{x_0\},\quad \left(|t - x_0| \le \alpha \Rightarrow \left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - l\right| \le \varepsilon\right).$$

Cho $x \in I - \{x_0\}$ sao cho $|x - x_0| \le \alpha$. Theo bài tập 5.2.6 tồn tại $C_x \in I - \{x_0\}$ sao cho :

$$\begin{cases} |c_x - x_0| < |x - x_0| \\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \end{cases}.$$

Ta có : $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right| = \left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right| \le \varepsilon$

Điều đó chứng tỏ rằng : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I - \{x_0\}\ \left(|x - x_0| \le \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right| \le \varepsilon\right)$

nghĩa là: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} l$

Áp dụng :

• $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$

• Với $\begin{cases} f : x \mapsto 1 - \cos x \\ g : x \mapsto x^2 \end{cases}$, vì $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin x}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{2}$ ta suy ra $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{2}$

Ta cũng có thể chú ý rằng $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$

• Với $\begin{cases} f : x \mapsto x - \sin x \\ g : x \mapsto x^3 \end{cases}$, vì $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} \to \dfrac{1}{6}$ ta suy ra $\dfrac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{6}$

Thực ra, sử dụng các khai triển hữu hạn (xem tập 2,8,3) thì tổng quát hơn và hiệu quả hơn.

5.2.8 Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $f' \xrightarrow[t\to+\infty]{} l$, tồn tại $A \in]0;+\infty[$ sao cho :

$$\forall t \in]0;+\infty[,\ (t \geq A \Rightarrow |f'(t) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2})$$

Cho $x \in]A;+\infty[$; áp dụng định lý số gia hữu hạn vào f trên $[A; x]$, ta suy ra sự tồn tại của $C_x \in]A; x[$ sao cho $\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(C_x)$.

Ta tìm cách gắn việc khảo sát $\dfrac{f(x)}{x}$ với việc khảo sát $\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}$ với bất kỳ $x \in]A;+\infty[$,

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}\left(1-\dfrac{A}{x}\right) + \dfrac{f(A)}{x}$, vì vậy, ta suy ra :

$$\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - l\right| + \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\frac{A}{x}\right| + \frac{|f(A)|}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x}\left(\left(|l| + \frac{\varepsilon}{2}\right)A + |f(A)|\right).$$

Vì $\dfrac{1}{x}\left((|l| + \dfrac{\varepsilon}{2})A + |f(A)|\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, nên tồn tại $B \in]A;+\infty[$ sao cho :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \left(x \geq B \Rightarrow \frac{1}{x}\left((|l| + \frac{\varepsilon}{2})A + |f(A)|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Từ đó $\forall x \in]0;+\infty[$, $\left(x \geq B \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| \leq \varepsilon\right)$. Vậy : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} l$

5.2.9. Cho A là một số thực xác định bởi:

$$f(h) - f(-h) = \frac{h}{3}\left(f'(-h) + 4f'(0) + f'(h)\right) - \frac{1}{90}h^5 A.$$

và $\varphi : [-h; h] \to \mathbf{R}$ là ánh xạ xác định bởi :

$$\forall x \in [-h; h],\ \varphi(x) = f(x) - f(-x) - \frac{x}{3}\left(f'(-x) + 4f;(0) + f'(x)\right) + \frac{A}{90}x^5.$$

- φ thuộc lớp C^4 trên $[-h; h]$ và $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại $C_1 \in]0; h[$ sao cho $\varphi'(C_1) = 0$ và :

$$\forall x \in [-h; h],\ \varphi(x) = \frac{2}{3}\left(f'(x) - 2f'(o) + f'(-x)\right) - \frac{x}{3}\left(f''(x) - f''(-x)\right) + \frac{A}{18}x^4.$$

- φ' thuộc lớp C^3 trên $[-h; h]$, và $\varphi'(0) = \varphi'(C_1) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại $C_2 \in]0; C_1[$ sao cho $\varphi''(C_2) = 0$ và :

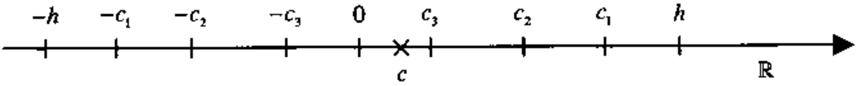
$$\forall x \in [-h; h]\ \varphi''(x) = \frac{1}{3}\left(f''(x) - f''(-x)\right) - \frac{x}{3}\left(f^{(3)}(x) + f^{(3)}(-x)\right) + \frac{2A}{9}x^3.$$

- φ'' thuộc lớp C^2 trên $[-h; h]$, và $\varphi''(o) = \varphi''(C_2) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $C_3 \in]0; C_2[$ sao cho $\varphi^{(3)}(C_3) = 0$ và :

$$\forall x \in [-h; h],\ \varphi^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}\left(f^{(4)}(x) - f^{(4)}(-x)\right) + \frac{2A}{3}x^2.$$

Như vậy : $A = \dfrac{f^{(4)}(C_3) - f^{(4)}(-C_3)}{2C_3}$

- Định lý số gia hữu hạn, áp dụng cho $f^{(4)}$ trên $[-C_2; C_3]$ chứng tỏ rằng tồn tại $C \in]-C_3; C_3[$ sao cho $A = f^{(5)}(c)$.



5.2.10. Ký hiệu $a_1, ..., a_n$ là các điểm (tùy trường hợp) của $]a; b[$ trên đó f không khả vi, được sắp theo thứ tự: $a < a_1 < a_2 < ... < a_n < b$.

Theo định lý số gia hữu hạn, áp dụng lên các khoảng liên tiếp $[a; a_1], [a_1; a_2], ..., [a_n; b]$, tồn tại :

$$\begin{cases} c_1 \in \,]a; a_1[\text{ sao cho } f(a_1) - f(a) = f'(c_1)(a_1 - a) \\ c_2 \in \,]a_1; a_2[\text{ sao cho } f(a_2) - f(a_1) = f'(c_2)(a_2 - a_1) \\ \quad \vdots \\ c_{n+1} \in \,]a_n; b[\text{ sao cho } f(b) - f(a_n) = f'(c_{n+1})(b - a_n) \end{cases}$$

Ký hiệu: $\alpha_1 = \dfrac{a_1 - a}{b - a}$, $\alpha_2 = \dfrac{a_2 - a_1}{b - a}$ .... $\alpha_{n+1} = \dfrac{b - a_n}{b - a}$

Ta có : $\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., n+1\} \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \end{cases}$ và :

$$f(b) - f(a) = (f(b) - f(a_n)) + ... + (f(a_1) - f(a)) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f'(c_i) \right)(b - a)$$

5.2.11. Cho $(a, b) \in I^2$ sao cho, chẳng hạn, $a < b$ và $f'(a) < f'(b)$, và $k \in \,]f'(a); f'(b)[$

Ký hiệu $\tau = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, U (tương ứng, V) là khoảng đóng có mút là : τ và $f'(a)$ (tương ứng : τ và $f'(b)$).

Vì $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a; b]$ và $\varphi(a) = f'(a)$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{nếu } x \neq a \\ f(a) & \text{nếu } x = a \end{cases}$$

$\varphi(b) = \tau$, nên định lý các giá trị trung gian chứng tỏ rằng $U \subset \varphi([a; b])$

Cũng vậy, $V \subset \Psi([a; b])$ với $\Psi : [a; b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{nếu } x \neq b \\ f(b) & \text{nếu } x = b \end{cases}$$

Chú ý rằng $]f'(a); f'(b)[\subset U \cup V$ (phân biệt 3 trường hợp tùy theo vị trí của τ đối với $f'(a)$ và $f'(b)$), ta thấy rằng, chẳng hạn, tồn tại $c \in \,]a; b[$ sao cho $k = \varphi(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$

Cuối cùng, định lý số gia hữu hạn áp dụng vào f trên $[a; c]$ cho thấy sự tồn tại của $d \in]a; c[\subset]a; b[\subset I$ sao cho $k = f'(d)$.

5.2.12. Theo định lý Darboux (bài tập 5.2.11), tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ sao cho :
$]\alpha; \beta[\subset f'(]a; b[) \subset]\alpha; \beta[$.
Giả sử $\alpha \neq -\infty$.
Ta có ngay: $\forall x \in]a; b[$, $f'(x) \geq \alpha$
Cho $c \in]a; b[$ và $x \in]a; c[$. Theo định lý số gia hữu hạn, tồn tại $u \in]a; b[$ sao cho:
$f(x) - f(c) = (x - c).f'(u)$, từ đó: $f(x) \leq f(c) - (c - x)\alpha$
Nhưng điều này mâu thuẫn với $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$
Như vậy ta đã chứng minh, $\alpha = -\infty$, cùng cách lập luận ta có $\beta = +\infty$.
Cuối cùng $f'(]a; b[) = \mathbf{R}$.

5.2.13. Áp dụng định lý số gia hữu hạn cho f trên $[a; b]$, $[b; c]$, $[c; d]$, ta thấy tồn tại

$(\alpha, \beta, \gamma) \in]a; b[\times]b; c[\times]c; d[$ sao cho $\begin{cases} f(b) - f(a) = (b-a)f'(\alpha) \\ f(c) - f(b) = (c-b)f'(\beta) \\ f(d) - f(c) = (d-c)f'(\gamma) \end{cases}$

Vậy $f(c) - f(a) = (c - a)\,k$ với $k = \dfrac{c-b}{c-a}f'(\beta) + \dfrac{b-a}{c-a}f'(\alpha)$

vì $\dfrac{c-b}{c-a} \in [0; 1]$ và $\dfrac{b-a}{c-a} = 1 - \dfrac{c-b}{c-a}$, k thuộc đoạn đóng, ký hiệu là U, với các mút là $f'(\alpha)$ và $f'(\beta)$. Theo định lý Darboux (bài tập 5.2.11) $U \subset f'([a; b])$.
Vậy tồn tại $u \in]\alpha; \beta]$ sao cho $k = f'(u)$ nghĩa là : $f(c) - f(a) = (c - a)f'(u)$. Lập luận tương tự chỉ ra rằng tồn tại $v \in [\beta; \delta]$ sao cho $f(d) - f(b) = (d - b)f'(v)$.

Như vậy ta có $u \leq v$.

Nếu $u = v$ thì ta chứng minh được $u = v = \beta$ và :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \frac{f(d)-f(b)}{d-b} = f'(\beta) = f'(\alpha) = f'(\gamma)$$

Vậy ta có thể thay $(u; v)$ bởi (α, Υ) thỏa mãn $\alpha < \Upsilon$

5.3.1 Cho $x \in \mathbf{R}$ cố định. Vì $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq g(|x-y|) \xrightarrow[y \to x]{} 0$, nên f khả vi tại 0 và $f'(x) = 0$.

5.3.2 Vì $f'' \geq 0$ nên f' tăng. Giả sử tồn tại $c \in \mathbf{R}_+$ sao cho $f'(c) > 0$.
Với mọi $x \in]c; +\infty[$, theo định lý số gia hữu hạn, tồn tại $u \in]c; x[$ sao cho $f(x) - f(c) = (x-c)f'(u)$.
Khi đó: $\forall x \in]c; +\infty[$, $f(x) \geq f(c) + (x - c)f'(c) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

mâu thuẫn với giả thiết f bị chặn.
Vậy: $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) \leq 0$, và do đó f giảm.

5.3.3 Quy nạp theo n.

• Với $n = 1$, phương trình cần xét tương đương với $\lambda_0 + \lambda_1 x^{\alpha_1 - \alpha_0} = 0$ có nhiều nhất một nghiệm $\left(\left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}}\right.$ nếu $\left.-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$

• Giả sử tính chất đúng với số nguyên n thuộc $\mathbf{N}^*$, và cho $(\beta_0,...,\beta_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$ sao cho $\beta_0 < ... < \beta_{n+1}$ và $(\mu_0,...,\mu_{n+1})$ sao cho $\mu_{n+1} \neq 0$

Ký hiệu: $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k x^{\beta_k - \beta_0}$

ánh xạ f thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}_+^*$ và: $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k(\beta_k - \beta_0) x^{\beta_k - \beta_0 - 1}$

Ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp; phương trình $f'(x) = 0$ mà ẩn số là $x \in \mathbf{R}_+^*$ có nhiều nhất n nghiệm, ký hiệu $x_1,..., x_N$ ($N \le n$ và $x_1 <..< x_N$). Theo định lý Rolle, phương trình $f(x) = 0$, với ẩn số $x \in \mathbf{R}_+^*$, chỉ có thể có nhiều nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $]0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $]x_N; +\infty]$. Như thế f có nhều nhất $N + 1$ không điểm, do đó nhiều nhất là $n + 1$ không điểm.

5.3.4 Lấy hàm đối với x hoặc / và với đối với y, và suy ra các điều kiện cần thiết. Cuối cùng chứng minh mệnh đề đảo bằng cách kiểm chứng lại rằng các hàm thu được đều thoả mãn điều kiện ban đầu.

a) Nếu f phù hợp, thì (lấy đạo hàm đối với x) : $\forall(x;y) \in \mathbf{R}^2$, $f'(x+y) = f'(x)$ vậy f' không đổi.

So sánh với bài tập 4.3.3

◊ **Trả lời** : $\left\{\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \\ x \mapsto \lambda x \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbf{R}\right\}$

b) Giả sử f phù hợp. Bằng cách đạo hàm đối với x hoặc y :

$$\forall(x;y) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} f'(x+f(y)) = f'(y+f(x))f'(x) \\ f'(x+f(y))f'(y) = f'(y+f(x)) \end{cases}$$

suy ra: $\forall(x;y) \in \mathbf{R}^2, f'(x+f(y))(f'(x).f'(y) - 1) = 0$

• Nếu tồn tại y_0 sao cho $f'(y_0) = 0$, thì $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x + f(y_0)) = 0$

Do $\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \to x + f(y_0) \end{matrix}$ là một song ánh nên ta suy ra $f' = 0$, và f không đổi.

• Nếu không, ta có $\forall y \in \mathbf{R}$, $f'(y) \neq 0$, từ đó $\forall(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f'(x)f'(y) = 1$.

Đặc biệt là $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{1}{f'(0)}$, và f có dạng: $x \mapsto \lambda x + \mu$

◊ **Trả lời** : $\left\{\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R}; & c \in \mathbf{R} \\ x \mapsto c & \end{matrix}\right\} \bigcup \left\{\begin{matrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R}; & \mu \in \mathbf{R} \\ x \mapsto x + \mu & \end{matrix}\right\}$

c) Giả sử f phù hợp:

• Ta có : $\forall t \in \mathbf{R}^*, f''(t) = \frac{1}{t}\left(f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{2}{t} f\left(\frac{t}{2}\right)$, điều chứng tỏ f khả vi 4 lần trên $\mathbf{R}^*$ (và thuộc cả lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}^*$).

• Đạo hàm đối với x và y :

$$\forall (x;y) \in (\mathbf{R}^*)^2, \begin{cases} f''(x+y) + (x+y)f'''(x+y) = f'(x) \\ f''(x+y) + (x+y)f'''(x+y) = f'(y) \end{cases}.$$

Từ đó $\forall (x;y) \in (\mathbf{R}^*)^2, f'(x) = f'(y)$. Vậy f' không đổi trên $\mathbf{R}^*$.

• Vì f khả vi hai lần trên $\mathbf{R}$ nên f' liên tục tại 0, và do đó f' không đổi trên $\mathbf{R}$ vậy f có dạng $x \mapsto \lambda x + \mu$

◊ **Trả lời :** $\{0\}$

d) Trước hết chú ý: $\forall (x;y) \in]-1;1[^2, \frac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$

• Đạo hàm đối với x và y, rồi kết hợp để suy ra:

$$\forall (x;y) \in]-1;1[^2, \ (1-x^2) f'(x) = (1-y^2) f'(y).$$

Đặc biệt: $\forall x \in]-1;1[, \ f'(x) = \frac{f'(0)}{1-x^2}$

Vậy tồn tại $A \in \mathbf{R}$ sao cho $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \frac{f'(0)}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ và f có dạng: $x \mapsto a\ln\frac{1+x}{1-x} + A$

• Khảo sát mệnh đề đảo.

◊ **Trả lời :** $\left\{ \begin{array}{c}]-1;1[\to \mathbf{R}; \quad a \in \mathbf{R} \\ x \mapsto a\ln\frac{1+x}{1-x} \end{array} \right\}$

e) Tương tự như ở d) ta suy ra sự tồn tại của $(a, A) \in \mathbf{R}^2$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = a \operatorname{Arctan} x + A.$$

Sử dụng giả thiết với $x = y = 0$ ta có $A = 0$.

Sử dụng giả thiết với $y = x \in]1;+\infty[$, ta có $\forall x \in]1;+\infty[$, $2f(x) = f\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

Cho x tiến tới $+\infty$, ta suy ra $a\pi = 0$

◊ **Trả lời :** $\{0\}$

5.3.5 Ta có thể :

• Khảo sát sự biến thiên của một hàm số, "bằng cách chuyển tất cả sang phía trái của bất đẳng thức mong muốn".

• Đôi khi áp dụng định lý số gia hữu hạn.

a) Khảo sát sự biến thiên của $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto x^{n+1} - (n+1)x + n$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Áp dụng định lý số gia hữu hạn vào $t \longmapsto \ln(1+t)$ trên $[0; x]$ (nếu $x > 0$) hay $[x; 0]$ (nếu $x < 0$), trường hợp $x = 0$ là tầm thường. Tồn tại c ở giữa 0 và x sao cho

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

Nếu $0 < x$ thì $\dfrac{x}{1+x} \le \dfrac{x}{1+c} \le x$.

Nếu $x > 0$ ta có cùng kết quả như trên.

c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{8} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4-x}{8} < \dfrac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)x(e^x-1) < 8(e^x - 1 - x) \\ 2(e^x - 1 - x) < x(e^x - 1) \end{cases}$

- Cho $f :]0\,;+\infty[\;\longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto 8(e^x - 1 - x) - (4 - x)\,x\,(e^x - 1)$$

f thuộc lớp C^{∞} trên $]0\,;+\infty[$, $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $\begin{cases} f'(x) = (x^2 - 2x + 4)e^x - 2x - 4 \\ f''(x) = (x^2 + 2)e^x - 2 \\ f'''(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x \end{cases}$

và $f''(0) = 0, f'(0) = 0, f(0) = 0$

Từ đó có bảng biến thiên của f

x	0		$+\infty$
$f'''(x)$		$+$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$ $+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$ $+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$ $+$	

Ta kết luận $f \geq 0$

Khảo sát tương tự đối với $g :]0\,;\ +\infty[\ \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto 2(e^x - 1 - x) - x(e^x - 1)$$

d) Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ và giả sử $x \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[\ :\ x\cos x = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\sin t = t\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\frac{\sin t}{t}$.

Chứng minh: $\forall t \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[,\quad 0 < \frac{\sin t}{t} < 1$ (xét sự biến thiên của $t \mapsto \sin t - t$

Mặt khác $\forall t \in\ ]\,0;\ \frac{\pi}{2}[,\quad t\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$

Cuối cùng, bất đẳng thức là hiển nhiên nếu $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$

e) Với sự thay đổi biến số $\theta = \text{Arcsin}\, x$ ta có :

$$\left(\forall x \in [0;1[, \tan x \leq \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \Leftrightarrow \left(\forall \theta \in [0;\tfrac{\pi}{2}[, \tan(\sin\theta) \leq \tan\theta\right)$$

Lưu ý rằng $\left(\forall \theta \in [0;\frac{\pi}{2}[, 0 \leq \sin\theta \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ và tan tăng trong khoảng $[0;\frac{\pi}{2}[$.

f) Bằng cách đặt $t = \frac{x}{2}$, ta quy về chứng minh rằng: $\forall t \in]0;\frac{\pi}{4}[$, $t \cot t - t\tan^3 t < t$.

Cho $f :]\,0;\ \frac{\pi}{4}[\ \to \mathbf{R}$, định nghĩa bởi $f(t) = t \cot t - t\tan^3 t - 1$

Ta có $\forall t \in\ ]\,0;\ \frac{\pi}{4}[,\quad f'(t) = (\cot t - \tan^3 t) - t\left(\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{3\sin^2 t}{\cos^4 t}\right) < 0$

Vậy f giảm nghiêm ngặt.

Mặt khác, với mọi $t \in\ ]\,0;\ \frac{\pi}{4}[\ :\ f(t) = \frac{t}{\tan t} - t\tan^3 t - 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ vì $\frac{\tan t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.

Ta kết luận : $f < 0$.

5.3.6 a) Thay x bởi $\frac{1}{k}$ vào kết quả bài tập 5.3.5 *b)* : $\frac{1}{1+k} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$,

từ đó : $k\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq 1$ và $1 \leq (k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

b) • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k^2 + k)}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k^2 + k)}{k+1} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k^2 + k)\ln\frac{k+1}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) + \ln k)(\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} ((\ln(k+1))^2 - (\ln k)^2) = (\ln(n+1))^2$$

• Lập luận tương tự đối với bất đẳng thức còn lại.

5.3.7 a) Khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto \ln\cos x + \frac{x^2}{2}$ để suy ra :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \ln\cos x \le -\frac{x^2}{2}$$

Để khảo sát sự biến thiên của f định nghĩa bởi $x \mapsto \ln\cos x + \frac{x^2}{2} + 3x^4$, ta chuyển về khảo sát sự biến thiên của $g: x \mapsto 6x - \tan x$ trên $[0; \frac{\pi}{4}]$ chẳng hạn.

Có thể có cách giải khác bằng cách khai triển hữu hạn: $x \longmapsto h\cos x$ đến bậc 6.

b) Theo a) : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \alpha_n \le -\ln u_n \le \beta_n$, trong đó

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\sqrt{k}}{n}, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}+\frac{3k^2}{n^4}\right)$$

Ta có: $\alpha_n = \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\infty]{} 4$ và $|\beta_n - \alpha_n| = \frac{3}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 \le \frac{3n^3}{n^4} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

◊ **Trả lời:** $\lim\limits_{n\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\sqrt{k}}{n} = e^{-\frac{1}{4}}$

5.3.8 a) Do các vai trò đối xứng của x và y, ta có thể quy về trường hợp $y > x$ (bất đẳng thức là hiển nhiên khi $x = y$). Đặt $t = \frac{y}{x} \in]1; +\infty[$, ta có:

$$(x^m + y^m)^n < (x^n + y^n)^m \Leftrightarrow n\ln(1+t^m) < m\ln(1+t^n) \Leftrightarrow f(t) < 0$$

trong đó $f:]1; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ định nghĩa bởi : $f(t) = n\ln(1+t^m) - m\ln(1+t^n)$

ánh xạ f khả vi và $\forall t \in]1; +\infty[, \quad f'(t) = \frac{mn(t^{m-1} - t^{n-1})}{(1+t^m)(1+t^n)} > 0$

Ta suy ra f tăng nghiêm ngặt trên $]1;+\infty[$

Cuối cùng : $f(t) = n\ln(1+\frac{1}{t^m}) - m\ln(1+\frac{1}{t^n}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Điều này chứng tỏ: $\forall t \in]1; +\infty[, \quad f(t) < 0$.

b) Áp dụng định lý số gia hữu hạn vào Arcsin trên $[x; y]$

c) Đặt $z = \text{Arcsin}\, y$ bất đẳng thức cần chứng minh được quy về:

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \ \forall z \in]0; \frac{\pi}{2}[, \ (\sin z)(x-z) \le \cos z - \cos x.$$

- Nếu $x < z$, theo định lý số gia hữu hạn, tồn tại $u \in]x; z[$ sao cho :

$\cos z - \cos x = (z - x)(-\sin u)$

Vì $0 < x < u < z < \frac{\pi}{2}$ nên ta có $\begin{cases}\sin u < \sin z \\ z - x > 0\end{cases}$, từ đó $\cos z - \cos x \ge (z - x)(-\sin z)$

- Lập luận tương tự nếu $x > z$.
- Trường hợp $x = z$ là tầm thường.

d) · Xét $f:]0\,;\,\frac{\pi}{4}[\to \mathbf{R}$; f khả vi trên $]0;\,\frac{\pi}{4}[$ và :

$$x \mapsto \frac{\tan x}{x}$$

$$\forall x \in\ ]0;\,\frac{\pi}{4}[\,,\quad f'(x) = \frac{x(1+\tan^2 x) - \tan x}{x^2} \geq \frac{g(x)}{x^2}$$

trong đó $g:]0;\,\frac{\pi}{4}[\to \mathbf{R}$ được định nghĩa bởi $g(x) = x\,(1+x^2) - \tan x$

ánh xạ g khả vi trên $]0;\,\frac{\pi}{4}[$ và $\forall\, x \in]0;\,\frac{\pi}{4}[\,,\ g'(x) = 3x^2 - \tan^2 x.$

Vì hàm số tan lồi trên $]0;\,\frac{\pi}{4}[$ ($\tan'' = 2\tan(1+\tan^2) \geq 0$, xem 5.4) nên ta có:

$$\forall x \in\ ]0;\,\frac{\pi}{4}[\,,\quad \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$$

Ta suy ra $x\sqrt{3} - \tan x > \frac{4}{\pi}x - \tan x \geq 0$, từ đó $g' > 0$, g tăng nghiêm ngặt

Từ đó $f(x) < f(y)$, nghĩa là $\frac{y}{x} < \frac{\tan y}{\tan x}$

Hơn nữa, vì ($\forall x \in\ ]0;\,\frac{\pi}{4}[\,,\ \tan x > x$) ; ta có $1 < f(x) < f(y) < \frac{4}{\pi}$, vậy $\frac{f(y)}{f(x)} < \frac{4}{\pi}$,

nghĩa là $\frac{\tan y}{\tan x} < \frac{4}{\pi}.\frac{y}{x}$

5.3.9. $x^4 + 36 \leq 13x^2 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3$

Ký hiệu: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto -x^3 + \frac{75}{4}x$$

do f lẻ nên ta chỉ cần khảo sát sự biến thiên của f trên $[2;\,3]$.

◊ **Trả lời :** $\frac{125}{4}$

5.3.10. Tồn tại $(\alpha,\beta) \in\ ]\,0;\,1]^2$ sao cho: $\begin{cases} \forall x \in]-1;-1+\alpha] & f(x) \geq f(0)+1 \\ \forall x \in [-\beta, 1[& f(x) \geq f(0)+1 \end{cases}$

Sau đó f liên tục trên đoạn $[-1+\alpha;1-\beta]$, f bị chặn và đạt được các biên trên và dưới. Nói riêng tồn tại $c \in [-1+\alpha;1-\beta]$ sao cho $f(c) = \inf\limits_{x \in [-1+\alpha;1-\beta]} f(x).$

Vì $0 \in [-1+\alpha;1-\beta]$ ta có $f(c) \leq f(0)$

Điều này chứng tỏ rằng : $\forall x \in]-1;1[$: $f(c) \leq f(x)$.

Vậy f có một cực tiểu địa phương tại c.

Vì f khả vi tại c và $c \in]-1;\,1[$ ta kết luận $f'(c) = 0$.

5.4.1 $\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow a(f(b)-f(c))-b(f(a)-f(c))+c(f(a)-f(b)) \geq 0$

$$\Leftrightarrow f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a)+\frac{b-a}{c-a}f(c).$$

và bất đẳng thức cuối được suy ra từ tính lồi của f $\left(\lambda = \frac{c-b}{c-a} \in [0;1], \frac{b-a}{c-a} = 1-\lambda\right)$

5.4.2 Cho $(a; b) \in I^2$, sao cho $a < b$, $\lambda \in [0;1], c = \lambda a + (1-\lambda)b$. Ta có:

$$\lambda(fg)(a)+(1-\lambda)(fg)(b)-(fg)(c) = \lambda f(a)g(a)+(1-\lambda)f(b)g(b)-f(c).g(c)$$
$$\geq \lambda f(a)g(a)+(1-\lambda)f(b)g(b)-(\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b))(\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b))$$
$$= \lambda(1-\lambda)(f(a)-f(b)(g(a)-g(b)) \geq 0$$

5.4.3 Cho $(x, y) \in [0; \frac{1}{2}]^2$ sao cho $x < y$; tồn tại $\lambda \in [0; 1]$ sao cho $y = \lambda x + (1-\lambda)(1-x)$

(vì $x \leq y \leq 1-x$).

Ta có: $1 - y = \lambda(1-x)+(1-\lambda)x$

Vì f lồi : $\begin{cases} f(y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(1-x) \\ f(1-y) \leq \lambda f(1-x)+(1-\lambda)f(x) \end{cases}$

nên từ đó $\varphi(y) \leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(x) = \varphi(x)$

5.4.4 Chứng minh rằng $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbf{R}$ là hàm lõm từ đó:

$$x \mapsto f(x)+\frac{x(1-x)}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\big(\varphi(0)+\varphi(1)\big)$$

5.4.5 Vì f lồi trên I, f có giới hạn phải tại a, hữu hạn hoặc $+\infty$; vậy tồn tại $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ sao cho f bị chặn dưới trên $[a; a+\alpha]$ hay $]a; a+\alpha]$ (a chỉ mút trái của I)

Cũng vậy, tồn tại $\beta \in \mathbf{R}_+^*$ sao cho f bị chặn dưới trên $[b-\beta; b]$ hay $[b-\beta; b[$ (b chỉ mút phải của I). Cuối cùng f liên tục trên đoạn $[a+\alpha, b-\beta]$, vậy y bị chặn dưới (vì bị chặn).

5.4.6 Theo giả thiết, tồn tại $c \in \overset{\circ}{I}$ sao cho $\underset{x \in I}{\operatorname{Sup}} f(x) = f(c)$

Ta có $\begin{cases} \forall x \in I \cap]-\infty; c[\quad , \quad \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \\ \forall x \in I \cap]c; +\infty[\quad , \quad \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \end{cases}$ từ đó chuyển qua giới hạn khi x tiến tới c

hay $c^+ : f'_t(c) \geq 0$ và $f'_p(c) \leq 0$ (các giới hạn đó tồn tại vì f lồi).

Vì f lồi (xem 5.4.2, Mệnh đề) nên:

$$\forall (u; v) \in (I \cap]-\infty; c[) x (I \cap]c; +\infty[), \quad \frac{f(u)-f(c)}{u-c} \leq f'_t(c) \leq f'_p(c) \leq \frac{f(v)-f(c)}{v-c},$$

từ đó $f'_t(c) = f'_p(c)$ và $\forall (u, v) \in (I \cap]-\infty; c[) x (I \cap]c; +\infty[)$, $\begin{cases} f(u) \geq f(c) \\ f(v) \geq f(c) \end{cases}$

điều này chứng minh: $\forall x \in I, f(x) \geq f(c)$

Vì f đạt cận trên đúng tại c, ta suy ra f không đổi.

5.4.7 Với mọi $(x; y) \in [a; b]^2$ sao cho $x < y$ ta có $\begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq f'_t(b) \\ \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \geq f'_p(a) \end{cases}$

đặt $k = \text{Max}\left(\left|f'_p(a)\right|, \left|f'_t(b)\right|\right)$, ta suy ra f có tính k–lipschitz trên $[a; b]$.

5.4.8 Vì f khả vi và lồi nên f' tăng, do đó với mọi điểm x_0 của I tồn tại giới hạn hữu hạn trái và phải tại x_0.

Theo định lý "giới hạn của đạo hàm" (5.2.2 Hệ quả), ta suy ra:

$$\lim_{x_0^-} f' = f'_t(x_0) = f'(x_0) = f'_p(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x_0^+} f'f'$$

và cuối cùng f thuộc lớp C^1 trên I

5.4.9 Ánh xạ g khả vi hai lần trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \begin{cases} g'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x}) - e^{-\frac{x}{2}} f'(e^{-x}) \\ g''(x) = \dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x}) + e^{-\frac{3}{2}x} f''(e^{-x}) \geq 0 \end{cases}$$

5.4.10 Ánh xạ g_α khả vi hai lần trên $]0; +\infty[$ và:

$$\forall x \in\ ]0; +\infty[\ , \begin{cases} g'(x) = \dfrac{\alpha+1}{2} x^{\frac{\alpha-1}{2}} f(x^{-\alpha}) - \alpha x^{-\frac{\alpha+1}{2}} f'(x^{-\alpha}) \\ g''_\alpha(x) = \dfrac{\alpha^2-1}{2} x^{\frac{\alpha-1}{2}} f(x^{-\alpha}) + \alpha^2 x^{-\frac{3(\alpha+1)}{2}} f''(x^{-\alpha}) \geq 0 \end{cases}$$

5.4.11 1) Giả sử $\ln \circ f$ lồi. Khi đó với mọi $a \in \mathbb{R}$, ánh xạ $g_a : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + \ln(f(x))$

là lồi. Ta sẽ chứng minh $\exp \circ g_x$ lồi.

Ta có: $(\forall (x; y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1],\ e^{g_a(\lambda x + (1-\lambda)y)} \leq \lambda e^{g_a(x)} + (1-\lambda)e^{g_a(y)}$

$$\Leftarrow (\forall(\alpha;\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall \lambda \in [0;1],\ \alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)$$

và bất đẳng thức cuối này là hệ quả của tính lồi của ánh xạ $-\ln$ (xem 5.4.3, 2)

2) Đảo lại, giả sử với mọi $a \in \mathbb{R}$, f_a lồi. Ta có:

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall (x;y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda e^{a(1-\lambda)(y-x)} f(x) + (1-\lambda)e^{a\lambda(y-x)} f(y).$

Đặt $a = \dfrac{\ln(f(y)) - \ln(f(x))}{x-y}$ (trường hợp $x = y$ thấy ngay) ta suy ra:

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (f(x))^\lambda (f(y))^{1-\lambda}$, vậy $\ln \circ f$ lồi.

5.4.12 a) f hai lần khả vi trên $]1;+\infty[$ và $\forall x \in]1;+\infty[$ $f''(x) = \dfrac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} \geq 0$

b) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$

5.4.13 a) f hai lần khả vi trên $]0;+\infty[$ và $\forall x \in]0;+\infty[$ $f''(x) = \dfrac{1}{x} \geq 0$

b) Áp dụng định nghĩa tính lồi của f vào các điểm $\dfrac{x}{a}$ và $\dfrac{y}{b}$ với $\lambda = \dfrac{a}{a+b}$:

$$f\left(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\right) \leq \frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)$$

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 6

6.2.1 $\int_0^1 f(1-f) = \int_0^1 f - \int_0^1 f^2 = 0,\ f(1-f) \geq 0$, $f(1-f)$ liên tục trên $[0; 1]$. Theo 6.2.5, Hệ quả 4, ta suy ra $f(1-f) = 0$, nghĩa là: $\forall x \in [0; 1], f(x) \in \{0; 1\}$. Vì f liên tục trên khoảng $[0; 1]$, nên định lý các giá trị trung gian chứng tỏ rằng $f = 0$ hay $f = 1$.

6.2.2 Đặt $f = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$; f liên tục , $f \geq 0, f \neq 0$, vậy $\int_a^b f > 0$. Lấy $u_i = \dfrac{f_i}{\int_a^b f}$.

6.2.3 *a)* Ánh xạ $\varphi : \begin{array}{l}[m;M] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t}{M} + \frac{m}{t}\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[m; M]$ và :

$$\forall t \in [m; M],\ \ \varphi'(t) = \frac{t^2 - mM}{Mt^2}.$$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của φ

t	m		$\sqrt{mM}$		M
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$1 + \frac{m}{M}$	$\searrow$	$2\sqrt{\frac{m}{M}}$	$\nearrow$	$1 + \frac{m}{M}$

Vậy ta có: $\forall x \in [a; b],\ 2\sqrt{\frac{m}{M}} \leq \frac{f(x)}{M} + \frac{m}{f(x)} \leq \left(1 + \frac{m}{M}\right)$, từ đó bằng tích phân, ta thu được kết quả mong muốn.

b) *1)* Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) \geq \left(\int_a^b (\sqrt{f} - \frac{1}{\sqrt{f}})\right)^2 = (b-a)^2.$$

2) Chú ý rằng $\left(\left(\int_a^b f\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{mM}\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq 0$, ta suy ra :

$$\frac{2\sqrt{mM}}{M}\left(\int_a^b f\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{M}\int_a^b f + m\int_a^b \frac{1}{f} \leq \left(1+\frac{m}{M}\right)(b-a) \quad \text{(xem } a\text{)},$$

Từ đó: $\left(\int_a^b f\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m+M}{2\sqrt{mM}}(b-a)$.

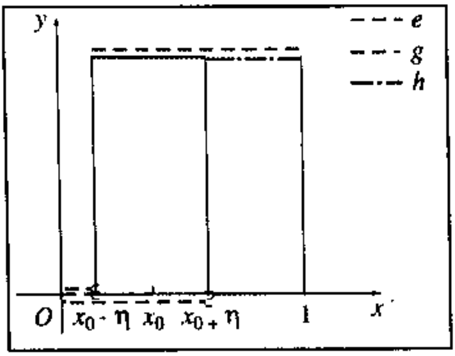
6.2.4 Ta lập luận phản chứng: giả sử tồn tại $x_0 \in\ ]0; 1[$ sao cho $f(x_0) \neq 0$, chẳng hạn $f(x_0) > 0$.

Vì f liên tục tại x_0 nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho : $\begin{cases}[x_0-\eta, x_0+\eta] \subset\ ]0;1[\\ \forall x \in [x_0-\eta; x_0+\eta],\ f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)\end{cases}$

Ký hiệu $e : [0; 1] \to \mathbf{R}$ là ánh xạ bậc thang xác định bởi:

$$e(x) = \begin{cases}0 & \text{nếu} \quad 0 \leq x < x_0 - \eta \\ 1 & \text{nếu} \quad x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta \\ 0 & \text{nếu} \quad x_0 + \eta < x \leq 1\end{cases}$$

Khi đó ta có : $\int_0^1 f e \geq (2\eta)\left(\frac{1}{2}f(x_0)\right) > 0$.



Nhưng mặt khác, tồn tại $g, h : [0; 1] \to \mathbf{R}$ là ánh xạ bậc thang, tăng sao cho $e = g - h$. Chẳng hạn, ta có thể chọn :

$$g : x \mapsto \begin{cases}0 \text{ nếu } 0 \leq x < x_0 - \eta \\ 1 \text{ nếu } x_0 - \eta \leq x \leq 1\end{cases}$$

$$h : x \mapsto \begin{cases}0 \text{ nếu } 0 \leq x \leq x_0 + \eta \\ 1 \text{ nếu } x_0 + \eta < x \leq 1\end{cases}$$

Theo giả thiết: $\int_0^1 f g = \int_0^1 f h = 0$, từ đó $\int_0^1 f e = 0$, mâu thuẫn.

Điều đó chứng tỏ rằng ($\forall x \in\ ]0; 1[, f(x_0) = 0$), rồi $f = 0$ vì f liên tục trên $[0; 1]$.

6.2.5. Với $k \in \{0,\ldots,4\}$, đặt $I_k = \int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx$ và $J_k = \int_0^\pi f(x)\cos^k x\,dx$

Vậy $I_2 = \int_0^\pi f(x)(2\cos^2 x - 1)dx = 2J_2 - J_0$;

cũng tương tự $I_3 = 4J_3 - 3J_1$, $I_4 = 8J_4 - 8J_2 + J_0$

Suy ra: $J_0 = 1$, $J_1 = -3$, $J_2 = 3$, $J_3 = -4$, $J_4 = 4$

Rồi: $\int_0^{\pi} f(x)(1+\cos^2 x - \cos^4 x)\mathrm{d}x = J_0 + J_2 - J_4 = 0$,

và $(\forall x \in [0;\pi],\ 1+\cos^2 x - \cos^4 x = 1 + \cos^2 x \sin^2 x \geq 1 > 0)$

Áp dụng 6.2.5 , Hệ quả 4 .

6.2.6. $\int_x^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \geq \frac{x^3 - x}{(\ln(x^3))^2} = \frac{x^3 - x}{9(\ln x)^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

◊ **Trả lời**: $+\infty$

6.2.7 Tồn tại một phân hoạch $(a_0,...,a_n)$ của $[a; b]$ sao cho với mỗi $i \in \{0,..., n-1\}$. Thu hẹp của f trên $]\,a_i ; a_{i+1}[$ có thác triển liên tục là f_i trên $[\,a_i; a_{i+1}]$.

Theo hệ thức Chasles : $0 = \int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} f$

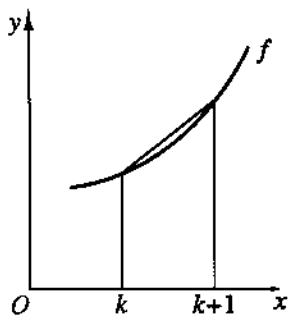
Do ($\forall i \in \{0,..., n-1\}, \int_{a_i}^{a_{i+1}} f \geq 0$), ta suy ra: $\forall i \in \{0,..., n-1\}, \int_{a_i}^{a_{i+1}} f = 0$

nghĩa là $\forall i \in \{0,..., n-1\}, \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i = 0$

Ta có thể áp dụng 6.2.5, Hệ quả 4 cho f_i và thu được: $\forall i \in \{0,..,n-1\}, f_i = 0$. Điều này chứng tỏ f bằng không, có thể trừ ra tại các điểm a_i .

6.2.8

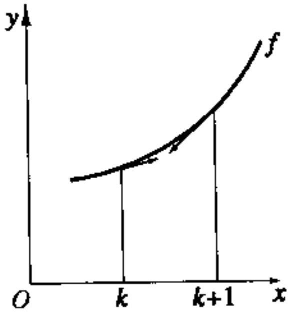
1)



Với mọi $k \in \{1, ..., n-1\}$ đường cong biểu diễn f trên $[k;\ k+1]$ ở phía dưới dây cung. Do đó: $\int_k^{k+1} f \leq \frac{1}{2}\big(f(k) + f(k+1)\big)$

Từ đó: $\int_1^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) = \frac{1}{2} f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n)$

2)



Với mọi $k \in \{1, ..., n-1\}$ đường cong biểu diễn f trên $[k; k+1]$ ở phía trên các nửa tiếp tuyến tại k và $k+1$. Từ đó có:

$$\forall k \in \{1,...,n-1\}, \forall x \in [k;k+1], \begin{cases} f(x) \geq f(k)+(x-k)f'(k) \\ f(x) \geq f(k+1)+(x-k-1)f'(k+1) \end{cases}$$

Suy ra rằng với mọi $k \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\int_k^{k+1} f = \int_k^{k+\frac{1}{2}} f + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} f \geq \int_k^{k+\frac{1}{2}} (f(k)+(x-k)f'(k))\mathrm{d}x + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} (f(k+1)+(x-k-1)f'(k+1))\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}f(k) + \left[\frac{(x-k)^2}{2}\right]_k^{k+\frac{1}{2}} f'(k) + \frac{1}{2}f(k+1) + \left[\frac{(x-k-1)^2}{2}\right]_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} f'(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}f(k) + \frac{1}{8}f'(k) + \frac{1}{2}f(k+1) - \frac{1}{8}f'(k+1) \qquad \text{(xem 6.4)}$$

Cộng lại, ta suy ra bất đẳng thức mong muốn.

6.2.9 *1)* Áp dụng bài tập 6.2.8 vào $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

là hàm lồi và thuộc lớp C^1, ta có:

$$\int_1^n f \leq \frac{1}{2}f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)$$

suy ra :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \int_1^n f + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) = \int_1^n \left(\frac{x}{n}\right)^n dx + \frac{1}{2}\frac{1}{n^n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{n^n}\left[\frac{x^n+1}{n+1}\right]^n + \frac{1}{2n^n} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n^n} + \frac{1}{2} \geq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{3n+1}{2(n+1)}$$

2) Chứng minh rằng : $\forall x \in [0;1], 1-x \leq e^{-x}$, bằng cách khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto e^{-x} - 1 + x$.

Từ đó: $\forall n \in \mathbf{N} - \{0;1\}, \forall i \in \{0,\dots,n-1\}, \left(1-\frac{i}{n}\right)^n \le e^{-i}$, rồi cộng lại với mọi

$n \in \mathbf{N} - \{0;1\}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)^n \le \sum_{i=0}^{n-1} e^{-i} = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} < \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$

6.2.10 Ta lập luận phản chứng, giả sử $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = 0$.

Thế thì: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(c-x)dx = \sin c\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx - \cos c\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = 0$

Nhưng $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ Sin$(c-x) \ge 0$ (Xét các trường hợp $x \le c$, $x \ge c$)

Cuối cùng $x \to f(x)$Sin $(c-x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta suy ra (6.2.5, Hệ quả 4) rằng:

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right];\ f(x)\sin(c-x) = 0$$

Vậy $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] - \{c\}$ $f(x) = 0$, mâu thuẫn.

6.2.11 *a)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2$

◊ **Trả lời:** $\frac{1}{2}\ln 5$

$$b)\ \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha}}(n^{\alpha-\frac{1}{\alpha}} + k^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}}dx \int_0^1 x^{\alpha}dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1.$$

◊ **Trả lời:** 1

c) Ký hiệu $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}$ và $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{\pi}{k}$

- $v_n = \displaystyle\sum_{l=0}^{n}\frac{\pi}{n+l} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{\pi}{1+\frac{l}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{\pi}{1+x}dx = \pi[\ln(1+x)]_0^1 = \pi\ln 2$.

- $\forall n \in \mathbf{N}^*, |u_n - v_n| \le \sum_{l=0}^{n} \left| \sin\left(\frac{\pi}{l+n}\right) - \frac{\pi}{l+n} \right|$.

Chứng minh rằng: $\forall x \in \mathbf{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ (chẳng hạn bằng cách khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto \sin x - x$ và của $x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$)

Vậy ta có : $\forall x \in \mathbf{R}_+, |\sin x - x| \le \frac{x^3}{6}$, từ đó :

$$|u_n - v_n| \le \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{l+n}\right)^3 \le \frac{\pi^3 n}{6n^3} = \frac{\pi^3}{6n^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Ta đã chứng minh rằng : $\begin{cases} v_n \xrightarrow[n\infty]{} \pi \ln 2 \\ u_n - v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases}$, từ đây suy ra kết luận.

◊ **Trả lời**: $\pi \ln 2$.

d) Với $n \in \mathbf{N}^*$, đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$; ta có: $\forall n \in \mathbf{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} .\ \text{Xét } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \text{ với } n \in \mathbf{N}^*. \text{ Khi đó:}$$

- $v_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$

- $|u_n - v_n| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời**: $\frac{1}{3}\ln 2$

e) Với $n \in \mathbf{N}^*$, ký hiệu $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+2n+1}$ và $v_n = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+2n}$

- $v_n = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+2n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{l}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2}[\ln(1+x)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

- $|u_n - v_n| = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(2l+2n)(2l+2n+1)} \le \frac{n}{2n(2n+1)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

◊ **Trả lời**: $\frac{1}{2}\ln 2$.

f) Với $n \in N^*$, ký hiệu $u_n = \frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}(k^2+ak+b)^{\alpha}$ và $v_n = \frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}$

- $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 x^{2\alpha}dx = \left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2\alpha+1}$
- $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \le u_n$
- Cho $c \in \mathbf{N}^*$ cố định , ta có :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \left(k^2+ak+b \le (k+c)^2 \Leftrightarrow 2kc+c^2 \ge ak+b \Leftarrow \begin{cases}2c \ge a\\ c^2 \ge b\end{cases}\right)$$

Ký hiệu: $C = E\left(\mathrm{Max}\left(\frac{a}{2},\sqrt{b}\right)\right)+1$, ta có :

$\forall k \in \mathbf{N}^*, (k+c)^2 \ge k^2+ak+b$

Từ đó : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \le \omega^n$ với

$$\omega_n = \frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}(k+c)^{2\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{l=c+1}^{c+n}\left(\frac{l}{n}\right)^{2\alpha}$$

Cuối cùng $\omega_n - v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{l=n+1}^{n+c}\left(\frac{l}{n}\right)^{2\alpha} - \sum_{l=1}^{c}\left(\frac{l}{n}\right)^{2\alpha}\right) \to 0$

◊ **Trả lời:** $\frac{1}{2\alpha+1}$.

g) Ký hiệu: $u_n = n^2\left(\prod_{k=1}^{n}k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}$, ta có : $\ln u_n = 2\ln n - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln k$.

Ánh xạ $f: \begin{array}{l}[1;+\infty[\to \mathbf{R}\\ x \mapsto x\ln x\end{array}$ tăng, vậy $\forall k \in \mathbf{N}-\{0,1\}$,

$$\int_{k-1}^{k} f \le f(k) \le \int_{k}^{k+1} f$$

cộng lại :

$$\forall n \in \mathbf{N}-\{0,1\}, \int_0^n x\ln x dx \le \sum_{k=2}^{n}k\ln k \le \int_2^{n+1}x\ln x dx$$

Phép tính nguyên hàm (xem 6.4.4) cho ta :

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Suy ra: $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \le \sum_{k=2}^{n}k\ln k \le \omega_n$ mà

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{n^2}{2}\ln n - \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{n^2}{2}\ln n - \dfrac{n^2}{4} + o(n^2) \\ \omega_n = \dfrac{(n+1)^2}{2}\ln(n+1) - \dfrac{(n+1)^2}{4} - 2\ln 2 + 1 = \dfrac{n^2+2n+1}{2}(\ln n + o(1)) - \dfrac{n^2}{4} + o(n^2) \\ = \dfrac{n^2}{2}\ln n - \dfrac{n^2}{4} + o(n^2) \end{cases}$$

Ta suy ra: $\sum_{k=1}^{n} k\ln k = \dfrac{n^2}{2}\ln n - \dfrac{n^2}{4} + 0(n^2)$ rồi

$$\ln u_n = 2\ln n - \frac{4}{n^2}\left(\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4} + 0(n^2)\right) = 1 + 0(1) \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

◊ **Trả lời**: e

h) Chứng minh rằng : $\forall x \in \mathbf{R}_+, 0 \le e^x - 1 - x \le \dfrac{x^2}{2}e^x$

Ký hiệu $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n-k}}\right) - n$ với $n \in \mathbf{N}^*$, ta có :

$$\forall n \in \mathbf{N}\left|u_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(n+k)^2}e^{\frac{1}{n+k}}$$

$$\le n\frac{1}{2(n+k)^2}e^{\frac{1}{n+1}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Mặt khác:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$$

◊ **Trả lời**: ln 2.

6.2.12. Với $n \in \mathbf{N}^*$, ký hiệu $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\dfrac{k}{n}\right) + g\left(\dfrac{k+1}{n}\right)}$ và $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\dfrac{k}{n}\right) + g\left(\dfrac{k}{n}\right)}$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, |u_n - v_n| \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)} - \sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)}\right|$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) - \left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|}$$

(xem bài tập 1.2.30)

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Vì g liên tục trên đoạn [0; 1] nên g liên tục đều.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $\eta > 0$ sao cho :

$$\forall (x',x'') \in [0;\ \ 1]^2, \left(|x' - x''| \le \eta \Rightarrow |g(x') - g(x'')| \le \varepsilon^2 \right)$$

Cho $N = E\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ta có , với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$n \ge N \Rightarrow \left(\forall k \in \{0,..,n-1\}, \left| \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right| = \frac{1}{n} \le \eta \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall k \in \{0,...,n-1\}, \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \le \varepsilon^2 \right)$$

$$\Rightarrow \left(0 \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right|} \le \frac{1}{n} n\varepsilon = \varepsilon \right)$$

Điều này chứng minh : $u_n - v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

- $v_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \sqrt{f+g}$

6.4.1. Trước hết chú ý rằng $\dfrac{F}{G}$ được xác định trên $]0; +\infty[$ và $\forall x \in\ ]0; +\infty[$, $G(x) > 0$

Ánh xạ $\dfrac{F}{G}$ khả vi trên $]0; +\infty[$, và $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - fG'}{G^2}$

Ta có, với mọi x thuộc $]0; +\infty[$:

$$(F'G - FG')(x) = f(x) \int_0^x g(t)\mathrm{d}t - g(x) \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(t)}{g(t)} \right)\mathrm{d}t \ge 0$$

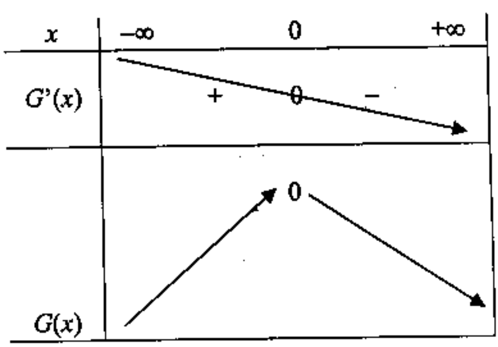
nếu $\dfrac{f}{g}$ là hàm tăng (≤ 0 nếu $\dfrac{f}{g}$ giảm) .

6.4.2

Ánh xạ G: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$G(x) = \left(\int_0^x f \right)^2$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$

và $G' = 2g$. Từ đó ta có bảng biến thiên của G. Vì $G(x) \ge 0$ và $G(0) = 0$ nên ta suy ra $G = 0$, rồi ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f = 0$) và cuối cùng $f = 0$.



6.4.3

$$\forall x \in [a;\ b]\ \begin{cases} f(x) = f(a) + \int_a^x f' \\ f(x) = f(b) - \int_x^b f' \end{cases} \Rightarrow \forall x \in [a;\ b],\ 2|f(x)| = \left| f(a) + f(b) + \int_a^x f' - \int_x^b f' \right|$$

$$\leq \left| f(a) + f(b) \right| + \int_a^x |f'| + \int_x^b |f'| = |f(a) + f(b)| + \int_a^b |f'| .$$

6.4.4 Ánh xạ $g : \begin{array}{l} [0;\ +\infty[\ \rightarrow \ \mathbb{R} \\ x \ \mapsto \ e^{-kx}\int_0^x f \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[0; +\infty[$

và $\forall x \in [0; +\infty[,\ g'(x) = e^{-kx}\left(f(x) - k\int_0^x f \right) \leq 0$

vậy g giảm, vì $g(0)$, ta suy ra $g \leq 0$.
Mặt khác $g \geq 0$ vì $f \geq 0$.

Vậy $g = 0$, suy ra $(\forall x \in [0; +\infty[,\ \int_0^x f = 0)$, cuối cùng $f = 0$.

6.4.5 Giả sử f phù hợp; vì f liên tục và $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_x^{2x} f)$ ta suy ra f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, rồi bằng một phép quy nạp đơn giản, chứng tỏ rằng f thuộc lớp $C\infty$ trên $\mathbb{R}$. Đạo hàm đối với x: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(2x + y) - f(x + 2y)$, rồi nói riêng khi đạo hàm đối với y: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f'(2x + y) = f'(x + 2y)$ thay x bởi $-2y$ có: $\forall y \in \mathbb{R}$ $f'(-3y) = f'(0)$. Điều này chỉ ra rằng f' không đổi. Vậy f có dạng :

$$\begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \lambda x + \mu \end{array} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

- Đảo lại, cho $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ và $f: \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \lambda x + \mu \end{array}$ là hàm liên tục. Ta có với mọi $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \int_{x+2y}^{2x+y} f = \left[\frac{\lambda t^2}{2} + \mu t \right]_{x+2y}^{2x+y} = \frac{3\lambda}{2}(x^2 - y^2) + \mu(x - y) \\ f(x) - f(y) = \lambda(x - y) \end{cases}$$

Vậy:

$$\left(\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f \right) \Leftrightarrow \left(\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \left(\frac{3\lambda}{2}(x + y) + \mu - \lambda \right)(x - y) = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\lambda}{2} = 0 \\ \mu - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

◊ **Trả lời**: $\{0\}$.

6.4.6 Ký hiệu $A : [\,0; +\infty\,[\;\rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall x \in [\,0; +\infty\,[\,,\ A(x) = \int_0^x fg$

Ta có: $\forall x \in [\,0; +\infty\,[\,,\ \dfrac{f(x).g(x)}{C + A(x)} \le g(x)$

Nhưng: $\forall x \in [\,0; +\infty\,[\,,\ \dfrac{f(x)g(x)}{C + A(x)} = \dfrac{A'(x)}{C + A(x)}$. Từ đó với mọi $X \in [\,0; +\infty\,[$:

$$\int_0^X g(x)dx \ge \int_0^X \frac{f(x)g(x)}{C + A(x)}dx = \left[\ln\left(C + A(x)\right)\right]_0^X = \ln(C + A(X)) - \ln C$$

Ta suy ra, với mọi X thuộc $[\,0; +\infty\,[$: $f(X) \le C + A(X) \le e^{\ln C + \int_0^X g}$

6.4.7 *a)* Đổi biến: $y = \dfrac{\pi}{4} - x$

b) $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], 1 + \tan x = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}{\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x} = \sqrt{2}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x}$,

từ đó : $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) - \ln(\cos x)\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 \quad \text{theo } a)$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

6.4.8 Bằng cách đổi biến: $y = a - x$:

$$\int_0^a \frac{1}{1 + f(x)}dx = -\int_a^0 \frac{1}{1 + f(a - y)}dy = \int_0^a \frac{1}{1 + f(a - y)}dy = \int_0^a \frac{1}{1 + \frac{1}{f(y)}}dy = \int_0^a \frac{f(y)}{1 + f(y)}dy$$

Từ đó : $$2\int_0^a \frac{1}{1 + f(x)}dx = \int_0^a \frac{1}{1 + f(x)}dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1 + f(x)}dx = \int_0^a dx = a$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{a}{2}$.

6.4.9 Bằng cách đổi biến: $y = \dfrac{x}{n^{2/3}}$:

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2 + x^3}} = \int_{\frac{1}{n^{2/3}}}^{n^{1/3}} \frac{n^{2/3}dy}{\sqrt{n^2(1 + y^3)}} = \frac{1}{n^{1/3}}\int_{\frac{1}{n^{2/3}}}^{n^{1/3}} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^3}}$$

$$\int_{\frac{1}{n^{2/3}}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_0^1 dy = 1$$

$$\int_1^{n^{1/3}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_1^{n^{1/3}} y^{-\frac{3}{2}} dy = 2 - \frac{2}{n^{1/6}} \le 2$$

Từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le \int_1^n \frac{dn}{\sqrt{n^2+x^3}} \le \frac{3}{n^{1/3}}$

6.4.10 *a)* Ánh xạ $F : \begin{array}{l}[0;\ 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[0;1]$ và:

$$\forall x \in [0;1], F'(x) = f(x) > 0$$

Như vậy F tăng nghiêm ngặt và liên tục trên $[0;1]$, do đó là một song ánh từ $[0;\ 1]$ và $[0;\ A]$ với ký hiệu $A = \int_0^1 f$

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $(x_0, ..., x_n) \in [0;\ 1]^{n+1}$, với mọi k thuộc $\{0, ..., n-1\}$, ta có :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f \Leftrightarrow F(x_{k+1}) - F(x_k) = \frac{1}{n}A$$

Hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c} y_0 = 0 \\ \forall k \in \{0,...,n-1\}, y_{k+1} - y_k = \frac{1}{n}A \\ y_n = A \end{array}\right|$ ẩn số là $(y_0, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, có một nghiệm duy nhất : $\forall k \in \{0,...,n\}, y_k = \frac{kA}{n}$.

Từ đó tồn tại và duy nhất $(x_0, ..., x_n)$ trong $[\ 0;\ 1\ ]^{n+1}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall k \in \{0,...,n-1\} & \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f \\ x_0 = 0, x_n = 1 \end{cases}$$

Ta có: $\forall\ k \in \{0, .., n\}$, $x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$

Hơn nữa, ta có $x_0 < x_1 < ... < x_n$ vì F^{-1} tăng nghiêm ngặt trên $[0;\ A]$.

$$b)\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} (f \circ F^{-1})\left(\frac{kA}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{A}\int_0^A f \circ F^{-1}$$

Nhờ phép đổi biến $t = F^{-1}(x)$:

$$\frac{1}{A}\int_0^A (f \circ F^1)(x)dx = \frac{1}{A}\int_0^1 f(t)F'(t)dt = \frac{1}{A}\int_0^1 (f(t))^2\,dt$$

◊ **Trả lời**: $\dfrac{\int_0^1 (f(x))^2\,dx}{\int_0^1 f(x)dx}$

6.4.11. *a)* **Trả lời** : $P = (X - \alpha)(\beta - X) + 1$

b) Vì $\left(\forall k \in \mathbf{N}, \int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0\right)$. Ta suy ra, do tuyến tính, $\forall A \in \mathbf{R}[X]$ $\int_0^1 A(x) f(x)\mathrm{d}x = 0$.

c) Lập luận bằng phản chứng: Giả sử $f \neq 0$. Tồn tại $C \in [0; 1]$ sao cho $f(c) \neq 0$. Ta có thể giả thiết là $f(c) > 0$ (nếu không thì thay f bởi $-f$).

Vì f liên tục tại C, nên tồn tại $(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2$ sao cho :

$$\begin{cases} \alpha \le c \le \beta & \alpha < \beta \\ \forall x \in [\alpha, \beta] & f(x) \ge \dfrac{1}{2} f(c) \end{cases}$$

Vì f liên tục trên [0; 1], nên f bị chặn; ký hiệu $M = \|f\|_\infty$, ta có, với mọi n của $\mathbf{N}$:

$$\left|\int_0^\alpha (P(x))^n f(x)\mathrm{d}x\right| \le M \int_0^\alpha (P(x))^n \mathrm{d}x.$$

Chứng minh rằng tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $\forall x \in [0; \alpha]$, $P'(x) \ge \lambda$.

Từ đó: $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^\alpha (P(x))^n dx \le \dfrac{1}{\lambda}\int_0^\alpha (P(x))^n P'(x) dx = \dfrac{1}{\lambda}\left[\dfrac{(P(x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha$

$$= \frac{1}{\lambda(n+1)}(1 - (1 - \alpha\beta)^{n+1}) \le \frac{1}{\lambda(n+1)},$$

vậy $\int_0^\alpha (P(x))^n f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Tương tự: $\int_\beta^1 (P(x))^n f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Cuối cùng: $\int_\alpha^\beta (P(x))^n f(x)\mathrm{d}x \ge \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \ge \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha) f(c)$.

Ta suy ra: $\int_0^1 (P(x))^n f(x)\mathrm{d}x$ không tiến tới 0 khi n tiến tới $+\infty$, Mâu thuẫn.

6.4.12 Ký hiệu v_1 (tương ứng: v_2) là mở rộng trong lớp C^1 của $v|_{[a;c[}$ (tương ứng : $v|_{]c;b]}$) lên $[a; c]$ (tương ứng: $[c; b]$). Thì :

$$\int_a^b u'v = \int_a^c u'v + \int_c^b u'v = \int_a^c u'v_1 + \int_c^b u'v_2 = [uv_1]_a^c - \int_a^c uv'_1 + [uv_2]_c^b - \int_c^b uv'_2$$

$$= (u(b)v_2(b) - u(a)v_1(a)) - \left(\int_a^c uv'_1 + \int_c^b uv'_2\right) + u(c)(v_1(c) - v_2(c)).$$

Ta có:

- $v_1(a) = v(a)$, $v_2(b) = v(b)$,
- $\int_a^c uv'_1 = \int_a^c uw$ vì v'_1 và w trùng nhau trên $[a; c[$

- $\int_c^b uv'_2 = \int_c^b uw$ cũng vậy
- $v_1(c) = \lim\limits_{c^-} v$, $v_2(c) = \lim\limits_{c^+} v$

6.4.13 Bằng cách lấy tích phân từng phần: $\int_1^x e^t \ln t\,dt = e^x \ln x - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

Rồi : $\left|\dfrac{\int_1^x e^t \ln t\,dt}{e^x \ln x} - 1\right| = \dfrac{1}{e^x \ln x}\int_1^x \dfrac{e^t}{t} dt \le \dfrac{1}{e^x \ln x}\int_1^x e^t dt = \dfrac{e^x - e}{e^x \ln x} \le \dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

6.4.14. Bằng cách đổi biến $u = t^2$ rồi tích phân từng phần, ta có, với mọi $x > 0$:

$$x^{1-\varepsilon}\int_x^{x+1} \sin(t^2)dt = \frac{x^{1-\varepsilon}}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{x^{1-\varepsilon}}{2}\left(\left[\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{u^{3/2}} du\right)$$

$$\frac{x^{1-\varepsilon}}{2}\left[\frac{-\cos u}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^{\varepsilon}}\left(\cos(x^2) - \frac{x}{x+1}\cos((x+1)^2)\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$\left|\frac{x^{1-\varepsilon}}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{u^{3/2}} du\right| \le \frac{x^{1-\varepsilon}}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2x^{\varepsilon}(x+1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

◊ **Trả lời**: 0

6.4.15 Áp dụng công thức Taylor với số dư dạng tích phân vào $t \longmapsto e^t$ trên $[0; x]$ hoặc $[x; 0]$ đến cấp n, ta được :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

- Nếu $x \ge 0$ thì : $0 \le \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \le \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$
- Nếu $x \le 0$ thì :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt\right| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} e^t dt \le \frac{1}{n!}\int_x^0 (1-x)^n dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{(-x)^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!}$$

6.4.16 Điều kiện được xét dẫn đến: $\forall n \in \{0, ..., 5\}$, $\alpha(a^n+b^n+c^n) = \int_0^{\pi} \cos^n \theta\, d\theta$

- Với $n = 0$, hệ thức trên tương đương với $\alpha = \frac{\pi}{3}$

- Thay n bởi 1,2, 3. Ta có: $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=\dfrac{3}{2}$, $a^3+b^3+c^3=0$ suy ra $abc=0$.

Ta có $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b=0$, $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (nếu không thì chọn hoán vị thích hợp của a, b, c)

- Thử lại là hệ thức vẫn đúng với $n=4$ và $n=5$.

6.4.17 $\mathrm{Def}(f)=\mathbf{R}^*$

Do đổi biến $u=-t$

$$\forall x\in\mathbf{R}^*, f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt=-\int_{x}^{2x}\frac{u^2}{u^2+\sin^2 u}du=-f(x)$$

Vậy f là hàm lẻ.

- Theo 6.4.1, Hệ quả 2, f thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+^*$ và:

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ f'(x)=\frac{8x^2}{4x^2+\sin^2 2x}-\frac{x^2}{x^2+\sin^2 x}=\frac{x^2(4x^2+8\sin^2 x-\sin^2 2x)}{(4x^2+\sin^2 2x)(x^2+\sin^2 x)}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		↗

Ta biết rằng $\forall\, t\in\mathbf{R},\ |\sin t|\le|t|$

Từ đó: $\forall\, x\in\mathbf{R}_+^*$, $4x^2-\sin^2 2x\ge 0$.

Vậy: $\forall\, x\in\mathbf{R}_+^*$, $f'(x)>0$

Khảo sát tại 0.

- $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $|f(x)|\le\int_x^{2x}dt=x$. Vậy $f(x)\xrightarrow[n\to0+]{}0$. Ta bổ xung cho f liên tục tại 0 bằng cách "đặt" $f(0)=0$

- $\forall x\in\mathbf{R}_+^*, f'(x)=\dfrac{x^2(4x^2+8\sin^2 x-\sin^2 2x)}{(4x^2+\sin^2 2x)(x^2+\sin^2 x)}\xrightarrow[x\to0+]{}\dfrac{1}{2}$

Vậy f khả vi phải tại 0, và $f'_p(0)=\dfrac{1}{2}$; vì f lẻ ta suy ra f khả vi tại 0 và $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

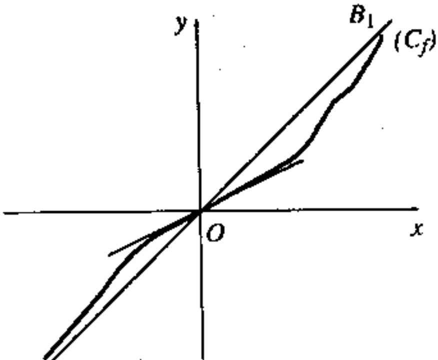
Khảo sát tại $+\infty$.

$\forall x\in\mathbf{R}_+^*, f(x)-x=$

$\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}-1\right)dt$

$\displaystyle=-\int_x^{2x}\frac{\sin^2 t}{t^2+\sin^2 t}dt.$

Vậy: $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $f(x)<x$



$$\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ |f(x)-x|=\int_x^{2x}\frac{\sin^2 t}{t^2+\sin^2 t}dt<\int_x^{2x}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Điều đó chỉ ra rằng đường cong (C_7) biểu diễn f nhận đường phân giác thứ nhất B_1 làm tiệm cận, và (C_7) ở phía dưới B_1 (với $x > 0$).

6.4.18 *a)* Ký hiệu $A_n = X^{4n}(1 - X)^{4n} - (-1)^n 4^n$, chú ý rằng $A_n(\mathrm{i}) = A_n(-\mathrm{i}) = 0$

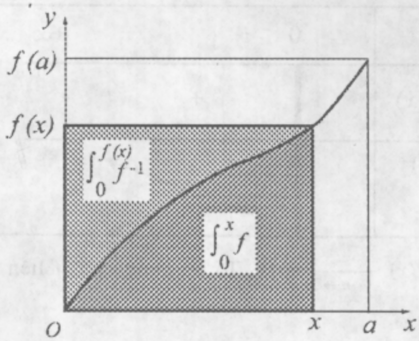
b) $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n} - (-1)^n 4^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}\mathrm{d}x + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Vì $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\mathrm{Arctan}]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, và chú ý rằng ($\forall x \in [0;1],\ 0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$) , ta có :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\pi - a_n| = \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{(x(1-x))^{4n}}{1+x^2}\mathrm{d}x \le \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{4^{5n-1}}.\frac{\pi}{4} < \frac{1}{4^{5n-1}}$$

6.4.19 *a)* Ánh xạ A: $[0; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:



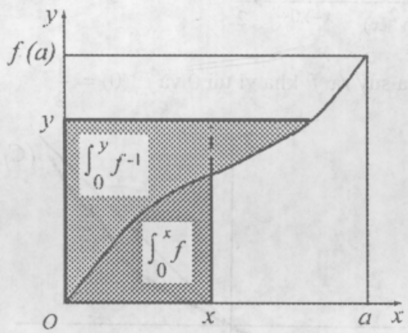
$$\forall x \in [0; a],\ A(x) = \int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} - x\,f(x)$$

thuộc lớp C^1 trên $[0; a]$ và: $\forall x \in [0; a]$,

$A'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))f'(x) - (f(x) + x f'(x)) = 0$

Vậy A không đổi, hơn nữa $A(0) = 0$.

b)



Cho $x \in [\,0\,;a\,]$; ánh xạ $B_x : [\,0; f(a)\,] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\forall y \in [\,0; f(a)\,],\ B_x(y) = \int_0^x f + \int_0^y f^{-1} - x\,y$$

thuộc lớp $C1$ trên $[\,0; f(a)\,]$ và :

$\forall y \in [\,0; f(a)\,]$, $(B_x)'(y) = f^{-1}(y) - x$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của B_x

y	0		$f(x)$		$f(a)$
$(B_x)'(y)$		$-$	0	$+$	
$B_x(y)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy: $\forall y \in [0; f(a)]$; $B_x(y) \geq B_x(f(x)) = 0$. (xem *a*).

6.4.20 $\forall y \in [0; f(a)]$, $g(y) = g(f(f^{-1}(y))) \geq f^{-1}(y)$, từ đó:

$$\int_0^x f + \int_0^x g \geq \int_0^x f + \int_0^y f^{-1} \geq xy .$$

6.4.21 Theo bài tập 6.4.19 *a)* $\forall x \in [0; +\infty]$, $\int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x) - \int_0^x f$. Điều kiện được xét dẫn đến: $\forall x \in [0; +\infty[$, $xf(x) = (\alpha + 1)\int_0^x f$, rồi đến: $\forall x \in [0; +\infty[$, $xf'(x) = \alpha f(x)$.

Sử dụng $g :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-\alpha} f(x)$, chứng minh rằng điều kiện trên tương đương với:

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) = Cx^{\alpha}.$$

◊ **Trả lời:** $\left\{ \begin{array}{c} [0; +\infty[\to \mathbb{R};\ C \in \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto Cx^{\alpha} \end{array} \right\}$

BẢNG KÝ HIỆU

BẢNG THUẬT NGỮ

A

B

C

D, Đ

E, F, G

H

I, J, K

L

M, N

O, P, Q

R, S

T

U, V, W, X, Y

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập và sửa bản in :
NGUYỄN HUY ĐOAN
Biên tập tái bản :
PHẠM PHU
Chế bản :
NGUYỄN HÒA ANH

GIÁO TRÌNH TOÁN TẬP 1 (GIẢI TÍCH 1)

In 1.500 cuốn khổ 16cm x 24cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN ANH VIỆT**
Giấy phép xuất bản : 194 - 2006/CXB/1 - 323/GD.
In xong và nộp lưu chiểu Quý II năm 2006.

GIẢI TÍCH 1

Giáo trình và 300 bài tập có lời giải

Giáo trình Toán - Tập 1

Mục tiêu của bộ giáo trình Toán này là cung cấp cho sinh viên những năm đầu của các trường đại học khoa học và kỹ thuật một tài liệu học tập, tra cứu thông dụng và có hiệu quả. Với nhiều bài tập có lời giải, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh của lý thuyết, cuốn sách còn nhằm giúp cho người học rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.

8 934980 640166

Tập 1 đề cập việc nghiên cứu số thực và số phức, dãy số và các hàm số một biến số thực (tính liên tục, đạo hàm và tích phân), ứng với phần đầu của môn Giải tích năm thứ nhất.

Tập 2 đề cập việc khảo sát các hàm số thông dụng, việc so sánh cục bộ các hàm số, nguyên hàm, các hàm khả tích, phương trình vi phân, các hàm số hai biến và bổ sung về phép tính tích phân, ứng với phần hai của môn Giải tích năm thứ nhất.

Giá : **34.000đ**