P.F.I.E.V

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán - Tập 3

GIẢI TÍCH 3

Giáo trình và
500 bài tập có lời giải

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

DUNOD

Giáo trình Toán - Tập 3

GIẢI TÍCH 3

Cours de mathématiques - 3

ANALYSE 3

Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam, bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République Socialiste du Vietnam.

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán
Tập 3

GIẢI TÍCH 3

Giáo trình và 500 bài tập có lời giải

Người dịch :
NGUYỄN VĂN THƯỜNG

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Cours de mathématiques - 3

ANALYSE 3

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP. PSI. PC. PT

Jean-Marie Monier
Professeur en classe de Spéciales
au lycée la Martinière-Monplaisir à Lyon

Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán mới này, với nhiều bài tập có lời giải, được biên soạn dành cho sinh viên giai đoạn I các trường đại học công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và thứ 2, mọi chuyên ngành), cho sinh viên giai đoạn I đại học khoa học, và cho các thí sinh dự thi tuyển giáo sư trung học phổ thông.

Bố cục của bộ giáo trình như sau :

Tập 1 : Giải tích 1
Tập 2 : Giải tích 2 } ***Giải tích*** năm thứ 1

Tập 3 : Giải tích 3
Tập 4 : Giải tích 4 } ***Giải tích*** năm thứ 2

Tập 5 : Đại số 1	***Đại số***	năm thứ 1
Tập 6 : Giải tích 2	***Đại số***	năm thứ 2
Tập 7 : Hình học	***Hình học***	năm thứ 1 và thứ 2.

Để kiểm chứng mức độ lĩnh hội kiến thức, trong mỗi chương độc giả sẽ thấy nhiều bài tập có lời giải in ở cuối sách. Trừ một vài trường hợp đặc biệt, các bài tập này đều khác với những bài đã có trong bộ bài tập có lời giải gồm tám tập mới xuất bản.

Nhiều vấn đề ở ranh giới của chương trình được đề cập ở cuối chương, dưới dạng các bổ sung có lời giải.

Tác giả rất mong nhận được những lời phê bình và gợi ý của độc giả. Xin vui lòng gửi các ý kiến đến Nhà xuất bản Dunod, 5, phố Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ tại đây lòng biết ơn đến rất nhiều bạn đồng nghiệp đã vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy, là : Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Gilles CHAFFARD, Jean-Yves CHEVROLAT, Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole GAILLARD, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, Alain GOURET, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Jean-Paul MARGIRIER, Annie MICHEL, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ và Gérard SIBERT.

Cuối cùng, tôi cảm ơn sâu sắc Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic, mà trình độ chuyên môn và tính kiên trì đã tạo điều kiện hoàn thành các tập sách này.

Jean-Marie Monier

Mục lục

Phần thứ nhất - Giáo trình

Phần thứ hai

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập

Phần thứ nhất

Giáo trình

Chương 1

Không gian vectơ định chuẩn

Trong chương 1 này, $\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.
Trong Tập 1 chúng ta đã khảo sát sơ bộ vấn đề này (chương 3, 4.12).
Chúng ta sẽ viết tắt không gian vectơ là kgv.

1.1 Các khái niệm tôpô trong không gian vectơ định chuẩn

1.1.1 Chuẩn, khoảng cách liên kết

1) Định nghĩa chuẩn, các thí dụ

♦ **Định nghĩa** Mọi ánh xạ $N : E \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(ii) $\forall x \in E$, $(N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$
(iii) $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
gọi là một **chuẩn** trên $\mathbb{K}$-kgv E.

Đôi khi người ta còn thêm điều kiện: iv) $\forall x \in E$, $N(x) \geq 0$, điều kiện này thực ra là thừa (xem dưới đây).

Mọi cặp (E,N), trong đó E là một $\mathbb{K}$-kgv và N là một chuẩn trên E, là một **không gian vectơ định chuẩn** (viết tắt là kgvđc).

Nhận xét:

Cho (E,N) là một $\mathbb{K}$-kgv.
1) Áp dụng (i) cho trường hợp $\lambda = 0$, ta suy ra $N(0) = 0$.
2) Với mọi x thuộc E, nếu áp dụng (iii) cho x ta sẽ suy ra:
$$0 = N(0) = N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1| N(x) = 2N(x)$$
và do đó $N(x) \geq 0$.
Như thế điều kiện $N(x) \geq 0$ trong định nghĩa là thừa. ■

Thường một chuẩn trên E được ký hiệu là $\|\ .\ \|: E \underset{x \mapsto \|x\|}{\to} \mathbb{R}$, hoặc là $\|\ .\ \|_E$.

Nếu như không có nguy cơ nhầm lẫn thì ta ký hiệu E thay vì (E,N).

Thí dụ:

1) **Ba chuẩn thông dụng** trên $\mathbb{K}^n$ (cũng được gọi là các chuẩn mẫu trên $\mathbb{K}^n$). Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Với mọi $x = (x_1,...,x_n)$ thuộc $\mathbb{K}^n$, xét các số thực $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ xác định bởi:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \underset{1 \le k \le n}{\text{Max}} |x_k|.$$

Chúng ta hãy kiểm chứng lại rằng các ánh xạ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như trên đúng là những chuẩn. Các phép tính sau đây đúng cho mọi $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n)$ thuộc $\mathbb{K}^n$, và mọi λ thuộc $\mathbb{K}$.

a) (i) $\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| \|x\|_1$

(ii) $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{1,..., n\}, |x_k| = 0)$

$\Leftrightarrow (\forall k \in \{1,..., n\}, x_k = 0) \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)$

$= \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$

b)(i) $\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2$

(ii) $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{1,..., n\}, |x_k|^2 = 0) \Leftrightarrow x = 0$

(iii) Bất đẳng thức $\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$ đã được chứng minh với $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ khi khảo sát tích vô hướng (xem Tập 5, 10.1.2, Định lý 2). Tuy nhiên ở đây chúng ta vẫn có một cách chứng minh sơ cấp.

$$\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2 \Leftrightarrow \|x+y\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|^2 - |x_k|^2 - |y_k|^2) \le 2\|x\|_2\|y\|_2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k y_k\right) \le \|x\|_2\|y\|_2 \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k y_k\right| \le \|x\|_2\|y\|_2$$

(ở đây chúng ta thấy lại bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong $\mathbb{K}^n$)

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le k,l\le n} x_k\overline{y}_k\overline{x}_l y_l \le \sum_{1\le k,l\le n}|x_k|^2|y_l|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le k<l\le n}(|x_k|^2|y_l|^2 + |x_l|^2|y_k|^2 - x_k\overline{y}_k\overline{x}_l y_l - x_l\overline{y}_l\overline{x}_k y_k) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le k<l\le n}|x_k y_l - x_l y_k|^2 \ge 0.$$

Chuẩn $\|\cdot\|_2$ gọi là **chuẩn Euclide thông thường** trên $\mathbb{R}^n$ nếu $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, là chuẩn **Hermite thông thường** trên $\mathbb{C}^n$ nếu $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

c) (i) $\|\lambda x\|_\infty = \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}(|\lambda x_k|) = |\lambda|\underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| = |\lambda|\,\|x\|_\infty$

(ii) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| = 0$

$\Leftrightarrow (\forall k\in\{1,\dots,n\}, |x_k| = 0) \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|x+y\|_\infty = \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k+y_k|$

$\le \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}(|x_k|+|y_k|) \le \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| + \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|y_k|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$

2) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi p thuộc $[1;+\infty[$, ánh xạ:

$$\|\cdot\|_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x=(x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \end{array}$$

là một chuẩn trên $\mathbb{K}^n$, gọi là **chuẩn Hölder** (xem bài tập 1.1.8).

Các chuẩn $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ trong thí dụ *1)* đều là những trường hợp riêng của chuẩn $\|\cdot\|_p$, với $p=1, p=2$.

Với mọi $x=(x_1,\dots,x_n)$ thuộc $\mathbb{K}^n$, ta có: $\|x\|_p \xrightarrow[p\infty]{} \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k|$ (xem bài tập 1.1.8,

d)), chính điều này lý giải cách ký hiệu $\|\cdot\|_\infty$.

3) Cho X là một tập hợp không rỗng; tập hợp $B(X;\mathbb{K})$ các ánh xạ bị chặn từ X đến $\mathbb{K}$ là một $\mathbb{K}$-kgv (xem Tập 1, 4.1.8, Mệnh đề 3).

Ánh xạ $\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{ccc} B(X;\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \operatorname{Sup}_{x\in X}|f(x)| \end{array}$ là một chuẩn trên $B(X;\mathbb{K})$.

Thực vậy, với mọi f, g thuộc $B(X;\mathbb{K})$ và mọi λ thuộc $\mathbb{K}$:

(i) $\|\lambda f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{x\in X}|\lambda f(x)| = |\lambda| \operatorname{Sup}_{x\in X}|f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty$

(ii) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in X, |f(x)| = 0) \Leftrightarrow f = 0$

(iii) $$\|f+g\|_\infty = \operatorname{Sup}_{x\in X}|f(x)+g(x)| \le \operatorname{Sup}_{x\in X}(|f(x)|+|g(x)|)$$
$$\le \operatorname{Sup}_{x\in X}|f(x)| + \operatorname{Sup}_{x\in X}|g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ trên $B(X;\mathbb{K})$ được gọi là **chuẩn hội tụ đều** vì lẽ (xem Tập 4, 4.1.1), một dãy $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f trên X khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \text{Tồn tại } N \in \mathbb{N} \text{ sao cho với mọi } n \ge N, f_n - f \in B(X;\mathbb{K}) \\ \|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0. \end{cases}$$

4) Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $a < b$, và $E = C([a;b],\mathbb{K})$ là $\mathbb{K}$-kgv các ánh xạ liên tục từ $[a;b]$ đến $\mathbb{K}$. Chúng ta hãy xét các số thực $\|f\|_1, \|f\|_2$ xác định với mọi f thuộc E bởi:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ta kiểm chứng rằng các ánh xạ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : C([a;b],\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ xác định như trên đây là những chuẩn. Với mọi f, g thuộc $C([a;b],\mathbb{K})$ và mọi λ thuộc $\mathbb{K}$ ta có:

a) (i) $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f| = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda|\,\|f\|_1$

(ii) $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f| = 0 \Leftrightarrow f = 0,$

vì f liên tục (xem Tập 1, 6.2.5, Hệ quả 4).

(iii) $$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f+g| \le \int_a^b (|f|+|g|)$$
$$= \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

b) (i) $\|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \int_a^b |\lambda f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=|\lambda|\left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|f\|_2 .$$

(ii) $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f|^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0,$

vì f liên tục (xem Tập 1, 6.2.5, Hệ quả 4).

(iii) Bất đẳng thức $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$ là hệ quả của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đối với các tích phân:

$$\left|\int_a^b fg\right|^2 \le \left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right)$$ (xem Tập 1, 6.2.5, Định lý).

5) Tổng quát, với cách ký hiệu như ở 4), với mọi p thuộc $[1;+\infty[$, ánh xạ:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : C([a;b],\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

là một chuẩn, gọi là **chuẩn Hölder** (xem bài tập 1.1.9).

Với mọi f thuộc $C([a;b],\mathbb{K})$, ta có $\|f\|_p \xrightarrow[p\infty]{} \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$ (xem bài tập 1.1.9, *d)*),

chính điều này lý giải cho ký hiệu $\|f\|_\infty$.

2) Khoảng cách liên kết với một chuẩn

♦ **Định nghĩa** Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một kgvđc; ánh xạ $d : E^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad d(x,y) = \|x-y\|$$

được gọi là **khoảng cách liên kết với** $\|\cdot\|$.

Nói riêng: $\forall x\in E,\ d(0,x) = \|x\|$.

♦ **Mệnh đề 1** Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$. Ta có:

1) $\forall (x,y)\in E^2,\ d(y,x) = d(x,y)$
2) $\forall (x,y)\in E^2,\ (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
3) $\forall (x,y,z)\in E^3,\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$
4) $\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda\in \mathbb{K},\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$
5) $\forall (x,y,z)\in E^3,\ d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Chứng minh:

1) $d(y,x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = \|x - y\| = d(x,y)$

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z)$

4) $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \, \|x - y\| = |\lambda| \, d(x,y)$

5) $d(x+z, y+z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x,y)$.

Nhận xét :

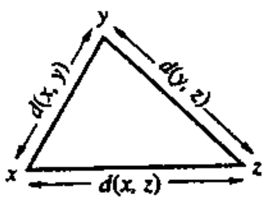
1) Cho tập hợp E; **khoảng cách trên** E là bất kỳ ánh xạ d: $E^2 \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện 1), 2), 3) trên đây. Mọi cặp (E,d), trong đó E là một tập hợp và d là một khoảng cách trên E, được gọi là **không gian mêtric**.

2) Nếu E là một $\mathbb{K}$ -kgvđc và d: $E^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thỏa mãn năm điều kiện 1), 2), 3), 4), 5) trên đây, thì tồn tại một và chỉ một chuẩn $\| \, . \, \|$ trên E sao cho:

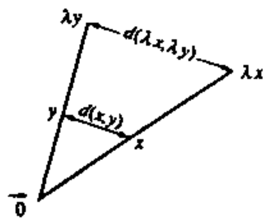
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = \|x - y\|$$

(xem bài tập 1.1.2).

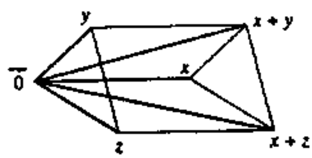
3) Ta có thể minh họa hình học các tính chất 3), 4), 5) như sau (đối với chuẩn Euclide thông thường trên $\mathbb{R}^2$):



Tính chất 3):
bất đẳng thức tam giác



Tính chất 4):
tính thuần nhất dương



Tính chất 5):
tính bất biến qua phép tịnh tiến

♦ **Mệnh đề 2** **(Bất đẳng thức tam giác ngược)**

Cho $(E, \| \, . \, \|)$ là một kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\| \, . \, \|$. Ta có:

1) $\forall (x,y) \in E^2, \ \|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

2) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|$

Chứng minh:

1) $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, từ đó suy ra $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Bằng cách hoán vị x và y ta được: $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$.

Như vậy ta có:

$$\|x - y\| \geq \mathrm{Max}(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) = \big| \|x\| - \|y\| \big| .$$

2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)-(y-z)\|$
$$\geq \big|\, \|x-z\| - \|y-z\| \,\big| = \big|\, d(x,z) - d(y,z) \,\big|.$$

3) Cách xây dựng chuẩn

a) Chuẩn cảm sinh trên một không gian vectơ con

Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$.

- Với mọi kgvc F của E, ánh xạ $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$ là một chuẩn trên F, gọi là **chuẩn cảm sinh** trên F bởi $\|\cdot\|$ (của E), cũng được ký hiệu là $\|\cdot\|$.
- Với mọi bộ phận X của E, ánh xạ $\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$ được gọi là **khoảng cách cảm sinh** trên X bởi d, vẫn ký hiệu là d.

Với mọi kgvc F của E, rõ ràng là khoảng cách cảm sinh trên F bởi d cũng là khoảng cách liên kết với chuẩn cảm sinh trên F bởi $\|\cdot\|$.

b) Chuẩn trên một tích hữu hạn những $\mathbb{K}$-kgvđc

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \le k \le n}$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc, $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$. Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ thuộc E, xét các số thực $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_\infty(x)$ định nghĩa như sau:

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^{n} N_k(x_k), \quad v_2(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (N_k(x_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v_\infty(x) = \operatorname*{Max}_{1 \le k \le n} N_k(x_k).$$

Các ánh xạ v_1, v_2, v_∞ là những chuẩn trên E (phép chứng minh tương tự như ở Thí dụ 1)), gọi là các **chuẩn mẫu** *trên* $\prod_{k=1}^{n} E_k$ liên kết với $N_1, \dots, N_n$.

4) Đại số định chuẩn

Ta nhớ lại rằng một **đại số** (hoặc $\mathbb{K}$-đại số) là một $\mathbb{K}$-kgv A được trang bị một luật hợp thành trong, ở đây chỉ bằng ký hiệu **.** hoặc bằng cách không viết ký hiệu nào cả, thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \text{(i)} \; . \text{ phân phối đối với } +: \\ \qquad \forall (x,y,z) \in A^3, \; \begin{cases} x(y+z) = xy + xz \\ (y+z)x = yx + zx \end{cases} \\ \text{(ii)} \; \forall \lambda \in \mathbb{K}, \; \forall (x,y) \in A^2, \; (\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y) \end{cases}$$

Nếu thêm nữa **.** có tính giao hoán (tương ứng: kết hợp, tương ứng: có phần tử trung hòa), thì ta nói rằng A là một $\mathbb{K}$-đại số **giao hoán** (tương ứng: **kết hợp**, tương ứng: **có đơn vị**).

♦ **Định nghĩa** Cho A là một $\mathbb{K}$ -đại số, N là một chuẩn trên $\mathbb{K}$-kgv A.

1) Ta nói rằng N **tương thích với phép nhân** trên A khi và chỉ khi:

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ ,\ \forall (x, y) \in A^2 , \quad N(xy) \le CN(x)N(y).$$

2) Ta nói rằng N là một **chuẩn đại số** khi và chỉ khi:

$$\forall (x,y) \in A^2 , \quad N(xy) \le N(x)N(y).$$

Mọi cặp (A,N) trong đó A là một $\mathbb{K}$ -đại số và N là một chuẩn đại số trên A gọi là một $\mathbb{K}$-**đại số định chuẩn**.

♦ **Mệnh đề** Với mọi tập hợp không rỗng X, $\mathrm{B}(X; \mathbb{K})$ là một đại số định chuẩn, trong đó luật thứ ba là phép nhân.

Chứng minh:

Ta đã biết rằng $(\mathrm{B}(X; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ là một kgvđc.

Hơn nữa, $\mathrm{B}(X; \mathbb{K})$ là một đại số và:

$$\forall (f,g) \in (\mathrm{B}(X; \mathbb{K}))^2, \quad \|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

(xem Tập 1, 4.1.8, Mệnh đề 3). ■

Dưới đây (xem 1.2.6) chúng ta sẽ thấy rằng nếu $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc, thì $(\mathcal{LC}(E), |||\cdot|||)$ là một $\mathbb{K}$-đại số định chuẩn.

Bài tập

◊ **1.1.1** Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$ -kgvđc, $(x, y) \in E^2$; chứng minh rằng :

$$\|x\| + \|y\| \le \|x+y\| + \|x-y\|.$$

◊ **1.1.2** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, d: $E^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ sao cho với mọi (x,y,z) thuộc E^3, và mọi λ thuộc $\mathbb{K}$:

1) $d(y,x) = d(x,y)$
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$
4) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$
5) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một chuẩn N trên E sao cho:

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(x-y).$$

◊ **1.1.3** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, N: $E \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thỏa mãn:
1) $\forall x \in E - \{0\}, \quad N(x) > 0$
2) $N(0) = 0$
3) $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x + y) \leq |\lambda| N(x) + N(y)$.
Chứng minh rằng N là một chuẩn trên E.

◊ **1.1.4** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, $p \in \mathbb{N}^*$, $N_1,..., N_p$ là những chuẩn trên E, $(\alpha_1,..., \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p - \{(0,..., 0)\}$, N: $E \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in E, \qquad N(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k N_k(x).$$

Chứng minh rằng N là một chuẩn trên E.

◊ **1.1.5** Cho $E = C([0;1], \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_1,..., f_p) \in E^p$, N: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall (x_1,..., x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad N(x_1,..., x_p) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t) \right| dt.$$

Tìm một điều kiện cần và đủ đối với $(f_1,..., f_p)$ để N là một chuẩn trên $\mathbb{R}^p$.

◊ **1.1.6** Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-kgv, $\|\cdot\|_F$ là một chuẩn trên F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $N: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\|_F \end{array}$.

Tìm một điều kiện cần và đủ đối với f để N là một chuẩn trên E.

◊ **1.1.7** Cho $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ sao cho $p \leq n$, $A = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $(\alpha_1,..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$,
N: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ xác định bởi:

$$\forall (x_1,..., x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad N(x_1,..., x_n) = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right).$$

Chứng minh rằng N là một chuẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} n = p \\ A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K}) \\ \forall i \in \{1,...,n\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

◊ **1.1.8*** **Chuẩn Hölder trên $\mathbb{K}^n$**

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1; +\infty[$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ (vậy: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

a) Chứng minh rằng $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leq \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$.

Ký hiệu $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{K}^n,\ \|(x_1,\dots,x_n)\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

và cũng tương tự đối với $\|\cdot\|_q$.

b)* Chứng minh rằng với mọi (x, y) thuộc $(\mathbb{K}^n)^2$ ta có:

α) $\left|\sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k y_k\right| \le \|x\|_p\|y\|_q$ (tương tự như bất đẳng thức Cauchy-Schwarz),

trong đó $(x_1,\dots,x_n)=x$ và $(y_1,\dots,y_n)=y$.

β) $\|x+y\|_p\le \|x\|_p+\|y\|_p$.

c) Từ đó suy ra rằng $\|\cdot\|_p$ là một chuẩn trên $\mathbb{K}^n$, gọi là **chuẩn Hölder**.

d) Chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbb{K}^n$, ta có: $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$, trong đó $\|x\|_\infty = \underset{1\le k\le n}{\operatorname{Max}}|x_k|$, với $x=(x_1,\dots,x_n)$.

◊ **1.1.9 Chuẩn Hölder trên $C([a;b],\mathbb{K})$**

Cho $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $a<b$, $E=C([a;b],\mathbb{K})$, $p\in\ ]1;+\infty[$, $q=\dfrac{p}{p-1}$.

a) Chứng minh: $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $\alpha\beta\le\dfrac{1}{p}\alpha^p+\dfrac{1}{q}\beta^q$ (xem bài tập 1.1.8, a))

Ta dùng ký hiệu $\|\cdot\|_p$ để chỉ ánh xạ $E\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall f\in E,\ \|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

và cũng ký hiệu tương tự đối với $\|\cdot\|_q$.

b) Chứng minh rằng với mọi (f, g) thuộc E^2 ta có:

α) $\left|\int_a^b \overline{f}\,g\right|\le\|f\|_p\|g\|_q$

β) $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.

c) Từ đó suy ra rằng $\|\cdot\|_p$ là một chuẩn trên E, gọi là **chuẩn Hölder**.

d)* Chứng minh rằng với mọi f thuộc E ta có:

$$\|f\|_p\xrightarrow[p\to+\infty]{}\|f\|_\infty,$$

trong đó $\|f\|_\infty=\underset{t\in[a;b]}{\operatorname{Sup}}|f(t)|$.

◊ **1.1.10** Cho một kgvđc $(E,\|\cdot\|)$, $(a,b)\in(E-\{0\})\times E$, $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\mapsto&\|ta+b\|\end{array}$. Chứng minh rằng f lồi (nghĩa là:

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda\in[0;1],\ f(\lambda u+(1-\lambda)v)\le\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v),$$

xem Tập 1, 1.5.4, Định nghĩa), và rằng: $\lim\limits_{\mp\infty} f=+\infty$.

1.1.2 Quả cầu, hình cầu

Cho $(E, \|\cdot\|)$, một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết.

♦ **Định nghĩa** Cho $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; ta định nghĩa các bộ phận sau đây của E, được gọi theo thứ tự là **quả cầu mở, quả cầu đóng** có tâm a và bán kính r:

$$\mathrm{B}(a; r) = \{x \in E;\ d(a, x) < r\}$$

$$\mathrm{B}'(a; r) = \{x \in E;\ d(a, x) \le r\}.$$

Ta cũng định nghĩa **hình cầu** tâm a và bán kính r như sau:

$$\mathrm{S}(a; r) = \{x \in E;\ d(a, x) = r\}.$$

Nhận xét:

1) Nếu $E \neq \{0\}$ thì với mọi a, b thuộc E và mọi r, s thuộc $\mathbb{R}_+^*$, ta có:

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{B}(a; r) = \mathrm{B}(b; s) \\ \text{hay} \\ \mathrm{B}'(a; r) = \mathrm{B}'(b; s) \\ \text{hay} \\ \mathrm{S}(a; r) = \mathrm{S}(b; s) \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ r = s \end{cases}$$

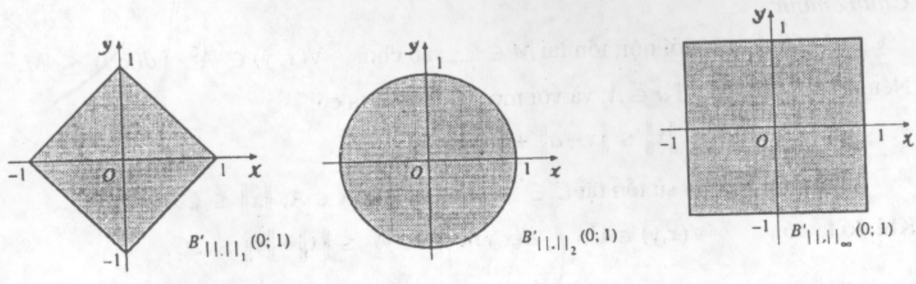
xem bài tập 1.1.11, 5).
Như thế một quả cầu mở (tương ứng: đóng, tương ứng: hình cầu) của E chỉ có một "tâm" và một "bán kính" duy nhất.

2) Nếu (E, d) là một không gian mêtric (xem 1.1.1, Nhận xét), thì ta định nghĩa như trên các tập hợp $\mathrm{B}(a; r)$, $\mathrm{B}'(a; r)$, $\mathrm{S}(a; r)$, nhưng có thể có $\mathrm{B}(a; r) = \mathrm{B}(b; s)$ với $a \neq b$ hay $r \neq s$.

Chẳng hạn, d: $\begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq y \\ 0 & \text{nếu } x = y \end{cases} \end{array}$ là một khoảng cách trên $\mathbb{N}$, và với mọi (a, b) thuộc $\mathbb{N}^2$ và mọi (r,s) thuộc $]1; +\infty[^2$, ta có: $\mathrm{B}(a; r) = \mathrm{B}(b; s) = \mathbb{N}$.

Ta có thể ký hiệu $\mathrm{B}_E(a; r)$ thay vì $\mathrm{B}(a; r)$ để tránh nhầm lẫn, nếu như đang xét nhiều kgvđc.

Thí dụ:
Trong $\mathbb{R}^2$ ta có thể minh họa hình học các quả cầu đóng có tâm O và bán kính 1 đối với ba chuẩn thông dụng như sau:



Bài tập

◊ **1.1.11** Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một kgvđc, $(a,b) \in E^2$, $(r,s) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Chứng minh:

1) $B'(a; r) + B'(b;s) = B'(a+b; r+s)$
2) $\lambda B'(a; r) = B'(\lambda a; |\lambda| r)$
3) $B'(a; r) \cap B'(b;s) \neq \varnothing \Leftrightarrow \|a-b\| \leq r + s$
4) $B'(a; r) \subset B'(b;s) \Leftrightarrow \|a-b\| \leq s - r$
5) $B'(a; r) = B'(b;s) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ r = s \end{cases}$

(ta sẽ giả thiết rằng $E \neq \{0\}$ đối với 4) và 5)).

◊ **1.1.12** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, N_1 và N_2 là hai chuẩn trên E, $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; giả sử $B'_{N_1}(a; r) = B'_{N_2}(a;r)$. Chứng minh rằng $N_1 = N_2$.

◊ **1.1.13** Chứng minh rằng trong mọi kgvđc mọi quả cầu mở (tương ứng: đóng) đều lồi.

1.1.3 Bộ phận giới nội của một kgvđc

Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$.

♦ **Định nghĩa 1** Một bộ phận A của E được gọi là **giới nội** khi và chỉ khi:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in A^2, \qquad d(x,y) \leq M.$$

♦ **Mệnh đề 1** Một bộ phận A của E là **giới nội** khi và chỉ khi:

$$\exists C \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A, \qquad \|x\| \leq C.$$

Chứng minh:

1) Giả sử A giới nội; tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall (x, y) \in A^2,\ \ d(x,y) \leq M$.

Nếu $A \neq \varnothing$ thì tồn tại $a \in A$, và với mọi x thuộc A ta có:

$$\|x\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq M + \|a\|.$$

2) Đảo lại, giả sử tồn tại $C \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn: $\forall x \in A,\ \|x\| \leq C$.

Khi đó ta có: $\forall (x,y) \in A^2, \quad d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2C.$

Nhận xét :
Một bộ phận A của E giới nội khi và chỉ khi tồn tại một quả cầu đóng (hoặc một quả cầu mở) chứa A.

♦ **Định nghĩa 2** Cho một tập hợp X, $f\colon X \to E$ là một ánh xạ; ta nói rằng f **bị chặn** khi và chỉ khi $f(X)$ là một bộ phận giới nội của E.

Như thế $f\colon X \to E$ bị chặn khi và chỉ khi tồn tại $C \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq C.$$

♦ **Định nghĩa 3** Cho một bộ phận giới nội không rỗng A của E.
Đường kính của A, ký hiệu diam(A), được định nghĩa bởi:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

Ta chú ý rằng, với mọi bộ phận A không giới nội và không rỗng của E:

$$\operatorname{diam}(E) = +\infty.$$

Như vậy, với mọi bộ phận không rỗng A của E: A giới nội khi và chỉ khi

$$\operatorname{diam}(A) < +\infty.$$

♦ **Mệnh đề 2**

1) Cho $A, B \in \mathfrak{P}(E)$ sao cho $A \subset B$. Nếu B giới nội thì A cũng giới nội ; nếu hơn nữa $A \neq \varnothing$ thì :

$$\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B).$$

2) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n$ là những bộ phận giới nội của E; khi đó $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ giới nội.

3) Mọi bộ phận hữu hạn của E đều giới nội.

Chứng minh:

1) Hiển nhiên.

2) Vì $A_1, \dots, A_n$ giới nội, nên tồn tại $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \forall x \in A_i, \qquad \|x\| \leq C_i$$

Khi đó nếu ký hiệu $C = \max_{1\leq i\leq n} C_i$, ta sẽ có:

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \|x\| \leq C,$$

điều này chứng tỏ rằng $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ giới nội.

3) Suy từ 2) với chú ý rằng mọi đơn tử đều giới nội.

1.1.4 Lân cận

Cho $(E, \| . \|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\| . \|$.

◆ **Định nghĩa 1** Cho $a \in E, V \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng V là một **lân cận** của a (trong E) khi và chỉ khi tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B(a;r) \subset V$.

Ta ký hiệu tập hợp các lân cận của a (trong E) là $\mathcal{V}_E(a)$ (hoặc $\mathcal{V}(a)$)

◆ **Mệnh đề 1** Cho $a \in E$.

(i) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), \quad a \in V$

(ii) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), \forall W \in \mathfrak{P}(E), \quad (V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}_E(a))$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}_E(a), \quad \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}_E(a)$.

Chứng minh:

(i) và (ii): Hiển nhiên.

(iii) Vì $V_1, ..., V_n \in V_E(a)$, nên tồn tại $r_1, ..., r_n$ thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \ B(a; r_i) \subset V_i$$

Ký hiệu $r = \underset{1 \le i \le n}{\text{Min}}\, r_i$, ta có: $r > 0$ và $B(a; r) = \bigcap_{i=1}^{n} B(a; r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

Nhận xét:

1) Tính chất (ii) trên đây chứng tỏ rằng, với mọi họ $(V_i)_{i \in I}$ những lân cận của a, thì $\bigcup_{i \in I} V_i$ là một lân cận của a.

2) Giao của một họ vô hạn những lân cận của a có thể không phải là một lân cận của a, chẳng hạn như thí dụ sau đây trong tập $\mathbb{R}$ thông thường: $\left(\left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(a,b) \in E^2$ sao cho $a \neq b$; tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ và $W \in \mathcal{V}_E(b)$ sao cho $V \cap W = \varnothing$.

Ta nói rằng mọi kgvđc đều là không gian **tách**.

Chứng minh: Chỉ cần lấy $V = B(a;r)$, $W = B(b;r)$, trong đó $r = \frac{1}{2} d(a,b)$. ■

Phép chứng minh trên đây cũng chứng tỏ một cách tổng quát hơn rằng mọi không gian mêtric đều là không gian tách (sau khi đã định nghĩa một cách thích hợp khái niệm lân cận trong một không gian mêtric).

♦ **Định nghĩa 2** **(Lân cận của một điểm trong một bộ phận)**
Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in A$, $V \in \mathfrak{P}(A)$. Ta nói rằng V là một **lân cận của** a **trong** A khi và chỉ khi tồn tại $V_1 \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho $V = V_1 \cap A$.
Tập hợp các lân cận của a trong A ký hiệu là $\mathcal{V}_A(a)$.

Nhận xét:
Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in A$, $V \in \mathfrak{P}(A)$; V là một lân cận của a trong A khi và chỉ khi :

$$\exists r > 0, \qquad B(a;r) \cap A \subset V.$$

1.1.5 Tập mở, tập đóng

Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$.

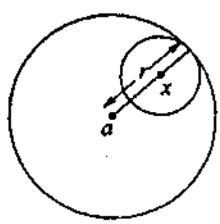
1) Tập mở

♦ **Định nghĩa** Một bộ phận Ω của E được gọi là **mở** (trong E) khi và chỉ khi:

$$\forall x \in \Omega, \quad \Omega \in \mathcal{V}_E(x).$$

Ta cũng nói rằng Ω là một **bộ phận (hay: tập) mở** (của E) .

Như thế Ω là một bộ phận mở của E khi và chỉ khi Ω là lân cận (trong E) của mọi điểm của nó.



Thí dụ:
Mọi quả cầu mở của E là một bộ phận mở của E.
Thực vậy, với mọi (a, r) thuộc $E \times \mathbb{R}_+^*$, và mọi x thuộc $B(a;r)$ ta có:

$$B(x; r - d(a,x)) \subset B(a; r).$$

♦ **Mệnh đề 1**

(i) $\varnothing$ và E là những tập mở của E.

(ii) Với mọi tập I và mọi họ $(\Omega_i)_{i\in I}$ những tập mở của E, $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ là một tập mở của E.

(iii) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi tập mở $\Omega_1,\dots,\Omega_n$ của E, $\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$ là một tập mở của E.

Chứng minh:

(i) Hiển nhiên.

(ii) Cho $x\in\bigcup_{i\in I}\Omega_i$; tồn tại $i_0\in I$ sao cho $x\in\Omega_{i_0}$. Vì Ω_{i_0} là một tập mở của E, nên $\Omega_{i_0}\in\mathcal{V}_E(x)$; vì $\Omega_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ nên ta suy ra (xem 1.1.4,Mệnh đề 1): $\bigcup_{i\in I}\Omega_i\in\mathcal{V}_E(x)$. Điều này chứng tỏ $\bigcup_{i\in I}\Omega_i s$ là một tập mở của E.

(iii) Cho $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$; với mọi i thuộc $\{1,\dots,n\}$, $\Omega_i\in\mathcal{V}_E(x)$; suy ra (xem 1.1.1, Mệnh đề (iii)): $\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i\in\mathcal{V}_E(x)$. Điều này chứng tỏ $\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$ là một tập mở của E.

***Nhận xét*:** Giao của một họ vô hạn những tập mở có thể không phải là một tập mở. Chẳng hạn trong $\mathbb{R}$ thông thường, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $\left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[$ là một tập mở, nhưng $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[=\{0\}$ lại không phải là một tập mở của $\mathbb{R}$.

Tổng quát hơn, với mọi kgvđc $E\neq\{0\}$, mọi đơn tử của E không phải là một bộ phận mở của E.

***Tổng quát hóa*:** **Không gian tôpô** là mọi cặp $(X,\mathcal{O})$, trong đó X là một tập hợp và $\mathcal{O}$ là một tập hợp những bộ phận của X thỏa mãn:

(i) $\varnothing\in\mathcal{O}$ và $X\in\mathcal{O}$

(ii) Với mọi họ $(\Omega_i)_{i\in I}$ những phần tử của $\mathcal{O}$, ta có: $\bigcup_{i\in I}\Omega_i\in\mathcal{O}$

(iii) Với mọi họ *hữu hạn* $(\Omega_i)_{i\in F}$ những phần tử của $\mathcal{O}$, ta có: $\bigcap_{i\in F}\Omega_i\in\mathcal{O}$.

Nếu $(X, \mathcal{O})$ là một không gian tôpô thì $\mathcal{O}$ được gọi là tôpô của $(X, \mathcal{O})$, và các phần tử của $\mathcal{O}$ được gọi là các **tập mở** của $(X, \mathcal{O})$.
Nếu $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc, khi ký hiệu khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$ là d, thì ta đã thấy (xem 1.1.1, 2), Mệnh đề 1) rằng (E, d) là một không gian mêtric; ký hiệu $\mathcal{O}$ là tập hợp các tập mở của E (theo định nghĩa trên), thì $(E, \mathcal{O})$ là một không gian tôpô.
Tồn tại những không gian tôpô $(X, \mathcal{O})$ không mêtric hóa được, tức là trên X không tồn tại khoảng cách d nào sao cho $\mathcal{O}$ là tập hợp các tập mở của (X, d); chẳng hạn:

$$X = \{0, 1\}, \quad \mathcal{O} = \{\varnothing, \{0, 1\}\}.$$

♦ **Mệnh đề 2** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \le k \le n}$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc, $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$, ν là chuẩn xác định trên E bởi:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E, \qquad \nu(x_1, \ldots, x_n) = \underset{1 \le k \le n}{\text{Max}}\, N_k(x_k)$$

(xem 1.1.1, *3), b)*).
Với mỗi k thuộc $\{1, \ldots, n\}$, cho Ω_k là một tập mở của E_k. Khi đó $\prod_{k=1}^{n} \Omega_k$ là một tập mở của E.

Chứng minh:

Cho $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} \Omega_k$. Với mỗi k thuộc $\{1, \ldots, n\}$, $x_k \in \Omega_k$ và Ω_k là tập mở của E_k, do đó tồn tại $r_k \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B_{E_k}(x_k; r_k) \subset \Omega_k$. Ký hiệu $r = \underset{1 \le k \le n}{\text{Min}}\, r_k > 0$, ta được:

$$B_E(x; r) = \prod_{k=1}^{n} B_{E_k}(x_k; r) \subset \prod_{k=1}^{n} B_{E_k}(x_k; r_k) \subset \prod_{k=1}^{n} \Omega_k .$$

Như vậy $\prod_{k=1}^{n} \Omega_k$ là lân cận của mọi điểm của nó, do đó là tập mở.

Nhận xét:
Với các ký hiệu trong mệnh đề trên đây, có thể tồn tại những tập mở của E không có dạng $\prod_{k=1}^{n} \Omega_k$. Chẳng hạn, $\Omega =]-1; 0[^2 \cup]0; 1[^2$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$ và không tồn tại một cặp (Ω_1, Ω_2) những bộ phận của $\mathbb{R}$ sao cho $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

2) Tập đóng

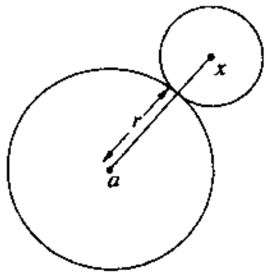
♦ **Định nghĩa** Một bộ phận F của E được gọi là **đóng** (trong E) khi và chỉ khi $\complement_E(F)$ là một bộ phận mở của E.

Ta cũng nói rằng F là một **bộ phận** (hay: **tập**) **đóng** (của E) .

Thí dụ:
Mọi quả cầu đóng của E là một bộ phận đóng của E.

Thực vậy, với mọi (a, r) thuộc E x $\mathbb{R}_+^*$, và mọi x thuộc $\complement_E$ (B(a;r)), ta có:

$$B(x;\ d(a,x) - r) \subset \complement_E(B(a; r)).$$



♦ **Mệnh đề 1**

(i) $\varnothing$ và E là những tập đóng của E.

(ii) Với mọi tập I và mọi họ $(F_i)_{i\in I}$ những tập đóng của E, $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ là một tập đóng của E.

(iii) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi tập đóng $F_1,..., F_n$ của E, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ là một tập đóng của E.

Chứng minh:
Chỉ cần chuyển sang các phần bù trọng mệnh đề tương tự đối với các tập mở (xem 1.1.5, Mệnh đề 1).. Chẳng hạn đối với (iii) lược đồ phép chứng minh như sau:

$$(\forall i\in\{1,...,n\}, F_i \text{ đóng}) \Leftrightarrow (\forall i\in\{1,...,n\}, \complement_E(F_i) \text{ mở})$$

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} \complement_E(F_i) \text{ mở}\right) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \complement_E\left(\bigcap_{i=1}^{n}\complement_E(F_i)\right) \text{đóng}\right).$$

Nhận xét:
1) Hợp của một họ vô hạn những tập đóng của E có thể không phải là một tập đóng của E. Chẳng hạn, trong $\mathbb{R}$ thông thường, với mọi x thuộc $]0;1[$, đơn tử $\{x\}$ là một tập đóng, nhưng $\bigcup\limits_{x\in]0;1[} \{x\}$ thì lại bằng $]0;1[$, đây không phải là một tập đóng của $\mathbb{R}$.

2) Một bộ phận của E có thể vừa mở vừa đóng, chẳng hạn như $\varnothing$.

3) Một bộ phận của E có thể không mở cũng không đóng, chẳng hạn như $]0;1]$ trong $\mathbb{R}$ thông thường.

Thí dụ:

1) Mọi hình cầu đều đóng, vì: $S(a;r) = B'(a;r) \cap \complement_E(B(a;r))$.

2) Mọi đơn tử đều đóng, vì: $\{x\} = \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} B'(x;r)$.

3) Mọi bộ phận hữu hạn đều đóng, vì là hợp của một số hữu hạn đơn tử.

♦ **Mệnh đề 2** Cho n thuộc $\mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1\le k\le n}$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc, $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$, ν là chuẩn xác định trên E bởi:

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in E,\ \ \nu(x_1,\dots,x_n) = \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}\, N_k(x_k)$$

(xem 1.1.1, *3), b)*).

Giả sử F_k là một tập đóng của E_k, với mọi k thuộc $\{1,\dots,n\}$. Khi đó $\prod_{k=1}^{n} F_k$ là một tập đóng của E.

Chứng minh:

$$\complement_E\left(\prod_{k=1}^{n} F_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k \text{ , trong đó :}$$

$$\Omega_1 = \complement_E(F_1)\times E_2\times\dots\times E_n \text{ ,..., } \Omega_n = E_1\times\dots\times E_{n-1}\times\complement_E(F_n).$$

Theo 1.1.5, Mệnh đề 1, (ii), mỗi Ω_k là một tập mở của E, và do đó $\bigcup_{k=1}^{n}\Omega_k$ cũng vậy;

cuối cùng $\prod_{k=1}^{n} F_k$ là một tập đóng của E.

Nhận xét:

Với các ký hiệu như trong mệnh đề trước thì có thể tồn tại những tập đóng của E không thuộc dạng $\prod_{k=1}^{n} F_k$. Chẳng hạn $F = \{(-1, 1), (1,1)\}$ là một tập đóng của $\mathbb{R}^2$, nhưng không tồn tại cặp (F_1, F_2) những bộ phận của $\mathbb{R}^2$ sao cho $F = F_1 \times F_2$.

3) Bộ phận mở và bộ phận đóng của một bộ phận của một $\mathbb{K}$ -kgvđc

♦ **Định nghĩa** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$.

(i) Mọi bộ phận U của A sao cho tồn tại một tập mở Ω của E thỏa mãn $U = \Omega \cap A$, được gọi là **tập** (hay: **bộ phận) mở của** A (hoặc: **mở tương đối của** A).

(ii) Mọi bộ phận G của A sao cho tồn tại một tập đóng F của E thỏa mãn $G = F \cap A$, được gọi là **tập** (hay: **bộ phận) đóng của** A (hoặc: **đóng tương đối của** A).

Người ta cũng nói rằng các tập mở (tương đối: đóng) của A là các vết trên A của các tập mở (tương ứng: đóng) của E.

Với $a \in A$ và $r \in \mathbb{R}_+^*$, ta thường ký hiệu:

$$B_A(a; r) = B_E(a; r) \cap A = \{x \in A; d(a,x) < r\};$$

ta cũng định nghĩa tương tự cho $B'_A(a; r)$, $S_A(a; r)$.
Khi thay kgvđc E bởi một bộ phận A của E, thì các kết quả ở 1.1.5, 1) và 2) vẫn còn đúng.

Nhận xét:
Cần chú ý rằng một tập mở của A có thể không phải là một tập mở của E.
Chẳng hạn, trong $\mathbb{R}$ thông thường thì $[0; 1[$ là một tập mở của $[0; 1]$ (vì $[0; 1[=]1; 1[\cap [0; 1]$), nhưng $[0; 1[$ lại không phải là một tập mở của $\mathbb{R}$.

1.1.6 So sánh các chuẩn

♦ **Định nghĩa** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv , N, N' là hai chuẩn trên E. Ta nói rằng N **tương đương với** N', và ký hiệu $N \sim N'$, khi và chỉ khi:

$$\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in E, \qquad \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x).$$

♦ **Mệnh đề 1** Quan hệ "*tương đương với*" là một quan hệ tương đương trong tập hợp các chuẩn trên E.

Chứng minh:

1) *Tính phản xạ:* Hiển nhiên.

2) *Tính đối xứng:*

Nếu $N \sim N'$ thì tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho:

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x),$$

từ đó suy ra:
$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{\beta} N'(x) \le N(x) \le \frac{1}{\alpha}\ N'(x),$$

và do đó $N' \sim N$.

3) *Tính bắc cầu*:

Nếu ($N \sim N'$ và $N' \sim N''$) thì tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ sao cho:

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x) \\ \gamma N'(x) \le N''(x) \le \delta N'(x) \end{cases}$$

từ đó suy ra: $\forall x \in E, \quad \alpha\gamma N(x) \le N''(x) \le \beta\delta N(x)$,

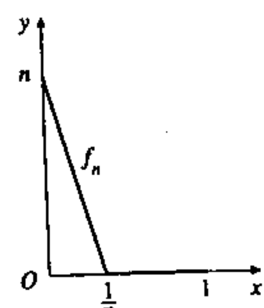
và do đó $N \sim N''$.

Thí dụ :
Ba chuẩn thông dụng trên $\mathbb{K}^n$ (xem 1.1.1) tương đương với nhau, vì với mọi $x = (x_1,\ldots, x_n)$ thuộc $\mathbb{K}^n$ ta có:

$$\begin{cases} \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| \le \sum_{k=1}^{n}|x_k| \le n\,\underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| \\ \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{n}\,\underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k| \end{cases}$$

■

Nhận xét :
Nếu $E \neq \{0\}$ thì hai chuẩn N, N' trên E tương đương với nhau khi và chỉ khi $\frac{N(x)}{N'(x)}$ và $\frac{N'(x)}{N(x)}$ bị chặn khi x chạy khắp E - $\{0\}$. Bằng lập luận phản đảo ta suy ra rằng nếu tồn tại một dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của E - $\{0\}$ sao cho $\frac{N'(x_n)}{N(x_n)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, hoặc $\frac{N'(x_n)}{N(x_n)} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, thì N và N' không tương đương.



Thí dụ :
Các chuẩn $\|\cdot\|_1$, và $\|\cdot\|_\infty$ trên $E = C([0;1], \mathbb{R})$ (xem 1.1.1) không tương đương với nhau vì, nếu ta ký hiệu

$$f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \text{nếu } x \in [0;\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{nếu } x \in]\frac{1}{n};1] \end{cases}$$

với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, thì ta có:

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty.$$

■

♦ **Mệnh đề 2** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgvđc, N, N' là hai chuẩn trên E. Hai tính chất sau đây tương đương với nhau:

(i) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in E$, $N'(x) \le \alpha N(x)$

(ii) Mọi dãy $(x_n)_n$ hội tụ đến 0 trong (E, N) cũng hội tụ đến 0 trong (E, N').

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii):

Giả sử tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho: $\forall x \in E$, $N'(x) \le \alpha N(x)$.

Cho $(x_n)_n$ là một dãy hội tụ đến 0 trong (E, N), tức là sao cho: $N(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vì: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le N'(x_n) \le \alpha N(x_n)$, nên ta suy ra $N'(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$, tức là $(x_n)_n$ hội tụ đến 0 trong (E, N').

(ii) ⇒ (i):

Ta chứng minh mệnh đề phản đảo, tức là: (không (i)) ⇒ (không (ii))

Giả thiết: $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in E$, $N'(x) > \alpha N(x)$

Áp dụng giả thiết này cho $\alpha = n$, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta suy ra rằng tồn tại $u_n \in E$ sao cho:

$$N'(u_n) > nN(u_n).$$

Nói riêng: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta ký hiệu $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}N(u_n)} u_n$.

Một mặt: $N(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, vậy $(x_n)_n$ hội tụ đến 0 trong (E, N).

Mặt khác thì: $N'(x_n) = \dfrac{N'(u_n)}{\sqrt{n}N(u_n)} > \sqrt{n}$,

do đó $(x_n)_n$ không hội tụ đến 0 trong (E, N'). ■

Nhận xét:

Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, N, N' là hai chuẩn trên E, $\mathcal{O}$ (tương ứng: $\mathcal{O}'$) là tôpô của (E,N) (tương ứng: (E,N')) (xem 1.1.5, *I*), phần tổng quát hóa). Ta có:

$$N \sim N' \Leftrightarrow \mathcal{O} = \mathcal{O}'.$$

Thực vậy:

1) Giả thiết $N \sim N'$; tồn tại $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ sao cho:

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x).$$

Cho $\Omega \in \mathcal{O}$, $a \in \Omega$; tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B_N(a; r) \subset \Omega$. Điều này chứng tỏ rằng Ω là lân cận của mọi điểm thuộc (E, N'), do đó $\Omega \in \mathcal{O}'$. Quan hệ bao hàm này chứng tỏ $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

Bằng cách hoán vai trò của $\mathcal{O}$ và $\mathcal{O}'$, ta thu được bao hàm thức ngược lại, và cuối cùng là $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

2) Ngược lại, giả thiết $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Ta có: $\quad \mathrm{B}_N(0; 1) \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$,

vậy $\quad \mathrm{B}_N(0; 1) \in V_{(E,N')}(0)$.

Như thế tồn tại $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $\mathrm{B}_{N'}(0; \rho) \subset \mathrm{B}_N(0; 1)$.

Với mọi x thuộc E - $\{0\}$ ta có:

$$N'\left(\frac{\rho}{2N'(x)}x\right) = \frac{\rho}{2} < \rho \Rightarrow \frac{\rho}{2N'(x)}x \in \mathrm{B}_{N'}(0; \rho) \subset \mathrm{B}_N(0; 1)$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{\rho}{2N'(x)}x\right) < 1 \Rightarrow \frac{\rho}{2}N(x) < N'(x).$$

Điều này chứng tỏ rằng tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $(\alpha = \frac{\rho}{2})$ sao cho:

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \le N'(x).$$

Bằng cách hoán vị các vai trò của N và N', ta chứng tỏ được sự tồn tại của $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in E, \quad N'(x) \le \beta N(x).$$

Cuối cùng, N và N' tương đương với nhau. Xem thêm 1.2.6, Mệnh đề 2.

Bài tập

◊ **1.1.14** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $a < b$, $E = C([a; b], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_\infty$ là những chuẩn trên E xác định bởi:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[a;b]}|f(t)|$$

(xem 1.1.1, 1)).

a) Chứng minh: $\quad \forall f \in E, \quad \begin{cases} \|f\|_1 \le (b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2 \\ \|f\|_2 \le (b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_\infty \end{cases}$.

b) Chứng minh rằng $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ từng đôi một không tương đương.

◊ **1.1.15** Cho E là tập hợp các ánh xạ f liên tục từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ sao cho các ánh xạ f và f^2 đều khả tích trên $\mathbb{R}$.

Xét các ánh xạ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2: E \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Chứng minh rằng $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là những chuẩn trên E.

b) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử thuộc $E - \{0\}$ thỏa mãn: $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} \underset{n\infty}{\to} 0$ và $\frac{\|g_n\|_1}{\|g_n\|_2} \underset{n\infty}{\to} +\infty$.

Như vậy cả hai tỷ số $\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2}$ và $\frac{\|\cdot\|_2}{\|\cdot\|_1}$ đều không bị chặn trên $E - \{0\}$.

Hãy so sánh với bài tập 1.1.14.

◊ **1.1.16** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$; với mỗi φ thuộc E ta ký hiệu $N_\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 |f\varphi| \end{array}$.

a) Xác định một điều kiện cần và đủ đối với φ để cho N_φ là một chuẩn.

b) Xác định một điều kiện cần và đủ đối với φ để cho N_φ và N_1 là những chuẩn tương đương.

c) Với $(\varphi, \psi) \in E^2$, hãy xác định một điều kiện cần và đủ đối với (φ, ψ) để cho N_φ và N_ψ là những chuẩn tương đương.

◊ **1.1.17** Cho $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$, $\varphi \in E$ thỏa mãn $\int_0^1 \varphi \neq 0$. Ta ký hiệu $N, N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ là các ánh xạ xác định bởi: $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$, $\quad N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f\varphi\right| + \int_0^1 |f'|$.

Chứng minh rằng N, N_φ là những chuẩn trên E, và chúng tương đương.

◊ **1.1.18** Cho E là tập hợp các ánh xạ f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $[0;1]$, và thỏa mãn $f(0) = 0$, N_∞, N'_∞: $E \to \mathbb{R}$ là các ánh xạ xác định bởi:

$$N_\infty(f) = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|, \qquad N'_\infty(f) = \sup_{t\in[0;1]} |f'(t)|.$$

Chứng minh rằng N_∞ và N'_∞ là những chuẩn trên E, nhưng chúng không tương đương.

◊ **1.1.19** Cho $p \in \mathbb{N}^*$, $E = C^p([0; 1], \mathbb{R})$, và ánh xạ $\nu_k : E \to \mathbb{R}$ xác định với mọi k thuộc $\{0,..., p\}$ bởi:

$$\nu_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \left|f^{(i)}(0)\right| + \sup_{t\in[0;1]} \left|f^{(k)}(t)\right|$$

Kiểm chứng lại rằng $\nu_0, ..., \nu_p$ là những chuẩn trên E, và hãy so sánh chúng với nhau (ở đây $\nu_0 = \|\cdot\|_\infty$).

◊ **1.1.20** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \end{array}$, $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \end{array}$

(hãy chứng minh rằng $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{t}}$ khả tích trên $]0;1]$).

a) Chứng minh rằng $\|\,.\,\|$ là một chuẩn trên E.

b) $\|\,.\,\|$ và $\|\,.\,\|_1$ có tương đương không?

◊ **1.1.21** Với mọi dãy $L = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ta cho liên kết ánh xạ $N_L : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}$ đặt tương ứng mọi đa thức $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ với $N_L(P) = \sum_{k=0}^{N} |\lambda_k a_k|$.

a) Tìm điều kiện cần và đủ để N_L là một chuẩn.

b) Cho $L = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$, $M = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$; tìm điều kiện cần và đủ đối với L, M để N_L và N_M là những chuẩn tương đương.

1.1.7 Miền trong, bao đóng, biên

Cho $(E, \|\,.\,\|)$, một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\|\,.\,\|$.

♦ **Định nghĩa 1** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$.

1) **Miền trong của A, ký hiệu là $\mathring{A}$, là hợp của các tập mở của E bao hàm trong A:**

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{\Omega:\ \text{tập mở của } E \\ \Omega \subset A}} F.$$

Các phần tử của $\mathring{A}$ được gọi là **điểm trong của A.**

2) **Bao đóng** của A, ký hiệu là $\overline{A}$, là giao của các bộ phận đóng của E có chứa A:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F:\ \text{tập đóng của } E \\ F \supset A}} F$$

Các phần tử của $\overline{A}$ được gọi là **điểm dính** của A.

3) **Biên** của A, ký hiệu là $\partial(A)$, là bộ phận của E xác định bởi:

$$\partial(A) = \complement_{\overline{A}}(\mathring{A}) = \overline{A} - \mathring{A}$$

Các phần tử của $\partial(A)$ được gọi là **điểm biên** của A.

♦ **Mệnh đề 1** Với mọi bộ phận A của E:

(i) a) $\complement_E(\mathring{A}) = \overline{\complement_E(A)}$

b) $\complement_E(\overline{A}) = \left(\complement_E(A)\right)^{\circ}$

(ii) a) $\mathring{A}$ là tập mở lớn nhất của E (theo nghĩa bao hàm) bao hàm trong A.

b) $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất của E (theo nghĩa bao hàm) có chứa A.

(iii) a) A mở khi và chỉ khi $A = \mathring{A}$.

b) A đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.

(iv) $\partial(A)$ là một tập đóng của E.

Chứng minh:

i)a) $$\complement_E(\mathring{A}) = \complement_E\left(\bigcup_{\substack{\Omega:\text{ tập mở của } E\\ \Omega\subset A}} \Omega\right) = \bigcap_{\substack{\Omega:\text{ tập mở của } E\\ \Omega\subset A}} \complement_E(\Omega) =$$

$$= \bigcap_{\substack{F:\text{ tập đóng của } E\\ F\supset \complement_E(A)}} F = \overline{\complement_E(A)}.$$

b) Áp dụng a) cho $\complement_E(A)$ thay vì A, ta được:

$$\complement_E(\overline{A}) = \complement_E\left(\overline{\complement_E\left(\complement_E(A)\right)}\right) = \complement_E\left(\complement_E\left(\left(\complement_E(A)\right)^{\circ}\right)\right) = \left(\complement_E(A)\right)^{\circ}.$$

(ii) a) • $\mathring{A}$ là một hợp của những tập mở, do đó là một tập mở.

• Hiển nhiên là $\mathring{A} \subset A$.

• Cho Ω_1 là một tập mở của E sao cho $\Omega_1 \subset A$; ta có:

$$\Omega_1 \subset \bigcup_{\substack{\Omega:\text{ tập mở của } E\\ \Omega\subset A}} \Omega = \mathring{A}.$$

b) Suy ra từ a) bằng cách chuyển qua các phần bù.

(iii) a) • Nếu A mở thì $\displaystyle\bigcup_{\substack{\Omega:\text{ tập mở của } E\\ \Omega\subset A}} \Omega = A$, vì lẽ A cũng có mặt trong hợp đang xét, do đó $\mathring{A} = A$.

• Ngược lại, nếu $\mathring{A} = A$ thì vì $\mathring{A}$ là một tập mở nên A cũng là một tập mở.

b) Suy ra từ a) bằng cách chuyển qua các phần bù.

(iv) $\partial(A) = \overline{A} - \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement_E(\mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{\complement_E(A)}$ là giao của hai tập đóng.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$. Ta có:

(i) $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}_E(x)$

(ii) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\ V \cap A \neq \varnothing)$.

Chứng minh:

(i) • Giả sử $x \in \mathring{A}$; vậy tồn tại một tập mở Ω của E sao cho $\Omega \subset A$ và $x \in \Omega$. Như thế ta có:

$$\Omega \in \mathcal{V}_E(x) \quad \text{và} \quad \Omega \subset A,$$

và ta suy ra $A \in \mathcal{V}_E(x)$.

• Đảo lại, giả thiết $A \in \mathcal{V}_E(x)$. Tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B(x; r) \subset A$. Như vậy:

$$B(x; r) \subset \bigcup_{\substack{\Omega:\ \text{tập mở của } E \\ \Omega \subset A}} \Omega = \mathring{A},$$

vậy $x \in \mathring{A}$.

(ii) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in \complement_E\left(\left(\complement_E(A)\right)^{\circ}\right) \Leftrightarrow$ Không$\left(\exists V \in \mathcal{V}(x),\ V \subset \complement_E(A)\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \not\subset \complement_E(A)\right) \Leftrightarrow \left(\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing\right).$$

♦ **Mệnh đề 3** Với mọi bộ phận A, B của E ta có:

(i) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (i') $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

(ii) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ (ii') $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (iii') $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (iv') $(A \cup B)^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Chứng minh:

(i) $\overline{A}$ đóng vì $\overline{A}$ là giao của một họ những tập đóng.

(ii) Giả thiết $A \subset B$; $\overline{B}$ là một tập đóng chứa B, do đó chứa A. Vì $\overline{A}$ là tập đóng của E nhỏ nhất có chứa A, nên ta có $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) • $\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

• $\overline{A} \cup \overline{B}$ là một tập đóng của E chứa $A \cup B$, và $\overline{A \cup B}$ là tập đóng của E nhỏ nhất có chứa $A \cup B$, vậy $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iv) $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A \cup B}$.

Ta chứng minh các tính chất từ (i') đến (iv') bằng cách chuyển qua các phần bù trong các tính chất từ (i) đến (iv); chẳng hạn:

$$\complement_E\left((A \cap B)^{\circ}\right) = \overline{\complement_E(A \cap B)} = \overline{\complement_E(A) \cup \complement_E(B)} =$$

$$= \overline{\complement_E(A)} \cup \overline{\complement_E(B)} = \complement_E(\mathring{A}) \cup \complement_E(\mathring{B}) = \complement_E(\mathring{A} \cap \mathring{B}).$$

***Nhận xét*:**
Bao hàm thức ngược lại trong tính chất (iv) (hoặc (iv')) có thể sai, chẳng hạn như trong thí dụ: $E = \mathbb{R}$ thông thường, $A = \mathbb{R}_-^*$, $B = \mathbb{R}_+^*$, $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$.

♦ **Định nghĩa 2** Một bộ phận A của E được gọi là **trù mật trong** E khi và chỉ khi $\overline{A} = E$.

Thí dụ:

1) Trong $\mathbb{R}$ thông thường thì $\mathbb{Q}$ và $\complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ đều trù mật trong $\mathbb{R}$ (xem Tập 1, 1.2.3, *4)* và *5)*).

2) $\mathbb{Q}^2$ trù mật trong $\mathbb{R}^2$.

Bài tập

◊ **1.1.22** Cho E là một kgvđc, Ω là một tập mở của E, $\lambda \in \mathbb{K}^*$; chứng minh rằng $\lambda\Omega$ là một tập mở của E.

◊ **1.1.23** Cho E là một kgvđc, $A \in \mathfrak{P}(E)$; chứng minh rằng $A \cup \complement_E(\overline{A})$ trù m trong E.

◊ **1.1.24** Cho E là một kgvđc, $A, B \in \mathfrak{P}(E)$; giả thiết A và B trù mật trong E $A \cap B = \varnothing$. Chứng minh rằng $\mathring{A} = \mathring{B} = \varnothing$.

◊ **1.1.25** Cho E là một kgvđc, $A, B \in \mathfrak{P}(E)$; giả thiết A mở và A, B trù mật trong E. Chứng minh rằng $A \cap B$ trù mật trong E.

◊ **1.1.26** Hãy cho một thí dụ về các bộ phận đóng A, B của $\mathbb{R}$ sao cho:

$$A \cup \mathring{B}, \quad \mathring{A} \cup B, \quad (A \cup B)^\circ, \quad \mathring{A} \cup \mathring{B}$$

khác nhau từng đôi một.

◊ **1.1.27** Hãy cho một thí dụ về một bộ phận A của $\mathbb{R}$ sao cho 14 bộ phận sau đây của $\mathbb{R}$ khác nhau từng đôi một:

$$A, \quad \overline{A}, \quad \mathring{A}, \quad \overline{\mathring{A}}, \quad \mathring{\overline{A}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \quad \overline{\mathring{\overline{A}}}, \quad \complement_E(A), \quad \complement_E(\overline{A}), \quad \complement_E(\mathring{A}),$$

$$\complement_E\left(\overline{\mathring{A}}\right), \quad \complement_E\left(\mathring{\overline{A}}\right), \quad \complement_E\left(\mathring{\overline{\mathring{A}}}\right), \quad \complement_E\left(\overline{\mathring{\overline{A}}}\right).$$

◊ **1.1.28** Trong tập $\mathbb{R}$ thông thường ta xét:

$$A = \left\{\frac{1}{x+n} + \frac{1}{2^n}; \quad (x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*\right\}.$$

Tính $\mathring{A}$ và $\overline{A}$.

◊ **1.1.29** Cho E là một kgvđc.

a) α) Chứng minh rằng với mọi tập mở U, V của E ta có:

$\mathring{\overline{U \cap V}} = \mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}}$.

β) Từ đó suy ra rằng, với mọi tập đóng F, G của E:

$\overline{(F \cup G)^\circ} = \overline{\mathring{F}} \cap \overline{\mathring{G}}$.

b) Suy ra rằng với mọi bộ phận A, B của E ta có:

$$\mathring{\overline{\mathring{(A \cap B)}}} = \mathring{\overline{\mathring{A}}} \cap \mathring{\overline{\mathring{B}}} \quad \text{và} \quad \overline{\mathring{\overline{A \cup B}}} = \overline{\mathring{\overline{A}}} \cup \overline{\mathring{\overline{B}}}.$$

◊ **1.1.30** Cho E là $\mathbb{R}$-kgv các ánh xạ liên tục từ $[0; +\infty[$ tới $\mathbb{R}$ và F là bộ phận của E tạo nên bởi các ánh xạ liên tục đều từ $[0; +\infty[$ tới $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $\mathring{F} = \varnothing$, với giả thiết là E được trang bị một chuẩn nào đó.

◊ **1.1.31** Cho E là một kgvđc, A và B là hai bộ phận của E sao cho $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Chứng minh rằng:

$$\partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B).$$

◊ **1.1.32** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$, với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, $A = \{f \in E;\ \forall x \in [0; 1], f(x) \neq 0\}$.

Tính $\mathring{A}$ và $\overline{A}$.

◊ **1.1.33** Cho c_0 và $\mathbb{C}$-kgv các dãy số phức hội tụ đến 0, với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, và A là tập hợp các dãy số phức có giá hữu hạn, tức là:

$A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow u_n = 0)\}$.

Xác định $\mathring{A}$, $\overline{A}$ và $\partial(A)$.

◊ **1.1.34*** **Bộ phận đóng địa phương**

Cho E là một kgvđc, $A \in \mathfrak{P}(E)$; chứng minh rằng hai tính chất sau đây tương đương:

(i) Với mọi a thuộc A, tồn tại một lân cận V (trong E) của a sao cho $V \cap A$ là một tập đóng trong V.

(ii) Tồn tại Ω là một tập mở của E và một tập đóng F của E sao cho

$$A = \Omega \cap F.$$

Nếu A thỏa mãn (i) hoặc (ii) thì ta nói rằng A là một bộ phận **đóng địa phương** của E.

1.1.8 Khoảng cách từ một điểm đến một bộ phận khác rỗng của một kgvđc

Cho $(E, \| \cdot \|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\| \cdot \|$.

◆ **Định nghĩa 1** Cho $x \in E$, A là một bộ phận khác rỗng của E; **khoảng cách từ** x **đến** A là số thực ký hiệu là $d(x,A)$, xác định bởi:

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$$

Tập hợp $\{d(x,a);\ a \in A\}$ là một tập hợp khác rỗng của $\mathbb{R}$, bị chặn dưới bởi 0, do đó có biên dưới.

Nhận xét:

Có thể xảy ra trường hợp "không đạt tới" $d(x, a)$, tức là không tồn tại phần tử α nào của A thỏa mãn $d(x,A) = d(x, \alpha)$; chẳng hạn trong $\mathbb{R}$ thông thường, $A = [0; 1[$, $x = 2$.

◆ **Mệnh đề** Cho $x \in E$, A là một bộ phận khác rỗng của E; ta có:

$$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}.$$

Chứng minh:

1) Giả sử $d(x,A) = 0$. Cho $V \in \mathcal{V}_E(x)$; tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B(x; r) \subset V$, và do $d(x,A) = 0 < r$, nên tồn tại $a \in A$ sao cho $d(x, a) < r$. Như thế ta có:

$$a \in B(x; r) \subset V,$$

và $a \in A$, vì vậy $V \cap A \neq \varnothing$. Điều này chứng tỏ rằng $\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \varnothing$, và do đó (xem 1.1.7, Mệnh đề 2), $x \in \overline{A}$.

2) Ngược lại, giả thiết $x \in \overline{A}$. Cho $\varepsilon > 0$; ta có: $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ (xem 1.1.7, Mệnh đề 2).

Vậy tồn tại $a \in A$ sao cho $d(x, A) < \varepsilon$; từ đó suy ra $d(x,A) \le d(x,a) < \varepsilon$.
Như thế: $\forall \varepsilon > 0, 0 \le d(x,A) < \varepsilon$, và do vậy $d(x,A) = 0$.

♦ **Định nghĩa 2** Cho A, B là hai bộ phận khác rỗng của E; **khoảng cách giữa** A **và** B là số thực ký hiệu là $d(A,B)$, xác định bởi:

$$d(A,B) = \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in A\times B} d(a,b).$$

Định nghĩa này hợp lệ vì tập hợp $\{d(a,b);\ (a,b) \in A\times B\}$ là một bộ phận khác rỗng của $\mathbb{R}$, bị chặn dưới bởi 0, nên có biên dưới.
Nói riêng, với mọi x thuộc E và mọi bộ phận khác rỗng A của E ta có:

$$d(x,A) = d(\{x\},A).$$

Nhận xét:

1) Ánh xạ $\begin{array}{ccc}(\mathfrak{P}(E)-\{\varnothing\})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & d(A,B)\end{array}$ có thể không phải là một khoảng cách (xem 1.1.1, 2), Nhận xét) trên tập hợp $\mathfrak{P}(E) - \{\varnothing\}$. Thực vậy, có thể xảy ra trường hợp $d(A,B) = 0$ và $A \neq B$; chẳng hạn trong $\mathbb{R}$ thông thường với $A = \mathbb{R}_-$, $B = \mathbb{R}_+$
Hơn nữa còn có thể xảy ra trường hợp $d(A,C) > d(A,B) + d(B,C)$; chẳng hạn trong $\mathbb{R}$ thông thường, $A =]-\infty; -1]$, $B =]-2; 2[$, $C = [1; +\infty[$.

2) Có thể xảy ra trường hợp $A \cap B = \varnothing$ và $d(A,B) = 0$; chẳng hạn trong $\mathbb{R}$ thông thường:

$$A = [-1;0[\,, \qquad B =]0; 1].$$

Bài tập

◊ **1.1.35** Cho E là một kgvđc, A, B là hai bộ phận khác rỗng của E, d_A : $\begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,A)\end{array}$, cũng tương tự đối với d_B. Chứng minh:

$$d_A = d_B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} = \overline{B}.$$

◊ **1.1.36** Cho E là một kgvđc, A, B là hai bộ phận khác rỗng và giới nội của E. Chứng minh:

$$\operatorname{diam}(A\cup B) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A,B).$$

◊ **1.1.37** Cho E là một kgvđc, A, B là hai bộ phận khác rỗng của E; C, D là hai bộ phận của E thỏa mãn:

$$A \subset C \subset \overline{A} \qquad \text{và} \qquad B \subset D \subset \overline{B}.$$

Chứng minh: $d(C,D) = d(A,B)$.

1.1.9 Dãy trong một kgvđc

Trong tiết này chúng ta sẽ tổng quát hóa một số kết quả liên quan đến các dãy số (xem Tập 1, 3.1).
Cho $(E, \| \cdot \|)$ là một kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\| \cdot \|$.
Dãy trong E là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ tới E, thường hay được ký hiệu là $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (hoặc $(u_n)_{n\geq 0}$, hoặc $(u_n)_n$) thay vì $u: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to E \\ n \mapsto u(n) \end{array}$. Người ta cũng còn gọi mọi ánh xạ từ $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\}$ đến E, trong đó $n_0 \in \mathbb{N}$ cố định, là dãy trong E; hầu hết các khái niệm sẽ nghiên cứu trong tiết này chỉ đề cập đến các u_n "kể từ một chỉ số nhất định".

1) Dãy hội tụ, dãy phân kỳ

♦ **Định nghĩa**

1) Ta nói rằng một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trong E **hội tụ** đến một phần tử l của E khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

2) Ta nói rằng một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E **hội tụ** (trong E) khi và chỉ khi tồn tại $l \in E$ sao cho dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l, tức là:

$$\exists l \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

3) Ta nói rằng một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E **phân kỳ** khi và chỉ khi dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ, tức là:

$$\forall l \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} n \geq N \\ d(u_n, l) > \varepsilon \end{cases}$$

Nhận xét:
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l khi và chỉ khi dãy số $(d(u_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0.

♦ **Mệnh đề 1** **("Tính duy nhất của giới hạn" nếu tồn tại)**

Nếu một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E hội tụ đến l_1 và hội tụ đến l_2, thì $l_1 = l_2$.

Chứng minh:
Giả thiết $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một phần tử l_1 và hội tụ đến một phần tử l_2, và $l_1 \neq l_2$.

Ký hiệu $\varepsilon = \frac{1}{3} d(l_1, l_2) > 0$. Tồn tại $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_1 \Rightarrow d(u_n, l_1) \leq \varepsilon) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_2 \Rightarrow d(u_n, l_2) \leq \varepsilon) \end{cases}$$

Với ký hiệu $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$ ta thu được: $\begin{cases} d(u_N, l_1) \le \varepsilon \\ d(u_N, l_2) \le \varepsilon \end{cases}$

từ đó suy ra : $d(l_1, l_2) \le d(l_1, u_N) + d(l_2, u_N) \le \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon = d(l_1, l_2)$,

mâu thuẫn.

Mệnh đề trên chứng tỏ rằng ta có thể sử dụng một ký pháp hàm tính: nếu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l, thì ta nói rằng l là **giới hạn** của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, và ta ký hiệu $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$ (hoặc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$), hay $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$, hoặc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$).

Nhận xét:
Nếu hai dãy trùng nhau kể từ một chỉ số nhất định, thì chúng có cùng bản chất, tức là tính hội tụ của một trong hai dãy đó kéo theo tính hội tụ của dãy kia, và ngược lại. Nói cách khác, ta không làm thay đổi bản chất (tính hội tụ, tính phân kỳ) của một dãy nếu ta thay đổi các số hạng của nó cho tới một chỉ số nhất định.

♦ **Mệnh đề 2** **(Dãy có số hạng trong một tích hữu hạn những kgvđc)**

Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $E_1,\ldots, E_N$ là những kgvđc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $\prod\limits_{k=1}^{N} E_k$, $l \in \prod\limits_{k=1}^{N} E_k$; với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$ ta ký hiệu:

$$(x_{1,n},\ldots, x_{N,n}) = x_n \quad \text{và} \quad (l_1,\ldots, l_N) = l.$$

Khi đó ta có:

$$x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow (\forall k \in \{1,\ldots, N\}, x_{k,n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l_k).$$

Chứng minh:

Chỉ cần chú ý rằng: $\|x_n - l\|_\infty = \underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}} \|x_{k,n} - l_k\|$.

2) Các tính chất của các dãy hội tụ

♦ **Mệnh đề 1**

Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

Chứng minh:

Giả thiết $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$; tồn tại $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \ge N \Rightarrow d(u_n,l) \le 1)$.

Vậy với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$ ta có:

$$\|u_n\| \leq \|u_n - l\| + \|l\| \leq 1 + \|l\|.$$

Với ký hiệu $M = \text{Max}(\|u_0\|, ..., \|u_N\|, 1 + \|l\|)$, ta có thể kết luận rằng:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Nhận xét:

Tồn tại những dãy bị chặn nhưng phân kỳ; chẳng hạn như: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong tập $\mathbb{K}$ thông thường.

♦ **Mệnh đề 2** **(Các tính chất đại số của các dãy hội tụ)**

Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy trong E, kgvđc, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{K}$, $l, l' \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ta có:

1) $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l \Rightarrow \|u_n\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} \|l\|$

2) $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \|u_n\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

3) $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l \\ v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l + l'$

4) $\left.\begin{array}{l} \lambda_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (v_n)_n \quad \text{bị chặn} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

5) $\left.\begin{array}{l} (\lambda_n)_n \quad \text{bị chặn} \\ v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

6) $\left.\begin{array}{l} \lambda_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \lambda \\ v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \lambda l'$

Chứng minh:

1) Suy ra từ: $\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|\, \|u_n\| - \|l\| \,\big| \leq \|u_n - l\|$.

2) Hiển nhiên.

3) Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N, N' \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N' \Rightarrow \|v_n - l'\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}) \end{cases}$$

Nếu ký hiệu $N_0 = \text{Max}(N, N')$ thì ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N_0 \Rightarrow \|(u_n + v_n) - (l + l')\| \leq \|u_n - l\| + \|v_n - l'\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon).$$

Như vậy: $u_n + v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l + l'$.

4) Tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|v_n\| \leq M$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Rightarrow |\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon}{M+1}).$$

Như thế: $\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Rightarrow \|\lambda_n v_n\| = |\lambda_n| \, \|v_n\| \leq \frac{\varepsilon}{M+1} M \leq \varepsilon)$,

và do vậy : $\lambda_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

5) Phép chứng minh tương tự như ở 4).

6) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta ký hiệu:

$$\alpha_n = \lambda_n - \lambda \quad \text{và} \quad w_n = v_n - l',$$

kết quả là: $\alpha_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ và $w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ (xem 3)). Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n v_n = (\lambda + \alpha_n)(l' + w_n) = \lambda l' + \lambda w_n + \alpha_n v_n.$$

Theo 5) ta có : $\lambda w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$;

và theo 4) : $\alpha_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$;

Suy ra (xem 3)): $\lambda_n v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \lambda l'$.

♦ **Mệnh đề 3** **(Đặc trưng bao đóng bằng dãy)**

Cho $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$. Để cho $x \in \overline{A}$, điều kiện cần và đủ là tồn tại một dãy những phần tử của A hội tụ đến x.

Chứng minh:

1) Giả thiết $x \in \overline{A}$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có: $B(x; \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$; vậy tồn tại một dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những phần tử của A sao cho: ($\forall n \in \mathbb{N}^*, \ d(x, a_n) < \frac{1}{n}$), vậy hội tụ đến x.

2) Đảo lại, giả sử tồn tại một dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của A hội tụ đến x, và cho $V \in \mathcal{V}_E(x)$. Tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x; r) \subset V$ và tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Rightarrow d(x, a_n) \leq \frac{r}{2} < r).$$

Nói riêng: $a_{N+1} \in B(x; r) \subset V$. Điều này chứng tỏ rằng $V \cap A \neq \varnothing$

Như thế ta có:

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \varnothing,$$

từ đó suy ra rằng $x \in \overline{A}$ (xem 1.1.7, Mệnh đề 2 (ii)).

◆ **Hệ quả** Một bộ phận A của E là đóng khi và chỉ khi mọi dãy với phần tử thuộc A mà hội tụ trong E thì cũng hội tụ trong A.

3) Giới hạn riêng của một dãy hội tụ

◆ **Định nghĩa 1**

- **Hàm trích** là mọi ánh xạ $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tăng nghiêm ngặt.
- Cho dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trong E, **dãy con** của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là mọi dãy $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ trong đó σ là một hàm trích.

Nhận xét:

1) Với mọi hàm trích σ ta có: $\forall n\in \mathbb{N}$, $\sigma(n) \geq n$.

2) Nếu σ và τ là những hàm trích thì $\tau \circ \sigma$ là một hàm trích. Như vậy mọi dãy con trích ra từ một dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng là một dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◆ **Mệnh đề 1** Nếu một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E hội tụ đến một phần tử l của E, thì mọi dãy con của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng hội tụ tới l.

Chứng minh:

Giả thiết $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$, và cho một hàm trích σ.

Cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

Khi đó ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow \sigma(n) \geq \sigma(N) \geq N \Rightarrow d(u_{\sigma(n)}, l) \leq \varepsilon)$.
và do đó $u_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$.

Nhận xét:

Phản đảo của Mệnh đề 1 trên đây cho phép ta chứng minh tính phân kỳ của một số dãy. Chẳng hạn trong $\mathbb{R}$ thông thường thì $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ phân kỳ, vì các dãy con tạo bởi các số hạng có chỉ số chẵn và các số hạng có chỉ số lẻ hội tụ đến những giới hạn khác nhau, 1 và -1.

Mệnh đề sau đây thường tiện lợi trong thực tế.

◆ **Mệnh đề 2** Cho một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E, $l \in E$.

Để dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l, điều kiện cần và đủ là các dãy con $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ và $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ đều hội tụ tới l.

Chứng minh:

- Một hướng của tương đương thức chính là hệ quả của Mệnh đề 1.

- Ngược lại, giả sử $u_{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$, và $u_{2n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, & (p \geq N_1 \Rightarrow d(u_{2p}, l) \leq \varepsilon) \\ \forall p \in \mathbb{N}, & (p \geq N_2 \Rightarrow d(u_{2p+1}, l) \leq \varepsilon) \end{cases}$$

Ký hiệu $N = \text{Max}(2N_1, 2N_2+1)$, và cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$. Tồn tại $p \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 2p$ hoặc $n = 2p+1$.
Trong trường hợp thứ nhất ($n = 2p$) thì ta có $2p \geq 2N_1$, do đó $p \geq N_1$, suy ra $d(u_n, l) = d(u_{2p}, l) \leq \varepsilon$. Trong trường hợp thứ hai ($n = 2p+1$) thì ta có $2p+1 \geq 2N_2+1$, do đó $p \geq N_2$, suy ra $d(u_n, l) = d(u_{2p+1}, l) \leq \varepsilon$.
Điều này chứng tỏ rằng $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$.

♦ Định nghĩa 2

Cho một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E, $a \in E$.

Ta nói rằng a là một **giới hạn riêng** của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi tồn tại một hàm trích σ sao cho $u_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$.

Nhận xét:
Theo Mệnh đề 2 thì mọi dãy có ít nhất hai giới hạn riêng khác nhau đều phân kỳ.

Phần nghiên cứu dưới đây về các giới hạn riêng (cho tới cuối tiết) không thuộc chương trình.

♦ Mệnh đề 3

Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong E, $a \in E$.
Các tính chất sau đây từng đôi một tương đương:

(i) a là một giới hạn riêng của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) Với mọi $\varepsilon > 0$, tập hợp $\{n \in \mathbb{N} ; d(u_n, a) \leq \varepsilon\}$ vô hạn

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geq N \\ d(u_n, a) \leq \varepsilon \end{cases}$

Chứng minh:
(i) $\Rightarrow$ (ii):
Cho a là một giới hạn riêng của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tồn tại một hàm trích σ sao cho $u_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Rightarrow d(u_{\sigma(n)}, a) \leq \varepsilon).$$

Khi đó $\{n \in \mathbb{N} ; d(u_{\sigma(n)}, a) \leq \varepsilon\}$ bao hàm tập $\{\sigma(n); n \geq N\}$, chính tập này thì vô hạn (vì σ là đơn ánh), do đó cũng là vô hạn.

(ii) ⇒ (iii):
Cho $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Vì tập $\{n \in \mathbb{N}\,;\, n < N\}$ hữu hạn và do tập $\{n \in \mathbb{N}\,;\, d(u_n, a) \le \varepsilon\}$ vô hạn, nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho: $d(u_n, a) \le \varepsilon$ và $n \ge N$.

(iii) ⇒ (i):
Giả sử với mọi (ε, N) thuộc $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ ta có:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ ,\ (n \ge N \text{ và } d(u_n, a) \le \varepsilon),$$

tính chất này ta sẽ ký hiệu là $\mathcal{P}(\varepsilon, N)$.
Ta xây dựng một ánh xạ σ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ theo cách sau đây:

- áp dụng $\mathcal{P}(1, 0)$: tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n_0 \ge 0$ và $d(u_{n_0}, a) \le 1$
- áp dụng $\mathcal{P}(\frac{1}{2}, n_0+1)$: tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n_1 \ge n_0 + 1$ và $d(u_{n_1}, a) \le \frac{1}{2}$

  ...
  ...
  ...
- sau khi đã xác định $n_0, n_1, \ldots, n_k$, ta xác định n_{k+1} bằng cách áp dụng $\mathcal{P}(\frac{1}{k+1}, n_k+1)$: tồn tại $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$n_{k+1} \ge n_k + 1 \text{ và } d(u_{n_{k+1}}, a) \le \frac{1}{k+1}.$$

Ánh xạ σ: $\underset{k}{\mathbb{N}} \xrightarrow[\mapsto]{} \underset{n_k}{\mathbb{N}}$ tăng nghiêm ngặt, và $u_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\infty]{} a$.
Như thế a là một giới hạn riêng của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Ta ký hiệu tập hợp các giới hạn riêng của một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E là GHR$((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

♦ **Mệnh đề 4**

$$\text{GHR}((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p\,;\, p \ge n\}}$$

Chứng minh:

1) Giả sử a là một giới hạn riêng của $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E và $n \in \mathbb{N}$; tồn tại một hàm trích σ sao cho $u_{\sigma(p)} \xrightarrow[p\infty]{} a$. Dãy $(u_{\sigma(p)})_{p\ge n}$ là dãy con của dãy $(u_p)_{p\ge n}$ (vì $p \ge n \Rightarrow \sigma(p) \ge \sigma(n)$) và hội tụ tới a, do đó $a \in \overline{\{u_p\,;\, p \ge n\}}$ (xem 2), Mệnh đề 3).
Như vậy: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\{u_p\,;\, p \ge n\}}$, vậy:

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p\,;\, p \ge n\}}.$$

2) Ngược lại, cho $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p\,;\, p \ge n\}}$.

Cho $\varepsilon > 0$ và $N \in \mathbb{N}$; vì $a \in \overline{\{u_p; p \geq n\}}$, nên $B(a; \varepsilon) \cap \{u_p; p \geq N\} \neq \varnothing$ (xem 1.1.7, Mệnh đề 2, (ii)). Như thế ta có:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\quad (p \geq N \text{ và } d(u_p, a) < \varepsilon).$$

Điều này chứng tỏ rằng (xem 1.1.9, 3), Mệnh đề 3) a là một giới hạn riêng của $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

♦ **Hệ quả**

GHR($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) là một bộ phận đóng của E.

Dưới đây (1.3.1, Định nghĩa 1) ta sẽ thấy rằng nếu $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lấy giá trị trong một bộ phận compac của E, thì GHR($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) $\neq \varnothing$.

***Nhận xét*:**

Hệ quả trên đây chứng tỏ rằng GHR($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) $\subset \overline{\{u_n; n \in \mathbb{N}\}}$.

Có thể xảy ra bao hàm thức ngặt; chẳng hạn như: $E = \mathbb{R}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

1.1.10 Bổ sung: điểm tụ, điểm cô lập

Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc và d là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$.

♦ **Định nghĩa 1** Cho $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng x là một **điểm cô lập của A trong E** khi và chỉ khi tồn tại một tập mở U của E sao cho:

$$U \cap A = \{x\}.$$

Nếu x là một điểm cô lập của A thì $x \in A$.

Ở đây ta sẽ ký hiệu tập hợp các điểm cô lập của A là A^*.

♦ **Định nghĩa 2** Cho $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng x là một **điểm tụ của A trong E** khi và chỉ khi :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x) \quad (V \cap A) - \{x\} \neq \varnothing.$$

Tập hợp các điểm tụ của của A trong E sẽ được ký hiệu là A'.

♦ **Mệnh đề** Cho $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$; các tính chất sau đây từng đôi một tương đương:

(i) x là một điểm tụ của A trong E

(ii) Tồn tại một dãy các phần tử của $A - \{x\}$ hội tụ tới x.

(iii) Mọi lân cận của x đều chứa vô hạn điểm của A.

Chứng minh:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Giả sử x là một điểm tụ của A trong E.

Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $a_k \in \mathrm{B}\left(x;\frac{1}{k+1}\right)$ sao cho $a_k \neq x$.

Theo cách đó ta xây dựng được một dãy $(a_n)_{n\geq 1}$ những phần tử của $A - \{x\}$, hội tụ đến x.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Giả sử tồn tại một dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của $A - \{x\}$, hội tụ tới x, và giả sử có $V \in \mathcal{V}_E(x)$. Tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $\mathrm{B}(x; r) \subset V$, và tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad (n \geq N \Rightarrow d(a_n, x) < r \Rightarrow a_n \in V).$$

Nếu $\{a_n; n \geq N\}$ hữu hạn thì ta có thể trích ra từ dãy $(a_n)_{n\geq N}$ một dãy hằng, do đó hội tụ đến một trong các a_n , $n \geq N$, điều này không thể xảy ra vì rằng dãy $(a_n)_{n\geq N}$ hội tụ tới x, và do các a_n, $n \geq N$, đều khác x.

Như vậy tập $\{a_n\ ; n \geq N\}$ vô hạn và bao hàm trong V.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Giả sử mọi lân cận của x trong E đều chứa vô hạn điểm thuộc A, và cho $V \in \mathcal{V}_E(x)$. Vì $V \cap A$ vô hạn nên $V \cap A$ chứa ít nhất hai điểm khác nhau, do đó $(V \cap A) - \{x\} \neq \varnothing$. ■

Nhận xét:

$$A^{\bullet} \subset A, \qquad \overline{A} - A \subset A', \qquad A^{\bullet} \cap A' = \varnothing, \qquad A^{\bullet} \cup A' = \overline{A}.$$

1.2 Giới hạn, tính liên tục

1.2.1 Giới hạn

Cho $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ là hai $\mathbb{K}$-kgvdc, d_E (tương ứng: d_F) là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|_E$ (tương ứng: $\|\cdot\|_F$).

♦ **Định nghĩa 1** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f: X \to F$, $l \in F$.
Ta nói rằng f **có giới hạn** l **tại** a khi và chỉ khi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall x \in X, \quad (d_E(x, a) \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

tức là: $\forall\, W \in \mathcal{V}_F(l), \exists\, V \in \mathcal{V}_E(a), \ \forall x \in X \cap V, \quad f(x) \in W.$

Chúng ta có thể tổng quát hóa dễ dàng định nghĩa trên đây cho trường hợp vô hạn:

- Nếu $f: [a\,; +\infty[\ \to F$ (trong đó $a \in \mathbb{R}$) và $l \in F$, thì ta nói rằng f có giới hạn l tại $+\infty$ khi và chỉ khi:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A > 0, \forall x \in [a\,; +\infty[, \quad (x \geq A \ \Rightarrow \ d_F(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

- Nếu $f: E \to F$ và $l \in F$, thì ta nói rằng f có giới hạn l khi $\|x\|_E$ dần tới $+\infty$ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0, \forall x \in E, \quad (\|x\|_E > A \Rightarrow d_F(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

- Nếu $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f: X \to \mathbb{R}$, thì ta nói rằng f có giới hạn $+\infty$ tại a khi và chỉ khi:

$$\forall A > 0, \exists\, \eta > 0, \forall x \in X, \quad (d_E(x, a) \leq \eta \ \Rightarrow f(x) \geq A).$$

Ta cũng định nghĩa tương tự cho trường hợp $-\infty$. ■

♦ **Mệnh đề 1** **("Tính duy nhất của giới hạn" nếu tồn tại)**
Nếu f có các giới hạn l và l' tại a, thì $l = l'$.

Chứng minh:
Ta lập luận phản chứng: giả thiết rằng f có các giới hạn tại a là l và l' và $l \neq l'$. Vậy tồn tại $W \in \mathcal{V}_F(l)$, và $W' \in \mathcal{V}_F(l')$ sao cho $W \cap W' = \varnothing$. Tiếp theo đó tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$, và $V' \in \mathcal{V}_E(a)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall x \in X \cap V, & f(x) \in W \\ \forall x \in X \cap V', & f(x) \in W' \end{cases}$$

Vì $V \cap V' \in \mathcal{V}_E(a)$, và do $a \in \overline{X}$, nên tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \in V \cap V'$. Như thế ta có:

$$f(x_0) \in W \cap W' = \varnothing,$$

mâu thuẫn. ■

Mệnh đề trên đây chứng tỏ rằng chúng ta có thể sử dụng một cách ký hiệu hàm tính: nếu f có giới hạn l tại a thì ta nói rằng l là **giới hạn** của f tại a, và viết:

$$l = \lim_{x\to a} f(x), \quad \text{hay } l = \lim_a f, \quad \text{hay } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l, \text{ hay } f \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

♦ **Mệnh đề 2** Nếu $f: X \to F$ có giới hạn hữu hạn tại a ($a \in \overline{X}$), thì f bị chặn trong lân cận của a, tức là:

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(a),\ \exists C \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X \cap V, \qquad \|f(x)\|_F \leq C.$$

Chứng minh:
Tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho:

$$\forall x \in X, \quad (x \in V \Rightarrow d_F(f(x), l) \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq (\|l\|_F + 1).$$

♦ **Mệnh đề 3** **(Diễn tả giới hạn của hàm bằng dãy)**
Để cho $f: X \to F$ có giới hạn hữu hạn l tại a ($a \in \overline{X}$), điều kiện cần và đủ là ta có $f(u_n) \underset{n\infty}{\rightarrow} l$ với mọi dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X thỏa mãn $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a$.

Chứng minh:

1) Giả sử f có giới hạn l tại a, và cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X sao cho $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$. Cho $W \in \mathcal{V}_F(l)$; tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho : $\forall x \in X \cap V$, $f(x) \in W$.
Hơn nữa tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow u_n \in V)$.
Vậy ta có: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow u_n \in X \cap V \Rightarrow f(u_n) \in W)$,
và do đó: $\quad f(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} l$.

2) Ta chứng minh phần đảo bằng lập luận phản đảo. Giả thiết rằng f không có giới hạn l tại a, tức là:

$$\text{Không } (\forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in X, \quad (x \in V \Rightarrow f(x) \in W)).$$

Như thế thì tồn tại $W \in \mathcal{V}_F(l)$ sao cho :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(a), \exists x \in X, \qquad (x \in V \text{ và } f(x) \notin W).$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, xét: $\quad V_n = B_E(a; \frac{1}{n})$.

Như thế ta có: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \exists u_n \in X, \qquad (u_n \in V \text{ và } f(u_n) \notin W)$.

Khi đó ta thấy là dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X xây dựng theo cách đó thỏa mãn: $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a$ và $f(u_n) \underset{n\infty}{\not\rightarrow} l$.

◆ **Định nghĩa 2** **(Giới hạn trên một bộ phận)**

Cho $X, Y \in \mathfrak{P}(E)$ thỏa mãn $Y \subset X, a \in \overline{Y}, f : X \to F, l \in F$.

Ta nói rằng f **có giới hạn** l **tại** a **trên** Y khi và chỉ khi ánh xạ thu hẹp $f|_Y$ của f trên Y có giới hạn l tại a.

Khi đó ta ký hiệu: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in Y}}{\longrightarrow} l.$

Một trường hợp riêng hay gặp là $Y = X - \{a\}$. Nếu a là một điểm tụ của X trong E, thì ta nói f **có giới hạn nghiêm ngặt là** l **tại** a **trên** $X - \{a\}$, tức là:

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(x), \forall x \in X, \quad \left(\begin{cases} x \in V \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow f(x) \in W \right).$$

Khi đó ta sẽ ký hiệu: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} l.$

◆ **Mệnh đề 4** **(Trường hợp hàm lấy giá trị trong một tích những kgvđc)**

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $E, F_1, \dots, F_n$ là những $\mathbb{K}$– kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$,

$f: X \to \prod_{k=1}^{n} F_k$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \prod_{k=1}^{n} F_k$.

Với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta ký hiệu $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$, trong đó:

$$\mathrm{pr}_k : \begin{array}{ccc} F & \to & F_k \\ (y_1, \dots, y_n) & \mapsto & y_k \end{array}$$

là phép chiếu thứ k.

Ta có: $f \underset{a}{\to} l \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad f_k \underset{a}{\to} l_k).$

Chứng minh:

Ở đây $\prod_{k=1}^{n} F_k$ được trang bị chuẩn ν xác định bởi: $\nu(y_1, \dots, y_n) = \underset{1 \le k \le n}{\mathrm{Max}}\, N_k(y_k)$,

trong đó N_k là chuẩn của F_k (xem 1.1.1, *3) b)*).

Khi đó với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ thuộc X và mọi $\varepsilon > 0$, ta có:

$$\nu(f(x) - l) \le \varepsilon \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \; N_k(f_k(x) - l_k) \le \varepsilon).$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra kết quả.

◆ **Mệnh đề 5** **(Định lý kẹp đối với các hàm lấy giá trị trên $\mathbb{R}$)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$.

Nếu $\begin{cases} f \text{ và } h \text{ có giới hạn } l \text{ tại } a \\ \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \quad \forall x \in X \cap V, \quad f(x) \le g(x) \le h(x) \end{cases}$

thì g có giới hạn l tại a.

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_E(a)$ thỏa mãn: $\begin{cases} \forall x \in X \cap V_1, & |f(x)-l| \le \varepsilon \\ \forall x \in X \cap V_2, & |h(x)-l| \le \varepsilon \end{cases}$.

Ký hiệu $V_3 = V \cap V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_E(a)$, ta có:

$$\forall x \in X \cap V_3, \quad l - \varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le l + \varepsilon,$$

điều này chứng tỏ rằng $g \underset{a}{\rightarrow} l$.

♦ **Mệnh đề 6** **(Hợp các giới hạn)**

Cho E, F, G là ba kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$, $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$, $f : X \to F$, $g : Y \to G$, sao cho:

$$f(X) \subset Y, \quad l \in G.$$

Nếu $\begin{cases} f \text{ có giới hạn } b \text{ tại } a \\ g \text{ có giới hạn } l \text{ tại } b \end{cases}$, thì $g_\circ f$ có giới hạn l tại a.

Ở đây chúng ta đã ký hiệu một cách lạm dụng: $g \circ f : \begin{array}{ccc} X & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$.

Chứng minh:

Cho $W \in \mathcal{V}_G(l)$. Tồn tại $V \in \mathcal{V}_F(b)$ sao cho: $\forall y \in Y \cap V, \ g(y) \in W$.

Sau nữa tồn tại $U \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho: $\forall x \in X \cap U, \ f(x) \in V$.

Vậy ta có : $\forall x \in X \cap U, \ g(f(x)) \in W$.

♦ **Mệnh đề 7** **(Các tính chất đại số của các hàm có giới hạn)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f, g : X \to F$, $\lambda : X \to \mathbb{K}$, $l, l' \in F$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Ta có:

1) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Rightarrow \|f(x)\|_F \underset{x \to a}{\longrightarrow} \|l\|$

2) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|f(x)\|_F \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

3) $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\rightarrow} l \\ g \underset{a}{\rightarrow} l' \end{array}\right\} \Rightarrow f + g \underset{a}{\rightarrow} l + l'$

4) $\left.\begin{array}{l} \lambda \underset{a}{\rightarrow} 0 \\ g \text{ bị chặn trong lân cận của } a \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda g \underset{a}{\rightarrow} 0$

5) $\left.\begin{array}{l} \lambda \text{ bị chặn trong lân cận của } a \\ g \underset{a}{\rightarrow} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda g \underset{a}{\rightarrow} 0$

$$6) \quad \left.\begin{array}{l} \lambda \underset{a}{\to} \alpha \\ g \underset{a}{\to} l' \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda g \underset{a}{\to} \alpha l'$$

Chứng minh:
Chúng ta có thể quy vấn đề về các tính chất đại số của các dãy hội tụ (xem 1.1.9, 2), Mệnh đề 2), nhờ Mệnh đề 3 trong mục 1.2.1. Chúng ta cũng có thể đưa ra một phép chứng minh "trực tiếp"; chẳng hạn, đối với tính chất *4*):
Theo giả thiết, tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ và $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall x \in X \cap V,\ \|g(x)\|_F \le M$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $V_1 \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho: $\forall x \in X \cap V_1,\ |\lambda(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{M+1}$.

Như vậy nếu ký hiệu $V_2 = V \cap V_1 \in \mathcal{V}_E(a)$, thì:

$$\forall x \in X \cap V_2,\ \|(\lambda g)(x)\|_F = |\lambda| \|g(x)\|_F \le \frac{\varepsilon}{M+1} M \le \varepsilon,$$

điều này chứng tỏ rằng: $\lambda g \underset{a}{\to} 0$.

1.2.2 Tính liên tục

Cho $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ là hai $\mathbb{K}$-kgvđc, d_E (tương ứng: d_F) là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|_E$ (tương ứng: $\|\cdot\|_F$).

1) Liên tục tại một điểm

♦ **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f: X \to F$, $a \in X$. Ta nói rằng f **liên tục tại** a khi và chỉ khi:

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in X \cap V, \qquad f(x) \in W,$$

tức là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \qquad (d_E(x,a) \le \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) \le \varepsilon).$$

Ta nói rằng f **gián đoạn tại** a khi và chỉ khi f không liên tục tại a.

Ta có thể chứng minh dễ dàng năm mệnh đề sau đây.

♦ **Mệnh đề 1**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \to F$, $a \in X$. Để cho f liên tục tại a, điều kiện cần và đủ là f có giới hạn bằng $f(a)$ tại a.

♦ **Mệnh đề 2**

Nếu f liên tục tại a thì f bị chặn trong lân cận của a.

♦ **Mệnh đề 3 (Diễn tả tính liên tục tại một điểm bằng dãy)**

Để cho $f: X \to F$ liên tục tại a ($a \in X$), điều kiện cần và đủ là:

với mọi dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X sao cho $u_n \underset{n\infty}{\to} a$, ta có: $f(u_n) \underset{n\infty}{\to} f(a)$.

♦ **Mệnh đề 4 (Hàm lấy giá trị trên một tích những kgvđc)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_n$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc,

$f: X \to \prod_{k=1}^{n} F_k$; với mỗi k thuộc $\{1,\dots, n\}$ ta ký hiệu $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$,

trong đó pr_k là phép chiếu thứ k. Khi đó ta có:

$$(f \text{ liên tục tại } a) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1,\dots, n\}, f_k \text{ liên tục tại } a).$$

Ở đây $\prod_{k=1}^{n} F_k$ được trang bị chuẩn ν xác định bởi: $\nu(y_1,\dots, y_n) = \underset{1 \le k \le n}{\mathrm{Max}} N_k(y_k)$,

trong đó N_k là chuẩn trên F_k (xem 1.1.1, *3*) *b*)).

♦ **Mệnh đề 5 (Tính liên tục của thu hẹp của một hàm liên tục)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \to F$, $A \subset X$, $a \in A$. Nếu f liên tục tại a, thì $f|_A$ liên tục tại a.

2) Liên tục trên một tập hợp

♦ **Định nghĩa**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \to F$. Ta nói rằng f **liên tục trên** X khi và chỉ khi f liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Ta ký hiệu tập hợp các hàm liên tục từ X tới F là $C(X, F)$ (hoặc: $C^0(X, F)$).

Thí dụ :
Các ánh xạ : $\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ và $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$ đều liên tục.

Rõ ràng là nếu $f: X \to F$ liên tục trên X, thì với mọi bộ phận A của X, ánh xạ thu hẹp $f|_A$ liên tục trên A.

♦ **Mệnh đề** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f: X \to F$. Các tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi:
(i) f liên tục.
(ii) Nghịch ảnh qua f của mọi tập mở của F là một tập mở của X
(iii) Nghịch ảnh qua f của mọi tập đóng của F là một tập đóng của X

Chứng minh:
(i) $\Rightarrow$ (ii) :
Giả thiết f liên tục, và cho Ω là một tập mở của F.
Ta chứng minh rằng $f^{-1}(\Omega)$ là một tập mở của X bằng cách chỉ ra rằng $f^{-1}(\Omega)$ là một lân cận trong X của mọi điểm của của nó (xem 1.1.5, *I*) Định nghĩa).
Cho $a \in f^{-1}(\Omega)$. Vì $f(a) \in \Omega$ và do Ω là một tập mở của F, nên ta có: $\Omega \in \mathcal{V}_F(f(a))$.
Vì f liên tục tại a, nên tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho: $\forall x \in X \cap V$, $f(x) \in \Omega$, tức là sao cho:

$$X \cap V \subset f^{-1}(\Omega).$$

Điều này chứng tỏ rằng $f^{-1}(\Omega)$ là một lân cận trong X của a (xem 1.1.4, Mệnh đề 1, (ii)).
(ii) $\Rightarrow$ (i) :
Giả sử nghịch ảnh qua f của mọi tập mở của F là một tập mở của X. Cho $a \in X$ và $W \in \mathcal{V}_F(f(a))$. Tồn tại một tập mở Ω của F sao cho $f(a) \in \Omega$ và $\Omega \subset W$.
Theo giả thiết $f^{-1}(\Omega)$ là một tập mở của X, và $a \in f^{-1}(\Omega)$; suy ra $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}_X(a)$.
Như vậy tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ thỏa mãn $f^{-1}(\Omega) = X \cap V$. Như vậy ta có :

$$\forall x \in X \cap V,\ f(x) \in \Omega \subset W.$$

Điều này chứng tỏ rằng f liên tục tại a. Vì f liên tục tại mọi điểm a thuộc X, nên f liên tục.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :
Ta chứng minh dễ dàng bằng cách chuyển qua các phần bù và sử dụng hệ thức:

$$f^{-1}(\complement_F(\Omega)) = \complement_X(f^{-1}(\Omega)),$$

với mọi bộ phận Ω của F.

Thí dụ :

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 1\}$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$ vì đó là nghịch ảnh của tập mở $]0;+\infty[$ của $\mathbb{R}$ qua ánh xạ liên tục $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy-1 \end{array}$.

Nhận xét:

Ảnh (thuận) của một bộ phận mở (tương ứng: đóng) qua một ánh xạ liên tục có thể không mở (tương ứng: không đóng). Chẳng hạn như:

1) $f: \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ liên tục, $\Omega = \mathbb{R}$ mở, nhưng $f(\Omega) = \{0\}$ thì không mở.

2) $f: \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$ liên tục, $A = \mathbb{R}$ đóng, nhưng $f(A) = \mathbb{R}_+^*$ thì không đóng.

3) *Các phép toán trên các ánh xạ liên tục*

◆ **Mệnh đề 1** **(Phép hợp)**

Cho E, F, G là ba $\mathbb{K}$-kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$, $f: X \to F$, $g: Y \to G$, thỏa mãn $f(X) \subset Y$; ta sẽ ký hiệu $g \circ f: \begin{array}{ccc} X & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$.

1) Cho $a \in X$.

Nếu: $\left\{\begin{array}{l} f \text{ liên tục tại } a \\ g \text{ liên tục tại } f(a) \end{array}\right|$, thì $g \circ f$ liên tục tai a.

2) Nếu f liên tục (trên X) và nếu g liên tục (trên Y), thì $g \circ f$ liên tục (trên X).

Chứng minh:

1) Cho $W \in \mathcal{V}_G(g \circ f(a))$. Vì g liên tục tại $f(a)$, nên tồn tại $V \in \mathcal{V}_F(f(a))$ sao cho: $g(Y \cap V) \subset W$. Tiếp theo, vì f liên tục tại a nên tồn tại $U \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho $f(X \cap U) \subset V$.

Khi đó ta có: $(g \circ f)(X \cap U) \subset g(Y \cap V) \subset W$

và do đó $g \circ f$ liên tục tại a.

2) Áp dụng 1) cho mọi điểm thuộc X

◆ **Mệnh đề 2** **(Các tính chất đại số của các hàm liên tục)**

I. Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in X$, $f, g : X \to F$, $\lambda : X \to \mathbb{K}$. Ta có:

1) Nếu f liên tục tại a thì $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|f(x)\|_F \end{array}$ liên tục tại a

2) Nếu f và g liên tục tại a thì $f + g$ liên tục tại a

3) Nếu λ và f liên tục tại a, thì λf liên tục tại a.

4) Nếu λ liên tục tại a, và nếu $\lambda(a) \neq 0$, thì $\dfrac{1}{\lambda}$ liên tục tại a.

II. 1) Nếu f liên tục trên X, thì $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|f(x)\|_F \end{array}$ liên tục trên X.

2) Nếu f và g liên tục trên X thì $f+g$ liên tục trên X

3) Nếu λ và f liên tục trên X, thì λf liên tục trên X

4) Nếu λ liên tục trên X, và nếu $(\forall a \in X, \lambda(a) \neq 0)$, thì $\dfrac{1}{\lambda}$ liên tục trên X

Chứng minh:
Quy về các tính chất đại số của các hàm có giới hạn (1.2.1) bằng (1.2.2, *1)*, Mệnh đề 1). Cũng có những phép chứng minh "trực tiếp". ■

Ta chứng minh dễ dàng Mệnh đề sau đây:

◆ **Mệnh đề 3**

1) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_n$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc; với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, hình chiếu thứ k

$$\mathrm{pr}_k : \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \to & E_k \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_k \end{array}$$

liên tục.

2) Mọi ánh xạ đa thức (nhiều biến) lấy hệ tử trong $\mathbb{K}$ đều liên tục.

Đặc biệt, các ánh xạ sau đây liên tục:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) & \mapsto & \lambda A \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 & \longrightarrow & \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & A+B \end{array};$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \quad ;$$

$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & A^* \end{array}$, (trong đó $A^* = {}^t\overline{A}$ là chuyển vị liên hợp của A);

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}; \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}; \begin{array}{ccc} \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}.$$

◆ **Mệnh đề 4**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f, g : X \to F$, A là một bộ phận của X.

Nếu $\begin{cases} f \text{ và } g \text{ liên tục trên X} \\ A \text{ trù mật trong } X \\ \forall a \in A, \quad f(a) = g(a) \end{cases}$, thì $f = g$.

Chứng minh:
Ký hiệu $h = f - g$. Vì $\{0\}$ là một tập đóng của F và do h liên tục, nên $h^{-1}(\{0\})$ là một tập đóng của X. Hơn nữa theo các giả thiết thì $A \subset h^{-1}(\{0\})$. Từ đó suy ra :

$$X = \overline{A} \subset h^{-1}(\{0\}), \quad \text{vậy } h = 0, f = g.$$ ■

Bài tập

◊ **1.2.1** Cho E là một kgvdc, A là một bộ phận không rỗng của E. Với mỗi α thuộc $\mathbb{R}_+^*$ ta ký hiệu $V_\alpha(a) = \{X \in E;\ d(x, A) < \alpha\}$.

a) Chứng minh rằng với mọi $\alpha > 0$, $V_\alpha(a)$ là một tập mở của E có chứa $\overline{A}$, và:

$$\bigcap_{\alpha>0} V_\alpha(A) = \overline{A}.$$

b) Biểu diễn bằng đồ thị $V_\alpha(a)$ trong thí dụ sau:
$E = \mathbb{R}^2$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_2$, $\alpha = 1$, $A = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1; 1])$.

◊ **1.2.2** Cho E là một kgvdc, A, B là hai bộ phận của E sao cho: $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$.
Chứng minh rằng tồn tại hai tập mở U, V của E thỏa mãn:

$$A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \varnothing.$$

◊ **1.2.3** Cho E, F, G là ba kgvdc, $A \subset E$, $B \subset F$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $f : A \to G$, $g : B \to G$ là hai ánh xạ, $\varphi : \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+g(y) \end{array}$.

Chứng minh rằng φ liên tục khi và chỉ khi f và g liên tục.

◊ **1.2.4** Cho E, F là hai kgvdc, $f : E \to F$ là một ánh xạ, $(U_i)_{i\in I}$ là một phủ mở của E, tức là một họ $(U_i)_{i\in I}$ các tập mở của E thỏa mãn : $\bigcup_{i\in I} U_i = E$. Ta giả thiết rằng thu hẹp $f|_{U_i}$ của f trên U_i liên tục với mọi i. Chứng minh rằng f liên tục.

◊ **1.2.5** Cho E là **R**-kgv các ánh xạ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục và bị chặn, được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$,

$$E_- = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbf{R}_-,\ f(x) = 0\},$$
$$E_+ = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) = 0\},$$
$$C = \{c\mathbf{1};\ c \in \mathbf{R}\}, \text{ trong đó } \mathbf{1} : \mathbf{R} \underset{x\mapsto 1}{\rightarrow} \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng E_-, E_+, C là những kgvc đóng của E và rằng $E = E_- \oplus E_+ \oplus C$.

◊ **1.2.6** **Ánh xạ mở**
Cho E, F là hai kgvdc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \to F$; ta nói rằng f là ánh xạ mở khi và chỉ khi $f(\Omega)$ là một tập mở của F với mọi tập mở Ω của X.

a) Cho E là một kgvđc, $a \in E$; chứng minh rằng ánh xạ $\varphi: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(a,x) \end{array}$ là mở khi và chỉ khi $E \neq \{0\}$.

b) Chứng minh rằng nếu $f: X \to F$ là ánh xạ mở và $\lambda \in \mathbb{K}^*$, thì λf là ánh xạ mở.

c) Cho E, F, G là ba kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$, $Z \in \mathfrak{P}(G)$, $f: X \to F$ mở và là toàn ánh, $g: Y \to Z$; giả thiết $g \circ f$ liên tục. Chứng minh rằng g liên tục.

1.2.3 Tính liên tục đều

Cho $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ là hai $\mathbb{K}$-kgvđc, d_E (tương ứng: d_F) là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|_E$ (tương ứng: $\|\cdot\|_F$).

◆ **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f: X \to F$ là một ánh xạ.

Ta nói rằng f **liên tục đều** (viết tắt là: **ltđ**) khi và chỉ khi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in X^2,$$
$$(d_E(x', x'') \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

Ta chứng minh dễ dàng mệnh đề sau đây:

◆ **Mệnh đề 1**

Nếu f ltđ trên X, thì f liên tục trên X.

Đảo của Mệnh đề trên là sai: một ánh xạ f có thể liên tục trên X mà không ltđ trên X; chẳng hạn như ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, xem Tập 1, 4.3.6.

Tuy nhiên dưới đây chúng ta sẽ thấy (Định lý Heine, 1.3.1) rằng nếu $f: X \to F$ liên tục và X compac, thì f ltđ trên X.

◆ **Mệnh đề 2**

Nếu $\begin{cases} f: X \to F & \text{ltđ trên } X \\ g: Y \to G & \text{ltđ trên } Y, \\ f(X) \subset Y \end{cases}$ thì $g \circ f$ liên tục đều trên X

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$. Vì g ltđ trên Y nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (y', y'') \in Y^2, \quad (d_F(y', y'') \leq \eta \Rightarrow d_G(g(y'), g(y'')) \leq \varepsilon).$$

Rồi do f ltđ trên X nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in X^2, \quad (d_E(x', x'') \leq \alpha \Rightarrow d_F(f(x'), f(x'')) \leq \eta).$$

Khi đó ta có:

$$\forall (x', x'') \in X^2, \quad (d_E(x', x'') \leq \alpha \Rightarrow d_G(g(f(x')), g(f(x''))) \leq \varepsilon),$$

tức là $g \circ f$ liên tục đều trên X.

1.2.4 Ánh xạ Lipschitz

Cho $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ là hai $\mathbb{K}$-kgvđc, d_E (tương ứng: d_F) là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|_E$ (tương ứng: $\|\cdot\|_F$).

◆ **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \to F$ là một ánh xạ.

1) Cho $k \in \mathbb{R}_+$; ta nói f là ánh xạ k- **Lipschitz** khi và chỉ khi:

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \qquad (d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d_E(x_1, x_2)).$$

2) Ta nói rằng f là ánh xạ **Lipschitz** khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}_+$ sao cho f là ánh xạ k- Lipschitz.

Một ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là **ánh xạ co** khi và chỉ khi tồn tại $k \in [0; 1[$ sao cho f là ánh xạ k- Lipschitz.

Với mọi k thuộc $\mathbb{R}_+$ ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ k - Lipschitz từ X đến F là $\mathrm{Lip}_k(X, F)$; tập hợp các ánh xạ Lipschitz từ X đến F thì ký hiệu là $\mathrm{Lip}(X, F)$:

$$\mathrm{Lip}(X, F) = \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Lip}_k(X, F).$$

◆ **Mệnh đề 1**

$$1)\ \begin{cases} f \in \mathrm{Lip}_k(X,F) \\ g \in \mathrm{Lip}_{k'}(X,F) \end{cases} \Rightarrow \quad f + g \in \mathrm{Lip}_{k+k'}(X, F)$$

$$2)\ \begin{cases} \lambda \in \mathbb{K} \\ f \in \mathrm{Lip}_k(X,F) \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda f \in \mathrm{Lip}_{|\lambda| k}(X,F)$$

$$3)\ \begin{cases} f \in \mathrm{Lip}_k(X,F) \\ g \in \mathrm{Lip}_{k'}(Y,G) \\ f(X) \subset Y \end{cases} \Rightarrow \quad g \circ f \in \mathrm{Lip}_{kk'}(X, G).$$

Chứng minh: Với mọi (x_1, x_2) thuộc X^2 ta có:

$$1)\ \|(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)\|_F \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|_F + \|g(x_1) - g(x_2)\|_F \leq (k + k')\, \|x_1 - x_2\|_E$$

$$2)\ \|(\lambda f)(x_1) - (\lambda f)(x_2)\|_F = |\lambda|\, \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq |\lambda| k \|x_1 - x_2\|_E$$

$$3)\ \|(g \circ f)(x_1) - (g \circ f)(x_2)\|_G \leq k' \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq k'k \|x_1 - x_2\|_E.$$

Nhận xét:

1) Nếu $X \neq \varnothing$ thì theo các tính chất 1) và 2) trên đây, Lip(X, F) là một $\mathbb{K}$-kgv.

2) Khi $f, g : X \to \mathbb{K}$ là những ánh xạ Lipschitz, thì fg có thể không phải là một ánh xạ Lipschitz; chẳng hạn $X = \mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f, g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

◆ **Mệnh đề 2**

1) Ánh xạ $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$ là ánh xạ 1- Lipschitz.

2) Với mọi bộ phận khác rỗng A của E, ánh xạ $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,A) \end{array}$ là ánh xạ 1- Lipschitz.

3) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \le k \le n}$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc, v là chuẩn xác định trên $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ bởi:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad v(x_1, \dots, x_n) = \operatorname*{Max}_{1 \le k \le n} N_k(x_k).$$

Với mọi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, $\mathrm{pr}_k : \begin{array}{ccc} E & \to & E_k \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_k \end{array}$ là ánh xạ 1-Lipschitz.

Chứng minh:

1) Ta có: $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x - y\|$.

2) Cho $(x, y) \in E^2$. Ta có: $\quad \forall a \in A, \quad d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a)$,

từ đây bằng cách chuyển qua biên dưới khi a chạy khắp A, ta được:

$$d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A),$$

và suy ra: $\quad d(x, A) - d(y, A) \le d(x, y)$.

Áp dụng kết quả vừa thu được cho (y, x) thay vì (x, y), ta cũng có:

$$d(y, A) - d(x, A) \le d(y, x),$$

và cuối cùng là: $\quad |d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$.

3) Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ và mọi $y = (y_1, \dots, y_n)$ thuộc E, và mọi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta có:

$$N_k(\mathrm{pr}_k(x) - \mathrm{pr}_k(y)) = N_k(x_k - y_k) \le \operatorname*{Max}_{1 \le i \le n} N_i(x_i - y_i) = v(x - y).$$

■

◆ **Mệnh đề 3**

Mọi ánh xạ Lipschitz đều ltđ.

Chứng minh:

Giả thiết $f : X \to F$ là ánh xạ k- Lipschitz, và cho $\varepsilon > 0$. Ký hiệu $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k+1} > 0$, ta có: $\quad \forall (x', x'') \in X^2, \quad \left(d_E(x', x'') < \eta \Rightarrow d_F(f(x'), f(x'')) \le k \dfrac{\varepsilon}{k+1} \le \varepsilon\right)$,

và như thế f ltđ trên X

***Nhận xét*:**
Đảo của mệnh đề trên sai: một ánh xạ có thể ltđ mà không phải là ánh xạ Lipschitz; chẳng hạn:

$$f : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Ta nhắc lại kết quả sau (xem Tập 1, 5.2.2, Mệnh đề):
Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$ và $f : I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ khả vi trên I; khi đó f là ánh xạ Lipschitz khi và chỉ khi f' bị chặn.

Bài tập

◊ **1.2.7** Ta ký hiệu $\mathbb{R}$-kgv các ánh xạ Lipschitz từ $[0; 1]$ đến $\mathbb{R}$ là L, và đặt $E_1 = C^1([0; 1]; \mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng $\| . \| : L \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall f \in L, \quad \|f\| = |f(0)| + \sup_{\substack{(x,y)\in[0;1]^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$$

là một chuẩn trên L, và chuẩn đó không tương đương với $\| . \|_\infty$.

b) Chứng minh rằng $N : E_1 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall f \in E_1, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[0;1]} |f'(t)|$$

là một chuẩn trên E_1 và chuẩn này trùng với $\| . \|$ (là thu hẹp của $\| . \|$ vào E_1).

◊ **1.2.8** Cho E, F là hai kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $B(X, F)$ là tập hợp các ánh xạ bị chặn từ X đến F, với chuẩn $\| . \|_\infty$. Với $(a, f) \in X \times B(X, F)$, phần tử của $\mathbb{R}_+$ ký hiệu là $\omega(f, a)$ và xác định bởi:

$$\omega(f, a) = \inf_{V \in \mathcal{V}_X(a)} (\operatorname{diam}(f(V))),$$

được gọi là giao độ của f tại a.

Chứng minh rằng với mọi $(a, \varepsilon) \in X \times \mathbb{R}_+^*$, tập hợp $\{ f \in B(X, F); \omega(f, a) \le \varepsilon \}$ đóng trong $(B(X, F), \| \cdot \|_\infty)$.

1.2.5 Bổ sung: đồng phôi

Cho $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ là hai $\mathbb{K}$-kgvdc, d_E (tương ứng: d_F) là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|_E$ (tương ứng: $\|\cdot\|_F$).

♦ **Định nghĩa 1** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$.

1) Ta nói rằng một ánh xạ $f : X \to Y$ là một **phép đồng phôi** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \text{ liên tục (trên } X) \\ f \text{ là song ánh} \\ f^{-1} \text{ liên tục (trên } Y) \end{cases},$$

2) Ta nói rằng một ánh xạ **X đồng phôi với Y** khi và chỉ khi tồn tại một phép đồng phôi

$$f : X \to Y.$$

***Nhận xét*:**

1) • $\mathrm{Id}_X : X \to X$ là một phép đồng phôi (trong đó X vừa là tập nguồn vừa là tập đích, và bao hàm trong một $\mathbb{K}$-kgvdc).

• Nếu $f : X \to Y$ là một phép đồng phôi thì $f^{-1} : Y \to X$ cũng là một phép đồng phôi.

• Nếu $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là những phép đồng phôi thì $g \circ f : X \to Z$ là một phép đồng phôi.

2) Ta suy ra rằng tập hợp các phép đồng phôi từ X lên chính nó là một nhóm đối với phép hợp ánh xạ.

3) Quan hệ "đồng phôi với", mà ở đây chúng ta ký hiệu là $\approx$, là một quan hệ tương đương; thực vậy với mọi X, Y, Z:

- $X \approx X$
- $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$
- $\begin{cases} X \approx Y \\ Y \approx Z \end{cases} \Rightarrow X \approx Z.$

***Thí dụ*:**

1) Các khoảng của $\mathbb{R}$. Với mọi (a, b) thuộc $\mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ ta có:

- $]-\infty ; b]$, $]a ; b]$, $[a ; b[$, $[a ; +\infty[$ đồng phôi với $[0 ; 1[$
- $]-\infty ; +\infty[$, $]-\infty ; b[$, $]a ; b[$, $]a ; +\infty[$ đồng phôi với $]0 ; 1[$
- $[a ; b]$ đồng phôi với $[0 ; 1]$.

Cuối cùng thì $[0 ; 1[$, $]0 ; 1[$, và $[0 ; 1]$ từng đôi một không đồng phôi với nhau. Xem bài tập 1.5.12, *a)*.

2) Mọi quả cầu mở (tương ứng : đóng; tương ứng: hình cầu) đều đồng phôi với nhau.

Thực vậy, với mọi (a, r) thuộc $E \times \mathbb{R}_+^*$, ánh xạ $x \mapsto \frac{1}{r}(x-a)$ là một đồng phôi từ B$(a; r)$ (tương ứng: B '$(a; r)$; tương ứng: S$(a; r)$) lên B(0;1) (tương ứng: B '(0;1); tương ứng: S(0; 1)).

♦ **Định nghĩa 2** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$, $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Ta nói rằng f là một phép **đẳng cự** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \forall(x_1,x_2)\in X^2, \quad d_F\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d_E\big(x_1,x_2\big) \\ \quad \text{(ta nói } f \text{ bảo toàn khoảng cách)} \\ f \text{ là toàn ánh} \end{cases}$$

Nhận xét:
Nếu f bảo toàn khoảng cách thì f là đơn ánh, vì với mọi (x_1, x_2) thuộc X^2 ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow d_F(f(x_1),f(x_2)) = 0 \Leftrightarrow d_E(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

Như vậy mọi phép đẳng cự đều là song ánh.

Nhận xét:

1) • $\mathrm{Id}_X : X \to X$ là một phép đẳng cự (trong đó X được trang bị cùng một khoảng cách với tư cách tập nguồn cũng như tập đích).

• Nếu $f : X \to Y$ là một phép đẳng cự thì $f^{-1} : Y \to X$ cũng là một phép đẳng cự .

• Nếu $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là những phép đẳng cự thì $g \circ f : X \to Z$ là một phép đẳng cự.

2) Ta suy ra rằng tập hợp các phép đẳng cự từ X lên chính nó là một nhóm đối với phép hợp ánh xạ.

3) Nếu $f : X \to Y$ là một phép đẳng cự thì f là một phép đồng phôi. Đảo lại thì sai; chẳng hạn:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

là một phép đồng phôi, nhưng không phải là một phép đẳng cự.

Bài tập

◊ **1.2.9** Cho một thí dụ về kgvđc E và những bộ phận A, B của E thỏa mãn: A và B đồng phôi với nhau và $\complement_E A$ và $\complement_E B$ không đồng phôi với nhau.

◊ **1.2.10** Chứng minh rằng bốn bộ phận sau đây của $\mathbb{C}$ đồng phôi với nhau:
$E_1 = \mathbb{C}^*$, $E_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$, $E_3 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$,
$E_3 = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$.

◊ **1.2.11*** Chứng minh rằng các phép đồng phôi thể $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ liên tục duy nhất là:

$$z \mapsto z \text{ và } z \mapsto \bar{z}.$$

◊ **1.2.12*** Cho E là $\mathbb{R}$-đại số $C[0;1], \mathbb{R})$ (luật thứ ba là phép nhân) và $f: E \to E$ là một tự đồng phôi của $\mathbb{R}$-đại số E.
Chứng minh rằng F là một phép đẳng cự đối với $\|\cdot\|_\infty$.

1.2.6 Ánh xạ tuyến tính liên tục

Cho $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ là hai $\mathbb{K}$-kgvđc, d_E (tương ứng: d_F) là các khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|_E$ (tương ứng: $\|\cdot\|_F$).
Chúng ta nhắc lại một số định nghĩa, ký hiệu và kết quả của đại số tuyến tính.
Một ánh xạ $f : E \to F$ là ánh xạ **tuyến tính** (hay **$\mathbb{K}$-tuyến tính**) khi và chỉ khi:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \; .$$

Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ E đến F là $\mathcal{L}(E,F)$ (hay $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$), và tập hợp các tự đồng phôi của E, tức là các ánh xạ tuyến tính từ E đến E, là $\mathcal{L}(E)$ (hay $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$).
$\mathcal{L}(E,F)$ là một $\mathbb{K}$-kgv; nếu $f \in \mathcal{L}(E,F)$ và $g \in \mathcal{L}(F,G)$ (trong đó G là một $\mathbb{K}$-kgv), thì $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
$\mathcal{L}(E)$ là một $\mathbb{K}$-đại số (với luật thứ ba là phép hợp).

♦ **Định lý (Đặc trưng tính liên tục đối với một ánh xạ tuyến tính)**
Với $f \in \mathcal{L}(E,F)$, hai tính chất sau đây tương đương với nhau:
(i) f liên tục (trên E)
(ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \le M\|x\|_E$.

Chứng minh:

1) Giả thiết f liên tục. Nói riêng f liên tục tại 0; tồn tại $\eta > 0$ thỏa mãn:

$$\forall u \in E, \quad (\|u\|_e \le \eta \Rightarrow \|f(u)\|_F \le 1).$$

Cho $x \in E - \{0\}$; do $\left\| \frac{\eta}{\|x\|_E} x \right\|_E = \eta$, nên ta có: $\left\| f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F \le 1$,

từ đó suy ra: $\|f(x)\|_F \le \frac{1}{\eta}\|x\|_E$.

Kết quả này chứng tỏ: $\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \le \frac{1}{\eta}\|x\|_E$.

2) Đảo lại, giả sử tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E .$$

Khi đó ta có:

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_F = \|f(x_1 - x_2)\|_F \leq M\|x_1 - x_2\|_E .$$

Như thế f là ánh xạ M-Lipschitz, do đó liên tục.

Nhận xét:

Định lý trên đây cho phép suy ra dễ dàng rằng, với $f \in \mathcal{L}(E,F)$, các tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi một:

1) f liên tục tại 0
2) f liên tục (trên E)
3) f liên tục đều
4) f là ánh xạ Lipschitz
5) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$
6) f bị chặn trên quả cầu đơn vị đóng của E, tức là:
$$\exists M_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \qquad (\|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq M_1)$$
7) f bị chặn trên hình cầu đơn vị, tức là:
$$\exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \qquad (\|x\|_E = 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq M_2) .$$

Ta sẽ ký hiệu:

- Tập hợp các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E đến F là $\mathcal{LC}(E,F)$
- Tập hợp các tự đồng phôi liên tục của E là $\mathcal{LC}(E)$
- $E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{K})$, gọi là đối ngẫu tôpô của E.

Dưới đây (xem 1.3.2, Mệnh đề 1), chúng ta sẽ thấy là nếu E hữu hạn chiều thì mọi ánh xạ tuyến tính từ E đến F đều liên tục..

◆ Ký hiệu

Nếu $E \neq \{0\}$ thì với mọi f thuộc $\mathcal{LC}(E,F)$ ta ký hiệu:

$$|||f||| = \operatorname*{Sup}_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} .$$

Biên trên này tồn tại vì lẽ $\left\{ \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} ; x \in E - \{0\} \right\}$ là một bộ phận của E không rỗng và bị chặn trên (xem định lý trên đây).

Nếu $E = \{0\}$ và $f \in \mathcal{LC}(E,F)$, thì $f = 0$ và như thế ta sẽ viết $|||f||| = 0$.

Nhận xét:

Nếu $E \neq \{0\}$ và $f \in \mathcal{LC}(E,F)$, thì ta có:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \operatorname*{Sup}_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \operatorname*{Sup}_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

◆ **Mệnh đề 1**

1) $\forall f \in \mathcal{LC}(E,F),\ \forall x \in E,\quad \|f(x)\|_F \le |||f|||\ \|x\|_E$

2) $\forall (f,g) \in (\mathcal{LC}(E,F))^2,\quad \begin{cases} f+g \in \mathcal{LC}(E,F) \\ |||f+g||| \le |||f||| + |||g||| \end{cases}$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathcal{LC}(E,F),\quad \begin{cases} \lambda f \in \mathcal{LC}(E,F) \\ |||\lambda f||| = |\lambda|\,|||f||| \end{cases}$

4) $\forall f \in \mathcal{LC}(E,F), \forall g \in \mathcal{LC}(F,G),\quad \begin{cases} g\circ f \in \mathcal{LC}(E,G) \\ |||g\circ f||| \le |||g|||\,|||f||| \end{cases}$.

Chứng minh:

1) Suy ra ngay từ định nghĩa của $|||f|||$.

2) $\forall x \in E,\quad \|(f+g)(x)\|_F \le \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \le (\,|||f||| + |||g|||\,)\|x\|_E$.

3) $\forall x \in E,\quad \|(\lambda f)(x)\|_F = |\lambda|\|f(x)\|_F \le |\lambda|\,|||f|||\ \|x\|_E$, chứng tỏ rằng

$\lambda f \in \mathcal{LC}(E,F)$ và $|||\lambda f||| \le |\lambda|\,|||f|||$.

Bằng cách áp dụng kết quả này cho cặp ($\frac{1}{\lambda}$, λf) thay vì cặp (λ, f) nếu $\lambda \neq 0$, ta được:

$$\left|\left|\left|\frac{1}{\lambda}\lambda f\right|\right|\right| \le \left|\frac{1}{\lambda}\right|\,|||\lambda f|||,$$

tức là $|\lambda|\,|||f||| \le |||\lambda f|||$, và cuối cùng là: $|||\lambda f||| = |\lambda|\,|||f|||$ (do trường hợp $\lambda = 0$ là tầm thường).

4) $\forall x \in E,\quad \|(g\circ f)(x)\|_G \le |||g|||\ \|f(x)\|_F \le |||g|||\ |||f|||\ \|x\|_E$. ■

Mệnh đề trên đây chứng tỏ rằng:

$\begin{cases} (\mathcal{LC}(E,F),\ |||\cdot|||) \text{ là một } \mathbb{K}\text{-kgvđc} \\ (\mathcal{LC}(E),\ |||\cdot|||) \text{ là một } \mathbb{K}\text{-đại số định chuẩn (hiển nhiên là: } |||\mathrm{Id}_E||| = 1) \end{cases}$

Chuẩn $|||\cdot|||$ trên $\mathcal{LC}(E,F)$ được gọi là **chuẩn phụ thuộc** các chuẩn $\|\cdot\|_E$ và $\|\cdot\|_F$.

◆ **Mệnh đề 2** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, N, N' là hai chuẩn trên E, $\mathcal{O}$ (tương ứng: $\mathcal{O}'$) là tập hợp các bộ phận mở của (E, N) (tương ứng: (E, N')). Ba tính chất sau đây đôi một tương đương:

(i) $N \sim N'$

(ii) $\mathrm{Id}_E : (E,N) \to (E,N')$ và $\mathrm{Id}_E : (E,N') \to (E,N)$ liên tục

(iii) $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Chứng minh:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii):

Do $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ nên ta có:

$$\begin{cases}\mathrm{Id}_E : (E,N) \to (E,N') \text{ liên tục} \\ \mathrm{Id}_E : (E,N') \to (E,N) \text{ liên tục}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\exists M_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad N'(\mathrm{Id}_E(x)) \le M_1 N(x) \\ \exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad N(\mathrm{Id}_E(x)) \le M_2 N'(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, \quad \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x)),$$

khi lấy $\alpha = \dfrac{1}{M_2}$ và $\beta = M_1$ (chỉ có thể xảy ra $M_1 = 0$ hoặc $M_2 = 0$ nếu $E = \{0\}$).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii):

Xem 1.1.6, Nhận xét.

◆ **Mệnh đề 3** Cho E, F, G là ba $\mathbb{K}$-kgvđc, $B : E \times F \to G$ là một ánh xạ song tuyến tính.

Nếu tồn tại $k \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad \|B(x,y)\|_G \le k\|x\|_E \|y\|_F$$

thì B liên tục.

Chứng minh:

Cho $(x_0, y_0) \in E \times F$. Với mọi (x,y) thuộc $E \times F$ ta có:

$$\begin{aligned}\|B(x,y) - B(x_0,y_0)\|_G &= \|B(x-x_0,y) + B(x_0,y-y_0)\|_G \\ &\le \|B(x-x_0,y)\|_G + \|B(x_0,y-y_0)\|_G \\ &\le k\,\|x-x_0\|\|y\| + k\,\|x_0\|\|y-y_0\| \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

chứng tỏ B liên tục tại (x_0, y_0). ■

Tổng quát hơn, xem **C** 1.2.

◆ **Hệ quả**

1) Cho E là một $\mathbb{K}$-kgvđc. Ánh xạ $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x\end{array}$ liên tục.

2) Cho A là một $\mathbb{K}$-đại số định chuẩn. Ánh xạ $\begin{array}{ccc}A\times A & \to & A \\ (u,v) & \mapsto & uv\end{array}$ liên tục.

3) Cho E là một $\mathbb{K}$-kgvđc. Ánh xạ $\begin{array}{ccc}\mathcal{LC}(E)\times\mathcal{LC}(E) & \to & \mathcal{LC}(E) \\ (f,g) & \mapsto & g\circ f\end{array}$ liên tục.

Chứng minh:

Ta có thể áp dụng Mệnh đề 3:

1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

2) $\|uv\| \le \|u\|\|v\|$,

3) $\|g\circ f\| \le \|g\|\|f\|$.

Bài tập

◊ **1.2.13** Cho E là một kgvđc, $n \in \mathbb{N}^*, f_1, \dots, f_{2n} \in \mathcal{LC}(E)$. Chứng minh:

$$\|f_1 \circ \dots \circ f_{2n}\|^2 \leq \|f_1\| \, \|f_1 \circ f_2\| \, \|f_2 \circ f_3\| \cdots \|f_{2n-1} \circ f_{2n}\| \, \|f_{2n}\|.$$

◊ **1.2.14*** Cho E là một kgvđc, E^* là đối ngẫu (đại số) của E, $\varphi \in E^*$.

a) Chứng minh rằng φ liên tục khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ đóng trong E.

b) Từ đó suy ra rằng nếu $\varphi \neq 0$ thì φ gián đoạn khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ trù mật trong E.

◊ **1.2.15** Cho E là kgvđc, H là một siêu phẳng đóng của E, D là một đường thẳng vectơ của E, bù của H trong E. Chứng minh rằng $\sigma: \begin{array}{ccc} H \times D & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ là một phép đồng phôi.

(Sử dụng bài tập 1.2.14).

◊ **1.2.16** a) Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-kgvđc, $f \in \mathcal{LC}(E,F)$.

α) Chứng minh rằng $\mathrm{Ker}(f)$ là một kgvc đóng của E.

β) $\mathrm{Im}(f)$ có phải là một kgvc đóng của F không?

b) Cho E là một $\mathbb{K}$-kgvđc, p là một phép chiếu liên tục của E (tức là: $p \in \mathcal{LC}(E)$ và $p \circ p = p$); chứng minh rằng $\mathrm{Ker}(p)$ và $\mathrm{Im}(p)$ là những kgvc đóng của E.

◊ **1.2.17*** Cho E là một kgvđc ($E \neq \{0\}$), $\varphi \in E - \{0\}$, $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Chứng minh rằng ba tính chất sau đây từng đôi một tương đương:

(i) $\exists\, a \in E,\ (\ \|a\| = 1$ và $\|\varphi\| = |\varphi(a)|\ )$

(ii) $\forall x \in E, \exists\, h \in H,\ d(x,H) = \|x - h\|$

(iii) $\exists x \in E - H,\ \exists\, h \in H,\ d(x,H) = \|x - h\|$.

◊ **1.2.18** Cho E là một kgvđc, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Z_p = \{f \in \mathcal{LC}(E); P(f) = 0\}$.
Chứng minh rằng Z_p đóng trong $\mathcal{LC}(E)$.

◊ **1.2.19** Cho E là $\mathbb{C}$-kgvđc các ánh xạ bị chặn từ $[0; 1]$ vào $\mathbb{C}$, được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, $\varphi \in E$,

$T_\varphi: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f\varphi \end{array}$. Chứng minh rằng T_φ tuyến tính liên tục và tính $\|T_\varphi\|$.

◊ **1.2.20** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, $T_\varphi: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & T(f) \end{array}$ xác định bởi:

$$\forall f \in E, \forall x \in [0; 1], \quad (T(f))(x) = \int_0^x f.$$

Chứng minh rằng T tuyến tính liên tục và tính $\|T\|$.

◊ **1.2.21** Cho $E = \mathbb{R}[X]$, $T: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$, $N: E \to \mathbb{R}$ cho bởi : $N(0) = 0$ *và:*

$$\forall P \in E, N(P) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{\left|P^{(n)}(0)\right|}{n!}.$$

a) Chứng minh rằng N là một chuẩn trên E.
b) T có liên tục (đối với N) không?

◊ **1.2.22** Cho $n \in \mathbb{N}^*$; chứng minh rằng $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ là một tập mở và trù mật trong $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

◊ **1.2.23** Cho $n \in \mathbb{N}^*$; ta ký hiệu $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K});\ \det(A) = 1\}$. Xác định bao đóng, miền trong, biên của $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

◊ **1.2.24*** Ta ký hiệu tập hợp các ma trận chéo hóa được thuộc $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ là E, và tập hợp các ma trận thuộc $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ có n giá trị riêng đôi một khác nhau là F.
a) Trong câu hỏi này ta giả thiết $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Chứng minh rằng: $\overline{E} = \overline{F} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Trong trường hợp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ và $n = 2$, ta có hay không $\overline{E} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

◊ **1.2.25*** Cho $n \in \mathbb{N}^*$; với mọi p thuộc $\{0,\dots, n\}$, ta ký hiệu $\Omega_p = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K});\ \mathrm{rank}(A) \geq p\}$ và $V_p = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K});\ \mathrm{rank}(A) = p\}$.
a) Chứng minh rằng với mọi p thuộc $\{0,\dots, n\}$ Ω_p là một tập mở và trù mật trong $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
b) V_p là tập mở với mọi p thuộc $\{0,\dots, n\}$? là tập đóng? Chứng minh rằng V_p là tập đóng địa phương với mọi p thuộc $\{0,\dots, n\}$ (xem bài tập 1.1.34) trong $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3 Tính compac

Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{K}$ -kgvđc, d là khoảng cách liên kết với $\|\cdot\|$.

1.3.1 Đại cương

◆ **Định nghĩa 1** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$. Ta nói rằng X là một **bộ phận compac** (hoặc: **tập compac**) của E khi và chỉ khi mọi dãy những phần tử của X có ít nhất một giới hạn riêng trong X.

***Thí dụ*:**
Mọi bộ phận hữu hạn của E là tập compac.

◆ **Mệnh đề 1** Cho $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ là một dãy hội tụ trong E, $l = \lim\limits_{n\infty} x_n$.

Khi đó $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ là một bộ phận compac của E.

Chứng minh:
Ta ký hiệu $X = \{x_n;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$; và cho $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X
1) Nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\{p \in \mathbb{N};\ u_p = x_n\}$ vô hạn, thì x_n là giới hạn riêng của $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, do đó $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong X.
2) Tương tự, nếu $\{p \in \mathbb{N};\ u_p = l\}$ vô hạn, thì $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giá trị riêng trong X.
3) Giả thiết $\{p \in \mathbb{N};\ u_p = l\}$ hữu hạn, và giả sử $\{p \in \mathbb{N};\ u_p = x_n\}$ hữu hạn với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.
Vì $\{p \in \mathbb{N};\ u_p = l\}$ và $\{p \in \mathbb{N};\ u_p = x_0\}$ hữu hạn, nên tồn tại $p_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\forall p \geq p_0, \quad (u_p \neq l \text{ và } u_p \neq x_0).$$

Do $\{p \in \mathbb{N}\,;\ u_p = x_1\}$ hữu hạn, nên tồn tại $p_1 > p_0$ sao cho:

$$\forall p \geq p_1, \quad u_p \neq x_1.$$

Bằng cách lặp lại mãi, ta xây dựng được một dãy $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ những số tự nhiên tăng nghiêm ngặt, thỏa mãn:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geq p_k, \quad u_p \notin \{l, x_0, \ldots, x_k\}.$$

Như vậy ánh xạ $\sigma:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ l & \mapsto & p_k \end{array}$ là một hàm trích, và ta có:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geq \sigma(k), \quad u_p \in X - \{l, x_0, \ldots, x_k\}.$$

Ta chứng minh rằng dãy $(u_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l.
Cho $\varepsilon > 0$. Vì $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\forall n \geq N, \quad d(x_n, l) \leq \varepsilon.$$

Cho $k \in \mathbb{N}$ sao cho $k \geq N$. Tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{\sigma(k)} = x_n$. Theo định nghĩa $\sigma(k)$ ta có: $\quad u_{\sigma(k)} \notin \{l, x_0, \ldots, x_k\}$, vậy $n \geq k + 1 \geq N$,
suy ra: $\quad d(u_{\sigma(k)}, l) = d(x_n, l) \leq \varepsilon$.
Như vậy chúng ta đã chứng tỏ rằng:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad (k \geq N \Rightarrow d(u_{\sigma(k)}, l) \leq \varepsilon),$$

do đó $(u_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l.
Như thế $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong X, và cuối cùng thì X là một bộ phận compac của E. ■

Thí dụ:

$\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$ là một bộ phận compac của $\mathbb{R}$.

◆ **Mệnh đề 2** Mọi bộ phận compac của E đều đóng và giới nội trong E.

Chứng minh:
Cho X là một bộ phận compac của E.

1) Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X hội tụ đến một phần tử y của E.
Vì X compac nên tồn tại một hàm trích σ và một phần tử x của X sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} x$.

Nhưng $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến y, $x = y$, và do đó $y \in X$.
Kết quả này chứng tỏ rằng X là một bộ phận đóng của E.

2) Ta lập luận phản chứng; giả thiết X không giới nội, tức là :

$$\forall C \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in X, \quad \|x\| \geq C.$$

Đặc biệt, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in X$ sao cho $\|x\| \geq n$. Khi đó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không có một giới hạn riêng nào (cả trong X và trong E), mâu thuẫn.
Như vậy X giới nội.

◆ **Mệnh đề 3** Cho Y là một bộ phận compac của E, và X là một bộ phận của Y sao cho X đóng trong E. Khi đó X là một bộ phận compac của E.

Chứng minh:
Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X. Vì $X \subset Y$ và Y compac, nên tồn tại một hàm trích σ và một phần tử y của Y sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} y$. Nhưng vì các $x_{\sigma(n)}$ đều thuộc X và do X đóng trong E, nên ta có: $y \in X$.
Như vậy mọi dãy trong X đều có ít nhất một giới hạn riêng trong X, vậy X compac.

◆ **Hệ quả** Cho Y là một bộ phận compac của E. Với mọi bộ phận X của Y ta có:

$$X \text{ đóng} \Leftrightarrow X \text{ compac}.$$

Cần chú ý rằng các điều kiện X đóng trong E và X đóng trong Y là tương đương, vì lẽ Y là một bộ phận đóng của E.

◆ **Mệnh đề 4** Cho E, F là hai kgvđc. Với mọi bộ phận compac X của E, và Y của F, $X \times Y$ là một bộ phận compac của $E \times F$.

Chứng minh:

Cho $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $X \times Y$.

Vì X compac, nên tồn tại một hàm trích σ và một phần tử x của X sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} x$.

Sau đó, vì Y compac, nên dãy $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong Y; vậy tồn tại một hàm trích τ và một phần tử y của Y sao cho $y_{\sigma(\tau(n))} \underset{n\infty}{\to} y$.

Do $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} x$ nên dãy con $(x_{\sigma(\tau(n))})_n$ cũng hội tụ đến x, và do đó $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})_n$ hội tụ đến (x, y).

Kết quả này chứng tỏ rằng mọi dãy trong $X \times Y$ đều có ít nhất một giới hạn riêng trong $X \times Y$, và do đó $X \times Y$ compac.

◆ **Mệnh đề 5** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, F là một $\mathbb{K}$-kgvđc, $f : X \to F$ là một ánh xạ. Ta có: $\begin{cases} X \text{ compac} \\ f \text{ liên tục} \end{cases} \Rightarrow f(X)$ compac.

Chứng minh:

Cho $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $f(X)$.

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in X$ sao cho $y_n = f(x_n)$.

Do X compac nên tồn tại một hàm trích σ và một phần tử x của X sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} x$.

Vì f liên tục nên: $$y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\to} f(x).$$

Như vậy dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có giới hạn riêng là $f(x)$ ($\in f(X)$), và kết luận là $f(X)$ compac. ■

Nhận xét:

1) Nghịch ảnh của một bộ phận compac qua một ánh xạ liên tục có thể không compac; chẳng hạn: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ liên tục, $\{0\}$ compac, $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ không compac ($\mathbb{R}$ không giới nội).

2) Khái niệm compac là một khái niệm **tôpô**, tức là bất biến qua phép đồng phôi:

$$\left.\begin{array}{l} X \approx Y \\ X \text{ compac} \end{array}\right\} \Rightarrow Y \text{ compac}.$$

◆ **Hệ quả**

1) Cho X là một bộ phận khác rỗng của E, và $f : X \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ. Nếu X compac và f liên tục, thì f bị chặn và đạt tới các biên của nó.

2) Cho X là một bộ phận khác rỗng của E, F là một $\mathbb{K}$-kgvđc và $f : X \to F$ là một ánh xạ. Nếu X compac và f liên tục, thì $\|f\| : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|f(x)\|_F \end{array}$ bị chặn và đạt tới các biên của nó.

Chứng minh:

1) $f(X)$ là một bộ phận compac, do đó đóng giới nội trong $\mathbb{R}$.

2) Áp dụng 1) cho $\|f\|$ liên tục trên tập compac X.

◆ **Mệnh đề 6** Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_N$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc; ta trang bị cho $\prod_{k=1}^{N} E_k$ chuẩn v xác định bởi:

$$v(x_1, ..., x_N) = \operatorname*{Max}_{1 \le k \le N} \|x_k\|_{E_k}$$

(xem 1.1.1, *3), b)*).

Với mỗi k thuộc $\{1, ..., N\}$, cho X_k là một bộ phận khác rỗng của E_k.

Khi đó $\prod_{k=1}^{N} X_k$ compac khi và chỉ khi X_k compac với mọi k thuộc $\{1, ..., N\}$.

Chứng minh:

1) Giả thiết $\prod_{k=1}^{N} X_k$ compac. Vì với mỗi i thuộc $\{1, ..., N\}$, $X_i = \mathrm{pr}_i\left(\prod_{k=1}^{N} X_k\right)$, và vì các phép chiếu pr_i đều liên tục (xem 1.2.2, *1)*, Mệnh đề 4), nên ta kết luận rằng X_i compac (xem 1.3.1, Mệnh đề 5).

2) Ta chứng minh phần đảo bằng lập luận truy hồi trên N, vì trường hợp hai bộ phận đã biết (Mệnh đề 4).

◆ **Định lý (Định lý Heine)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, F là một $\mathbb{K}$-kgvđc; $f : X \to F$ là một ánh xạ.

Nếu X compac và nếu f liên tục, thì f liên tục đều.

Chứng minh:

Giả thiết X compac và f liên tục.

Ta lập luận phản chứng; giả sử f không liên tục đều, tức là:

$$\text{không}\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x', x'') \in X^2,\quad d_E(x', x'') \le \eta \Rightarrow (d_F(f(x'), f(x'')) > \varepsilon\Big).$$

Vậy tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\forall \eta > 0,\ \exists (x', x'') \in X^2,\quad \big(d_E(x', x'') \le \eta \text{ và } d_F(f(x'), f(x'')) \le \varepsilon\big).$$

Nói riêng, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, tồn tại $(x'_n, x''_n) \in X^2$ sao cho:

$$(d_E(x'_n, x''_n)) \le \frac{1}{n} \qquad \text{và} \qquad (d_F(f(x'_n), f(x''_n)) > \varepsilon.$$

Do X compac nên X^2 cũng compac (xem Mệnh đề 4), do đó dãy $(x'_n, x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong X^2. Như vậy tồn tại một hàm trích σ và $(x', x'') \in X^2$ sao cho:

$$x'_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} x' \quad \text{và} \quad x''_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} x''.$$

Vì : $\quad (d_E(x', x'')) \leq (d_E(x'_n, x'_{\sigma(n)})) + (d_E(x'_{\sigma(n)}, x''_{\sigma(n)})) + (d_E(x''_{\sigma(n)}, x''))$

với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, nên ta suy ra:

$$(d_E(x', x'')) = 0, \ x' = x''.$$

Nhưng do f liên tục tại x' và tại x'' nên:

$$f(x'_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(x') \quad \text{và} \quad f(x''_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(x''),$$

do đó: $$d(f(x'_{\sigma(n)}), f(x''_{\sigma(n)})) \underset{n\infty}{\rightarrow} d(f(x'), f(x'')) = 0,$$

mâu thuẫn với: $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ d(f(x'_{\sigma(n)}), f(x''_{\sigma(n)})) > \varepsilon.$$ ■

Phần nâng cao dành cho khối MP*: Định lý Borel-Lebesgue

◆ **Định nghĩa 2** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$. **Phủ** của X là mọi họ $(\Omega_i)_{i\in I}$ những bộ phận của E sao cho: $X \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

Một phủ $(\Omega_i)_{i\in I}$ của X được gọi là **hữu hạn** khi và chỉ khi I hữu hạn.
Một phủ $(\Omega_i)_{i\in I}$ của X được gọi là **mở** khi và chỉ khi Ω_i là tập mở của E với mọi i thuộc I.

Mọi họ $(\Omega_i)_{i\in I}$ những bộ phận của X thỏa mãn $\bigcup_{i\in I} \Omega_i = X$ cũng được gọi là một phủ của X. Một phủ như thế được gọi là phủ mở khi và chỉ khi Ω_i là một bộ phận mở của X, với mọi i thuộc I.

◆ **Định nghĩa 3** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$ và $(\Omega_i)_{i\in I}$ là một phủ của X. **Phủ con** của $(\Omega_i)_{i\in I}$ là mọi họ $(\Omega_i)_{i\in J}$ sao cho:

$$J \subset I \ \text{và} \ X \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i.$$

◆ **Định lý** **(Định lý Borel-Lebesgue)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$. Hai tính chất sau đây tương đương với nhau:

(i) Mọi phủ mở của X đều có một phủ con hữu hạn.

(ii) X compac.

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii):

(1) Giả thiết có (i), và cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X. Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không có giới hạn riêng nào trong X. Với mọi x thuộc X, tồn tại $\varepsilon_x > 0$ sao cho tập hợp $\{n \in \mathbb{N}; d(x_n, x) < \varepsilon_x\}$ là tập hữu hạn. Họ $(B(x; \varepsilon_x))_{x\in X}$ là một phủ của X gồm những tập mở của E; vậy tồn tại một bộ phận hữu hạn Y của X sao cho $(B_E(x; \varepsilon_x))_{x\in Y}$ là một phủ của X. Nhưng khi đó thì theo định nghĩa phủ ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in Y, \qquad x_n \in B(x; \varepsilon_x),$$

do đó:
$$\mathbb{N} = \bigcup_{x\in Y}\{n \in \mathbb{N};\ d(x_n, x) < \varepsilon_x\},$$

biểu diễn $\mathbb{N}$ như là hợp của một số hữu hạn tập hữu hạn; mâu thuẫn.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ rằng $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong X

(2) Đảo lại, giả thiết X compac.

Cho $(\Omega_i)_{i\in I}$ là một phủ của X gồm những tập mở của E.

a) Ta chứng tỏ rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\forall x \in X,\ \exists i \in I, \qquad B(x; \varepsilon) \subset \Omega_i.$$

Ta lập luận phản chứng; giả sử: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, \forall i \in I, \qquad B(x; \varepsilon) \not\subset \Omega_i$.

Nói riêng (bằng cách thay ε bằng $\frac{1}{n}$):

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in X, \forall i \in I, \qquad B(x_n; \frac{1}{n}) \not\subset \Omega_i.$$

Theo giả thiết dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ có ít nhất một giới hạn riêng a trong X; vậy tồn tại một hàm trích σ sao cho: $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} a$.

Vì $(\Omega_i)_{i\in I}$ là một phủ của X, nên tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $a \in \Omega_{i_0}$; vì Ω_{i_0} là tập mở nên tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn: $B(a; r) \subset \Omega_{i_0}$.

Vì $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} a$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $d(x_{\sigma(n)}, a) < \frac{r}{2}$ và $\frac{1}{\sigma(n)} < \frac{r}{2}$.

Khi đó với mọi y thuộc X ta có:

$$y \in B(x_{\sigma(n)}; \frac{1}{\sigma(n)}) \Leftrightarrow d(x_{\sigma(n)}, y) < \frac{1}{\sigma(n)}$$

$$\Rightarrow d(a,y) \le d(a,x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)},y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

$$\Rightarrow y \in B(a;r) \Rightarrow y \in \Omega_{i_0}.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng $B(x_{\sigma(n)}; \frac{1}{\sigma(n)}) \subset \Omega_{i_0}$, mâu thuẫn.

Như thế chúng ta có thể kết luận rằng:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists i \in I, \qquad B(x; \varepsilon) \subset \Omega_i.$$

b) Cho ε xác định như trên đây. Ta chứng tỏ rằng tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ và $a_1, ..., a_n$ thuộc X sao cho $(B(a_k; \varepsilon))_{1\le k\le N}$ là một phủ của X. Ta lập luận phản chứng; giả sử rằng với mọi $N \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a_1, ..., a_N$ thuộc X, họ $(B(a_k; \varepsilon))_{1\le k\le N}$ không phải là một phủ của X. Cho b_1 bất kỳ thuộc X (rõ ràng là: $X \neq \varnothing$).

- $(B(b_1;\varepsilon))$, là họ có một phần tử, không phủ X; vậy tồn tại $b_2 \in X$ sao cho $b_2 \notin B(b_1;\varepsilon)$.

- $(B(b_k;\varepsilon))_{1\le k\le 2}$ không phủ X; vậy tồn tại $b_3 \in X$ sao cho $b_3 \notin \bigcup_{k=1}^{2} B(b_k;\varepsilon)$.

Bằng cách lặp lại quá trình này, ta xây dựng được một dãy $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ trong X thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B(b_k;\varepsilon).$$

Theo giả thiết thì $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng b trong X; vậy tồn tại một hàm trích σ sao cho: $b_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} b$. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \ge N \ \Rightarrow d(b_{\sigma(n)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như thế nói riêng ta có: $\begin{cases} d(b_{\sigma(N)}, b) < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ d(b_{\sigma(N+1)}, b) < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$,

từ đó suy ra: $d(b_{\sigma(N)}, b_{\sigma(N+1)}) < \varepsilon$, mâu thuẫn với $b_{\sigma(N+1)} \notin \bigcup_{k=1}^{\sigma(N+1)-1} B(b_k;\varepsilon)$.

Kết quả này chứng tỏ tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ và $a_1, ..., a_N$ thuộc X sao cho $X \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(b_k;\varepsilon)$.

Theo định nghĩa của ε, với mỗi k thuộc $\{1,..., N\}$ tồn tại i_k trong I sao cho $B(a_k;\varepsilon) \subset \Omega_{i_k}$.

Khi đó họ $(\Omega_{i_k})_{1\le k\le N}$ (trong đó ta đã bỏ đi các phần tử lặp lại nếu có) là một phủ con của $(\Omega_i)_{i\in I}$.

Bài tập

◊ **1.3.1** Cho E là một kgvđc, A, B là hai bộ phận không rỗng của E; giả thiết A compac và $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Chứng minh: $d(A,B) > 0$.

◊ **1.3.2** Cho E, F là hai kgvđc, A là một bộ phận compac của E và B là một bộ phận compac của F, W là một bộ phận mở của $E \times F$ sao cho $A \times B \subset W$. Chứng minh rằng tồn tại một bộ phận mở U của E và một bộ phận mở V của F sao cho:

$$A \subset U,\ B \subset V,\ U \times V \subset W.$$

(Hãy sử dụng bài tập 1.3.1).

◊ **1.3.3** Cho E là một $\mathbb{R}$ -kgvđc khác với $\{0\}$, A là một bộ phận compac của E. Chứng minh: $\forall x \in A$, $\exists y \in \delta(A)$, $[x; y] \subset A$,
trong đó $[x; y] = \{tx + (1-t)y;\ t \in [0 ; 1]\}$.

◊ **1.3.4** Cho E, F là hai kgvđc , A là một bộ phận của E, $f : A \to F$ là một ánh xạ, sao cho $\overline{f(A)}$ compac. Chứng minh rằng nếu đồ thị G_f của f (theo định nghĩa: $G_f = \{(x, f(x));\ x \in A\}$) đóng trong $A \times F$, thì f liên tục.

◊ **1.3.5*** Cho E, F là hai kgvđc , X là một bộ phận compac của E, $f : X \to F$ liên tục. Ta giả thiết tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho: $\forall y \in F$, diam $(f^{-1}(\{y\})) < \alpha$
(ta quy ước: diam$(\varnothing) = 0$).
Chứng minh rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi quả cầu mở B với bán kính $\leq \varepsilon$, ta có:

$$\text{diam}\,(f^{-1}(B)) < \alpha.$$

1.3.2 Trường hợp không gian hữu hạn chiều

◆ **Bổ đề** Cho $n \in \mathbb{N}^*$; các bộ phận compac của $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ là các bộ phận đóng và giới nội.

Chứng minh:

1) Ta đã biết (xem 1.3.1, Mệnh đề 2) rằng mọi bộ phận compac đều đóng và giới nội.

2) • Trước tiên ta chứng minh rằng mọi đoạn của $\mathbb{R}$ đều compac. Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \leq b$, và cho $(x_n)_n$ là một dãy trong $[a; b]$. Theo định lý Bolzano-Weierstrass trong $\mathbb{R}$ (xem Tập 1, 3.3, Định lý), từ dãy số thực bị chặn $(x_n)_n$ ta có thể trích ra ít nhất một dãy hội tụ. Vậy tồn tại một hàm trích σ và một phần tử x của $\mathbb{R}$ sao cho: $x_{\sigma(p)} \underset{p\infty}{\longrightarrow} x$. Vì mọi $x_{\sigma(p)}$ đều thuộc tập đóng $[a; b]$ nên ta suy ra rằng
$x \in [a; b]$.
Kết quả này chứng tỏ rằng mọi dãy $(x_p)_p$ trong $[a; b]$ đều có ít nhất một giới hạn riêng thuộc $[a; b]$, và do đó $[a; b]$ compac.

• Cho X là một bộ phận đóng giới nội của $\mathbb{R}^n$. Vì X giới nội nên tồn tại những số thực $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sao cho $X \subset \prod_{k=1}^{n} [a_k ; b_k]$. Ta vừa thấy rằng các $[a_k ; b_k]$ đều là những bộ phận compac của $\mathbb{R}$, vậy (xem 1.3.1, Mệnh đề 6), $\prod_{k=1}^{n} [a_k ; b_k]$ là một bộ phận compac của $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Cuối cùng, do X đóng trong tập compac đó, nên chính X cũng compac. ■

Bằng cách đồng nhất $\mathbb{C}^n$ với $\mathbb{R}^{2n}$, ta suy ra Hệ quả sau đây.

◆ **Hệ quả** Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, các bộ phận compac của $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ là các bộ phận đóng giới nội.

◆ **Định lý 1** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv hữu hạn chiều.
Tất cả mọi chuẩn trên E đều tương đương.

Chứng minh:
$\mathbb{K}$-kgv E có ít nhất một cơ sở hữu hạn $B = (e_1, \ldots, e_n)$; ta ký hiệu N_∞:

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \mapsto & \max_{1\le i\le n} |x_i| \end{array}.$$

Cho N là một chuẩn trên E; ta sẽ chứng minh rằng $N \sim N_\infty$.

Ký hiệu $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n;\ \max_{1\le i\le n} |x_i| = 1\}$, và xét ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} \nu: & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \end{array}$$

trong đó $\mathbb{K}^n$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ thông thường.

- ν liên tục do là ánh xạ Lipschitz:

$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$|\nu(x) - \nu(y)| \le N\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| N(e_i)$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \|x - y\|_\infty .$$

- Vì hình cầu đơn vị S của $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ compac (vì đóng, giới nội, xem Bổ đề), nên thu hẹp của ν vào S bị chặn và đạt tới các biên; vậy tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho:

$$\alpha = \inf_{x\in S} \nu(x), \qquad \beta = \sup_{x\in S} \nu(x).$$

Vì $0 \notin S$ nên ta có: $0 < \alpha \le \beta$.

Như thế: $\exists (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \forall x \in S,\ \alpha \le \nu(x) \le \beta.$

Bây giờ xét $x \in E - \{0\}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$; vì $\frac{1}{\|x'\|_\infty} x' \in S$ và do $N_\infty(x) = \|x'\|_\infty$, nên

ta suy ra $\alpha N_\infty(x) \le N(x) \le \beta\, N_\infty(x)$.

Cuối cùng thì: $N \sim N_\infty$.

◆ **Định lý 2** Trong mọi $\mathbb{K}$-kgvđc (E, N) hữu hạn chiều, các bộ phận compac là các bộ phận đóng và giới nội.

Chứng minh:

Cho một cơ sở $B = (e_1, ..., e_n)$ của E, $N_\infty : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \mapsto & \underset{1 \le i \le n}{\text{Max}} |x_i| \end{array}$.

• Ta đã biết (xem 1.3.1, Mệnh đề 2) rằng mọi bộ phận compac của E đều đóng giới nội.

• Cho X là một bộ phận đóng giới nội của E. Vì $N \sim N_\infty$, nên X giới nội trong (E, N_∞), và do $\text{Id}_E : (E, N) \to (E, N_\infty)$ là một đồng phôi(xem 1.2.6, Mệnh đề 2), nên X đóng trong (E, N_∞). Theo Bổ đề trên đây thì X là một bộ phận compac của (E, N_∞), do đó của (E, N) vì $\text{Id}_E : (E, N) \to (E, N_\infty)$ là một đồng phôi.

Nhận xét:

Cho E là một $\mathbb{K}$-kgvđc.

Nếu E hữu hạn chiều thì $B'(0; 1)$ compac (xem Định lý 2).

Đảo lại, người ta chứng minh được rằng nếu $B'(0; 1)$ compac thì E hữu hạn chiều (xem Định lý Riesz, C 1.1).

◆ **Mệnh đề 1** Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-kgvđc; nếu E hữu hạn chiều thì mọi ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ đều liên tục.

Chứng minh:

Ta ký hiệu một chuẩn $B = (e_1, ..., e_n)$ của E là N, $N_\infty : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \mapsto & \underset{1 \le i \le n}{\text{Max}} |x_i| \end{array}$. Theo

Định lý 1, tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall x \in E, \quad N_\infty(x) \le MN(x)$.

Khi đó với mọi $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ của E ta có:

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|_F \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|_F \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F \right) N_\infty(x) \le CN(x),$$

trong đó $C = M \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F$. Theo 1.2.6, Định lý, ta kết luận rằng f liên tục.

Nhận xét:

Như vậy, nếu E hữu hạn chiều thì $\mathcal{LC}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

◆ **Mệnh đề 2** **(Tính liên tục của một ánh xạ đa tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều)**

Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, \|\cdot\|_k)_{1 \le k \le N}$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều; F là một $\mathbb{K}$-kgvđc. Mọi ánh xạ đa tùyến tính $\varphi : \prod_{k=1}^{N} E_k \to F$ đều liên tục.

Chứng minh:

Vì mọi E_k đều là không gian hữu hạn chiều nên N_k tương đương với $\|\cdot\|_\infty$ trong E_k liên kết với một cơ sở $B = (e_{i_k})_{1 \le i_k \le n_k}$ xác định của E_k; vậy với mọi k thuộc $\{1,..., N\}$ tồn tại $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall x_k \in E_k, \qquad \|x_k\|_\infty \le \alpha_k \|x_k\|_k .$$

Vì φ đa tuyến tính, nên khi ký hiệu $x_k = \sum_{i_k=1}^{n_k} \xi_{k,i_k} e_{i_k}$, ta có với mọi $(x_1,..., x_N)$ thuộc

$$\prod_{k=1}^{N} E_k : \qquad \varphi(x_1,..., x_N) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} \xi_{1,i_1} \cdots \xi_{N,i_N} \varphi(e_{i_1},...,e_{i_N}).$$

Do $\left\{\varphi(e_{i_1},...,e_{i_N});\ (i_1,...,i_N) \in \prod_{k=1}^{N} \{1,...,n_k\}\right\}$ hữu hạn nên tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho ta có:

$$\|\varphi(e_{i_1},...,e_{i_N})\|_F \le M$$

với mọi $(i_1,..., i_N) \in \prod_{k=1}^{N} \{1,...,n_k\}$.

Kết quả là:

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_1,...,x_N)\|_F &\le M \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} |\xi_{1,i_1}| \cdots |\xi_{N,i_N}| \\ &= M \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |\xi_{1,i_1}|\right) \cdots \left(\sum_{i_N=1}^{n_N} |\xi_{N,i_N}|\right) \\ &\le M n_1 \|x_1\|_\infty \cdots\ n_N \|x_N\|_\infty. \\ &\le \left(M \prod_{k=1}^{N} n_k \prod_{k=1}^{N} \alpha_k\right) \prod_{k=1}^{N} \|x_k\|_\infty .\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra tính liên tục của φ bằng cách lập luận tương tự như trong phép chứng minh Mệnh đề 3 ở 1.2.6, hoặc trong phép giải ở **C1.2**.

◆ **Hệ quả**

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ánh xạ $\det : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}$ liên tục.

Chứng minh:
Xem thêm 1.2.2, *3)*, Mệnh đề 3.

Bài tập

◇ **1.3.6 Tập hợp Cantor**

Ta ký hiệu $C_0 = [0; 1]$, $C_1 = C_0 - \left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$, $C_2 = C_1 - \left(\left]\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right[\right)$, v.v...,

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n .$$

Chứng minh rằng C là một bộ phận compac của $\mathbb{R}$ và $\overset{\circ}{C} = \varnothing$.

◇ **1.3.7** Cho E là một kgvdc hữu hạn chiều, K là một bộ phận compac của E; chứng minh rằng tồn tại một bộ phận compac U của E thỏa mãn: $K \subset U$ và $\overline{U}$ compac.

◇ **1.3.8** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ bị chặn sao cho đồ thị G_f của f (được định nghĩa là $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$) đóng. Chứng minh rằng f liên tục.

◇ **1.3.9** a) Cho E, F là hai kgvdc sao cho E hữu hạn chiều, $f : E \to F$ liên tục sao cho $f^{-1}(B)$ là một bộ phận giới nội của E, với mọi bộ phận giới nội B của F. Chứng minh rằng $f(G)$ là một bộ phận giới nội của F với mọi bộ phận giới nội G của E.

b) *Áp dụng*: Chứng minh rằng, với mọi P thuộc $\mathbb{K}[X]$ và mọi bộ phận giới nội G của $\mathbb{K}$, $P(G)$ đóng.

◇ **1.3.10*** Cho A, B là hai bộ phận giới nội của một kgvdc E hữu hạn chiều.
Chứng minh: $(A + B)' = (A' + B') \cup (A' + B) \cup (A + B')$
trong đó dấu phẩy chỉ tập hợp các điểm tụ trong E (xem 1.1.10, Định nghĩa 2).

◇ **1.3.11*** Cho E là một $\mathbb{K}$ - kgvdc hữu hạn chiều, V là một lân cận compac trong E của 0, $L_V = \{f \in \mathcal{L}(E);\ f(V) \subset V\}$.
a) Chứng minh rằng L_V là một bộ phận compac của $L(E)$.
b) Chứng minh: $\forall f \in L_V$, $|\det(f)| \le 1$.

1.4 Không gian đủ

Cho $(E, \| \cdot \|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc, d là khoảng cách liên kết với $\| \cdot \|$.

1.4.1 Dãy Cauchy

◆ **Định nghĩa** Một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E được gọi là **dãy Cauchy** khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \Rightarrow \; d\left(u_p, u_q\right) \leq \varepsilon \right).$$

Ta có thể thay điều kiện trên bằng điều kiện tương đương sau đây:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall (p,r) \in \mathbb{N}^2, \qquad (\, p \geq N \;\Rightarrow\; d(u_{p+r}, u_p) \leq \varepsilon\,).$$

Nhận xét:

1) Nếu hai chuẩn N, N' trên E tương đương với nhau thì các dãy Cauchy của (E,N) cũng là các dãy Cauchy của (E,N').

2) Mọi dãy con của một dãy Cauchy cũng là những dãy Cauchy.

◆ **Mệnh đề 1** Mọi dãy Cauchy trong E đều bị chặn.

Chứng minh:
Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong E.
Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (p,r) \in \mathbb{N}^2, \qquad (\, p \geq N \;\Rightarrow\; d(u_{p+r}, u_p) \leq 1).$$

Nói riêng: $\forall r \in \mathbb{N}, \quad d(u_{N+1+r}, u_{N+1}) \leq 1,$

và do đó: $\forall r \in \mathbb{N}, \quad \|u_{N+1+r}\| \leq 1 + \|u_{N+1}\|$.

Với ký hiệu M = Max ($\|u_0\|, \ldots, \|u_N\|, \|u_{N+1}\| + 1$), ta sẽ có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M,$$

tức là dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn.

◆ **Mệnh đề 2** Mọi dãy hội tụ trong E đều là dãy Cauchy.

Chứng minh:
Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy hội tụ đến một phần tử l của E.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\, n \geq N \;\Rightarrow\; d(u_n, l) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\,).$

Khi đó:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(u_p, l) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \\ d(u_q, l) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow d(u_p, u_q) \leq d(u_p, l) + d(l, u_q) \leq \varepsilon \right),$$

và do đó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong E.

◆ **Mệnh đề 3** **(Trường hợp một tích hữu hạn những kgvđc)**

Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_N$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc, $P = \prod_{k=1}^{N} E_k$ được trang bị chuẩn v xác định bởi:

$$v(x_1, \dots, x_N) = \underset{1\leq k\leq N}{\mathrm{Max}} \|x_k\|_{E_k}$$

(xem 1.1.1, *3), b)*). Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong P, và với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, ký hiệu:

$$(u_{1,n}, \dots, u_{N,n}) = u_n.$$

Để $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong P, điều kiện cần và đủ là dãy $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong E_k, với mọi k thuộc $\{1, \dots, N\}$.

Chứng minh:

Suy ra dễ dàng từ: $\quad v(u_p - u_q) = \underset{1\leq k\leq N}{\mathrm{Max}} \|u_{k,p} - u_{k,q}\|_{E_k}$.

Bài tập

◊ **1.4.1** Cho E là một kgvđc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong E; giả thiết các dãy $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ đều là những dãy Cauchy. Chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.

◊ **1.4.2** Cho E, F là hai kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \to F$ là một ánh xạ sao cho $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong F với mọi dãy Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X. Chứng minh rằng f liên tục.

1.4.2 Bộ phận đủ

◆ **Định nghĩa** Ta nói rằng một bộ phận A của E là **đủ** khi và chỉ khi mọi dãy Cauchy những phần tử của A hội tụ trong A.
Ta nói rằng không gian E là **không gian đủ** khi và chỉ khi E là một bộ phận đủ của E.
Mọi $\mathbb{K}$-kgvđc đủ được gọi là **không gian Banach**.

Nhận xét:
Nếu $N_1 \sim N_2$ và nếu (E, N_1) là không gian đủ thì (E, N_2) cũng là không gian đủ.

◆ **Mệnh đề 1** **(Trường hợp một tích hữu hạn những kgvđc)**
Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_N$ là những $\mathbb{K}$ -kgvđc, với mỗi k thuộc $\{1,...,N\}$, A_k là một bộ phận đủ của E_k; khi đó $\prod_{k=1}^{N} A_k$ là một bộ phận đủ của $\prod_{k=1}^{N} E_k$.

Chứng minh:

Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $\prod_{k=1}^{N} A_k$; với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$ ký hiệu:

$$(x_{1,n}, ..., x_{N,n}) = x_n.$$

Vì: $\forall k \in \{1,..., N\}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \qquad d(x_{k,p}, x_{k,q}) \leq \nu(x_p - x_q)$
nên ta thấy rằng mọi $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \{1,..., N\}$, là dãy Cauchy trong A_k, do đó hội tụ đến một phần tử l_k của A_k. Khi đó $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} (l_1, ..., l_N)$ (xem 1.1.9, *1*), Mệnh đề 2). ■

◆ **Mệnh đề 2**
1) Mọi bộ phận đủ X của E đều đóng.
2) Cho X, Y là hai bộ phận của E sao cho $X \subset Y$; nếu Y đủ và X đóng, thì X đủ.

Chứng minh:

1) Cho X là một bộ phận đủ của E, và $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X, hội tụ đến một phần tử l của E. Vì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ nên $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy (xem 1.4.1, Mệnh đề 2); do X đủ nên $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong X
Vậy ta có $l \in X$
Kết quả này chứng tỏ X đóng (trong E).

2) Cho X, Y là hai bộ phận của E sao cho $X \subset Y$, Y đủ và X đóng (trong E). Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong X. Vì $X \subset Y$ và do Y đủ, nên $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một phần tử l của Y (do đó của E). Vì X đóng, nên ta có $l \in X$.
Kết luận là X đủ.

◆ **Hệ quả** Nếu E là một không gian Banach, thì với mọi bộ phận X của E ta có:

$$X \text{ đóng} \Leftrightarrow X \text{ đủ}.$$

◆ **Mệnh đề 3** Mọi bộ phận compac của một kgvđc đều đủ.

Chứng minh:
Cho X là một bộ phận compac của E, và $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong X. Vì X đủ nên tồn tại một hàm trích σ và một phần tử x của X sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$. Ta hãy chứng tỏ rằng $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến x.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geq N_1 \Rightarrow d(x_{\sigma(n)}, x) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$,

và tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\left(\begin{cases} p \geq N_2 \\ q \geq N_2 \end{cases} \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $N \geq N_1$ và $\sigma(N) \geq N_2$.
Ta có:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p \geq N_2 \Rightarrow d(x_p, x) \leq d(x_p, x_{\sigma(N)}) + d(x_{\sigma(N)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kết quả trên chứng tỏ $x_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} x$, và kết luận là X đủ.

Nhận xét:

1) Phép chứng minh trên chứng tỏ rằng, nếu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy với ít nhất một giới hạn riêng x, thì $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$.

2) Đảo của Mệnh đề trên sai; một bộ phận đủ có thể không compac; chẳng hạn: $\mathbb{R}$ đủ (xem Định lý 2 dưới đây), nhưng không compac.

3) Trong trường hợp E đủ ta có:

$$X \text{ compac} \Rightarrow X \text{ đóng} \Rightarrow X \text{ đủ}.$$

◆ **Định lý 1** **(Điều kiện cần và đủ Cauchy để một hàm lấy giá trị trong một kgvđc đủ có giới hạn)**

Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, F là một $\mathbb{K}$-kgvđc đủ, $f : X \to F$ là một ánh xạ. Để f có giới hạn hữu hạn tại a, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall (x', x'') \in X^2,$$
$$((x', x'') \in V^2 \Rightarrow d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

Chứng minh:

1) Giả thiết f có giới hạn l tại a, và cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho:

$$\forall x \in X \cap V, \quad d_F(f(x), l) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó ta có:

$$\forall (x', x'') \in (X \cap V)^2, \quad d_F(f(x'), f(x'')) \leq d_F(f(x'), l) + d_F(l, f(x'')) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Đảo lại giả thiết điều kiện Cauchy được thỏa mãn.

a) Vì $a \in \overline{X}$ nên tồn tại ít nhất một dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X hội tụ đến a.

• Dãy $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong F.

Thực vậy, cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in (X \cap V)^2, \quad d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon.$$

Sau nữa, vì $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow x_n \in V).$$

Như thế ta có:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \Rightarrow (x_p, x_q) \in (X \cap V)^2 \Rightarrow d_F(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon \right).$$

• Do $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong F, và do F đủ, nên $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một phần tử l của F.

b) Cho $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy (bất kỳ) trong X hội tụ đến a, và cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại $V \in \mathcal{V}_E(a)$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in (X \cap V)^2, \quad d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon.$$

Vì $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$ và $y_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \Rightarrow \begin{cases} x_n \in V \\ y_n \in V \end{cases} \right).$$

Khi đó ta có: $\quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon,$

chứng tỏ rằng: $\quad d_F(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

Do $f(x_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$, nên ta suy ra $f(y_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$.

Như thế với mọi dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X hội tụ đến a, dãy $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến l. Kết quả này chứng tỏ (xem 1.2.1, Mệnh đề 3) rằng f có giới hạn l tại a.

Nhận xét:

Theo phương pháp tương tự ta chứng minh được kết quả sau đây.

Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sao cho $+\infty \in \overline{X}_{\overline{\mathbb{R}}}$ (bao đóng của X trên đường thẳng số mở rộng $\overline{\mathbb{R}}$), F là một $\mathbb{K}$-kgvđc đủ, $f: X \to F$ là một ánh xạ. Để f có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(+\infty), \forall (x', x'') \in X^2, \quad ((x', x'') \in V^2 \Rightarrow d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

◆ **Định lý 2**

Mọi kgvđc hữu hạn chiều đều đủ.

Chứng minh:
Cho E là một $\mathbb{K}$ -kgvđc hữu hạn chiều và $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong E.
Theo 1.4.1, Mệnh đề 1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn: vậy tồn tại $M \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall n\in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \le M.$$

Vì $B'(0; M)$ là một bộ phận đóng giới nội của kgvđc hữu hạn chiều E, nên theo 1.3.2, Hệ quả, $B'(0; M)$ compac, do đó đủ (xem Mệnh đề 3).
Như thế $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $B'(0; M)$, do đó trong E, và ta kết luận E đủ.

Nhận xét:
1) Tồn tại những kgvđc đủ nhưng vô hạn chiều (xem bài tập 1.4.7).
2) Tồn tại những kgvđc không đủ (xem bài tập 1.4.6).

Mệnh đề 4 không thuộc chương trình.

◆ **Mệnh đề 4** Cho E là một kgvđc đủ, $(F_n)_{n\in \mathbb{N}}$ là một dãy giảm những bộ phận đóng giới nội không rỗng trong E sao cho $\mathrm{diam}(F_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$; khi đó $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ là một đơn tử.

Chứng minh:
Ta ký hiệu $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = F$.

1) F không thể bao gồm hai điểm khác nhau vì:

$$\forall (x, y) \in F^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad d(x, y) \le \mathrm{diam}(F_n),$$

suy ra: $\quad \forall (x, y) \in F^2, \quad d(x, y) = 0, \qquad$ vì rằng $\mathrm{diam}(F_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

2) Ta chứng minh rằng F không rỗng.
Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại một phần tử x_n thuộc F_n. Ta sẽ chứng tỏ rằng $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ và giới hạn của dãy đó thuộc F.

• Ta chứng tỏ rằng $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ là dãy Cauchy. Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall N\in \mathbb{N}, \quad (n \ge N \ \Rightarrow\ \mathrm{diam}(F_n) \le \varepsilon).$$

Với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$, ta có:

$$\begin{cases} p > N \\ q > N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p \in F_p \subset F_N \\ x_q \in F_q \subset F_N \end{cases} \Rightarrow\ d(x_p, x_q) \le \mathrm{diam}(F_N) \le \varepsilon .$$

Kết quả đó chứng tỏ $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong E.

• Do E đủ, nên $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ hội tụ đến một phần tử x thuộc E.

Ta chứng minh: $x \in F$.
Cho $n \in \mathbb{N}$; dãy $(x_p)_{p\ge n}$ hội tụ đến x và có các phần tử trong tập đóng F_n, do đó $x \in F_n$. Như vậy:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = F.$$

Nhận xét:
Mệnh đề 4 là dạng tổng quát hóa của định lý về các đoạn lồng nhau trong $\mathbb{R}$ (xem Tập 1, 3.2.2, Mệnh đề 2).

Bài tập

◊ **1.4.3** Cho E là một kgvđc, F là một kgvc của E; chứng minh rằng nếu F hữu hạn chiều thì F đóng.

◊ **1.4.4** Cho E là là một kgvđc và $L = \{(x,y) \in E^2;\ (x,y)$ độc lập tuyến tính$\}$. Chứng minh rằng L mở trong E^2.

◊ **1.4.5*** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, E là $\mathbb{R}$-kgv các ánh xạ Lipschitz từ $[a; b]$ đến $\mathbb{R}$.
a) Chứng minh rằng $N : E \to \mathbb{R}$ cho bởi:

$$\forall f \in E, \qquad N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{\substack{(x,y)\in[a;b]^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},$$

là một chuẩn trên E.
b) (E,N) có đủ không?

◊ **1.4.6*** Ta ký hiệu $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ và $N : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ N(P) = \sup_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|.$$

a) Chứng minh rằng N là một chuẩn trên $\mathbb{C}[X]$.
b) $(\mathbb{C}[X], N)$ có đủ không?

◊ **1.4.7*** Ta ký hiệu l^∞ là $\mathbb{C}$-kgv các dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bị chặn, được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$; chứng minh rằng l^∞ là một kgvđc đủ, và không hữu hạn chiều.

1.4.3 Phần nâng cao dành cho khoa MP* : định lý điểm bất động

♦ **Định lý (Định lý điểm bất động)**
Cho $F \in \mathfrak{P}(E)$, $f: F \to F$ là một ánh xạ.
Nếu F đủ và nếu f là ánh xạ co, thì f nhận một điểm bất động và chỉ một, và với mọi a thuộc F dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi:
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
hội tụ đến điểm bất động của f.

Ta nhắc lại rằng:

- x là một **điểm bất động** của f khi và chỉ khi $f(x) = x$.
- f là **ánh xạ co** khi và chỉ khi tồn tại $k \in [0; 1[$ thỏa mãn:
$$\forall (x, y) \in F^2, \qquad d(f(x), f(y)) \le kd(x, y).$$

Chứng minh:

1) Nếu x, y là hai điểm bất động của f thì khi đó:
$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le kd(x, y),$$
suy ra $d(x, y) = 0$, do $k \in [0; 1[$. Như vậy f chỉ có nhiều nhất một điểm bất động.

2) Ta chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến điểm bất động của f.

- Ta chứng minh rằng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong F. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:
$$d(u_n, u_{n+1}) = d(f(u_{n-1}), f(u_n)) \le kd(u_{n-1}, u_n),$$
từ đó bằng cách lập luận truy hồi ta được:
$$d(u_n, u_{n+1}) \le k^n d(u_0, u_1).$$
Sau đó với mọi (p,r) thuộc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ta có:
$$d(u_p, u_{p+r}) \le \sum_{i=0}^{r-1} d(u_{p+i}, u_{p+i-1}) \le \sum_{i=0}^{r-1} k^{p+i} d(u_0, u_1)$$
$$= k^p \frac{1-k^r}{1-k} d(u_0, u_1) \le k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1-k}.$$
Cho $\varepsilon > 0$; vì $k^p \dfrac{d(u_0,u_1)}{1-k} \underset{p\infty}{\to} 0$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p \ge N \Rightarrow \quad k^p \frac{d(u_0,u_1)}{1-k} \le \varepsilon).$$
Khi đó ta có: $\quad \forall (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad (p \ge N \Rightarrow d(u_p, u_{p+r}) \le \varepsilon)$,
và như thế $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong F.

- Vì F đủ nên $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một phần tử l của F. Vì f liên tục (do là ánh xạ Lipschitz) nên ta suy ra được: $\qquad f(u_n) \underset{n\infty}{\to} l$.

Nhưng mặt khác thì $u_{n+1} \underset{n\infty}{\to} l$. Ta kết luận rằng $f(l) = l$. ■

Ta cần chú ý đến các hệ thức $d(u_n, l) \le \frac{k^n}{1-k} d(u_0, u_1)$ và $d(u_n, l) \le \frac{k}{1-k} d(u_{n-1}, u_n)$ (với $n \ge 1$), vốn rất có ích trong các phép tính bằng số.

Bài tập

◊ **1.4.8** Cho E là một kgvđc hữu hạn chiều, $X = B_E'(0; 1)$, $f: X \to X$ là một ánh xạ 1-Lipschitz. Chứng minh rằng f có ít nhất một điểm bất động.
Kết quả trên đây có còn đúng nữa không khi $E = \mathbb{R}^2$ và $X = S(0; 1)$?

1.5 Tính liên thông theo cung

Cho $(E, \|\,.\,\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, d là khoảng cách liên kết với $\|\,.\,\|$. Ta có thể mở rộng dễ dàng các kết quả khảo sát dưới đây cho trường hợp một kgvđc bất kỳ.

Ở đây ta gọi **cung** là bất kỳ ánh xạ liên tục $\gamma : I \to E$, trong đó I là một khoảng đóng giới nội của của $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm.

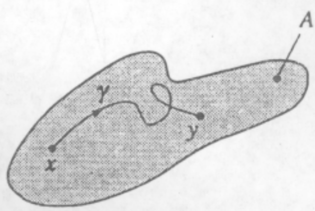
Thay cho thuật ngữ cung, người ta cũng dùng: đường đi, cung liên tục, đường đi liên tục.

Vì mọi khoảng đóng giới nội của $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm đều đồng phôi với [0; 1], nên trong định nghĩa trên đây ta có thể thay I bằng [0; 1].

1.5.1 Tính liên thông theo cung trong một kgvđc hữu hạn chiều

♦ **Định nghĩa** Một bộ phận A của E được gọi là **liên thông theo cung** khi và chỉ khi với mọi (x, y) thuộc A^2, tồn tại một cung $\gamma : [a; b] \to E$ sao cho:

$$\begin{cases} \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y \\ \forall t \in [a;b], \quad \gamma(t) \in A \end{cases}.$$



(Ta nói rằng γ là một cung nối x và y trong A).

Tại đây thay cho "liên thông theo cung" ta sẽ nói vắn tắt là: ltc.

Thí dụ:

Với mọi ánh xạ liên tục $\gamma : [0; 1] \to E$, "đường cong" $\gamma([0; 1])$ là một bộ phận ltc của E.

Chẳng hạn, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ là một bộ phận ltc của $\mathbb{C}$, vì $\mathbb{U} = \gamma([0; 1])$, trong đó:

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(2i\pi t) \end{array}.$$

♦ **Mệnh đề 1**

Mọi bộ phận lồi của E đều liên thông theo cung.

Chúng ta nhắc lại rằng một bộ phận A của một $\mathbb{K}$-kgv E được gọi là lồi khi và chỉ khi:

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0; 1], \qquad tx + (1-t)y \in A.$$

Chứng minh:
Cho A là một bộ phận lồi của E và $(x, y) \in A^2$. Vì A lồi nên với mọi t thuộc $[0; 1]$, $tx + (1-t)y$ nằm trong A, và rõ ràng là ánh xạ $\gamma : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & A \\ t & \mapsto & tx+(1-t)y \end{array}$ liên tục, do đó là một cung nối x và y trong A.
Như thế A ltc.

◆ **Định lý 1**
Các bộ phận liên thông theo cung của $\mathbb{R}$ là các khoảng.

Chứng minh:
1) Vì mọi khoảng của $\mathbb{R}$ đều là một bộ phận lồi của $\mathbb{R}$ nên theo Mệnh đề trên đây,mọi khoảng của $\mathbb{R}$ đều ltc.
2) Đảo lại giả sử A là một bộ phận ltc của $\mathbb{R}$.
Cho $(x, y) \in A^2$. Tồn tại một cung $\gamma : [0; 1] \to A$ nối x và y trong A. Theo định lý về các giá trị trung gian (Tập 1, 4.3.3, Định lý), $\gamma([0; 1])$ là một khoảng của $\mathbb{R}$. Vì khoảng đó có chứa x và y nên ta có:
$$[x, y] \subset \gamma([0; 1]) \subset A,$$
và như vậy A là một bộ phận lồi của $\mathbb{R}$, do đó là một khoảng.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$, $A \subset X$, F là một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $f : X \to F$ là một ánh xạ.
Nếu A liên thông theo cung và f liên tục thì $f(A)$ liên thông theo cung.

Chứng minh:
Cho $(u; v) \in (f(A))^2$, tồn tại $(x, y) \in A^2$ sao cho: $u = f(x)$ và $v = f(y)$.
Vì A ltc nên tồn tại một cung $\gamma : [0; 1] \to A$ sao cho: $\gamma(0) = x$ và : $\gamma(1) = y$.
Khi đó $f o \gamma : [0; 1] \to f(A)$ là một cung (vì f và γ liên tục, do đó $f o\gamma$ cũng liên tục) nối u và v, vì $u = f(x) = f(\gamma(0)) = (f o \gamma)(0)$ và $v = (f o \gamma)(1)$. ■

Thí dụ:
Với mọi khoảng I của $\mathbb{R}$ và mọi ánh xạ liên tục $f : I \to E$, "đường cong" $f(I)$ là một bộ phận ltc của E.
Chẳng hạn đường parabol $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 = x\}$ là một bộ phận ltc của $\mathbb{R}^2$ vì đó là ảnh của $\mathbb{R}$ (vốn ltc) qua ánh xạ liên tục $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ y & \mapsto & (y^2, y) \end{array}$.

Nhận xét:
Nghịch ảnh của một bộ phận ltc qua một ánh xạ liên tục có thể không ltc, chẳng hạn như trong thí dụ:
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ y & \mapsto & (y^2, y) \end{array}, \quad B = [1; +\infty[\times \mathbb{R}.$$
trong thí dụ này thì B ltc (vì lồi trong $\mathbb{R}^2$), nhưng $f^{-1}(B)$ không ltc, vì:
$$f^{-1}(B) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[.$$

◆ **Định lý 2** **("Định lý giá trị trung gian")**
Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, $f: A \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ.
Nếu A liên thông theo cung và f liên tục thì f thỏa mãn định lý giá trị trung gian, nghĩa là:
f lấy mọi giá trị thực giữa hai số thực mà hàm số đó đạt tới.

Chứng minh:
Vì A ltc và f liên tục, nên $f(A)$ ltc, và do $f(A)$ là một bộ phận ltc của $\mathbb{R}$, nên $f(A)$ là một khoảng của $\mathbb{R}$.
■

Nhận xét:
Định lý trên đây tổng quát hóa định lý các giá trị trung gian đã biết trong Tập 1. 4.3.3, Định lý.

Các Mệnh đề 3 và 4 dưới đây là phần nâng cao dành cho khoa MP*.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, $P \subset A$.
Nếu A liên thông theo cung và nếu P không rỗng, mở và đóng trong A, thì $P = A$.

Chứng minh:
Ta lập luận phản chứng: giả thiết $P \neq A$.
Khi đó tồn tại $x \in P$ và $y \in \complement_A(P)$, và do A ltc nên tồn tại một cung $\gamma: [0; 1] \to A$ sao cho $\gamma(0) = y$ và $\gamma(1) = x$.
Xét hàm đặc trưng của P:
$$\mathcal{X}_P : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{nếu } u \in P \\ 0 & \text{nếu } u \notin P \end{cases} \end{array}.$$

Với mọi bộ phận mở Ω của $\mathbb{R}$, $\mathcal{X}^{-1}_P(\Omega)$ là một bộ phận mở của A, vì $\mathcal{X}^{-1}_P(\Omega)$ là một trong bốn tập hợp $\mathcal{X}^{-1}_P(\{0, 1\})$, $\mathcal{X}^{-1}_P(\{0\})$, $\mathcal{X}^{-1}_P(\{1\})$, $\mathcal{X}^{-1}_P(\{\varnothing\})$, theo thứ tự là các tập hợp A, P, $\complement_A(P)$, $\varnothing$.

Ta suy ra rằng $\mathcal{X}_P$ liên tục, do đó ánh xạ hợp: $\mathcal{X}_P \circ \gamma: [0; 1] \to$ R liên tục.

Nhưng $\mathcal{X}_P \circ \gamma$ lấy giá trị trong $\{0, 1\}$, và $(\mathcal{X}_P \circ \gamma)(0) = 0$, $(\mathcal{X}_P \circ \gamma)(1) = 1$, mâu thuẫn với định lý các giá trị trung gian.
Ta kết luận: $P = A$.
Xem thêm 1.5.2, Mệnh đề 6.

◆ **Mệnh đề 4** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, F là một kgvđc, $f: A \to F$ là một ánh xạ. Nếu A ltc và nếu f là ánh xạ hằng địa phương, thì f là ánh xạ hằng.

Một ánh xạ $f: A \to F$ gọi là ánh xạ hằng địa phương khi và chỉ khi:

$$\forall a \in A,\ \exists V \in \mathcal{V}_A(a),\ \forall x \in V, \qquad f(x) = f(a).$$

Chứng minh:

Cho $x_0 \in A$; ta ký hiệu $P = f^{-1}(\{f(x_0)\})$.

Do f liên tục, và vì $\{f(x_0)\}$ là một bộ phận đóng của F, nên P là một bộ phận đóng của A.

Mặt khác ta chứng tỏ rằng P là một bộ phận mở của A.

Cho $x \in P$. Vì f là ánh xạ hằng địa phương, nên tồn tại $V \in \mathcal{V}_A(x)$ sao cho:

$$\forall y \in V, \qquad f(y) = f(x).$$

Khi đó ta có: $\forall y \in V, \qquad f(y) = f(x) = f(x_0)$,

suy ra $V \subset P$.

Kết quả này chứng tỏ rằng P là lân cận của mọi điểm của nó, do đó mở trong A.

Do P không rỗng $(x_0 \in P)$ và mở và đóng trong A, nên theo Mệnh đề 3, $P = A$, và như vậy f là ánh xạ hằng trên A.

Bài tập

◊ **1.5.1** Chứng minh rằng trong mọi kgvdc, tất cả mọi quả cầu mở và tất cả mọi quả cầu đóng đều liên thông theo cung.

◊ **1.5.2** Cho một thí dụ về hai bộ phận A, B của $\mathbb{R}$ sao cho: A đồng phôi với B, $\mathbb{R} - A$ liên thông theo cung, $\mathbb{R} - B$ không liên thông theo cung.

◊ **1.5.3** Cho E, F là hai kgvdc hữu hạn chiều, $A \in \mathfrak{P}(E), B \in \mathfrak{P}(F)$. Chứng minh:

a) Nếu A và B liên thông theo cung thì $A \times B$ liên thông theo cung.

b) Nếu $A \times B$ liên thông theo cung và A, B không rỗng, thì A và B liên thông theo cung.

◊ **1.5.4** Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ những bộ phận của một kgvdc hữu hạn chiều. Ta giả thiết rằng mọi A_i đều liên thông theo cung và tồn tại $i_0 \in I$ sao cho với mọi i thuộc I, $A_{i_0} \cap A_i \neq \varnothing$. Chứng minh rằng $\bigcup_{i \in I} A_i$ liên thông theo cung.

Thí dụ: $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ liên thông theo cung.

◊ **1.5.5** Cho E là một kgvđc hữu hạn chiều, A là một bộ phận liên thông theo cung của E, $f: A \to \{0, 1\}$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng f là ánh xạ hằng. (Ở đây $\{0, 1\}$ được trang bị khoảng cách cảm sinh bởi khoảng cách trên $\mathbb{R}$).

1.5.2 Bổ sung: tính liên thông

Cho $(E, \|\,.\,\|)$ là một $\mathbb{K}$-kgvđc, d là khoảng cách liên kết với $\|\,.\,\|$.

♦ **Định nghĩa**

Một bộ phận A của E được gọi là **liên thông** khi và chỉ khi các bộ phận duy nhất của A vừa mở vừa đóng trong A là $\varnothing$ và A.

Các tính chất sau đây đôi một tương đương với nhau:

(i) A liên thông

(ii) Với mọi bộ phận mở U, V của A:

$$\begin{cases} U \cup V = A \\ U \cap V = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} U = A \\ \text{hay} \\ V = A \end{array} \right.$$

(iii) Với mọi bộ phận đóng F, G của A: $\begin{cases} F \cup G = A \\ F \cap G = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} F = A \\ \text{hay} \\ G = A \end{array} \right.$

(iv) Với mọi bộ phận mở U, V của E: $\begin{cases} A \subset U \cup V \\ U \cap V \cap A = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A \subset U \\ \text{hay} \\ A \subset V \end{array} \right.$

(v) Với mọi bộ phận đóng F, G của E: $\begin{cases} A \subset F \cup G \\ F \cap G \cap A = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A \subset F \\ \text{hay} \\ A \subset G \end{array} \right.$.

Thực vậy, các bộ phận mở (tương ứng: đóng) của A là các vết của A trên các bộ phận mở (tương ứng: đóng) của E (xem 1.1.5, *3)*).

♦ **Mệnh đề 1** Một bộ phận A của E là liên thông khi và chỉ khi mọi ánh xạ liên tục từ A đến $\{0, 1\}$ đều là ánh xạ hằng.

Ở đây $\{0, 1\}$ được trang bị chuẩn cảm sinh bởi khoảng cách thông thường trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh:

1) Giả thiết A liên thông, và cho $\varphi : A \to \{0,1\}$ là một ánh xạ liên tục. Vì $\{0\}$ và $\{1\}$ đều là những bộ phận đóng của $\{0, 1\}$, nên $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ và $G = \varphi^{-1}(\{1\})$ là những bộ phận đóng của $\{0, 1\}$. Hơn nữa $F \cup G = A$ và $F \cap G = \varnothing$. Do A liên thông nên ta suy ra $F = A$ hoặc $G = A$, tức là $\varphi = 0$ hoặc $\varphi = 1$.

2) Giả thiết A không liên thông. Tồn tại hai bộ phận đóng F, G của A sao cho:

$$F \cup G = A, \quad F \cap G = \varnothing, \quad F \neq A, \quad G \neq A.$$

Ánh xạ $\varphi : \begin{array}{ccc} A & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in F \\ 1 & \text{nếu } x \in G \end{cases} \end{array}$ liên tục, vì các nghịch ảnh của các bộ phận đóng của $\{0, 1\}$ (đó là các tập $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$) là những bộ phận đóng $(\varnothing, F, G, A)$ của A, và φ không phải là ánh xạ hằng.

◆ **Mệnh đề 2** Cho A, B là hai bộ phận của E.

Nếu A liên thông và nếu $A \subset B \subset \overline{A}$ thì B liên thông,

Chứng minh:

Cho F, G là hai bộ phận đóng của E thỏa mãn: $\begin{cases} B \subset F \cup G \\ F \cap G \cap B = \varnothing \end{cases}$.

Khi đó $A \subset F \cup G$ và $F \cap G \cap A = \varnothing$; do A liên thông nên ta suy ra:

$$A \subset F \text{ hoặc } A \subset G .$$

Nếu chẳng hạn $A \subset F$ thì $B \subset \overline{A} \subset \overline{F} = F$.

◆ **Hệ quả**

Với mọi bộ phận liên thông A của E, $\overline{A}$ liên thông.

Nhận xét:

1) Có thể xảy ra trường hợp A không liên thông và $\overline{A}$ liên thông; chẳng hạn: $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^*$.

2) Có thể xảy ra trường hợp A liên thông và $\mathring{A}$ không liên thông; chẳng hạn:

$$E = \mathbb{R}^2, \quad A = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup \{(0, 0)\}.$$

Trong thí dụ này A liên thông vì A có hình sao đối với (0,0), do đó liên thông theo cung.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ những bộ phận của E.

Nếu $\begin{cases} \forall i \in I, \ A_i \text{ liên thông} \\ \exists i_0 \in I, \ \forall i \in I, \ A_{i_0} \cap A_i \neq \varnothing \end{cases}$, thì $\bigcup_{i \in I} A_i$ liên thông,

Chứng minh:

Ta ký hiệu $A = \bigcup_{i \in I} A_i$; cho $\varphi : A \to \{0,1\}$ là một ánh xạ liên tục.

Với mỗi i thuộc I, $\varphi|_{A_i}: \begin{array}{ccc} A_i & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ liên tục; vì A_i liên thông, nên ta suy ra rằng φ_{A_i} là ánh xạ hằng (xem Mệnh đề 1).

Nhưng ($\forall i \in I, A_{i_0} \cap A_i \neq \varnothing$), nên ta suy ra: $\forall i \in I,\ \varphi|_{A_{i_0}} = \varphi|_{A_i}$, và cuối cùng ta suy ra được rằng φ là ánh xạ hằng.

Theo Mệnh đề 2, ta kết luận rằng A liên thông.

◆ **Hệ quả** Nếu $(A_i)_{i\in I}$ là một họ những bộ phận liên thông của E sao cho $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, thì $\bigcup_{i\in I} A_i$ liên thông,

Thí dụ: $\{(x,\alpha x); (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}\}$ là một bộ phận liên thông của $\mathbb{R}^2$.

Nhận xét:

Giao của hai bộ phận liên thông A, B có thể không liên thông, chẳng hạn:

$$E = \mathbb{R}^2, \quad A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) - \{(0,0)\}, \quad B = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-) - \{(0,0)\}.$$

◆ **Mệnh đề 4** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, F là một kgvđc, $f: A \to F$ là một ánh xạ. Nếu A liên thông và f liên tục, thì $f(A)$ liên thông.

Chứng minh:

Cho $\varphi: A \to \{0,1\}$ là một ánh xạ liên tục.

Ánh xạ $\psi: \begin{array}{ccc} A & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \varphi(f(x)) \end{array}$ liên tục; do A liên thông nên ta suy ra rằng ψ là ánh xạ hằng. Khi đó rõ ràng là φ là hằng. Ta kết luận rằng $f(A)$ liên thông (xem Mệnh đề 1).

◆ **Mệnh đề 5** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n$ là những kgvđc, A_i là một bộ phận không rỗng của E_i $(1 \leq i \leq n)$. Để $\prod_{i=1}^{n} A_i$ liên thông, điều kiện cần và đủ là A_i liên thông với mọi i thuộc $\{1,...,n\}$.

Chứng minh:

Ta ký hiệu $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

1) Giả thiết A liên thông; với mọi i thuộc $\{1,...,n\}$, $A_i = \mathrm{pr}_i(A)$ là ảnh liên tục của một tập liên thông, do đó liên thông.

2) Đảo lại, giả sử $A_1, \dots, A_n$ liên thông. Ánh xạ $\varphi : A \to \{0,1\}$ là một ánh xạ liên tục, và

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in A, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in A.$$

Ánh xạ $\begin{array}{rccc} \varphi(\,.\,, a_2, \dots, a_n) : & A_1 & \to & \{0,1\} \\ & x_1 & \mapsto & \varphi(x_1, a_2, \dots, a_n) \end{array}$ liên tục và A_1 liên thông, do đó $\varphi(\,.\,, a_2, \dots, a_n)$ là ánh xạ hằng; nói riêng $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \varphi(b_1, a_2, \dots, a_n)$.

Một cách tương tự, ánh xạ $\begin{array}{rccc} \varphi(b_1\,,\,.\,, a_3, \dots, a_n) : & A_2 & \to & \{0,1\} \\ & x_2 & \mapsto & \varphi(b_1, x_2, a_3, \dots, a_n) \end{array}$ là ánh xạ hằng, từ đó suy ra $\varphi(b_1, a_2, \dots, a_n) = \varphi(b_1, b_1, a_3, \dots, a_n)$.

Bằng cách lặp lại thủ tục này, ta suy ra rằng $\varphi(a) = \varphi(b)$, chứng tỏ rằng φ là hằng. Cuối cùng ta kết luận A liên thông.

◆ **Mệnh đề 6** Nếu một bộ phận A của một kgvđc E là liên thông theo cung, thì A liên thông.

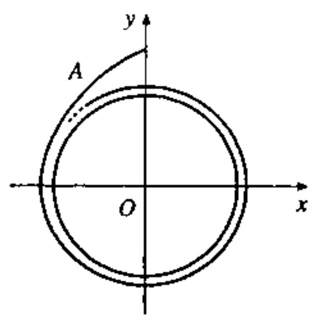
Chứng minh:

Cho $\varphi : A \to \{0,1\}$ là một ánh xạ liên tục và $(x, y) \in A^2$. Tồn tại một cung $\gamma : [a; b] \to E$ nối x và y trong A. Ánh xạ $\varphi \circ \gamma : [a; b] \to \{0,1\}$ liên tục trên bộ phận liên thông $[a; b]$ của $\mathbb{R}$, do đó là ánh xạ hằng (xem 1.5.2, Mệnh đề 1), nói riêng $\varphi(x) = (\varphi \circ \gamma)(a) = (\varphi \circ \gamma)(b) = \varphi(y)$, và như thế φ là hằng.
Kết quả này chứng tỏ (xem 1.5.2, Mệnh đề 1) rằng A liên thông.

Nhận xét:
Một bộ phận A của E có thể liên thông mà không liên thông theo cung; điều này độc giả có thể kiểm chứng lại bằng cách lấy $E = \mathbb{R}^2$ và lấy A là hợp của đường cong có phương trình cực là

$$\rho = e^{1/\theta} \qquad \left(\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[\right)$$

và đường tròn có tâm O và bán kính 1.



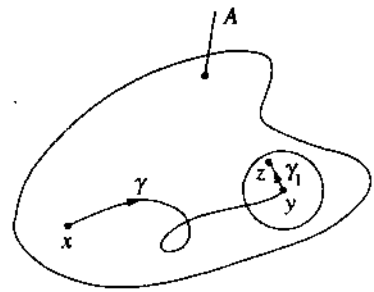
Tuy nhiên ta có Mệnh đề sau.

◆ **Mệnh đề 7** Nếu một bộ phận A của E là tập mở và liên thông, thì A liên thông theo cung.

Chứng minh:
Trường hợp $A = \varnothing$ là tầm thường; vậy ta giả thiết $A \neq \varnothing$. Tồn tại $x \in A$; xét tập hợp Γ_x các phần tử y của A có thể nối với x bằng những cung trong A (Γ_x gọi là *thành phần liên thông theo cung* trong A của x).

1) Ta chứng minh rằng Γ_x mở (trong E và trong A).
Cho $y \in \Gamma_x$; tồn tại một cung $\gamma : [a; b] \to E$ sao cho:

$$\begin{cases} \gamma(a) = x, & \gamma(b) = y \\ \forall t \in [a;b], & \gamma(t) \in A \end{cases}$$



Vì A mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho
$B_E(y; r) \subset A$.
Cho $z \in B_E(y; r)$; y có thể nối trong A với z bằng cung

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [b; b+1] & \to & E \\ t & \mapsto & (1-t+b)y+(t-b)z \end{array}.$$

Rõ ràng rằng ánh xạ

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2 : [a; b+1] & \to & E \\ t & \mapsto & \begin{cases} \gamma(t) & \text{nếu } t \in [a;b] \\ \gamma_1(t) & \text{nếu } t \in]b; b+1] \end{cases} \end{array}$$

là cung nối x và z trong A.
Kết quả này chứng tỏ rằng $B_E(y; r) \subset \Gamma_x$,
Γ_x là một lân cận của mọi điểm của nó, vậy Γ_x mở (trong E, do đó trong A vì rằng A là một bộ phận mở của E và do $\Gamma_x \subset A$) .

2) Ta chứng tỏ rằng Γ_x đóng trong A.

Cho $y \in \overline{\Gamma_x}$ (bao đóng của Γ_x trong A); tồn tại $r > 0$ sao cho $B_E(y; r) \subset A$.

Do $y \in \overline{\Gamma_x}$ nên ta có $B_E(y; r) \cap \Gamma_x \neq \varnothing$; vậy tồn tại $z \in B_E(y; r) \cap \Gamma_x$.

Vì rằng x và z có thể nối với nhau bằng một cung thuộc A, và rằng z và y cũng có thể nối với nhau bằng một cung thuộc A (như ở *1)*), nên x và y có thể nối với nhau bằng một cung thuộc A, và do đó $y \in \Gamma_x$.

Kết quả này chứng tỏ $\overline{\Gamma_x} = \Gamma_x$, và do đó Γ_x đóng trong A.

3) Như thế Γ_x là một bộ phận mở và đóng của A, không rỗng ($x \in \Gamma_x$); vì A liên thông nên ta suy ra $\Gamma_x = A$, tức là mọi a thuộc A có thể nối với x bằng một cung thuộc A. Vậy ta có thể nối hai điểm bất kỳ của A bằng một cung thuộc A, bằng cách nối chúng với x. Cuối cùng thì A liên thông theo cung.

Bài tập

◊ **1.5.6** Cho E là một kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, x là một điểm cô lập của X sao cho $X \neq \{x\}$; chứng minh rằng X không liên thông.

◊ **1.5.7** Cho E là một kgvđc, $A \in \mathfrak{P}(E)$, C là một bộ phận liên thông của E; ta giả thiết rằng $C \cap \mathring{A} \neq \varnothing$ và $C \cap \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E(A)}} \neq \varnothing$. Chứng minh: $C \cap \partial(A) \neq \varnothing$.

◊ **1.5.8** Cho E là một kgvđc, X là một bộ phận liên thông của E, $A \subset X$ sao cho $A \neq \varnothing$ và $A \neq X$. Chứng minh: $\partial(A) \neq \varnothing$, và $d(A, \complement_X(A)) = 0$. (Ở đây $\partial(A)$ chỉ biên của A trong X).

◊ **1.5.9** Cho E là một kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$ sao cho với mọi (x,y) thuộc X^2 tồn tại một bộ phận liên thông C của X thỏa mãn: $x \in C$ và $y \in C$. Chứng minh rằng X liên thông.

◊ **1.5.10** Cho E là một kgvđc, X là một bộ phận liên thông không giới nội của E, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; chứng minh rằng $\{x \in X; d(a;x) = r\}$ không rỗng.

1.5.3 Bổ sung: Thành phần liên thông

◆ **Định nghĩa 1** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, $x \in A$. **Thành phần liên thông của** x **trong** A, ở đây ký hiệu là $C_A(x)$, là hợp của các bộ phận liên thông của A có chứa x:

$$C_A(x) = \bigcup_{\substack{x \in C \subset A \\ C \text{ liên thông}}} C \quad .$$

◆ **Mệnh đề 1** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$, $x \in A$; $C_A(x)$ là bộ phận liên thông lớn nhất của A có chứa x.

Chứng minh:

1) Theo định nghĩa, $C_A(x)$ là hợp của một họ những bộ phận liên thông có chứa x, do đó có giao không rỗng. Theo 1.5.2, Hệ quả, $C_A(x)$ liên thông.

2) $x \in C_A(x)$ vì $\{x\}$ có mặt trong các bộ phận liên thông chứa x và bao hàm trong A.

3) Với mọi bộ phận liên thông C của A có chứa x, ta có $C \subset C_A(x)$, vì rằng C có mặt trong họ chỉ số của hợp xác định nên $C_A(x)$.

◆ **Mệnh đề 2**

Với mọi bộ phận A của E và mọi x thuộc A, $C_A(x)$ đóng trong A.

Chứng minh:

$\overline{C_A(x)}$ (bao đóng của $C_A(x)$ trong A) là một bộ phận liên thông của A (xem 1.5.2, Hệ quả) có chứa x, từ đó suy ra $\overline{C_A(x)} \subset C_A(x)$, và $C_A(x)$ đóng trong A.

◆ **Định nghĩa 2** **Thành phần liên thông của** A là các thành phần liên thông trong A của các phần tử của A.

Thí dụ:

$E = \mathbb{R}$, $A =]0; 1] \cup [2; 3]$; các thành phần liên thông của A là $]0; 1]$ và $[2; 3]$.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $A \in \mathfrak{P}(E)$. Quan hệ $\mathcal{R}_A$ xác định trong A bởi:

$$x\,\mathcal{R}_A\,y \quad \Leftrightarrow \quad y \in C_A(x)$$

là một quan hệ tương đương, và các lớp tương đương là các thành phần liên thông của A.

Chứng minh:

1) Tính phản xạ

Ta đã thấy: $\forall x \in A,\ x \in C_A(x)$ (xem Mệnh đề 1).

2) Tính đối xứng

Giả thiết $x\,R_A\,y$; có nghĩa là $y \in C_A(x)$. Các bộ phận $C_A(x)$ và $C_A(y)$ đều liên thông và có chứa y, do đó (xem 1.5.2, Hệ quả) $C_A(x) \cup C_A(y)$ liên thông. Nhưng $C_A(y)$ là bộ phận liên thông lớn nhất của A có chứa y, từ đó suy ra rằng $C_A(x) \cup C_A(y) \subset C_A(y)$, tức là $C_A(x) \subset C_A(y)$; nói riêng $x \in C_A(y)$, tức là $y\,R_A\,x$.

Chúng ta vừa chứng minh hơn nữa rằng:

$$x\,\mathcal{R}_A\,y \quad \Rightarrow \quad C_A(x) = C_A(y)\,.$$

3) Tính bắc cầu

$$\begin{cases} x\,\mathcal{R}_A\,y \\ y\,\mathcal{R}_A\,z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_A(x) = C_A(y) \\ C_A(y) = C_A(z) \end{cases} \Rightarrow \quad C_A(x) = C_A(z) \quad \Rightarrow \quad x\,\mathcal{R}_A\,z.$$

Bài tập

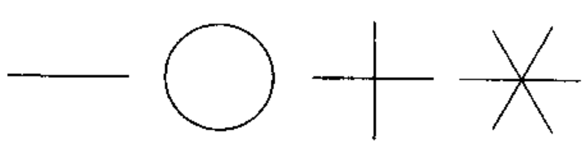
◇ **1.5.11** Cho E, F là hai kgvđc, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$.

Ta giả thiết rằng X và Y đồng phôi và X có một số hữu hạn n thành phần liên thông, chứng minh rằng Y cũng có đúng n thành phần liên thông.

◇ **1.5.12** Trong bài tập này ta sẽ sử dụng kết quả của bài tập 1.5.11.

a) Chứng minh rằng $[0; 1]$, $[0; 1[$; $]0; 1[$ (là những bộ phận của $\mathbb{R}$ thông thường) đôi một không đồng phôi.

b) Chứng minh rằng bốn bộ phận sau đây của $\mathbb{R}$ (đoạn, đường tròn, hình chữ thập, hình hoa thị):



đôi một không đồng phôi.

◊ **1.5.13*** Cho $X = \{(0,y);\ y \in [-1; 0[\cup]0; 1]\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, y\right);\ n \in \mathbb{N}^*, y \in [-1;1]\right\}$.

Chứng minh rằng thành phần liên thông của $a = (0,1)$ trong X khác với giao của các bộ phận của X, mở và đóng trong X, và có chứa a.

◊ **1.5.14*** *Thí dụ về các tập hợp liên thông và không liên thông theo cung*

a) $X = \left\{\left(x, \sin\frac{\pi}{x}\right);\ x \in]0;1]\right\} \cup (\{0\} \times [-1; 1])$

b) $X = \left\{\left(x, \frac{1}{n}x\right);\ (x,n) \in [0;2] \times \mathbb{N}^*\right\} \cup ([1; 2] \times \{0\})$

c) $X = \left\{\left(\frac{1}{n}, y\right);\ (n,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(x,n);\ n \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}\right\} \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

◊ **1.5.15** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, I là tập hợp các đơn ánh liên tục từ $[0; 1]$ đến $\mathbb{R}$, I_+ (tương ứng: I_-) là tập hợp các ánh xạ liên tục tăng (tương ứng: giảm) nghiêm ngặt từ $[0; 1]$ đến $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng I có hai thành phần liên thông, là I_+ và I_-.

1.6 Không gian tiền-Hilbert

1.6.1 Tích vô hướng

♦ **Định nghĩa 1**

1) Trường hợp không gian thực

Cho E là một $\mathbb{R}$-kgv; **tích vô hướng** trên E là mọi ánh xạ $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ \ \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ **(φ đối xứng)**

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y, y') \in E^3,\ \ \varphi(x,\lambda y + y') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$
(φ tuyến tính đối với vị trí thứ hai)

(iii) $\forall x \in E,\ \ \varphi(x,x) \geq 0$

(iv) $\forall x \in E,\ \ (\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

2) Trường hợp không gian phức

Cho E là một $\mathbb{C}$-kgv; **tích vô hướng** (hay: **tích vô hướng Hermite**) trên E là mọi ánh xạ $\varphi : E^2 \to \mathbb{C}$ thỏa mãn:

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ \ \varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$ (φ có tính **đối xứng Hermite**)

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall (x, y, y') \in E^3,\ \ \varphi(x,\lambda y + y') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$
(φ tuyến tính đối với vị trí thứ hai)

(iii) $\forall x \in E,\ \ \varphi(x,x) \in \mathbb{R}_+$

(iv) $\forall x \in E,\ \ (\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

Nhận xét:

1) Nếu φ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}$-kgv E, thì:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, x', y) \in E^3,\ \ \varphi(\lambda x + x', y) = \varphi(y, \lambda x + x') = \lambda\varphi(y,x) + \varphi(y, x')$$
$$= \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y).$$

Ta nói rằng φ **tuyến tính đối với vị trí thứ nhất**. Để biểu thị rằng φ tuyến tính đối với các vị trí thứ nhất và thứ hai, ta nói φ **song tuyến tính**.

2) Nếu φ là một tích vô hướng trên $\mathbb{C}$-kgv E, thì:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall (x, x', y) \in E^3,\ \ \varphi(\lambda x + x', y) = \overline{\varphi(y, \lambda x + x')} = \overline{\lambda\varphi(y,x) + \varphi(y,x')}$$
$$= \overline{\lambda}\,\varphi(x, y) + \varphi(x', y).$$

Ta nói rằng φ **bán-tuyến tính đối với vị trí thứ nhất**. Để biểu thị rằng φ bán-tuyến tính đối với vị trí thứ nhất và tuyến tính đối với vị trí thứ hai, ta nói φ **song tuyến tính rưỡi**.

Khi φ là một tích vô hướng, thường người ta ký hiệu $(x \mid y)$ hay $< x, y >$ hay $x \cdot y$ thay vì $\varphi(x, y)$.

◆ **Định nghĩa 2**

1) Nếu φ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}$-kgv E, thì ánh xạ

$$\begin{array}{rccc}\phi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x,x)\end{array}$$

được gọi là **dạng toàn phương liên kết với** φ.

2) Nếu φ là một tích vô hướng trên $\mathbb{C}$-kgv E, thì ánh xạ

$$\begin{array}{rccc}\phi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x,x)\end{array}$$

được gọi là **dạng Hermite liên kết với** φ.

Với các ký hiệu trên đây, ta biểu thị:

- điều kiện (iii) $\forall x \in E, \quad \phi(x) \geq 0$ bởi : ϕ **dương**
- điều kiện (iv) $\forall x \in E, \quad (\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0)$ bởi : ϕ **xác định.**

Như vậy một ánh xạ $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ (tương ứng: $\varphi : E^2 \to \mathbb{C}$) là một tích vô hướng trên E khi và chỉ khi φ song tuyến tính đối xứng (tương ứng: tựa song tuyến tính có tính chất đối xứng Hermite), và dạng toàn phương (tương ứng: dạng Hermite) ϕ liên kết với φ là xác định dương.

◆ **Định nghĩa 3**

1) Mọi cặp (E, φ), trong đó E là một $\mathbb{R}$-kgv (tương ứng: $\mathbb{C}$ -kgv) và φ là một tích vô hướng trên E, được gọi là **không gian tiền-Hilbert thực** (tương ứng: **phức**).

2) Mọi không gian tiền Hilbert thực (tương ứng: phức) hữu hạn chiều **được gọi là không gian Euclide** (tương ứng: **không gian Hermite**).

***Thí dụ*:**

1) **Tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.**

Ánh xạ $\varphi : (\mathbb{K}^n)^2 \to \mathbb{K}$ xác định bởi: $\quad \varphi((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$

là một tích vô hướng trên $\mathbb{K}^n$, **gọi là tích vô hướng thông thường** (hay: **chính tắc**) trên $\mathbb{K}^n$.

2) **Tích vô hướng chính tắc trên $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

Nhắc lại

- $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ là $\mathbb{K}$-kgv các ma trận n hàng, p cột và với hệ số thuộc $\mathbb{K}$.
- Với $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ký hiệu A^* sẽ chỉ ma trận **chuyển vị-liên hợp** của A, xác định bởi: $A^* = {}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq i\leq n}} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Chú ý rằng nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, thì $A^* = {}^tA$ là ma trận chuyển vị của A.
Ta có các công thức sau:

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad (\lambda A)^* = \overline{\lambda}\, A^*, \quad A^{**} = A.$$

- Với $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, vết của M, ký hiệu là $\mathrm{tr}(M)$, là phần tử của $\mathbb{K}$ xác định bởi: $\quad \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

  Người ta đã chứng minh các công thức sau:

  $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$, $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, $\mathrm{tr}(A^*) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$.

Xét ánh xạ: $\quad \varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 & \to & \mathbb{K} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}(A^*B) \end{array}$.

(i) $\quad \varphi(B,A) = \mathrm{tr}(B^*A) = \mathrm{tr}((A^*B)^*) = \overline{\mathrm{tr}(A^*B)} = \overline{\varphi(A,B)}$

(ii) $\quad \varphi(A, \lambda B+B') = \mathrm{tr}(A^*(\lambda B + B')) = \mathrm{tr}(\lambda A^*B + A^*B')$

$\quad = \lambda\mathrm{tr}(A^*B) + \mathrm{tr}(A^*B') = \lambda\varphi(A,B) + \varphi(A,B')$

(iii) Ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}$, ta có:

$$\varphi(A,A) = \mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\overline{a_{ij}}\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \left|a_{ij}^2\right| \in \mathbb{R}_+.$$

(iv) Tương tự ta có: $\varphi(A,A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} \left|a_{ij}\right|^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\},\ a_{ij} = 0) \Leftrightarrow A = 0.$

Như thế φ là một tích vô hướng trên $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, gọi là **tích vô hướng chính tắc** trên $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Tích vô hướng chính tắc trên $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ hoặc $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ chính là tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{K}^n$, sai khác về cách ký hiệu. Nói cách khác thì thí dụ 2) là dạng tổng quát của thí dụ 1).

3) Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, và $E = C([a;b]), \mathbb{K})$ là $\mathbb{K}$-kgv các ánh xạ liên tục từ $[a;b]$ đến $\mathbb{K}$. Xét ánh xạ $\varphi : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{K} \\ (f,g) & \mapsto & \int_a^b \overline{f}g \end{array}$.

(i) $\varphi(g,f) = \int_a^b \overline{g} f = \int_a^b \overline{\overline{f}g} = \overline{\int_a^b \overline{f}g} = \overline{\varphi(f,g)}$

(ii) $\varphi(f, \lambda g_1 + g_2) = \int_a^b \overline{f}(\lambda g_1 + g_2) = \lambda \int_a^b \overline{f}g_1 + \int_a^b \overline{f}g_2 = \lambda\varphi(f,g_1) + \varphi(f,g_2)$

(iii) $\varphi(f,f) = \int_a^b \overline{f}f = \int_a^b |f|^2 \in \mathbb{R}_+$

(iv) $\varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f|^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$, vì f liên tục (xem Tập 1, 6.2.5, Hệ quả 4).

Các kết quả trên chứng tỏ φ là một tích vô hướng trên E.

***4)* Tổng quát hóa thí dụ 3)**

Với các ký hiệu như ở thí dụ 3), cho $p \in E$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in [a;b],\ p(x) \in \mathbb{R}_+ \\ \{x \in [a;b];\ p(x) = 0\} \text{ hữu hạn (hoặc, tổng quát hơn, } \\ \qquad\qquad \text{có phần trong rỗng)} \end{cases}$$

Ánh xạ $\varphi_p : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{K} \\ (f,g) & \mapsto & \int_a^b \overline{f}gp \end{array}$ là một tích vô hướng trên E. Thật vậy, các điều kiện (i), (ii), (iii) rõ ràng được thỏa mãn như trong thí dụ 3), và nếu $f \in E$ thỏa mãn $\varphi(f, f) = 0$, thì khi đó $|f|^2 p = 0$, do đó f triệt tiêu trên $[a; b]$, có thể ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm (các không điểm của p), suy ra f triệt tiêu trên $[a; b]$ do tính liên tục.

***5)* Phiên bản khác của thí dụ 3)**

Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ liên tục từ $[0; +\infty[$ đến $\mathbb{K}$ và khả tích trên $[0; +\infty[$ là F.

Với mọi (f,g) thuộc E^2, fg khả tích trên $[0; +\infty[$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, Tập 2, 10.2.2, Mệnh đề 7), và ánh xạ:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

là một tích vô hướng trên E.

6) Ta sẽ thấy (3.3.4, *4)*) rằng tập hợp ℓ^2 các dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ với phần tử thuộc $\mathbb{K}$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} |u_n|^2$ hội tụ, là một $\mathbb{K}$-kgv, và ánh xạ $\varphi : (\ell^2)^2 \to \mathbb{K}$, xác định bởi

$\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$, là một tích vô hướng trên ℓ^2.

◆ **Mệnh đề** Cho E là một $\mathbb{K}$-kgv, φ là một tích vô hướng trên E, ϕ là dạng toàn phương liên kết với φ. Ta có:

1) $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (\mu_1, ..., \mu_p) \in \mathbb{K}^p,$
$\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ \forall (y_1, ..., y_p) \in E^p,$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \overline{\lambda_i} \mu_j \varphi(x_i, y_j).$$

2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,$

$$\phi(\lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 \phi(x) + 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda} \mu \varphi(x,y)) + |\mu|^2 \phi(y).$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \phi(\lambda x) = |\lambda|^2 \phi(x).$

4) $\forall (x, y) \in E^2,\ \phi(x + y) = \phi(x) + 2\mathrm{Re}(\varphi(x,y)) + \phi(y).$

5) $\forall (x, y) \in E^2,\ \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2(\phi(x) + \phi(y)).$

Chứng minh:

1) Bằng lập luận quy nạp theo n, ta thấy:

$$\forall Y \in E, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, Y\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\varphi(x_i, Y),$$

từ đó:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j \varphi(x_i, y_j)\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \overline{\lambda_i}\mu_j\varphi(x_i, y_j).$$

2) Đây là trường hợp đặc biệt của 1).

3) và 4) Những trường hợp đặc biệt của 2).

5) $\begin{cases}\phi(x+y) = \phi(x) + 2\operatorname{Re}(\varphi(x,y)) + \phi(y)\\ \phi(x-y) = \phi(x) - 2\operatorname{Re}(\varphi(x,y)) + \phi(y)\end{cases}$, rồi cộng lại.

■

Nếu (E, φ) là một không gian tiền Hilbert thực và ϕ là dạng toàn phương liên kết với φ, thì với mọi (x,y) thuộc E^2, ta có:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)) \quad \text{và} \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\phi(x + y) - \phi(x - y)).$$

Hai công thức trên đây, được gọi là các **hằng đẳng thức đối cực**, chứng tỏ rằng ϕ xác định hoàn toàn φ, φ được gọi là **dạng đối cực** của ϕ.

Đối với trường hợp phức, xem bài tập 1.6.1.

1.6.2 Các bất đẳng thức và các chuẩn Euclide

◆ **Định lý 1** **(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)**

Cho (E, φ) là một không gian tiền-Hilbert, $(x, y) \in E^2$; ta có:

$$|\varphi(x, y)|^2 \le \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Chứng minh:

1) **Trường hợp không gian thực**

Ta có: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \phi(x + \lambda y) \ge 0,$

suy ra: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \phi(y)\lambda^2 + 2\varphi(x+y)\lambda + \phi(x) \ge 0.$

- Nếu $\phi(y) \ne 0$ thì tam thức $\lambda \to \phi(y)\lambda^2 + 2\varphi(x+y)\lambda + \phi(x)$ sẽ ≥ 0 trên $\mathbb{R}$, do đó có biệt thức ≤ 0: $\quad (\varphi(x+y))^2 - \phi(x)\phi(y) \le 0.$
- Nếu $\phi(y) = 0$ thì $y = 0$, bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên.

2) **Trường hợp không gian phức**

Ta có: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \phi(x + \lambda y) \ge 0,$

suy ra: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \phi(y)|\lambda|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\varphi(x+y)) + \phi(x) \ge 0.$

- Giả thiết $\phi(y) \neq 0$, và áp dụng bất đẳng thức trên đây cho $\lambda = -\dfrac{\overline{\varphi(x,y)}}{\phi(y)}$:

$$\phi(y)\frac{|\varphi(x,y)|^2}{(\phi(y))^2} - 2\,\frac{|\varphi(x,y)|^2}{\phi(y)} + \phi(x) \geq 0,$$

từ đó suy ra: $\quad - \,|\,\varphi(x+y)\,|^2 + \phi(x)\phi(y) \geq 0.$

- Nếu $\phi(y) = 0$ thì $y = 0$, bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên.

Nhận xét:

Định lý trên là dạng tổng quát của bất đẳng thức quen biết $|\vec{x}.\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ trong $\mathbb{R}^2$ thông thường.

◆ **Mệnh đề 1** **(Khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)**

Cho (E, φ) là một không gian tiền-Hilbert, $(x, y) \in E^2$; ta có:

$|\,\varphi(x, y)\,|^2 = \varphi(x, x)\varphi(y, y) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y)$ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh:

1) Giả thiết (x, y) phụ thuộc tuyến tính; chẳng hạn giả sử tồn tại $\alpha \in \mathbb{K}$ sao cho αx. Khi đó ta có:

$$|\,\varphi(x, y)\,|^2 = |\,\varphi(x, \alpha x)\,|^2 = |\,\alpha\varphi(x, x)\,|^2 = |\,\alpha\,|^2(\phi(x))^2$$

và $\varphi(x, x)\varphi(y, y) = \phi(x)\phi(\alpha x) = |\,\alpha\,|^2(\phi(x))^2$, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

2) Đảo lại, giả thiết: $|\,\varphi(x, y)\,|^2 = \varphi(x, x)\varphi(y, y)$.

- Nếu $y = 0$ thì (x, y) phụ thuộc tuyến tính.
- Giả thiết $y \neq 0$ (do đó $\phi(y) \neq 0$). Ký hiệu $\lambda_0 = -\dfrac{\overline{\varphi(x,y)}}{\phi(y)}$, theo các biến

đổi trong phép chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\phi(x + \lambda_0 y) = \frac{1}{\phi(y)}\left(\phi(x)\phi(y) - |\,\varphi(x, y)\,|^2\right) = 0,$$

từ đó suy ra: $\quad x + \lambda_0 y = 0, \quad (x, y)$ phụ thuộc tuyến tính.

◆ **Định lý 2** **(Bất đẳng thức Minkowski)**

Cho (E, φ) là một không gian tiền-Hilbert, ϕ là dạng toàn phương liên kết với φ, ta có:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\phi(x+y))^{\frac{1}{2}} \leq (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} .$$

Chứng minh:

$$(\phi(x+y))^{\frac{1}{2}} \leq (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \phi(x+y) \leq \phi(x) + 2\,(\phi(x)\phi(y))^{\frac{1}{2}} + \phi(y)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\varphi(x,y)) \le (\phi(x)\phi(y))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(\varphi(x,y)) \le 0, \\ \text{hay } \begin{cases} \operatorname{Re}(\varphi(x,y)) \ge 0 \\ (\operatorname{Re}(\varphi(x,y)))^2 \le \phi(x)\phi(y) \end{cases} \end{array} \right. .$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(\operatorname{Re}(\varphi(x,y)))^2 \le |\varphi(x,y)|^2 \le \phi(x)\phi(y),$$

cho phép ta kết luận.

***Nhận xét*:**
Bất đẳng thức Minkowski chính là dạng tổng quát hóa của bất đẳng thức tam giác quen biết trong $\mathbb{E}^2$:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

◆ **Mệnh đề 2 (Khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Minkowski)**

Cho (E, φ) là một không gian tiền Hilbert, ϕ là dạng toàn phương liên kết với φ, với mọi (x, y) thuộc E^2, ta có:

$$(\phi(x+y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{hay} \\ (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha x) \end{array} \right. .$$

Ta diễn tả điều kiện cuối cùng này như sau: (x, y) **phụ thuộc tuyến tính dương.**

Chứng minh:

1) Nếu tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+$ sao cho $y = \alpha x$ thì:

$$(\phi(x+y))^{\frac{1}{2}} = (\phi((1+\alpha)x))^{\frac{1}{2}} = (1+\alpha)(\phi(x))^{\frac{1}{2}}$$

và:
$$(\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + \alpha\,(\phi(x))^{\frac{1}{2}}.$$

2) Đảo lại, giả thiết $(\phi(x+y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}}$.

Do trường hợp $x = 0$ là hiển nhiên nên ta giả thiết $x \neq 0$. Bằng cách lặp lại lược đồ biến đổi trong phép chứng minh bất đẳng thức Minkowski, ta được:

$$(\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + \alpha\,(\phi(x))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(\varphi(x)) \ge 0 \\ (\operatorname{Re}(\varphi(x,y))^2 \le \phi(x)\phi(y) \end{cases}$$

Do $(\operatorname{Re}(\varphi(x,y))^2 \le |\varphi(x,y)|^2 \le \phi(x)\phi(y)$, nên ta suy ra rằng trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có dấu đẳng thức và do đó (xem Mệnh đề 1) tồn tại $\alpha \in \mathbb{K}$ sao cho $y = \alpha x$.

Khi đó ta có: $\varphi(x,y) = \alpha\phi(x)$, từ đó suy ra: $\begin{cases} \mathrm{Re}(\alpha\phi(x) \geq 0 \\ (\mathrm{Re}(\alpha\phi(x)))^2 \leq |\alpha|^2 (\phi(x))^2 \end{cases}$,

và do đó: $\begin{cases} \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0 \\ (\mathrm{Re}(\alpha))^2 = |\alpha|^2 \end{cases}$, chứng tỏ rằng $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3** Cho (E, φ) là một không gian tiền-Hilbert, ϕ là dạng toàn phương liên kết với φ. Ánh xạ

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\phi(x))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

là một chuẩn trên E, gọi là **chuẩn Euclide liên kết với** φ.

Chứng minh:

Các điều kiện: $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ và $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

là hiển nhiên; còn bất đẳng thức tam giác $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ thì chính là bất đẳng thức Minkowski. ■

Như vậy mọi không gian tiền-Hilbert đều là kgvđc. Khoảng cách liên kết khi đó được định nghĩa là: $d(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{\phi(x-y)}$

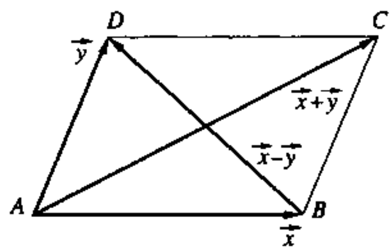
Nhận xét :

Với các ký hiệu trên đây, ta đã thấy (xem 1.6.1, Mệnh đề 5) rằng:

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Công thức này được gọi là **hằng đẳng thức** (hay: **đẳng thức) hình bình hành**; nếu *ABCD* là một hình bình hành thuộc một mặt phẳng Euclide thì:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$



Tồn tại những kgvđc không thỏa mãn hằng đẳng thức hình bình hành, do đó chuẩn của các không gian đó không thể liên kết với một tích vô hướng. Chẳng hạn trong $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, khi đặt $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ thì ta có:

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \quad \text{và} \quad 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 4.$$

♦ **Định nghĩa** **Không gian Hilbert** là không gian tiền Hilbert đủ (đối với chuẩn liên kết với tích vô hướng).

Nhận xét:

1) Mọi không gian tiền Hilbert hữu hạn chiều là một không gian Hilbert (xem 1.4.2, Định lý 2).

2) Tồn tại những không gian tiền-Hilbert không đủ (xem bài tập 1.6.2).
3) ℓ^2 là một không gian Hilbert (xem C3.6).

♦ **Mệnh đề 3** Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền Hilbert. Ánh xạ:

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & < x,y > \end{array}$$

là liên tục.

Chứng minh:
Cho $(x, y) \in E^2$,$(h,k) \in E^2$, ta có:

$$\begin{aligned} \left|< x+h, y+k > - < x, y >\right| &= \left|< h, y > + < x, k > + < h, k >\right| \\ &\le \left|< h, y >\right| + \left|< x, k >\right| + \left|< h, k >\right| \\ &\le \|h\| \|y\| + \|x\| \|k\| + \|h\| \|k\| \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Bài tập

◊ **1.6.1** **Hằng đẳng thức đối cực trường hợp phức**
Cho (E, φ) là một không gian tiền-Hilbert phức , ϕ là dạng Hermite liên kết với φ.
Chứng minh:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k} \phi(x + \mathrm{i}^k y).$$

Như vậy ϕ xác định hoàn toàn φ.

◊ **1.6.2** Cho $E = (C([0; 1], \mathbb{R}), < .,. >)$ là tích vô hướng xác định bởi $< f, g > = \int_0^1 fg$, và $(f_n : [0; 1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy cho bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; 1], \ f_n(x) = \begin{cases} \mathrm{Min}(n, x^{-\frac{1}{3}}) & \text{nếu } x \neq 0 \\ n & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

a) Chứng minh rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy Cauchy trong E.
b) Chứng minh rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ phân kỳ trong E.
Chứng minh rằng E là một không gian tiền Hilbert không đủ.

1.6.3 Tính trực giao

◆ **Định nghĩa 1** Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền- Hilbert.

1) Cho $(x, y) \in E^2$; ta nói rằng x **trực giao với** y, và ký hiệu $x \perp y$, khi và chỉ khi: $<x, y> = 0$.

2) Cho $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng x **trực giao với** A, và ký hiệu $x \perp A$, khi và chỉ khi: $\forall a \in A, \quad <x, a> = 0$.

3) Với mọi A thuộc $\mathfrak{P}(E)$, ta định nghĩa **bù trực giao** của A, ký hiệu là $A^\perp$: $\quad A^\perp = \{x \in E;\ \forall a \in A, \quad <x, a> = 0\}$.

4) Một họ $(x_i)_{i\in I}$ những phần tử của E được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi: $\forall (i,j) \in I^2, \ (i \neq j \ \Rightarrow \ <x_i, x_j> = 0)$.

5) Một họ $(x_i)_{i\in I}$ những phần tử của E được gọi là **trực chuẩn** khi và chỉ khi: $\begin{cases} (x_i)_{i\in I} & \text{trực giao} \\ \forall i \in I, & \|x_i\| = 1 \end{cases}$.

◆ **Mệnh đề 1** Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert.

1) Với mọi bộ phận A của E, $A^\perp$ là một kgvc của E,

2) $\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, \ (A \subset B \ \Rightarrow \ A^\perp \supset B^\perp)$.

3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ (trong đó Vect(A) là kgvc của E sinh bởi A).

4) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A \subset A^{\perp\perp}$.

5) $E^\perp = \{0\}, \ \{0\}^\perp = E$.

6) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

7) Với mọi kgvc F, G của E:

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \ , \ (F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp.$$

Chứng minh:

1) • $(\forall a \in A, \ <0, a> = 0)$, do đó $0 \in A^\perp$.

• Nếu $\lambda \in \mathbb{K}$ và $(x, y) \in (A^\perp)^2$, thì :

$$\forall a \in A, \ <\lambda x + y, a> = \overline{\lambda} <x, a> + <y, a> = 0, \text{ do đó } \lambda x + y \in A^\perp.$$

2) Giả thiết $A \subset B$ và cho $y \in B^\perp$. Ta có: $\forall b \in B, \ <y, b> = 0$, do đó hiển nhiên:

$$\forall a \in A, \ <y, a> = 0, \text{ suy ra } y \in A^\perp.$$

3) • $A \subset \text{Vect}(A)$, do vậy: $A^{\perp} \supset (\text{Vect}(A))^{\perp}$, xem 2).

• Tính chất là hiển nhiên nếu $A = \varnothing$; giả thiết $A \neq \varnothing$. Cho $x \in A^{\perp}$; với mọi y thuộc Vect(A) tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$, $a_1,\dots,a_n \in A$ sao cho $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, từ đó suy ra:

$$< x, y > = < x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, a_i > = 0,$$

và như vậy $x \in A^{\perp}$. Như thế ta đã chứng minh rằng: $A^{\perp} \subset (\text{Vect}(A))^{\perp}$.

4) Cho $a \in A$. Vì: $\forall x \in A^{\perp}$, $< a, x > = \overline{< x, a >} = 0$,

nên ta có: $a \in (A^{\perp})^{\perp}$.

5) Hiển nhiên.

6) Nếu $x \in A \cap A^{\perp}$, thì nói riêng $< x, x > = 0$, suy ra $x = 0$.

7) a) • $\begin{cases} F \subset F + G \\ G \subset F + G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F^{\perp} \supset (F+G)^{\perp} \\ G^{\perp} \supset (F+G)^{\perp} \end{cases} \Rightarrow F^{\perp} \cap G^{\perp} \supset (F+G)^{\perp}$.

• Đảo lại cho $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Ta có: $\begin{cases} \forall f \in F, & < x, f > = 0 \\ \forall g \in G, & < x, g > = 0 \end{cases}$.

Với mọi h thuộc $F + G$, tồn tại $(f, g) \in F \times G$ sao cho $h = f + g$, và do đó:
$< x, h > = < x, f > + < x, g > = 0$, suy ra: $x \in (F+G)^{\perp}$.

b) $\begin{cases} F \cap G \subset F \\ F \cap G \subset G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} \\ (F \cap G)^{\perp} \supset G^{\perp} \end{cases} \Rightarrow (F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.

Nhận xét:

1) Có thể xảy ra trường hợp một kgvc F của E thỏa mãn: $F \neq F^{\perp\perp}$ (xem bài tập 1.6.4).

2) Có thể xảy ra trường hợp hai kgvc F, G của E thỏa mãn:

$(F \cap G)^{\perp} \neq F^{\perp} + G^{\perp}$ (xem bài tập 1.6.5).

3) Nếu E hữu hạn chiều thì: $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$ và ta suy ra:

- Với mọi kgvc F của E: $F^{\perp\perp} = F$.
- Với mọi kgvc F, G của E: $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$ (xem Tập 5, 10.2.1).

◆ **Mệnh đề 2** Với mọi bộ phận A của một không gian tiền-Hilbert E, $A^{\perp}$ là một kgvc đóng của E.

Chứng minh:

Cho $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $A^{\perp}$ hội tụ đến một phần tử x của E. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in A,\ < x_n, a > = 0,$$

suy ra: $\forall a \in A,\ (\forall n \in \mathbb{N},\quad < x_n, a > = 0).$

Do $x_n \underset{n\infty}{\to} x$, và vì ánh xạ $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & <y,a> \end{array}$ liên tục (xem 1.6.1, Mệnh đề 3), nên ta suy ra:

$$< x_n, a > \underset{n\infty}{\to} < x, a >,$$

từ đó $< x, a > = 0$, và cuối cùng là $x \in A^{\perp}$.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert, $(x_i)_{i\in I}$ là một họ trong E.

Nếu $\begin{cases} (x_i)_{i\in I} \text{ trực giao} \\ \forall i \in I, x_i \neq 0 \end{cases}$, thì $(x_i)_{i\in I}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh:

Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1,..., \lambda_N \in \mathbb{K}$, $i_1,..., i_N \in I$ đôi một khác nhau sao cho $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_{i_k} = 0$.

Với mọi j thuộc $\{1,...,N\}$ ta có:

$$0 = < x_{i_j}, \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_{i_k} > = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k < x_{i_j}, x_{i_k} > = \lambda_j \left\| x_{i_j} \right\|^2, \text{ suy ra } \lambda_j = 0.$$

◆ **Mệnh đề 4 (Định lý Pythagore)**

1) Trường hợp không gian thực

Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert thực; ta có: $\forall (x,y) \in E^2$,

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2) Trường hợp không gian phức

Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert phức; ta có:

$$\forall (x, y) \in E^2, \left(x \perp y \Rightarrow \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{cases} \right).$$

Chứng minh: Chỉ cần khai triển $\|x+y\|^2$ hay $\|x-y\|^2$ (xem 1.6.1, Mệnh đề 4).

◆ **Mệnh đề 5** Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert. Với mọi họ trực giao hữu hạn $(x_i)_{i\in I}$ của E ta có:

$$\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2.$$

Chứng minh:
Do $< x_i, y_j > = 0$ nếu $i \neq j$, nên ta có:

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \sum_{(i,j)\in I^2} < x_i, x_j > = \sum_{i\in I} < x_i, x_i > = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 .$$

◆ **Mệnh đề-Định nghĩa-Ký hiệu 6** Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert.
1) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1,..., E_n$ là những kgvc của E. Nếu các E_i $(1\leq i \leq n)$ đôi một trực giao, tức là :

$$\forall (i,j) \in \{1,..., n\}^2, \quad (i \neq j \Rightarrow E_i \perp E_j),$$

thì tổng $\sum_{i=1}^{n} E_i$ là tổng trực tiếp; ta nói rằng tổng $\sum_{i=1}^{n} E_i$ là tổng **trực tiếp-trực giao**, và ta ký hiệu $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ thay vì $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.
2) Cho $(E_i)_{i\in I}$ là một họ hữu hạn những kgvc của E. Nếu các $E_i\,(i \in I)$ đôi một trực giao thì tổng $\sum_{i\in I} E_i$ là tổng trực tiếp; ta nói rằng tổng $\sum_{i\in I} E_i$ là tổng **trực tiếp-trực giao**, và ký hiệu $\underset{i\in I}{\oplus} E_i$ thay vì $\underset{i\in I}{\oplus} E_i$.

Chứng minh:

1) Cho $(x_1,..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Với mọi j thuộc $\{1,...,n\}$ ta có:

$$<\sum_{i=1}^{n} x_i , x_j> = 0,$$

tức là $\|x_j\|^2 = 0$, và do đó $x_j = 0$. Điều này chứng tỏ $\sum_{i=1}^{n} E_i$ là tổng trực tiếp.

2) Đây chỉ là một cách diễn đạt khác của *1)*.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert. Hai kgvc F, G của E được gọi là **bù trực giao** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} F \text{ và } G \text{ trực giao} \\ E = F + G \end{cases}$$

Nói cách khác thì E phải là tổng trực tiếp-trực giao của F và G.

◆ **Định nghĩa 3** Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert và p là một phép chiếu của E (tức là một tự đồng cấu của E sao cho $p \circ p = p$). Ta nói rằng p là một **phép chiếu trực giao** khi và chỉ khi $\operatorname{Ker}(p)$ và $\operatorname{Im}(p)$ bù trực giao nhau trong E.

◆ **Định nghĩa 4** Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert và $E_1,\dots, E_n$ là những kgvc của E sao cho E là tổng trực tiếp-trực giao của $E_1,\dots, E_n$. Ta gọi các phép chiếu p_i $(1\le i \le n)$ lên E_i song song với $\underset{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}{\textcircled{\perp}} E_j$ là các **phép chiếu trực giao liên kết với dạng phân tích** E **thành tổng trực-tiếp trực giao:** $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\textcircled{\perp}}} E_i$.

Nhận xét:

Với các ký hiệu trên đây ta có: $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$ và với mọi (i, j) thuộc $\{1,\dots, n\}^2$ sao cho $i \ne j$, ta có: $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$.

Bài tập

◇ **1.6.3** Cho E là một không gian tiền-Hilbert, F là một kgvc của E; chứng minh:

$$(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}.$$

◇ **1.6.4*** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ được trang bị tích vô hướng $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$, $c \in]0; 1[$ cố định, $\varphi: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^c f \end{array}$.

a) Chứng minh $\varphi \in E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$ là đối ngẫu tôpô của E; ta ký hiệu $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

b) Chứng minh rằng H đóng, nhưng $H^{\perp} = \{0\}$.

c) Chứng minh: $H^{\perp\perp} \ne H$.

◇ **1.6.5*** Cho $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ được trang bị tích vô hướng $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$,

$F = \{f \in E;\ \forall x \in [0; \frac{1}{2}],\ f(x) = 0\}$, $G = \{g \in E;\ \forall x \in [\frac{1}{2}; 1],\ g(x) = 0\}$.

Chứng minh:

a) $F^{\perp} = G$ và $G^{\perp} = F$.

b) $F^{\perp\perp} = F$ và $F \oplus F^{\perp} \neq E$.
c) $(F \cap G)^{\perp} \neq F^{\perp} + G^{\perp}$

◊ **1.6.6*** Cho E là một không gian tiền-Hilbert, $f \in \mathcal{LC}(E)$ thỏa mãn $\|f\| \le 1$; chứng minh: $\mathrm{Ker}(e\text{-}f) = (\mathrm{Im}(e\text{-}f))^{\perp}$,
trong đó $e = \mathrm{Id}_E$.

1.6.4 Thủ tục trực giao hóa Schmidt

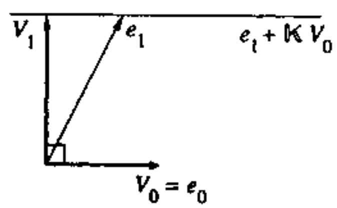
Cho $(E, <.\,,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một họ độc lập tuyến tính trong E, mà lúc đầu ta sẽ giả thiết được chỉ số hóa bởi $\mathbb{N}$. Chúng ta sẽ xây dựng một họ trực giao $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những vectơ của E đều $\neq 0$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Vect}(e_0,\dots, e_n) = \mathrm{Vect}(V_0,\dots, V_n).$$

- Ký hiệu $V_0 = e_0 \neq 0$.
- Ta tìm V_1 dưới dạng: $V_1 = e_1 + \lambda_{1,0}V_0$, $\lambda_{1,0} \in \mathbb{K}$ cần tính. Ta có:

$$V_1 \perp V_0 \iff < V_0, e_1 + \lambda_{1,0}V_0 > = 0$$
$$\iff < V_0, e_1 > + \lambda_{1,0}\|V_0\|^2 = 0.$$

Do $V_0 \neq 0$ nên tồn tại $\lambda_{1,0}$ thích hợp.



Nếu $V_1 = 0$ thì $e_1 \in \mathbb{K}\,V_0 = \mathbb{K}\,e_0$, mâu thuẫn với giả thiết (e_0, e_1) độc lập tuyến tính; vậy $V_1 \neq 0$.
Cuối cùng rõ ràng là : $\mathrm{Vect}(e_0, e_1) = \mathrm{Vect}(V_0, V_1)$.

- Giả thiết ta đã xây dựng được $V_0,\dots, V_n$ sao cho:

$$\begin{cases} (V_0,\dots, V_n) \text{ là một họ trực giao những vectơ đều } \neq 0 \\ \mathrm{Vect}(e_0,\dots, e_n) = \mathrm{Vect}(V_0,\dots, V_n) \end{cases}$$

Ta tìm V_{n+1} dưới dạng: $V_{n+1} = e_{1+1} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n+1,k}V_k$,

trong đó $(\lambda_{n+1,0}, \dots, \lambda_{n+1,n}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ cần phải tìm.
Ta có: $\forall i \in \{0,\dots,n\}$, $V_{n+1} \perp V_i$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{0,...,n\}, \qquad < V_i, e_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n+1,k} V_k > \; = \; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{0,...,n\}, \qquad < V_i, e_{n+1} > + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n+1,k} < V_i, V_k > \; = \; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{0,...,n\}, \qquad < V_i, e_{n+1} > + \; \lambda_{n+1,i} \; \|V_i\|^2 \; = \; 0.$$

Do mọi $V_0,..., V_n$ đều $\neq 0$, nên hệ phương trình trên có một nghiệm:

$$\forall i \in \{0,...,n\}, \qquad \lambda_{n+1,i} = - \frac{< V_i, e_{n+1} >}{\|V_i\|^2}.$$

Xét vectơ V_{n+1} xác định như trên. Theo cách xây dựng thì $(V_0,..., V_{n+1})$ là một họ trực giao.

Nếu $V_{n+1} = 0$ thì: $\quad e_{n+1} = - \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n+1,k} V_k \in \mathrm{Vect}(V_0,..., V_n) = \mathrm{Vect}(e_0,..., e_n),$

mâu thuẫn với giả thiết $(e_0,..., e_{n+1})$ độc lập tuyến tính. Vậy $V_{n+1} \neq 0$.

Do $V_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_{n+1}, V_0,..., V_n)$ và vì $\mathrm{Vect}(V_0,..., V_n) = \mathrm{Vect}(e_0,..., e_n)$, nên ta có:

$$V_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_0,..., e_{n+1}),$$

và suy ra: $\qquad \mathrm{Vect}(V_0,..., V_{n+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_0,..., e_{n+1}).$

Tương tự: $e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(V_0,..., V_n, V_{n+1})$ và $\mathrm{Vect}(e_0,..., e_n) = \mathrm{Vect}(V_0,..., V_n)$, nên

suy ra: $\qquad \mathrm{Vect}(e_0,..., e_{n+1}) \subset \mathrm{Vect}(V_0,...,V_{n+1}).$

Cuối cùng ta được: $\qquad \mathrm{Vect}(e_0,..., e_{n+1}) = \mathrm{Vect}(V_0,...,V_{n+1}).$

Ta tóm tắt kết quả khảo sát.

◆ **Định lý 1 (Thủ tục trực giao hóa Schmidt)**

Cho $(E, < . , .>)$ là một không gian tiền-Hilbert, $(e_n)_{n\in \mathbb{N}}$ là một họ độc lập tuyến tính trong E. Tồn tại một họ $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E sao cho:

$$\begin{cases} (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{trực giao} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ V_n \neq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{Vect}(V_0,...,V_n) = \mathrm{Vect}(e_0,...,e_n) \end{cases}$$

Nhận xét: Trong định lý trên, họ $(V_n)_{n\in \mathbb{N}}$ **là duy nhất nếu ta thêm điều kiện:**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad < V_n, e_n > = 1.$$

■

Bằng cách lặp lại sự khảo sát trên đây với một họ hữu hạn, hiển nhiên ta sẽ được kết quả sau:

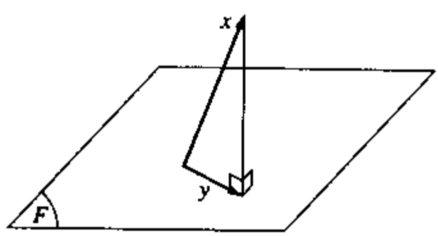
♦ **Định lý 2** Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1,..., e_n)$ là một họ độc lập tuyến tính trong E. Tồn tại $(V_1,...,V_n) \in E^n$ sao cho:

$$\begin{cases} V_1,...,V_n \quad \text{đôi một trực giao} \\ \forall i \in \{1,...,n\},\ V_i \neq 0 \\ \forall i \in \{1,...,n\}, \quad \text{Vect}(V_1,...,V_i) = \text{Vect}(e_1,...,e_i) \end{cases}$$

Do trong phép xây dựng trên đây V_i được phân tích theo $e_i, V_1, ..., V_{i-1}$, nên ma trận chuyển từ $(e_1,..., e_i)$ sang $(V_1,..., V_i)$ là ma trận tam giác trên với các số hạng đường chéo bằng 1.

1.6.5 Phép chiếu trực giao lên một không gian vectơ con hữu hạn chiều

Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert, F là một kgvc hữu hạn chiều của E, $x \in E$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một và chỉ một phần tử y của F sao cho $(x - y) \perp F$, rồi sẽ khảo sát ánh xạ $x \mapsto y$.



Do F hữu hạn chiều nên F có ít nhất một cơ sở $(e_1,...,e_n)$(trong đó $n = \dim(F)$).
Theo thủ tục trực giao hóa Schmidt (xem 1.6.4), và bằng cách chuẩn hóa các vectơ thu được, ta thấy là F có ít nhất một cơ sở trực chuẩn $(f_1,..., f_n)$.

Cho $y \in F$ bất kỳ, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$ là dạng phân tích của y trong cơ sở $(f_1,..., f_n)$, trong đó $(y_1,..., y_n) \in \mathbb{K}^n$.
Ta có: $(x - y) \perp F \Leftrightarrow \forall k \in \{1,..., n\}, \quad (x - y) \perp f_k$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad <f_k\,, x - \sum_{i=1}^{n} y_i f_i> \; = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad <f_k\,, x> - \, y_k \; = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad y_k \; = <f_k\,, x>.$$

Ta tóm tắt kết quả khảo sát.

♦ **Định lý** **(Định lý về phép chiếu trực giao lên một kgvc hữu hạn chiều)**
Cho $(E, <\,.\,,\,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert, F là một kgvc hữu hạn chiều của E, $x \in E$. Tồn tại một và chỉ một phần tử y của F sao cho $(x - y) \perp F$; đó là $y = \sum_{k=1}^{n} < f_k, x > f_k$, trong đó $(f_1,\dots, f_n)$ là một cơ sở trực chuẩn bất kỳ của F. Phần tử y đó gọi là **hình chiếu trực giao của** x **lên** F.

♦ **Mệnh đề** Cho $(E, <\,.\,,\,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert, F là một kgvc hữu hạn chiều của E. Ta ký hiệu ánh xạ cho mỗi x thuộc E ứng với phần tử y duy nhất của F thỏa mãn $(x - y) \perp F$ là $p_F : E \to F$.
Khi đó:

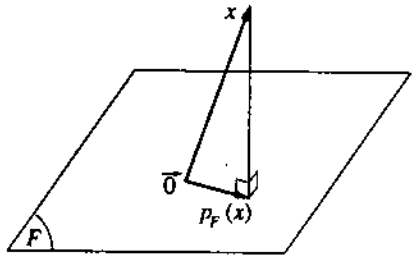
1) p_F là một phép chiếu của E, tức là $p_F \in \mathcal{L}(E)$ và $p_F \circ p_F = p_F$.
2) $\mathrm{Im}(p_F) = F$ và $\mathrm{Ker}(p_F) = F^{\perp}$.
3) p_F đối xứng, tức là:
$$\forall (x, x') \in E^2, \quad < p_F(x), x' > \; = \; < x, p_F(x') >$$
4) $p_F \in \mathcal{LC}(E)$ và nếu $F \neq \{0\}$ thì $\|p_F\| = 1$.
5) Ánh xạ $\begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|x-f\| \end{array}$ có biên dưới, đạt đến và chỉ đạt đến biên dưới đó tại $p_F(x)$.

Ánh xạ p_F được gọi là **phép chiếu trực giao lên** F.

Chứng minh:
Ta sử dụng các ký hiệu của Định lý trên đây.

1) • $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \; \forall (x, x') \in E^2, \; p_F(\lambda x + x') = \sum_{k=1}^{n} < f_k, \lambda x + x' > f_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda < f_k, x > f_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda < f_k, x' > f_k = \lambda p_F(x) + p_F(x').$$



- Với mọi x thuộc E, $p_F(x) \in F$ và do đó $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$.

2) • $(\forall z \in F,\ p_F(z) = z)$, do đó $F \subset \mathrm{Im}(p_F)$.

- $(\forall x \in E,\ p_F(x) \in F)$, do đó $\mathrm{Im}(p_F) \subset F$.
- $\mathrm{Ker}(p_F) = \{x \in E; p_F(x) = 0\} = \{x \in E;\ x \perp F\} = F^{\perp}$.

3) $\forall (x, x') \in E^2,\ <p_F(x), x'> = <\sum_{k=1}^{n} <f_k, x> f_k, x'>$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{<f_k, x>} <f_k, x'> = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{<f_k, x'>} <f_k, x>}$$

$$= \overline{<p_F(x'), x>} = <x,\ p_F(x')>.$$

4) • Cho $x \in E - \{0\}$, $y = p_F(x)$. Vì $(x - y) \perp F$, nói riêng $(x - y) \perp y$, từ đó suy ra (định lý Pythagore): $\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2$, và do vậy $\|y\| \le \|x\|$.

Hệ thức này chứng tỏ: $\forall x \in E,\quad \|p_F(x)\| \le \|x\|$.

Do $p_F \in \mathcal{L}(E)$, nên suy ra $p_F \in \mathcal{LC}(E)$ và $|||p_F||| \le 1$ (xem 1.2.6, Định lý).

• Nếu $F \ne \{0\}$ thì tồn tại $f \in F$ sao cho $f \ne 0$, và khi đó $p_F(f) = f$, suy ra $|||p_F||| \ge 1$.

5) Cho $x \in E, f \in F$. Do $(x - p_F(x)) \perp (p_F(x) - f)$, nên định lý Pythagore cho ta:

$$\|x - f\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2.$$

Hệ thức đó chứng tỏ rằng:

$$\begin{cases} \|x - f\| \ge \|x - p_F(x)\| \\ \|x - f\| = \|x - p_F(x)\| \Leftrightarrow \|p_F(x) - f\| = 0 \Leftrightarrow f = p_F(x) \end{cases}$$

Nói riêng, $d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{f \in F} \|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$.

♦ **Hệ quả** Với mọi kgvc F hữu hạn chiều của một không gian tiền-Hilbert E, ta có:

$$F \oplus F^{\perp} = E.$$

Chứng minh:

Do p_F là một phép chiếu nên ta có: $E = \operatorname{Im}(p_F) \oplus \operatorname{Ker}(p_F) = F \oplus F^{\perp}$.

Nhận xét:

Nếu F không hữu hạn chiều thì ta có: $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (xem 1.6.3, Mệnh đề 1, *6)*),

nhưng ta có thể có $F + F^{\perp} \neq E$ (xem bài tập 1.6.5).

Bài tập

◊ **1.6.7** Cho $E = \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ được trang bị tích vô hướng chính tắc, $F = \mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R})$ là kgvc các ma trận tam giác trên. Với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, hãy tính hình chiếu trực giao của A lên F.

◊ **1.6.8*** Cho $E = \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ được trang bị tích vô hướng chính tắc, F là kgvc các ma trận phản đối xứng, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Xác định hình chiếu trực giao của M lên F và tính khoảng cách từ M đến F.

1.6.6 Chuẩn của một phép tự đồng cấu trong một không gian Euclide

Cho $(E, <.\,,.>)$ là một không gian Euclide (tức là một không gian tiền-Hilbert thực hữu hạn chiều), $\| . \|$ là chuẩn liên kết với $<.,.>$.
Ta nhắc lại một số định nghĩa và kết quả của Đại số (xem Tập 6, 5.2).

- Với mọi tự đồng cấu f của E, tồn tại một và chỉ một tự đồng cấu của E, gọi là **phụ hợp** của f và ký hiệu là f^* thỏa mãn:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < f(x), y > = < x, f^*(y) > .$$

- Với mọi λ thuộc $\mathbb{R}$ và mọi f, g thuộc $\mathcal{L}(E)$ ta có:

$(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$, $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $(f^*)^* = f$.

- Với mọi f thuộc $\mathcal{L}(E)$ và mọi cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}$ của E ta có:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

- Với mọi f thuộc $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{rank}(f^*) = \mathrm{rank}(f), \quad \mathrm{tr}(f^*) = \mathrm{tr}(f), \det(f^*) = \det(f), \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f^*) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f).$$

- Ta nói rằng một tự đồng cấu f của E là **đối xứng** (hay: **tự phụ hợp**) khi và chỉ khi: $f^* = f$.
- Một tự đồng cấu đối xứng f của E được gọi là **đối xứng dương** khi và chỉ khi:

$$\forall x \in E, \quad \langle x, f(x) \rangle \geq 0.$$

- Với mọi tự đồng cấu đối xứng f của E, tồn tại một cơ sở trực chuẩn của E trong đó ma trận của f là ma trận chéo (thực).
- Để một tự đồng cấu đối xứng f của E là đối xứng dương, điều kiện cần và đủ là:

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}_+ .$$

Ta cũng nhắc lại rằng (xem 1.2.6 và 1.3.2):

- Mọi tự đồng cấu của E liên tục: $\mathcal{L}(E) = \mathcal{LC}(E)$.
- Với mọi f thuộc $\mathcal{L}(E)$ ta ký hiệu: $|||f||| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.

◆ **Mệnh đề 1** **(Đặc trưng biến phân của $|||f|||$)**

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad |||f||| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f(x), y \rangle| .$$

Chứng minh:

1) Cho $(x, y) \in E^2$ sao cho $\|x\| \leq 1$ và $\|y\| \leq 1$. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f(x), y \rangle| \leq \|f(x)\| \, \|y\| \leq |||f||| \, \|x\| \, \|y\| \leq |||f|||.$$

Kết quả đó chứng tỏ rằng $\sup\limits_{\|x\|\leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f(x), y \rangle|$ tồn tại và $\leq |||f|||$.

2) Cho $x \in E$ sao cho $\|x\| \leq 1$.

Nếu $f(x) \neq 0$, thì khi ký hiệu $y = \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$ ta sẽ có:

$$\|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \quad |\langle f(x), y \rangle| = \|f(x)\|.$$

Nếu $f(x) = 0$, thì khi đặt $y = 0$ ta sẽ có:

$$\|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \quad |\langle f(x), y \rangle| = 0 = \|f(x)\|.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng với mọi x thuộc E sao cho $\|x\| \leq 1$, tồn tại $y \in E$ sao cho :

$$\|y\| \leq 1 \text{ và } \|f(x)\| \leq |<f(x), y>|.$$

Ta kết luận rằng $\|\|f\|\| < \sup\limits_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |<f(x), y>|$.

♦ **Mệnh đề 2** Với mọi tự đồng cấu đối xứng dương f của E ta có:

$$\|\|f\|\| = \sup_{\|x\|\leq 1} <f(x), x> = \rho(f),$$

trong đó $\rho(f)$ chỉ bán kính phổ của f.

Theo định nghĩa $\rho(f) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(f)} |\lambda|$. Do f đối xứng dương nên ta có:

$$\rho(f) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(f)} \lambda \geq 0.$$

Chứng minh:
Ta biết rằng tồn tại một cơ sở trực chuẩn $B = (e_1, \ldots, e_n)$ của E gồm các vectơ riêng của f. Với mỗi k thuộc $\{1,\ldots,n\}$ ta ký hiệu giá trị riêng của f ứng với vectơ riêng e_k là λ_k.

Cho $x \in E$ thỏa mãn $\|x\| \leq 1$, và ký hiệu $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Ta có:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e_k, \quad \|f(x)\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad <f(x), x> = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2.$$

Do: $$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (\rho(f))^2 x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(f)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(f)$$

và: $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \rho(f) x_k^2 = \rho(f) \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \rho(f),$$

nên ta suy ra: $\|\|f\|\| \leq \rho(f)$ và $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} <f(x), x> \leq \rho(f)$.

Mặt khác, tồn tại $k_0 \in \{1,\ldots,n\}$ sao cho $\rho(f) = \lambda_{k_0}$, và do đó $f(e_{k_0}) = \rho(f) e_{k_0}$, từ đó suy ra $\|f(e_k)\| = \rho(f)$ và $<f(e_{k_0}), e_{k_0}> = \rho(f)$, và do vậy:

$$\rho(f) \leq \|\|f\|\| \quad \text{và} \quad \|\|f\|\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} <f(x), x> .$$

◆ **Mệnh đề 3**

1) $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad |||f^*||| = |||f|||$.

2) $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad |||f^* \circ f||| = |||f|||^2$.

Chứng minh:

1) Theo Mệnh đề 1 áp dụng cho f^* rồi cho f:

$$|||f^*||| = \sup_{\|x\|\le 1, \|y\|\le 1} |<f^*(x), y>| = \sup_{\|x\|\le 1, \|y\|\le 1} |<x, f(y)>| = |||f|||.$$

2) Rõ ràng là $f^* \circ f$ đối xứng dương, từ đó bằng cách áp dụng Mệnh đề 2 cho $f^* \circ f$ ta được:

$$|||f^* \circ f||| = \sup_{\|x\|\le 1} <f^* \circ f(x), x> = \sup_{\|x\|\le 1} <f(x), f(x)>$$

$$= \left(\sup_{\|x\|\le 1} \|f(x)\| \right)^2 = |||f|||^2.$$

Bài tập

◊ **1.6.9** Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Ta trang bị cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ tích vô hướng chính tắc , và ký hiệu:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}.$$

Phụ hợp f^* của f là gì?

◊ **1.6.10** Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Ta trang bị tích vô hướng cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Với $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, ta ký hiệu $f_A : \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ và $g_B : \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & BM \end{array}$. Xác định các phụ hợp của f^*_A và g^*_B.

b) Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, ta ký hiệu $h_A : \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M)A \end{array}$. xác định h_A^*.

◊ **1.6.11** Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian Euclide, $f \in \mathcal{L}(E)$ thỏa mãn $f^2 = 0$. Chứng minh: $\quad \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow f + f^* \in \mathcal{GL}(E)$.

Bổ sung

◊ **C1. 1* Định lý Riesz**

I Cho $(E, \|.\|)$ là một kgvđc mà quả cầu đơn vị đóng $B = B'(0; 1)$ là một bộ phận compac.

1) Chứng minh rằng tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in E$ sao cho $B = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i; \frac{1}{2})$.

Ta ký hiệu không gian vectơ con hữu hạn chiều của E sinh bởi $a_1, \ldots, a_n$ là
$$V = \mathrm{Vect}(\{a_i\,;\, 1 \le i \le n\}).$$
Ta sẽ chứng minh rằng $V = E$, bằng cách lập luận phản chứng. Vậy ta giả thiết tồn tại $x \in E$ sao cho $x \notin V$.

2) Chứng minh: $d(x, V) > 0$; từ đây ta sẽ ký hiệu $\varepsilon = d(x, V)$.

3) Chứng minh rằng tồn tại $y \in V$ sao cho $\varepsilon \le \|x - y\| \le \frac{3}{2}\varepsilon$; từ đây ta sẽ ký hiệu
$$z = \frac{1}{\|x - y\|}(x - y).$$

4) Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $\|z - a_i\| \le \frac{1}{2}$.

5) Chứng minh: $\|x - y\| . \|z - a_i\| \ge \varepsilon$ rồi suy ra một mâu thuẫn.

Như thế ta đã chứng minh ***Định lý Riesz*** (do một hướng của phép kéo theo đã biết): một kgvđc là hữu hạn chiều khi và chỉ khi quả cầu đơn vị của nó là đóng compac.

II *Một số hệ quả của định lý Riesz*

1) Chứng minh rằng trong một kgvđc vô hạn chiều không một hình cầu nào là compac.

2) Chứng minh rằng trong một kgvđc vô hạn chiều mọi bộ phận compac đều có phần trong rỗng.

3) Cho $(E, \|.\|)$ là một kgvđc vô hạn chiều, và $f \in \mathcal{LC}(E)$ sao cho $\overline{f(B)}$ là một bộ phận compac của E, với mọi bộ phận giới nội B của E. Chứng minh rằng f không có ánh xạ ngược đối với luật o trong $\mathcal{LC}(E)$.

◊ **C1.2 Đặc trưng của tính liên tục đối với một ánh xạ đa tuyến tính**

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_n$, F là những K-kgvđc, $\varphi: E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ là một ánh xạ n-tuyến tính.

Chứng minh rằng hai tính chất sau đây tương đương:

(i) φ liên tục

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, $\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|_F \le M\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}$.

◊ **C1. 3 Phép chiếu trực giao lên một bộ phận lồi đủ**

I Cho $(E, <.,.>)$ là một không gian tiền-Hilbert phức; ta ký hiệu chuẩn và khoảng cách liên kết với $<.,.>$ theo thứ tự là $\|.\|$ và d.

A) Cho C là một bộ phận lồi đủ không rỗng của E.

1) Chứng minh: $\forall x \in E$, $\exists! y_0 \in C$, $\|x - y_0\| = \operatorname*{Inf}_{y \in C} \|x - y\|$. Về sự tồn tại,

ta có thể xét dãy $\left(B'\left(x;d+\frac{1}{n}\right)\cap C\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, trong đó $d = d(x, C)$.

Về sự tồn tại và duy nhất, ta có thể sử dụng đẳng thức hình bình hành (1.6.2, Nhận xét).

Ta ký hiệu $p_C : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & y_0 \end{array}$ là ánh xạ được xác định như trên, gọi là **phép chiếu trực giao** lên C.

2) Chứng minh: $\forall x \in E, \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}(< x - p_C(x), y - p_C(x) >) \le 0$.

3) Chứng minh: a) p_C là ánh xạ 1-Lipschitz

b) $p_C \circ p_C = p_C$

c) $p_C(E) = C$.

B) Cho F là một kgvc đủ của E.

1) Chứng minh: $\forall x \in E, \forall y \in F, < x - p_F(x), y > = 0$.

2) Từ đó suy ra rằng p_F tuyến tính.

3) Chứng minh: a) $p_F \in \mathcal{LC}(E)$

b) $|||p_F||| = 1$ nếu $F \neq \{0\}$

c) $\mathrm{Im}(p_F) = F, \quad \mathrm{Ker}(p_F) = F^{\perp}, \quad F \oplus F^{\perp} = E$.

4) Chứng minh rằng nếu F, G là những kgvc đủ của E sao cho $G \subset F$, thì:

$$p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_G .$$

II *Áp dụng cho các không gian Hilbert*

Cho H là một không gian Hilbert.

1) a) Chứng minh rằng với mọi kgvc đóng F của H: $F \oplus F^{\perp} = H$.

b) Chứng minh rằng với mọi kgvc F của H: $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

c) Từ đó suy rằng với mọi bộ phận A của H: $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}$.

2) Ta ký hiệu H' là đối ngẫu tôpô của H (nghĩa là $H' = \mathcal{LC}(H, \mathbb{K})$ (xem 1.2.6).

Với mọi x thuộc H xét $\varphi_x : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & <x,y> \end{array}$.

Chứng minh: $\forall x \in H, \quad \varphi_x \in H'$.

Ký hiệu $\phi : \begin{array}{ccc} H & \to & H' \\ x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$. Chứng minh rằng ϕ là một phép *đẳng cự bán-tuyến tính*,

tức là: $\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (x_1, x_2) \in H^2, \ \phi(\alpha x_1 + x_2) = \overline{\alpha}\phi(x_1) + \phi(x_2) \\ \forall x \in H, \ |||\phi(x)||| = \|x\| \\ \phi \text{ là toàn ánh} \end{cases}$

◊ **C1. 4 Phụ hợp của một tự đồng cấu của một không gian tiền-Hilbert**

Cho $(E, < . , . >)$ là một không gian tiền-Hilbert.

Cho $f \in \mathcal{L}(E)$; ta nói rằng f **có phụ hợp** khi và chỉ khi tồn tại $g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < f(x), y > = < x, g(y) >.$$

1) Chứng minh rằng nếu một phần tử f của $\mathcal{L}(E)$ có phụ hợp, thì f có một và chỉ một phụ hợp.

Ta ký hiệu **phụ hợp của** f, nếu tồn tại, là f^*.

(Xem ở C3.6, *5)* một thí dụ về tự đồng cấu liên tục không có phụ hợp).

2) Cho $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp. Chứng minh:

a) $f + g$ có phụ hợp và $(f + g)^* = f^* + g^*$.

b) λf có phụ hợp và $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$

c) $g \circ f$ có phụ hợp và $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
d) f^* có phụ hợp và $(f^*)^* = f$.

3) Cho F là một kgvc của $E, f \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp sao cho $f(F) \subset F$. Chứng minh:

$$f^*(F^\perp) \subset F^\perp.$$

4) Cho $f \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp. Chứng minh:

(i) $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f^*))^\perp$
(ii) $\text{Ker}(f^*) = (\text{Im}(f))^\perp$
(iii) $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker}(f^*))^\perp$
(iv) $\text{Im}(f^*) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$.

Xem ở C3.6, *4)*, một thí dụ trong đó các bao hàm thức (iii) và (iv) là bao hàm thức ngặt.

5) Cho $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho f có phụ hợp và $f^* \circ g = 0$. Chứng minh:

$$\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g).$$

6) Cho $f \in \mathcal{LC}(E)$ sao cho f có phụ hợp. Chứng minh:

a) $f^* \in \mathcal{LC}(E)$

b) $|||f^*||| = |||f|||$

c) $|||f^* \circ f||| = |||f \circ f^*||| = |||f|||^2$.

7) Chứng minh rằng nếu H là một không gian Hilbert, thì mọi phần tử f của $\mathcal{LC}(H)$ có phụ hợp (sử dụng C1. 3, II, *2)*).

Chương 2

Hàm vectơ một biến thực

$\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.
Mục tiêu của chương 2 này là mở rộng việc khảo sát, đã thực hiện trong các Tập 1 và 2 ở các chương 4 đến 10 đối với các hàm số thực một biến thực, sang các hàm một biến thực và lấy giá trị trong một kgvđc hữu hạn chiều, về các chủ đề : giới hạn, tính liên tục, đạo hàm, tích phân, so sánh cục bộ. Với $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ thì sự khác nhau cơ bản giữa việc nghiên cứu các hàm từ X đến $\mathbb{R}$ và các hàm từ X đến E (trong đó, E là một kgvđc) là ở cấu trúc được sắp thứ tự của $\mathbb{R}$, mà trong E thì *không nhất thiết* phải có một tính chất tương tự.
Trong toàn bộ chương 2 này, E chỉ một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều với số chiều là N, và chuẩn ký hiệu là $\| \cdot \|$. $\mathbb{K}$-kgv đc đó có thể được trang bị một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$.
Ta nhắc lại rằng mọi chuẩn trên E đều tương đương (1.3.2, Định lý 1).

2.1 Đại cương

Tại đây, ta sẽ tổng quát hóa hoặc cải biên các định nghĩa và kết quả của chương 4, Tập 1 (hàm số thực một biến thực).
Trong mục 2.1 này, X chỉ một bộ phận không rỗng của $\mathbb{R}$ (thường thì X là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$).

2.1.1 Cấu trúc của E^X

1) $\mathbb{K}$-**kgv** E^X

Ta trang bị cho tập E^X các ánh xạ từ X đến E một luật hợp thành trong, ký hiệu là +, và một luật hợp thành ngoài, được chỉ ra bằng cách không viết ký hiệu nào cả, xác định như sau:

$$\begin{cases} \forall f, g \in E^X, \quad \forall t \in X, & (f+g)(t) = f(t) + g(t) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall f \in E^X, \forall t \in X, & (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \end{cases}$$

Khi $E = \mathbb{K}$ thì ta trang bị cho $\mathbb{K}^X$ thêm một luật hợp thành trong thứ hai, được chỉ ra bằng cách không viết ký hiệu nào cả, xác định là:

$$\forall f, g \in \mathbb{K}^X, \quad \forall t \in X, \qquad (fg)(t) = f(t)g(t).$$

Mệnh đề sau đây chứng minh dễ dàng.

◆ **Mệnh đề**

1) E^X là một $\mathbb{K}$-kgv.
2) $\mathbb{K}^X$ là một $\mathbb{K}$-đại số có đơn vị, kết hợp và giao hoán.

2) Các phép toán khác

1) Với $f \in E^X$ ta có thể ký hiệu $\|f\|: \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$, dẫu rằng có nguy cơ lẫn lộn, chẳng hạn, với $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{t\in X}\|f(t)\|$ nếu như biên trên này tồn tại (xem 2.1.4).

Trong các trường hợp riêng $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{C}$, thì ta sẽ trở lại ký hiệu $|f|: \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |f(t)| \end{array}$, trong đó |.| chỉ trị tuyệt đối hoặc môđun.

2) Cho $g \in \mathbb{K}^X$; nếu ($\forall\, x \in X$, $g(x) \neq 0$) thì ký hiệu $\frac{1}{g}: X \to \mathbb{K}$ sẽ chỉ ánh xạ xác định như sau:

$$\forall t \in X, \qquad \left(\frac{1}{g}\right)(t) = \frac{1}{g(t)}.$$

Nếu hơn nữa $f \in \mathbb{K}^X$ thì ta ký hiệu: $\qquad \dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$.

3) Với $f \in \mathbb{C}^X$, ta ký hiệu $\overline{f}: \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \overline{f(t)} \end{array}$.

Với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$, mọi $f, g \in \mathbb{C}^X$, ta kiểm chứng dễ dàng các công thức sau:

$$\overline{\overline{f}} = f, \qquad \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}, \qquad \overline{\lambda f} = \overline{\lambda}\,\overline{f}, \qquad \overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g}.$$

4) Nếu E được trang bị tích vô hướng $(\,.\, |\, .\,)$, thì với f, g thuộc E^X, ký hiệu $(f \mid g): X \to \mathbb{K}$ chỉ ánh xạ định nghĩa là:

$$\forall t \in X, \quad (f \mid g)(t) = \big(f(t) \mid g(t)\big).$$

Ta kiểm chứng dễ dàng các công thức sau đây, với mọi $\lambda \in \mathbb{K}$ và mọi $f, g, g_1, g_2 \in E^X$:

$$(g \mid f) = \overline{(f \mid g)}, \qquad (f \mid g_1 + \lambda g_2) = (f \mid g_1) + \lambda (f \mid g_2).$$

5) Nếu E là một không gian vectơ Euclide trên $\mathbb{R}$, có số chiều là 3 và định hướng, thì với $f, g \in E^X$, ký hiệu $f \wedge g : X \to E$ sẽ chỉ ánh xạ được định nghĩa như sau:

$$\forall t \in X, \qquad (f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t).$$

Ta kiểm chứng dễ dàng các công thức sau đây, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ và mọi $f, g, g_1, g_2 \in \mathrm{E}^X$:

$$g \wedge f = -f \wedge g, \quad f \wedge (g_1 + \lambda g_2) = f \wedge g_1 + \lambda f \wedge g_2.$$

3) Ánh xạ thành phần

Ta giả thiết E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$. Với mọi y thuộc E, tồn tại $(y_1, ..., y_N) \in \mathbb{K}^N$ duy nhất sao cho $y = \sum_{j=1}^{N} y_j e_j$. Với mỗi j thuộc $\{1, ..., N\}$, ta ký hiệu $p_j : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & y_j \end{array}$; như thế ta có:

$$\forall y \in E, \qquad y = \sum_{j=1}^{N} p_j(y) e_j.$$

Cho $f \in E^X$; với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, ta ký hiệu $f_j = p_j \circ f$, và f_j được gọi là **ánh xạ thành phần** (hoặc: **tọa độ**) **thứ** j của f trong cơ sở $\mathcal{B}$. Như thế ta có:

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, ..., N\}, & f_j : X \to \mathbb{K} \\ \forall t \in X, & f(t) = \sum_{j=1}^{N} f_j(t) e_j \end{cases}$$

Đôi khi người ta còn ký hiệu $f = (f_1, ..., f_N)$, cách viết này thực chất là đồng nhất E (với cơ sở $\mathcal{B}$) và $\mathbb{K}^N$ (với cơ sở chính tắc).

Hiển nhiên là với mọi $\lambda \in \mathbb{K}$, mọi $f, g \in E^X$, mọi $j \in \{1, ..., N\}$, ta có:

$$(\lambda f)_j = \lambda f_j, \qquad (f + g)_j = f_j + g_j.$$

Bài tập

◊ **2.1.1** Tìm tất cả các ánh xạ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (f_1(t), f_2(t)) \end{array}$ thỏa mãn:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f_1(t) + f_2(1-t) = 1 \\ tf_1(1-t) + (1-t) f_2(t) = 2t(1-t) \end{cases}.$$

2.1.2 Tính chẵn lẻ

Trong mục này, chúng ta sẽ tổng quát hóa các kết quả khảo sát ở § 4.1.3, Tập 1.
Trong suốt § 2.1.2 này, X chỉ một bộ phận của $\mathbb{R}$ đối xứng đối với 0, tức là sao cho:

$$\forall t \in X, \quad -t \in X.$$

♦ **Định nghĩa** Cho $f \in E^X$.

1) Ta nói f **chẵn** khi và chỉ khi: $\forall\, t \in X, \quad f(-t) = f(t)$.

2) Ta nói f **lẻ** khi và chỉ khi: $\forall\, t \in X, \quad f(-t) = -f(t)$.

Nhận xét:

Nếu E có trang bị một cơ sở B, thì khi ký hiệu các ánh xạ thành phần của f trong B là $f_1, ..., f_N$, ta sẽ có:

$$f \text{ chẵn} \Leftrightarrow (\forall\, j \in \{1, ..., N\},\ \ f_j \text{ chẵn})$$
$$f \text{ lẻ} \Leftrightarrow (\forall\, j \in \{1, ..., N\},\ \ f_j \text{ lẻ}).$$ ■

Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ chẵn (tương ứng: lẻ) từ X đến E là C_X (tương ứng: L_X).
Mệnh đề sau đây là hiển nhiên:

♦ **Mệnh đề** C_X và L_X là những $\mathbb{K}$-kgvc của E^X, bù nhau trong E^X:

$$E^X = C_X \oplus L_X.$$

Với mọi $f \in E^X$, ta ký hiệu: $\check{f}: \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ t & \mapsto & f(-t) \end{array}$

Với mọi $\lambda \in \mathbb{K}$, mọi $f, g \in E^X$, ta có:

$$\check{\check{f}} = f, \quad (f+g)^\vee = \check{f} + \check{g}, \quad (\lambda f)^\vee = \lambda \check{f}.$$

Nếu thêm nữa $E = \mathbb{K}$ thì: $(fg)^\vee = \check{f}\check{g}$.

2.1.3 Tính tuần hoàn

Trong mục này, chúng ta sẽ tổng quát hoá các kết quả khảo sát ở §4.1.4, Tập 1.

♦ **Định nghĩa** Cho $f \in E^X$.

1) Cho $T \in \mathbb{R}_+^*$; ta nói rằng f là ***T*-tuần hoàn** khi và chỉ khi:

$$\forall t \in X, \quad \begin{cases} t + T \in X \\ f(t+T) = f(t) \end{cases}$$

Khi đó ta nói rằng T là một **chu kỳ** của f.

2) Ta nói rằng f là **tuần hoàn** khi và chỉ khi tồn tại $T \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho f là T-tuần hoàn.

Thí dụ:

1) Cho $\omega \in \mathbb{R}_+^*$; ánh xạ $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{i\omega t}\end{array}$ là $\dfrac{2\pi}{\omega}$ tuần hoàn.

2) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ xác định như sau:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t \cos t & \cos^2 t & \sin t \\ \sin^2 t & -\sin t \cos t & \cos t \end{pmatrix}$$

là 2π-tuần hoàn.

Nhận xét:
Nếu f tuần hoàn và T_1, T_2 là những chu kỳ của f, thì $T_1 + T_2$ là một chu kỳ của f. Nói riêng, nếu T là một chu kỳ của f, thì với mọi f thuộc $\mathbb{N}^*$, kT là một chu kỳ của f.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử E được trang bị cơ sở $\mathcal{B}$.

Cho T thuộc $\mathbb{R}_+^*$, $f \in E^X$, $f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của của f trong $\mathcal{B}$. Ta có:

$$(f \text{ là } T\text{ - tuần hoàn}) \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, ..., N\},\ f_j \text{ là } T\text{ - tuần hoàn}).$$

Nhận xét:
Nếu $N \geq 2$ và nếu các ánh xạ thành phần $f_1, ..., f_N$ của f có các chu kỳ tương ứng là T_1, ..., T_N, thì f có thể không tuần hoàn. Chẳng hạn:

$$N = 2,\ f_1 : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos t\end{array},\ f_2 : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(t\sqrt{2})\end{array};\ f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \cos(t\sqrt{2}))\end{array}.$$

Trong thí dụ này thì tính không tuần hoàn của f có nguyên nhân ở tính vô tỷ của $\sqrt{2}$.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $t \in \mathbb{R}_+^*$ và $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ thỏa mãn:

$$\forall t \in X, \quad t + T \in X$$

Tập hợp các ánh xạ T-tuần hoàn từ X đến E là một $\mathbb{K}$- kgvc của E^X. Hơn nữa, nếu $\lambda : X \to \mathbb{K}$ và $f : X \to E$ đều T - tuần hoàn, thì λf cũng T-tuần hoàn.

Chứng minh:
Ta kiểm chứng dễ dàng các khẳng định sau đây:

- $0 : \begin{array}{ccc}X & \to & E \\ t & \mapsto & 0\end{array}$ là T-tuần hoàn.
- Nếu $f, g : X \to E$ là T-tuần hoàn, và nếu $\alpha \in \mathbb{K}$, thì $\alpha f + g$ là T-tuần hoàn.
- Nếu $\lambda : X \to \mathbb{K}$ và $f : X \to E$ là T-tuần hoàn, thì λf là T-tuần hoàn.

■

Nhóm các chu kỳ

Cho $f \in E^{\mathbb{R}}$. Tập hợp $P_f = \{\tau \in \mathbb{R};\ \forall t \in \mathbb{R},\quad f(t+\tau) = f(t)\}$ là một nhóm con của $\mathbb{R}$:

- $0 \in P_f$
- $\forall(\tau_1, \tau_2) \in (P_f)^2, \quad \tau_1 + \tau_2 \in P_f$
- $\forall \tau \in P_f, \quad -\tau \in P_f$

Nói riêng: $\forall \tau \in P_f,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\qquad f(x+k\tau) = f(x)$.

Ánh xạ f tuần hoàn khi và chỉ khi $P_f \neq \{0\}$; trong trường hợp này, mọi phần tử của P_f - $\{0\}$ được gọi là **chu kỳ** của f. Như thế f có thể nhận những chu kỳ < 0.

Thí dụ:

Với $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, ánh xạ $f : \mathbb{R} \underset{t \mapsto e^{i\omega t}}{\rightarrow} \mathbb{C}$ tuần hoàn và $P_f = \dfrac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

2.1.4 Ánh xạ bị chặn

Trong § này, chúng ta sẽ tổng quát hóa các kết quả của § 4.1.8, Tập 1.

◆ **Định nghĩa** Ánh xạ f: $X \to E$ được gọi là **bị chặn** khi và chỉ khi tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho

$$\forall t \in X, \qquad \|f(t)\| \leq M .$$

Nhận xét:

1) f bị chặn khi và chỉ khi $f(X)$ là một bộ phận giới nội của E (xem 1.1.3, Định nghĩa 2).

2) f bị chặn khi và chỉ khi $\|f\| : X \underset{t \mapsto \|f(t)\|}{\mapsto} \mathbb{R}$ bị chặn trên (xem Tập 1, 4.1.8, Định nghĩa).

◆ **Mệnh đề 1** Giả sử E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$. Một ánh xạ $f : X \to E$ bị chặn khi và chỉ khi tất cả các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$ đều bị chặn.

Chứng minh:

1) Giả sử tất cả các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$ ký hiệu là $f_1, ..., f_N$, đều bị chặn. Khi đó ta có:

$$\forall t \in X, \quad \|f(t)\| = \left\| \sum_{j=1}^{N} f_j(t) e_j \right\| \le \sum_{j=1}^{N} |f_j(t)| \; \|e_j\| \le \sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_\infty \|e_j\| .$$

bất đẳng thức này chứng tỏ f bị chặn.

2) Đảo lại, giả sử f bị chặn. Vì tất cả mọi chuẩn trên một $\mathbb{K}$-kgv hữu hạn chiều đều tương đương (xem 1.3.2, Định lý), nên tồn tại $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho

$$\forall y \in E, \quad \|y\|_\infty \le \beta \|y\| ,$$

trong đó $\quad \|y\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \le j \le N} |y_j| \quad$ nếu $y = \sum_{j=1}^{N} y_j e_j$.

Cho $j \in \{1, ..., N\}$; ta có:

$$\forall t \in X, \quad |f_j(t)| \le \|f(t)\|_\infty \le \beta \|f(t)\| ,$$

chứng tỏ rằng f_j bị chặn. ■

♦ Ký hiệu

Với mọi ánh xạ bị chặn $f: X \to E$, ta ký hiệu:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t \in X} \|f(t)\| .$$

♦ Mệnh đề 2

1) Nếu $f, g: X \to E$ bị chặn, thì $f + g$ bị chặn và:

$$\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

2) Nếu $\lambda \in \mathbb{K}$ và $f: X \to E$ bị chặn, thì λf bị chặn và

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \; \|f\|_\infty .$$

3) Nếu $\lambda: X \to \mathbb{K}$ và $f: X \to E$ bị chặn thì λf bị chặn và

$$\|\lambda f\|_\infty \le \|\lambda\|_\infty \|f\|_\infty .$$

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh ở 4.1.8, Mệnh đề 2, Tập 1.

Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ bị chặn từ X đến E là B(X; E). Từ 1) và 2) của Mệnh đề 2 (và khi B(X; E) $\neq \varnothing$) ta suy ra Mệnh đề 3 sau đây:

♦ **Mệnh đề 3** Tập hợp B(X; E) các ánh xạ bị chặn từ X đến E là $\mathbb{K}$-kgvc của E^X, và ánh xạ:

$$\begin{array}{rrcl} \|\cdot\|_\infty : & B(X;E) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \|f\|_\infty \end{array}$$

là một chuẩn trên $\mathbb{K}$-kgv B(X; E).

Khi $E = \mathbb{K}$, phần 2) của Mệnh đề 2 và tính chất $1 \in$ B(X;$\mathbb{K}$) cho phép ta kết luận rằng $\left(B(X;\mathbb{K}), \|\ .\ \|_\infty\right)$ là một đại số định chuẩn (xem 1.1.1, *4)*, Định nghĩa).

Nhận xét:
Cho $\left(E, (.|.)\right)$ là một không gian tiền-Hilbert, $\|\ .\ \|$ là chuẩn liên kết với $(.|.)$, $(f, g) \in E^X$, bị chặn. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\forall t \in X, \qquad \left|\left(f(t) \mid g(t)\right)\right| \leq \|f(t)\| \ \ \|g(t)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty .$$

Ta suy ra rằng $(f \mid g): X \to \mathbb{K}$ bị chặn và

$$\|(f \mid g)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty .$$

Bài tập

◊ **2.1.2** Cho $f: [0;+\infty[\to E$ là một ánh xạ sao cho với mọi x thuộc $[0;+\infty[$, f bị chặn trên $[0;x]$; ta ký hiệu $M: [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \qquad M(x) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0;x]} \|f(t)\|.$$

Giả sử tồn tại $A \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \qquad \|f(x)\| \leq A + \frac{1}{2}M(x).$$

Chứng minh rằng f bị chặn trên $[0;+\infty[$.

2.1.5 Giới hạn

Với $f: X \to E$ thì khái niệm giới hạn của f tại a ($a \in \overline{X}$) đã được khảo sát ở 1.2.1. Chúng ta chỉ còn phải hoàn thành việc khảo sát đó cho trường hợp ta muốn cho biến số (thực) tiến ra $+\infty$ hay $-\infty$.

♦ **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sao cho tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $[\alpha;+\infty[\subset X$, $f \in E^X$, $l \in E$. Ta nói rằng f **có giới hạn l tại $+\infty$** khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall t \in X, \qquad \left(t \geq A \Rightarrow \|f(t) - l\| \leq \varepsilon\right).$$

Ta chứng minh được các mệnh đề sau đây tương tự như trong Tập 1, 4.2.

◆ **Mệnh đề 1** **(Tính duy nhất của giới hạn nếu nó tồn tại)**
Nếu f có các giới hạn l và l' tại a thì $l = l'$.

Như thế chúng ta có thể sử dụng ký pháp hàm tính: nếu f có giới hạn l tại a, thì ta viết $l = \lim_{t \to a} f(t)$, hay $l = \lim_{a} f$, hay $f(t) \underset{t \to a}{\to} l$, hay $f \underset{a}{\to} l$.

◆ **Mệnh đề 2**

$$f(t) \underset{t \to a}{\to} l \quad \Leftrightarrow \quad \|f(t) - l\| \underset{t \to a}{\to} 0 .$$

Mệnh đề 2 trên đây cho phép ta quy việc khảo sát giới hạn của một hàm lấy giá trị vectơ (f) về việc khảo sát giới hạn của một hàm lấy giá trị thực ($\|f - l\|$), nếu như ta dự đoán được giá trị của l.

◆ **Mệnh đề 3** Nếu f có giới hạn (hữu hạn) tại a, thì f bị chặn trong lân cận của a.

◆ **Mệnh đề 4** **(Dùng dãy để diễn tả giới hạn của hàm số)**
Để f có giới hạn l tại a, điều kiện cần và đủ là ta có :

$$f(u_n) \underset{n\infty}{\to} l$$

với mọi dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong X thoả mãn $u_n \underset{n\infty}{\to} a$.

Nhận xét:
Với các giả thiết của mệnh đề 4, ta có: $l \in \overline{f(X)}$.

◆ **Định lý** **(Điều kiện cần và đủ Cauchy để một hàm số lấy giá trị trong một kgvđc hữu hạn chiều có giới hạn)**
Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, $a \in \overline{X}$ (a có thể bằng $-\infty$ hoặc $+\infty$), $f \in E^X$. Để f có giới hạn tại a, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad \forall (t', t'') \in (X \cap V)^2, \quad \|f(t') - f(t'')\| \le \varepsilon .$$

Chứng minh:
Xem 1.4.2, Định lý 1.

◆ **Mệnh đề 5** Giả sử E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$. Cho $f \in E^X$, $f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$, $l \in E$, $l_1, ..., l_N$ là các thành phần của l trong $\mathcal{B}$.

Khi đó f có giới hạn l tại a khi và chỉ khi f_j có giới hạn l_j tại a với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

Chứng minh:

Vì mọi chuẩn trên E đều tương đương, nên tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho $\alpha\|y\|_\infty \le \|y\| \le \beta\|y\|_\infty$, với mọi $y \in E$, trong đó :

$$\|y\|_\infty = \underset{1\le j\le N}{\mathrm{Max}}|y_j|, \quad \text{với } y = (y_j)_{1\le j\le N}.$$

Khi đó với mọi t thuộc X ta có:

$$\begin{cases} \|f(t)-l\| \le \beta \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |f_j(t)-l_j| \|e_j\|_\infty \\ \forall j \in \{1,...,N\}, \quad |f_j(t)-l_j| \le \|f(t)-l\|_\infty \le \dfrac{1}{\alpha}\|f(t)-l\| \end{cases},$$

từ đó suy ra:

$$\left(\|f(t)-l\| \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall j \in \{1,...,N\}, \quad |f_j(t)-l_j| \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0\right).$$

◆ **Mệnh đề 6** **(Phép hợp giới hạn)**

Cho $X, Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$, $l \in E$, $f \in \mathbb{R}^X$, $g \in E^Y$ thỏa mãn: $f(X) \subset Y$.

Nếu $\begin{cases} f \text{ có giới hạn } b \text{ tại } a \\ g \text{ có giới hạn } l \text{ tại } b \end{cases}$, thì $g \circ f$ có giới hạn l tại a.

2.1.6 Tính liên tục từng khúc

Các kết quả về các hàm liên tục từ X đến E được khảo sát trong § 1.2.2 đương nhiên vẫn còn đúng với các hàm lấy giá trị vectơ trong chương này. Chúng ta sẽ hoàn chỉnh việc khảo sát đó bằng việc nghiên cứu các ánh xạ liên tục từng khúc

◆ **Định nghĩa 1** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thoả mãn $a < b$ và $f \in E^{[a,b]}$. Ta nói rằng f **liên tục từng khúc** trên $[a;b]$ khi và chỉ khi tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ và $(a_0, ..., a_n) \in [a;b]^{n+1}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \bullet\ a = a_0 < ... < a_n = b \\ \bullet\ \text{với mọi } i \text{ thuộc } \{0,...,n-1\}, \text{ thu hẹp của } f \\ \quad \text{vào }]a_i;a_{i+1}[\text{ liên tục trên }]a_i;a_{i+1}[\text{ và có} \\ \quad \text{giới hạn hữu hạn bên phải tại } a_i \text{ và giới hạn hữu} \\ \quad \text{hạn bên trái tại } a_{i+1}. \end{cases}$$

Điều kiện trên quy về yêu cầu rằng, với mỗi i thuộc $\{0, ..., n\text{-}1\}$, $f|_{]a_i;a_{i+1}[}$ có thể thác triển liên tục ra $[a_i; a_{i+1}]$.

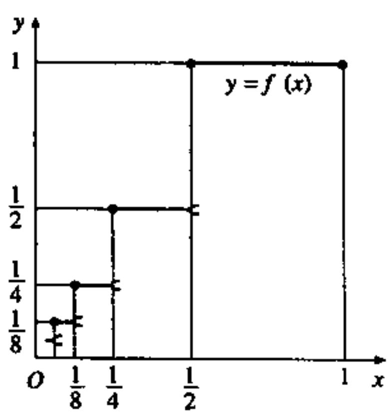
◆ **Định nghĩa 2** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f \in E^I$. **Ta nói rằng f liên tục từng khúc** trên I khi và chỉ khi $f|_{[a;b]}$ **liên tục từng khúc, với mọi (a, b) thuộc I^2 sao cho $a < b$.**

Thí dụ:

1) Ánh xạ f: $]0;1] \to \mathbb{R}$ cho bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} \text{ nếu tồn tại } n \in \mathbf{N} \text{ thỏa mãn: } \\ \qquad \dfrac{1}{2^{n+1}} \le x < \dfrac{1}{2^n} \\ 1 \quad \text{nếu} \quad x = 1 \end{cases}.$$

liên tục từng khúc trên $]0;1]$.



Tuy nhiên ánh xạ g: $[0;1] \to \mathbb{R}$ cho bởi:

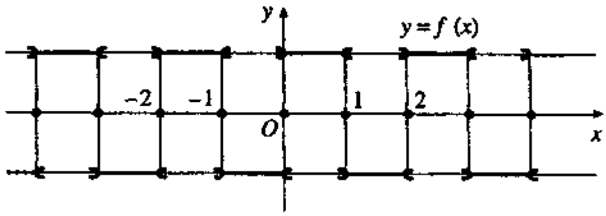
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu} \quad x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases},$$

mà ta thu được bằng cách thác triển liên tục f tại điểm 0 thì không liên tục từng khúc trên $[0; 1]$.

2) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x\in \mathbb{Z}\\ 1 & \text{nếu tồn tại } n\in \mathbb{Z} \text{ thỏa mãn } 2n<x<2n+1\\ -1 & \text{nếu tồn tại } n\in \mathbb{Z} \text{ thỏa mãn } 2n-1<x<2n\end{cases}$$

liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$.



Ta chứng minh dễ dàng hai mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1 Cho I một khoảng của $\mathbb{R}$.

1) Tập hợp các ánh xạ từ I đến E, liên tục từng khúc trên I là một $\mathbb{K}$- kgv (đối với các luật thông thường).

2) Nếu $\lambda : I \to \mathbb{K}$ và $f : I \to E$ liên tục từng khúc, thì λf liên tục từng khúc.

Mệnh đề 2 Giả sử E có trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$.

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f \in E^I$, f_1, ..., f_N là các ánh xạ thành phần của f trên $\mathcal{B}$. Để f liên tục từng khúc trên I, điều kiện cần và đủ là f_j liên tục từng khúc trên I với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

Bài tập

◊ **2.1.3** Tìm tất cả các ánh xạ $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ liên tục tại 0 và thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(0)=(0,1) \\ \forall t\in\mathbf{R},\quad f(t)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)+\left(\dfrac{t}{2},-\dfrac{3t^2}{(t^2+1)(t^4+4)}\right) \end{cases}.$$

◊ **2.1.4** Tìm tất cả các ánh xạ $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ liên tục tại 0 và thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(0)=(-1,1) \\ \forall t\in\mathbf{R},\quad f(2t)=\operatorname{ch}t.f(t) \end{cases}.$$

◊ **2.1.5** Cho $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ thoả mãn $a<b; f:[a;b]\to\mathbb{C}$ liên tục và thỏa mãn:

$$\forall t\in[a;b],\quad \big(\operatorname{Re}\big(f(t)\big)=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Im}\big(f(t)\big)\neq 0\big).$$

Chứng tỏ rằng tồn tại $m\in\mathbf{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall t\in[a;b],\quad \left|f(t)\right|\geq m.$$

◊ **2.1.6*** Cho $f:\ \mathbb{R} \to E$ liên tục và thỏa mãn:

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ta ký hiệu g (tương ứng: h) là bộ phận chẵn (tương ứng: lẻ) của f tức là:

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad \left(g(x)=\frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big),\quad h(x)=\frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big)\right).$$

a) Chứng tỏ rằng g là hàm hằng.

b) α) Chứng minh: $\forall x\in\mathbf{R},\quad \dfrac{1}{n}h(nx)\underset{n\infty}{\longrightarrow}2h\left(\dfrac{x}{2}\right).$

β) Từ đó suy ra: $\forall x\in\mathbf{R},\ \forall r\in\mathbf{Q},\quad h(rx)=rh(x)$

γ) Chứng minh: $\forall x\in\mathbf{R},\quad h(x)=xh(1)$.

c) Suy ra rằng f là hàm afin.

2.2 Đạo hàm

Trong mục 2.2 này, I chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm.

2.2.1 Đạo hàm tại một điểm

◆ **Định nghĩa 1** Cho $a \in I, f \in E^I$. Ta nói rằng f **khả vi tại** a khi và chỉ khi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)$$

tồn tại (trong E); khi đó giới hạn này được ký hiệu là $f'(a)$ và gọi là **đạo hàm của f tại** a.

Thay cho $f'(a)$, ta cũng có thể ký hiệu: $(Df)(a)$, $(D_1f)(a)$, hay $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

Mọi ánh xạ hằng $\lambda : I \underset{t \mapsto \lambda}{\rightarrow} E$ đều khả vi tại mọi a thuộc I và $\lambda'(a) = 0$.

◆ **Mệnh đề 1** Giả sử E có trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$.

Cho $a \in I, f \in E^I, f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$. Khi đó f khả vi tại a khi và chỉ khi f_j khả vi tại a, với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$; hơn nữa, ta có:

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{N} f'_j(a) e_j .$$

Chứng minh:
Ta chỉ cần chú ý rằng với mọi h thuộc I sao cho $h \neq 0$ và $a+h \in I$ thì:

$$\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{h}\big(f_j(a+h) - f_j(a)\big) e_j . \qquad \blacksquare$$

Nhận xét:
Tổng quát hơn, cho $N \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_N$ là những $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $E = \prod_{j=1}^{N} E_j$, $f : I \to E$ là một ánh xạ. Với mỗi j thuộc $\{1, ..., N\}$, ta ký hiệu $f_j : I \to E_j$ sao cho: $\quad \forall t \in I, \quad f(t) = \big(f_j(t)\big)_{1 \le j \le N}$.

Khi đó f khả vi tại a khi và chỉ khi f_j khả vi tại a với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$; khi đó ta còn có:

$$f'(a) = \big(f'_j(a)\big)_{1 \le j \le N} .$$

◆ **Định nghĩa 2** Cho $a \in I$, $f \in E^I$.

1) Ta nói rằng f **khả vi bên phải tại** a khi và chỉ khi:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$$

tồn tại (trong E); khi đó giới hạn này ký hiệu là $f'_{\mathrm{p}}(a)$ và gọi là **đạo hàm bên phải của** f **tại** a.

2) Ta nói rằng f **khả vi bên trái tại** a khi và chỉ khi:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$$

tồn tại (trong E); khi đó, giới hạn này ký hiệu là $f'_{\mathrm{t}}(a)$ và gọi là **đạo hàm bên trái của** f **tại** a.

Đối với các đạo hàm bên phải (tương ứng bên trái) tại a, ta cũng có một mệnh đề tương tự như Mệnh đề 1.
Ta chứng minh dễ dàng Mệnh đề sau đây.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $a \in \mathring{I}$, $f \in E^I$.

Để f khả vi tại a, điều kiện cần và đủ là f khả vi bên phải và khả vi bên trái tại a, và $f'_{\mathrm{p}}(a) = f'_{\mathrm{t}}(a)$. Hơn nữa, với các giả thiết đó ta có:

$$f'(a) = f'_{\mathrm{p}}(a) = f'_{\mathrm{t}}(a).$$

◆ **Mệnh đề 3** Cho a $\in I$, $f \in E^I$.

Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a.

Chứng minh:

$$f(a+h) = f(a) + h.\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big) \underset{h \to 0}{\to} f(a)$$

vì rằng

$$\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big) \underset{h \to 0}{\to} f'(a).$$

2.2.2 Các tính chất đại số của các ánh xạ khả vi tại một điểm

◆ **Định lý 1** Cho $a \in I$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda : I \to \mathbb{K}$, $f, g : I \to E$. Giả sử λ, f, g khả vi tại a. Khi đó:

1) $f + g$ khả vi tại a và $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2) αf khả vi tại a và $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.
3) λf khả vi tại a và $(\lambda f)'(a) = \lambda'(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)$.
4) Nếu $\lambda(a) \neq 0$ thì $\frac{1}{\lambda}$ khả vi tại a và: $\left(\frac{1}{\lambda}\right)'(a) = -\frac{\lambda'(a)}{\left(\lambda(a)\right)^2}$.

Chứng minh:
Tương tự như phép chứng minh Định lý 1, Tập 1, 5.1.2.

◆ **Định lý 2** Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$, $a \in E, f: I \to E$ khả vi tại a.
Ánh xạ $\phi(f): I \underset{t \mapsto \phi(f(t))}{\to} F$ khả vi tại a và $(\phi(f))'(a) = \phi(f'(a))$.

Chứng minh:
Với mọi h thuộc $\mathbb{R}^*$ sao cho $a+h \in I$, ta có:

$$\frac{1}{h}\left(\phi(f)(a+h) - \phi(f)(a)\right) = \frac{1}{h}\left(\phi(f(a+h)) - \phi(f(a))\right) = \phi\left(\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)\right).$$

Vì f khả vi tại a nên: $\quad \frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) \underset{h \to 0}{\to} f'(a)$.

Vì ϕ tuyến tính và E hữu hạn chiều, nên ϕ liên tục trên E (xem 1.3.2, Mệnh đề 1), nói riêng liên tục tại $f'(a)$, suy ra:

$$\frac{1}{h}\left(\phi(f)(a+h) - \phi(f)(a)\right) \underset{h \to 0}{\to} \phi\left(f'(a)\right).$$

◆ **Định lý 3** Cho E, F, G là ba $\mathbb{K}$-kgv hữu hạn chiều, $B: E \times F \to G$ là một ánh xạ song tuyến tính, $a \in E, f: I \to E$, $g: I \to F$ khả vi tại a.
Ánh xạ:

$$B(f,g): I \underset{t \mapsto B(f(t),g(t))}{\to} G$$

khả vi tại a và:

$$\left(B(f,g)\right)'(a) = B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right).$$

Chứng minh:
Với mọi h thuộc $\mathbb{R}^*$ sao cho $a+h \in I$, ta có:

$$\frac{1}{h}\left(B(f,g)(a+h) - B(f,g)(a)\right) = \frac{1}{h}\left(B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a))\right)$$
$$= B\left(\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right), g(a+h)\right) + B\left(f(a), \frac{1}{h}\left(g(a+h) - g(a)\right)\right)$$

Vì f và g khả vi tại a nên:

$$\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) \underset{h \to 0}{\to} f'(a) \quad \text{và} \quad \frac{1}{h}\left(g(a+h) - g(a)\right) \underset{h \to 0}{\to} g'(a).$$

Vì B song tuyến tính và E và F hữu hạn chiều, nên B liên tục trên $E \times F$ (xem 1.3.2, Mệnh đề 2), nói riêng liên tục tại $\left(f'(a), g(a)\right)$ và tại $\left(f(a), g'(a)\right)$, suy ra:

$$\frac{1}{h}\left(B(f,g)(a+h) - B(f,g)(a)\right) \underset{h \to 0}{\to} B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right).$$

Hệ quả

1) Nếu $\left(E,\ (.|.)\right)$ là một không gian Euclide hay Hermite, và nếu f, $g: I \to E$ khả vi tại a thì

$$(f|g): I \underset{t \mapsto (f(t)|g(t))}{\longrightarrow} \mathbb{K}$$

khả vi tại a và ta có:

$$(f|g)'(a) = \left(f'(a)|g(a)\right) + \left(f(a)|g'(a)\right).$$

2) Nói riêng, nếu $\left(E,\ (.|.)\right)$ là một không gian Euclide hay Hermite, và nếu $f: I \to E$ khả vi tại a thì $\|f\|^2 : I \underset{t \mapsto \|f(t)\|^2 = (f(t)|f(t))}{\longrightarrow} \mathbb{R}$

khả vi tại a và ta có:

$$\left(\|f\|^2\right)'(a) = 2\operatorname{Re}\left(f(a)|f'(a)\right).$$

3) Nếu E là một không gian Euclide thực có định hướng, 3 chiều, và nếu f, $g: I \to E$ khả vi tại a, thì $f \wedge g : I \underset{t \mapsto f(t) \wedge g(t)}{\longrightarrow} E$ khả vi tại a và ta có:

$$(f \wedge g)'(a) = f'(a) \wedge g(a) + f(a) \wedge g'(a).$$

Mệnh đề (không thuộc chương trình)

Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^N$, $f_1, ..., f_N$: $I \to \mathbb{K}^N$; ta ký hiệu ánh xạ cho bởi:

$$\forall t \in I, \qquad \left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)\right)(t) = \left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1(t),...,f_N(t)\right)$$

là: $\left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)\right): I \to \mathbb{K}$.

Nếu $f_1, ..., f_N$ khả vi tại $a \in I$, thì $\left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)\right)$ khả vi tại a và

$$\left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)\right)'(a) = \sum_{j=1}^{N} \det_{\mathcal{B}_0}\left(f_1(a),...,f_j'(a),...,f_N(a)\right).$$

Chứng minh:

Với mỗi j thuộc $\{1, ..., N\}$, tồn tại $\varepsilon_j: \quad I_0 = \{h \in \mathbb{R};\ \ a+h \in I\} \to \mathbb{K}^N$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall h \in I_0, \quad f_j(a+h) = f_j(a) + hf_j'(a) + h\varepsilon_j(h) \\ \varepsilon_j(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Suy ra, với mỗi h thuộc I_0:

$$\left(\det_{B_0}(f_1,...,f_N)\right)(a+h) = \det_{B_0}\left(\left(f_j(a) + hf'_j(a) + h\varepsilon_j(h)\right)_{1 \le j \le N}\right).$$

Bằng cách khai triển theo tính đa tuyến tính, ta được

$$\det_{B_0}\left(\left(f_j(a)+hf_j'(a)+h\varepsilon_j(h)\right)_{1\le j\le N}\right)$$
$$=\det_{B_0}(f_1(a),\dots,f_N(a))+h\sum_{j=1}^{N}\det_{B_0}\left(f_1(a),\dots,f_j'(a),\dots,f_N(a)\right)+h\varepsilon(h)$$

trong đó rõ ràng là $\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$. ■

Như vậy, đạo hàm của của một định thức là tổng của N định thức thu được khi đạo hàm một cột, còn các cột kia giữ nguyên. Dĩ nhiên ta cũng có kết quả tương tự đối với các dòng.

◆ **Định lý 4 (Đạo hàm của hàm hợp)**
Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $a\in I, f\in \mathbb{R}^I$, $g\in E^J$ sao cho $f(I)\subset J$. Ta ký hiệu (một cách lạm dụng) $g\circ f: I \underset{t\mapsto g(f(t))}{\longrightarrow} E$. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ thì $g\circ f$ khả vi tại a và :

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a)).$$

Chứng minh:
Tương tự như phép chứng minh Định lý 2 ở 5.1.2, Tập 1.

2.2.3 Ánh xạ đạo hàm

◆ **Định nghĩa 1** Cho $f\in E^I$; **đạo hàm** (hay: ánh xạ đạo hàm) của f, được ký hiệu là f', là ánh xạ cho ứng mỗi t thuộc I sao cho $f'(t)$ tồn tại, với $f(t)$.

Như vậy: Miền xác định (f') hay $\text{MXĐ}(f') = \{t\in I\,;f \text{ khả vi tại } t\}$,
và: $f': \underset{t}{\text{MXĐ}(f')} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f'(t)}{E}$.

Thay vì f', ta có thể viết Df, D_1f, hay $\dfrac{df}{dt}$.

Nhận xét:
Nếu E có trang bị một cơ sở B thì với ký hiệu các ánh xạ bộ phận của f trong B là $f_1, \dots, f_N$, ta có:

$$\text{MXĐ}(f')=\bigcap_{j=1}^{N}\text{MXĐ}(f_j').$$

◆ **Định nghĩa 2** Ta nói rằng ánh xạ f: $I\to E$ **khả vi trên** I khi và chỉ khi f khả vi tại t, với mọi t thuộc I.

Từ 2.2.2, ta dễ dàng suy ra các kết quả sau đây:

Định lý 1 Cho $\alpha \in \mathbb{K}$, λ: $I \to \mathbb{K}$; f, g: $I \to E$. Giả sử λ, f, g khả vi trên I, khi đó:
1) $f + g$ khả vi trên I và $(f + g)' = f' + g'$
2) αf khả vi trên I và $(\alpha f)' = \alpha f'$
3) λf khả vi trên I và $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$
4) Nếu $(\forall a \in I, \lambda(a) \neq 0)$, thì $\dfrac{1}{\lambda} : I \to \mathbb{K}$ khả vi trên I và:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)' = -\frac{\lambda'}{\lambda^2}.$$

Định lý 2 Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $f : I \to E$ khả vi trên I. Ánh xạ $\phi(f) : I \underset{t \mapsto \phi(f(t))}{\longrightarrow} F$ khả vi trên I và:

$$\left(\phi(f)\right)' = \phi(f').$$

Ánh xạ $\phi(f)$ chính là $\phi \circ f$; ở đây, ta chọn dùng ký hiệu $\phi(f)$ để nêu bật tính song song giữa hai định lý 2 và 3.

Định lý 3 Cho E, F, G là ba $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $B : E \times F \to G$ là một ánh xạ song tuyến tính, f: $I \to E$; g: $I \to F$ khả vi trên I. Khi đó, ánh xạ $B(f,g) : I \underset{t \mapsto B(f(t), g(t))}{\longrightarrow} G$ khả vi trên I và:

$$\left(B(f,g)\right)' = B(f',g) + B(f,g').$$

Hệ quả

1) Nếu $\left(E, \ (.|.)\right)$ là một không gian vectơ Euclide hay Hermite, và nếu f, g: $I \to E$ khả vi trên I thì $\left(f|g\right) : I \underset{t \mapsto (f(t)|g(t))}{\longrightarrow} \mathbb{K}$ khả vi trên I

và:

$$\left(f \,|\, g\right)' = \left(f' \,|\, g\right) + \left(f \,|\, g'\right).$$

2) Nói riêng, nếu $\left(E, \ (.|.)\right)$ là một không gian Euclide hay Hermite, và nếu $f : I \to E$ khả vi trên I thì $\|f\|^2 : I \underset{t \mapsto \|f(t)\|^2 = (f(t)|f(t))}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ khả vi trên I và ta có: $\left(\|f\|^2\right)' = 2\,\mathrm{Re}\left(f \,|\, f'\right)$.

3) Nếu E là một $\mathbb{R}$ - kgv Euclide 3 chiều được định hướng, và nếu f, $g: I \to E$ khả vi trên I thì $f \wedge g : \underset{t \mapsto f(t)\wedge g(t)}{I \to E}$ khả vi trên I và ta có:

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'.$$

Nhận xét:

Cho $(E, (.|.))$ là một không gian Euclide, $e: I \to E$ khả vi trên I.

Nếu: $\forall t \in I, \quad \|e(t)\| = 1$

thì : $\forall t \in I, \quad e'(t) \perp e(t)$.

◆ **Mệnh đề**

Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^N$, $f_1, ..., f_N: I \to \mathbb{K}^N$; ta ký hiệu ánh xạ cho bởi

$$\forall t \in I, \quad \left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)\right)(t) = \det_{\mathcal{B}_0}\left(f_1(t),...,f_N(t)\right)$$

là: $\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N): I \to \mathbb{K}$

Nếu $f_1, ..., f_N$ khả vi trên I, thì $\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)$ khả vi trên I và:

$$\left(\det_{\mathcal{B}_0}(f_1,...,f_N)\right)' = \sum_{j=1}^{N} \det_{\mathcal{B}_0}\left(f_1,...,f_j',...,f_N\right).$$

◆ **Định lý 4 (Đạo hàm của ánh xạ hợp)**

Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in E^J$ sao cho $f(I) \subset J$. Ta ký hiệu (một cách lạm dụng) $g \circ f : \underset{t \mapsto g(f(t))}{I \to E}$. Nếu f khả vi trên I và g khả vi trên J thì $g \circ f$ khả vi trên I và

$$(g \circ f)' = f'.(g' \circ f).$$

◆ **Định lý 5 (Đặc trưng của các ánh xạ hằng trong tập hợp các ánh xạ liên tục trên I và khả vi trên $\mathring{I}$)**

Cho $f: I \to E$ liên tục trên I và khả vi trên $\mathring{I}$. Điều kiện cần và đủ để f là ánh xạ hằng là: $\forall t \in \mathring{I}, \quad f'(t) = 0$.

Chứng minh:

Vì E hữu hạn chiều nên E có ít nhất một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$.

Các ánh xạ thành phần $f_j: I \to \mathbb{K}$ $(1 \le j \le N)$ của f liên tục trên I và khả vi trên $\mathring{I}$.
Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ thì theo Tập 1, 6.3.1, Mệnh đề, ta sẽ có một cách sơ lược như sau:

$$(f: \text{ánh xạ hằng}) \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, ..., N\}, f_j: \text{ánh xạ hằng})$$

$$\Leftrightarrow (\forall j \in \{1, ..., N\}, \forall t \in \overset{\circ}{I}, f'_j(t) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in \overset{\circ}{I}, \quad f'(t) = 0).$$

Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì khi xét $\mathrm{Re}(f_j)$ và $\mathrm{Im}(f_j)$, $1 \le j \le N$, ta thấy rằng kết quả trên đây vẫn đúng.

Bài tập

◊ **2.2.1** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{C}$ khả vi thỏa mãn: $\forall t \in I, f(t) \neq 0$. Chứng minh rằng $|f|$ tăng khi và chỉ khi $\mathrm{Re}\left(\dfrac{f'}{f}\right) \ge 0$.

◊ **2.2.2** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f: [a; b] \to E$ khả vi và thoả mãn:

$$\forall x \in [a,b], \qquad \| f(x)\|^2 + \|f'(x)\|^2 > 0.$$

Chứng minh rằng f chỉ có một số hữu hạn không điểm.

◊ **2.2.3** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi(t) = \det\left(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n} + tf\right).$$

Chứng minh rằng φ khả vi tại 0 và tính $\varphi'(0)$.

◊ **2.2.4** Cho $f:]-1;1[\to \mathbb{R}^2$ cho bởi:

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{nếu} \quad -1 < t \le 0 \\ \left(t^2 \sin\dfrac{1}{t}, t^2\cos\dfrac{1}{t}\right) & \text{nếu} \quad 0 < t < 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng f khả vi trên $]-1;1[$ và $f'(]-1;1[)$ không liên thông theo cung.

◊ **2.2.5** Với $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{C}^n$, tính

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

2.2.4 Đạo hàm cấp cao

Ta quy ước rằng $f^{(0)} = f$.

♦ **Định nghĩa** Cho $f \in E^I$. Ta định nghĩa **các đạo hàm cấp cao của** f theo lược đồ truy hồi như sau: Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

- với $a \in I, f^{(n)}(a)$ là đạo hàm của $f^{(n-1)}$ tại a nếu đạo hàm đó tồn tại
- $f^{(n)}$ là ánh xạ đạo hàm của $f^{(n-1)}$, và tập nguồn của $f^{(n)}$ là tập hợp các điểm a thuộc I sao cho $f^{(n)}(a)$ tồn tại.

Đạo hàm cấp n của f tại a là phần tử $f^{(n)}(a)$ của E; **ánh xạ đạo hàm cấp n của f** là ánh xạ:

$$t \mapsto f^{(n)}(t),$$

với tập nguồn là tập hợp các điểm t thuộc I tại đó $f^{(n)}(t)$ tồn tại.

Ta nói rằng f **khả vi n lần trên I** khi và chỉ khi $f^{(n)}$ xác định trên I.

Ta nói rằng f **khả vi vô hạn lần trên I** khi và chỉ khi f khả vi n lần trên I, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$.

Thay cho $f^{(n)}(a)$, ta có thể ký hiệu $(D^n f)(a)$ hay $(D_n f)(a)$ hay $\frac{d^n f}{dt^n}(a)$; thay vì $f^{(n)}$ ta có thể ký hiệu $D^n f$ hay $D_n f$ hay $\frac{d^n f}{dt^n}$.

♦ **Mệnh đề** Giả thiết E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, .., e_N)$. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E^I$; ta ký hiệu các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$ là $f_1, ..., f_N$.

- Cho $a \in I$; f khả vi n lần tại a khi và chỉ khi f_j khả vi n lần tại a với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, và khi đó ta có:

$$f^{(n)}(a) = \sum_{j=1}^{N} f_j^{(n)}(a) e_j .$$

- f khả vi n lần trên I khi và chỉ khi f_j khả vi n lần trên I với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, và khi đó ta có:

$$f^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} f_j^{(n)} e_j .$$

Định lý 1 Cho $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda : I \to \mathbb{K}$; $f, g : I \to E$. Giả sử λ, f, g khả vi n lần trên I. Khi đó:

1) $f+g$ khả vi n lần trên I và $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2) αf khả vi n lần trên I và $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$

3) Nếu $(\forall t \in I,\ \lambda(t) \neq 0)$ thì $\dfrac{1}{\lambda}$ khả vi n lần trên I.

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh ở Tập 1, 5.1.4, Định lý *1), 2), 4)*.

Định lý 2 Cho $n \in \mathbb{N}$; E, F, G là ba $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $B : E \times F \to G$ là một ánh xạ song tuyến tính, $f : I \to E$, $g : I \to F$. Nếu f, g khả vi n lần trên I thì $B(f,g) : I \underset{t \mapsto B(f(t),g(t))}{\longrightarrow} G$ khả vi n lần trên I và:

$$\big(B(f,g)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right)$$

(công thức Leibniz).

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh ở Tập 1, 5.1.4, Định lý *3)*.

Hệ quả Cho $n \in \mathbb{N}$.

1) Cho $\lambda : I \to \mathbb{K}$, $f : I \to E$ khả vi n lần trên I. Khi đó λf khả vi n lần trên I và:

$$(\lambda f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

2) Cho $(E, (\cdot \mid \cdot))$ là một không gian Euclide hay Hermite, $f, g: I \to E$ khả vi n lần trên I. Khi đó $(f \mid g) : I \underset{t \mapsto (f(t) \mid g(t))}{\longrightarrow} \mathbb{K}$ khả vi n lần trên I và

$$(f \mid g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)} \mid g^{(n-k)}\right)$$

3) Cho E là một không gian Euclide định hướng 3 chiều; $f, g : I \to E$ khả vi n lần trên I. Khi đó $f \wedge g : I \underset{t \mapsto f(t) \wedge g(t)}{\longrightarrow} E$ khả vi n lần trên I và

$$(f \wedge g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \wedge g^{(n-k)}.$$

2.2.5 Lớp của một ánh xạ

♦ **Định nghĩa 1** Cho $f \in E^I$.

1) Cho $n \in \mathbb{N}$, ta nói rằng f **thuộc lớp** C^n **trên** I khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f \text{ khả vi } n \text{ lần trên } I \\ f^{(n)} \text{ liên tục trên } I \end{cases}.$$

2) Ta nói rằng f **thuộc lớp** C^∞ **trên** I khi và chỉ khi f khả vi vô hạn lần trên I.

Với $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ thuộc lớp C^n từ I đến E là $C^n(I, E)$. Ta có thể chứng minh dễ dàng mệnh đề sau đây.

♦ **Mệnh đề 1** Giả thiết E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$. Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, f \in E^I, f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$. Ta có:

$$f \in C^n(I,E) \Leftrightarrow \Big(\forall j \in \{1,...,N\}, \quad f_j \in C^n(I,\mathbb{K})\Big).$$

Nhận xét:

1) $f \in C^0(I, E)$ khi và chỉ khi f liên tục trên I.

2) Với mọi $(m,n) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^2$ sao cho $m \le n$, ta có

$$C^m(I,E) \supset C^n(I,E).$$

3) $$C^\infty(I,E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I,E).$$

4) Một ánh xạ f: $I \to E$ có thể khả vi n lần trên I mà lại không thuộc lớp C^n trên I. Chẳng hạn:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 e^{i/t} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng lại không thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

5) Dưới đây (2.3.7, Hệ quả 2) chúng ta sẽ thấy rằng, với những giả thiết nhất định, nếu f' có giới hạn tại a thì f' liên tục tại a.

6) Trong Tập 1 ta đã thấy rằng nếu f: $I \to \mathbb{R}$ khả vi thì $f'(I)$ là một khoảng của $\mathbb{R}$ ("định lý Darboux", bài tập 5.2.11). Nhưng nếu $N = \dim(E) \ge 2$, thì ảnh $f'(I)$ của khoảng I qua đạo hàm của một ánh xạ $f: I \to E$ khả vi trên I, có thể không liên thông theo những cung thuộc E (xem bài tập 2.2.4).

■

Từ các Định lý 1 và 2, 2.2.4, ta dễ dàng suy ra Định lý sau.

◆ **Định lý 1** Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$; $f, g: I \to E$, $\lambda: I \to \mathbb{K}$. Giả sử λ, f, g thuộc lớp C^n trên I. Khi đó:

1) $f+g$ thuộc lớp C^n trên I và (nếu $n \in \mathbb{N}$): $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2) αf thuộc lớp C^n trên I và (nếu $n \in \mathbb{N}$) : $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$

3) Nếu $(\forall t \in I, \quad \lambda(t) \neq 0)$, thì $\dfrac{1}{\lambda}$ thuộc lớp C^n trên I.

Như thế, nói riêng $C^n(I, E)$ là một $\mathbb{K}$ - kgv.

Từ 2.2.4, Định lý 2, ta dễ dàng suy ra Định lý sau.

◆ **Định lý 2** Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, E, F, G là ba $\mathbb{K}$ - kgvđc hữu hạn chiều, $B: E \times F \to G$ là một ánh xạ song tuyến tính, $f \in C^n(I, E)$, $g \in C^n(I, F)$. Khi đó ánh xạ: $B(f,g): I \underset{t \mapsto B(f(t),g(t))}{\to} G$

thuộc lớp C^n trên I và (nếu $n \in \mathbb{N}$):

$$\left(B(f,g)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

◆ **Hệ quả** Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1) Cho $\lambda: I \to \mathbb{K}$, $f: I \to E$ thuộc lớp C^n trên I. Khi đó λf thuộc lớp C^n trên I và (nếu $n \in \mathbb{N}$): $\left(\lambda f\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \lambda^{(k)} f^{(n-k)}$.

2) Cho $\left(E, \ (.\mid .)\right)$ là một không gian Euclide hay Hermite, $f, g: I \to E$ thuộc lớp C^n trên I. Thế thì $\left(f \mid g\right): \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & (f(t) \mid g(t)) \end{array}$ thuộc lớp C^n trên I và (nếu $n \in \mathbb{N}$): $\left(f \mid g\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)} \mid g^{(n-k)}\right)$

3) Cho một không gian Euclide 3 chiều có định hướng E; $f, g: I \to E$ thuộc lớp C^n trên I. Khi đó $f \wedge g: I \underset{t \mapsto f(t) \wedge g(t)}{\to} E$ thuộc lớp C^n trên I

và (nếu $n \in \mathbb{N}$): $\quad \left(f \wedge g\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \wedge g^{(n-k)}$.

◆ **Định lý 3** Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$; $f : I \to \mathbb{R}$, $g: J \to E$ sao cho $f(I) \subset J$; ta ký hiệu (có phần lạm dụng) $g \circ f : I \underset{t \mapsto g(f(t))}{\to} E$. Nếu f và g thuộc lớp C^n, thì $g \circ f$ thuộc lớp C^n trên I.

Chứng minh:
Tương tự như phép chứng minh ở Tập 1, 5.1.5, Định lý 2,.

Chúng ta nhắc lại một định nghĩa và một định lý (Tập 1, 5.3.1, Định nghĩa và Định lý 4):

◆ **Định nghĩa** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Ta nói rằng f là một C^n **-vi phôi từ I lên J** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } I \\ f \text{ là song ánh} \\ f^{-1} \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } J \end{cases}$$

◆ **Định lý** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $f : I \to J = f(I)$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Để f là một C^n-vi phôi từ I lên J, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} f \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } I \\ f' > 0 \text{ hoặc } f' < 0 \end{cases}$$

Nhận xét:
Theo định lý giá trị trung gian, vì f' liên tục trên khoảng I nên có thể thay điều kiện ($f' > 0$ hoặc
$f' < 0$) bằng điều kiện: f' không triệt tiêu tại bất cứ điểm nào.

Ánh xạ thuộc lớp C^n từng khúc

◆ **Định nghĩa 2** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f : [a; b] \to E$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Ta nói rằng f **thuộc lớp C^n từng khúc trên** $[a; b]$ khi và chỉ khi tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ và $(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \bullet \ a = a_0 < \dots < a_m = b \\ \bullet \ \text{với mọi } i \text{ thuộc } \{0, \dots, m-1\}, \text{ ánh xạ thu hẹp } f|_{]a_i;a_{i+1}[} \text{ có thể thác} \\ \quad \text{triển lên } [a_i; a_{i+1}] \text{ thành một ánh xạ thuộc lớp } C^n \text{ trên } [a_i; a_{i+1}] \end{cases}$$

Trong trường hợp $n = 0$ thì ta trở lại Định nghĩa 1 của 2.1.6 (Tính liên tục từng khúc trên một đoạn).

Nhận xét:

Nếu f thuộc lớp C^n từng khúc trên $[a; b]$ thì với mọi k thuộc $\{1, ..., n\}$, $f^{(k)}$ xác định trên $[a;b]$ trừ ra một số hữu hạn điểm.

♦ **Định nghĩa 3** Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in E^I$. ta nói rằng f **thuộc lớp C^n từng khúc trên I** khi và chỉ khi $f|_{[a;b]}$ thuộc lớp C^n từng khúc, với mọi (a, b) thuộc I^2 sao cho $a < b$.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên, vì là dạng tổng quát hóa của Mệnh đề 2, 2.1.6.

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$.
Cho $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in E^I$, $f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$. Để f thuộc lớp C^n từng khúc trên I, điều kiện cần và đủ là f_j thuộc lớp C^n trên I, với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

Thí dụ:

Ánh xạ $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{i|t|}\end{array}$ thuộc lớp C^∞ từng khúc trên $\mathbb{R}$.

♦ **Định lý 4** Cho $f : I \to E$ liên tục trên I và thuộc lớp C^1 từng khúc trên I. Khi đó f là ánh xạ hằng khi và chỉ khi $f' = 0$.

Chứng minh:

Nếu f là hằng thì hiển nhiên $f' = 0$.
Đảo lại, giả thiết $f' = 0$.
Cho $(a,b) \in I^2$ sao cho $a < b$. Vì f liên tục trên I và thuộc lớp C^1 từng khúc trên I, nên $f|_{[a;b]}$ liên tục trên $[a;b]$ và thuộc lớp C^1 từng khúc trên $[a; b]$. Tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ sao cho:

- $a = a_0 < ... < a_m = b$
- Với mọi i thuộc $\{0, ..., m-1\}$, thu hẹp $f|_{]a_i;a_{i+1}[}$ có thể thác triển lên $[a_i; a_{i+1}]$ thành một ánh xạ $\widetilde{f_i}$ thuộc lớp C^1 trên $[a_i; a_{i+1}]$.

Với i thuộc $\{0, ..., m-1\}$, $\widetilde{f_i}$ liên tục trên $[a_i; a_{i+1}]$, khả vi trên $]a_i; a_{i+1}[$, và với mọi x thuộc $]a_i ; a_{i+1}[$:

$\widetilde{f_i}\,'(x) = f'(x) = 0$. Theo 2.2.3, Định lý 5, $\widetilde{f_i}$ là ánh xạ hằng trên $[a_i; a_{i+1}]$.

Mặt khác, vì f liên tục trên I nên ta có: $\forall i \in \{0, ..., m\}$, $f(a_i) = \widetilde{f_i}\,(a_i)$.

Như thế, f là hằng trên $[a; a_1], ..., [a_{m-1} ; b]$, và do đó:

$$f(a) = f(a_1) = ... = f(a_{m-1}) = f(b).$$

Cuối cùng, ta kết luận f là ánh xạ hằng trên I.

2.2.6 Bổ sung: vi phân

◆ **Định nghĩa** Cho $a \in I, f \in E^I$, giả sử f khả vi tại a. Ánh xạ ký hiệu là $\mathrm{d}_a f$, cho bởi: $\mathrm{d}_a f : \underset{h \mapsto hf'(a)}{\mathbb{R} \to E}$

được gọi là **vi phân của f tại a**

Như thế, vi phân của f tại a là một ánh xạ tuyến tính.
Tồn tại một ánh xạ $\varepsilon : \{h \in \mathbb{R};\ \ a+h \in I\} \to E$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \text{Với mọi } h \in \mathbb{R} \text{ sao cho } a+h \in I, \text{ ta có } f(a+h) = f(a) + (\mathrm{d}_a f)(h) + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Nhận xét:

1) Ánh xạ $f: I \to E$ khả vi tại a khi và chỉ khi tồn tại một phần tử Λ thuộc E và một ánh xạ $\varepsilon : \{h \in \mathbf{R},\ \ a+h \in I\} \to E$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \text{Với mọi } h \in \mathbb{R} \text{ sao cho } a+h \in I, \text{ ta có } f(a+h) = f(a) + h\Lambda + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

(và khi đó $\Lambda = f'(a)$).

2) Với ký hiệu $\mathrm{d}t : \begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & h \end{matrix}$ (xem Tập 1, 5.1.6, Nhận xét 2), nếu $f \in E^I$ khả vi tại a thì ta có:

$$\forall h \in \mathbf{R}, \quad (\mathrm{d}_a f)(h) = hf'(a) = f'(a)\mathrm{d}t(h),$$

tức là: $\mathrm{d}_a f = f'(a)\mathrm{d}t$.

Từ 2.2.2, Định lý 1, ta dễ dàng suy ra mệnh đề sau.

◆ **Mệnh đề** Cho $a \in I$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda: I \to \mathbb{K}$; $f, g: I \to E$. Nếu λ, f, g khả vi tại a thì:

1) $\mathrm{d}_a(f+g) = \mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g$

2) $\mathrm{d}_a(\alpha f) = \alpha \mathrm{d}_a f$

3) $\mathrm{d}_a(\lambda f) = (\mathrm{d}_a \lambda) f(a) + \lambda(a)\mathrm{d}_a f$

4) $\mathrm{d}_a\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = -\dfrac{1}{(\lambda(a))^2}\mathrm{d}_a\lambda$ nếu $\lambda(a) \neq 0$.

2.2.7 Đạo hàm các hàm lấy giá trị ma trận

Với $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{K}$- kgv $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (tạo nên bởi các ma trận n dòng, p cột và có các hệ số thuộc $\mathbb{K}$) được trang bị một chuẩn bất kỳ trong các chuẩn của không gian vectơ đó (xem 1.3.2, Định lý 1). Ngoài kết quả của các mục trước, ta có thêm các kết quả bắt nguồn từ các phép toán ma trận: nhân, nghịch đảo, chuyển vị, chuyển sang ma trận liên hợp, vết, định thức.

♦ **Mệnh đề**

1) Nếu $\alpha \in \mathbb{K}$ và nếu $A, B : I \to \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ khả vi tại I thì

$$\begin{array}{rccc} \alpha A + B: & I & \to & \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & t & \mapsto & \alpha A(t)+B(t) \end{array}$$

khả vi trên I và :

$$\forall t \in I, \quad (\alpha A + B)'(t) = \alpha A'(t) + B'(t).$$

2) Nếu $A: I \to \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ và $B : I \to \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ khả vi trên I thì

$$\begin{array}{rccc} AB: & I & \to & \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ & t & \mapsto & A(t)B(t) \end{array}$$ khả vi trên I và:

$$\forall t \in I, \quad (AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

3) Nếu $A : I \to \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ khả vi trên I thì $\begin{array}{rccc} {}^tA: & I & \to & \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & t & \mapsto & {}^t(A(t)) \end{array}$ khả vi trên I và: $\forall t \in I, \quad ({}^tA)'(t) = {}^t\left(A'(t)\right).$

4) Nếu $A : I \to \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ khả vi trên I và nếu:

$$\left(\forall t \in I, \quad A(t) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})\right)$$

thì $\begin{array}{rccc} A^{-1}: & I & \to & \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \\ & t & \mapsto & (A(t))^{-1} \end{array}$ khả vi trên I và :

$$\forall t \in I, \quad \left(A^{-1}\right)'(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

5) Nếu $A : I \to \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ khả vi trên I thì $\begin{array}{rccc} \mathrm{tr}(A): & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \mathrm{tr}(A(t)) \end{array}$ khả vi trên I và: $\forall t \in I, \quad (\mathrm{tr}(A))'(t) = \mathrm{tr}\left(A'(t)\right).$

6) Nếu $A : I \to \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ khả vi trên I thì $\begin{array}{rccc} \overline{A}: & I & \to & \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \\ & t & \mapsto & \overline{A(t)} \end{array}$ khả vi trên I và :

$$\forall t \in I, \quad \left(\overline{A}\right)'(t) = \overline{A'(t)}.$$

7) Nếu $A : I \to \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ khả vi trên I thì $\det(A):\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det\big(A(t)\big)\end{array}$ khả vi trên I và :

$$\forall t \in I, \qquad \big(\det(A)\big)'(t) = \sum_{j=1}^{N} \det\big(A_j(t)\big),$$

trong đó với mỗi j thuộc $\{1,..., n\}$, $A_j(t)$ thu được từ $A(t)$ bằng cách thay cột thứ j của $A(t)$ bởi đạo hàm của cột thứ j của $A(t)$.

Chứng minh:

Trước hết, ta chú ý rằng, nếu $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$, thì A khả vi trên I khi và chỉ khi tất cả các $a_{ij} : I \to \mathbb{K}$ đều khả vi trên I, và khi đó thì:

$$\forall t \in I, \qquad A'(t) = \big(a'_{ij}(t)\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}.$$

1) Xem 2.2.3, Định lý 1.
2) Xem 2.2.3, Định lý 1.
3) Hiển nhiên.

4) • Với mỗi (i, j) thuộc $\{1, ..., n\}^2$, ta ký hiệu phần tử thứ (i, j) của $A(t)$ là $a_{i,j}(t)$, và phần bù đại số của vị trí thứ (i, j) trong $A(t)$ là $A_{i,j}(t)$. Theo giả thiết:

$$\forall t \in I, \qquad \det\big(A(t)\big) \neq 0,$$

và do đó

$$\forall t \in I, \qquad \big(A(t)\big)^{-1} = \frac{1}{\det\big(A(t)\big)}\,{}^{t}\big(\mathrm{com}A(t)\big),$$

trong đó $\mathrm{com}A(t)$ là ma trận phụ hợp của $A(t)$: $\qquad \mathrm{com}\big(A(t)\big) = \big(A_{ij}(t)\big)_{1\le i,j\le n}$.

Các ánh xạ $A_{i,j}$ và $\det(A)$, vốn là những đa thức của các hệ số của A, đều khả vi trên I. Vậy A^{-1} khả vi trên I.

• $\forall t \in I, \qquad A(t)A^{-1}(t) = \mathrm{I}_n$, từ đó bằng cách đạo hàm (xem 2)) ta có:

$$\forall t \in I, \qquad A'(t)A^{-1}(t) + A(t)\big(A^{-1}\big)'(t) = 0,$$

tức là $\qquad \forall t \in I, \qquad \big(A^{-1}\big)'(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$

5) Hiển nhiên. Xem thêm 2.2.3, Định lý 2.
6) Hiển nhiên.
7) Xem 2.2.3, Mệnh đề.

2.3 Tích phân trên một đoạn

2.3.1 Tích phân các ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Trong cả § 2.3.1 này, (a, b) chỉ một cặp số thực thỏa mãn: $a < b$.

1) Không gian vectơ các ánh xạ bậc thang trên một đoạn

Ta nhắc lại rằng (xem Tập 1, 6.1.1) **phân hoạch** của $[a; b]$ là mọi họ hữu hạn $(a_i)_{0\le i\le n}$ những số thực thỏa mãn:

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b.$$

Ta ký hiệu tập hợp các phân hoạch của $[a; b]$ là $\mathcal{S}$.

♦ **Định nghĩa**

1) Một ánh xạ $e: [a;b] \to E$ được gọi là **ánh xạ bậc thang** khi và chỉ khi tồn tại $s = (a_0, ..., a_n) \in \mathcal{S}$ và $(\Lambda_0, ..., \Lambda_{n-1}) \in E^n$ thỏa mãn:

$$\forall i \in \{0,...,n-1\}, \forall t \in \,]a_i;a_{i+1}[, \quad e(t) = \Lambda_i .$$

Ở đây, ta sẽ ký hiệu tập hợp các ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ là $E(a, b)$.

2) Cho trước $s = (a_0, ..., a_n) \in \mathcal{S}$ và $e \in E(a,b)$, ta nói rằng s **tương thích với** e (hay: **phụ thuộc** e) khi và chỉ khi thu hẹp của e trên $]a_i; a_{i+1}[$ là ánh xạ hằng, với mọi i thuộc $\{0, ..., n-1\}$.

Ta chứng minh dễ dàng mệnh đề sau đây:

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$.

Cho $f \in E^{[a;b]}$, $f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$.

Để cho f là ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$, điều kiện cần và đủ là f_j là ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$, với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

Chú ý rằng ta sẽ thu được một phân hoạch tương thích với f khi "hợp lại" các phân hoạch tương thích với $f_1, ..., f_N$.

◆ **Mệnh đề 2**

$E(a, b)$ là một $\mathbb{K}$- kgv đối với các luật thông thường

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 1, 6.1.1, Tập 1.

2) Tích phân của ánh xạ bậc thang trên một đoạn

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1**

Cho $e \in E(a, b)$, $s = (a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathcal{S}$ tương thích với e, và với mọi i thuộc $\{0, ..., n-1\}$, Λ_i là giá trị của e trên $]a_i; a_{i+1}[$. Phần tử $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\Lambda_i$ của E không phụ thuộc phân hoạch s tương thích với e; phần tử đó được gọi là **tích phân của** e **trên** $[a; b]$ và ký hiệu là $\int_{[a;b]} e$ hay $\int_a^b e$.

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề - Định nghĩa, 6.1.2, Tập 1.

Dễ dàng chứng minh Mệnh đề sau đây.

◆ **Mệnh đề 2** Giả sử E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$. Cho $f \in E(a, b)$; $f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$. Ta có:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{[a;b]} f_j\right)e_j .$$

◆ **Mệnh đề 3** Ánh xạ $\begin{array}{ccc} E(a,b) & \to & E \\ e & \mapsto & \int_{[a;b]} e \end{array}$ là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 2, 6.1.2, Tập 1.

◆ **Mệnh đề 4** Cho F là một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều và $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Với mọi e thuộc $E(a, b)$, ánh xạ $T \circ e : [a;b] \to F$ là một ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ và:

$$\int_{[a;b]} T \circ e = T\left(\int_{[a;b]} e\right).$$

Chứng minh:

Cho $e \in E(a,b)$, $s = (a_0, ..., a_n)$ là một phân hoạch của $[a;b]$ tương thích với e, và $\Lambda_i \in E$ với mọi i thuộc $\{0, ..., n-1\}$ thỏa mãn:

$$\forall t \in]a_i ; a_{i+1}[, \qquad e(t) = \Lambda_i .$$

Khi đó: $\forall i \in \{0,...,n-1\},\ \forall t \in]a_i ; a_{i+1}[, \qquad (T \circ e)(t) = T(\Lambda_i)$,

suy ra $T o\, e$ là ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ (và lấy giá trị trong F), và do T tuyến tính:

$$\int_{[a;b]} T \circ e = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) T(\Lambda_i) = T \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\Lambda_i = T\left(\int_{[a;b]} e\right).$$

◆ **Mệnh đề 5** Cho $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $a < b < c$, $e \in E(a, c)$. Các thu hẹp của e trên $[a;b]$ và $[b; c]$ là những ánh xạ bậc thang và:

$$\int_{[a;b]} e|_{[a;b]} + \int_{[b;c]} e|_{[b;c]} = \int_{[a;c]} e .$$

Chứng minh:

Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 4, 6.1.2, Tập 1.

◆ **Mệnh đề 6** Cho $\| \,.\, \|$ là một chuẩn trên E và $e \in E(a,b)$. Khi đó $\|e\| : \begin{array}{ccc}[a;b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|e(t)\|\end{array}$ là ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ và:

$$\left\| \int_{[a;b]} e \right\| \le \int_{[a;b]} \|e\| .$$

Chứng minh:

Tồn tại $s = (a_i)_{0 \le i \le n}$ thuộc $\mathcal{S}$ tương thích với e.

Khi đó $\|e\|$ là hằng trên mỗi $]a_i; a_{i+1}[$, do đó $\|e\|$ là ánh xạ bậc thang trên $[a;b]$. Ký hiệu giá trị của e trên mỗi $]a_i; a_{i+1}[$ là Λ_i, ta có:

$$\left\| \int_{[a;b]} e \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\Lambda_i \right\| \le \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \|\Lambda_i\| = \int_{[a;b]} \|e\| .$$

2.3.2 Dãy ánh xạ (sơ lược)

Chúng ta sẽ khảo sát sâu hơn vấn đề này trong Tập 4, 4.1.

♦ **Định nghĩa 1** Cho $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ.

1) Cho $f \in E^X$. Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ (đơn) đến** f **(trên** X**)** khi và chỉ khi $\left(f_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến $f(t)$ trong E với mọi t thuộc X. Ta cũng nói rằng f là giới hạn (đơn) của $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ (đơn)** (trên X) khi và chỉ khi tồn tại $f \in E^X$ sao cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ (đơn) đến f (trên X).

Giả sử E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$. Khi ký hiệu ánh xạ thành phần thứ j của f_n trong $\mathcal{B}$ là $f_{n,j}$, và ánh xạ thành phần thứ j của f trong $\mathcal{B}$ là φ_j, với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, thì ta có $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến f khi và chỉ khi $(f_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến φ_j, với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

■

Cho $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ, Y là một bộ phận của X, $f \in E^X$. Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ (đơn) đến f trên Y khi và chỉ khi $(f_n|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ (đơn) đến $f|_Y$, tức là:

$$\forall t \in Y, \qquad f_n(t) \underset{n\infty}{\to} f(t) \ .$$

Với $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ cho trước, đôi khi người ta gọi tập hợp các t thuộc X sao cho $\left(f_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong E là **miền hội tụ đơn của** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

♦ **Định nghĩa 2** Cho $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ.

1) Cho $f \in E^X$. Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đều đến** f (trên X) khi và chỉ khi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in X, \qquad \left(n \geq N \Rightarrow \left\|f_n(t) - f(t)\right\| \leq \varepsilon\right).$$

Ta cũng nói rằng f là **giới hạn đều của** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đều** (trên X) khi và chỉ khi tồn tại $f : X \to E$ sao cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f (trên X).

Nếu E được trang bị một cơ sở $\mathcal{B}$, thì khi ký hiệu $f_{n,j}$ (tương ứng φ_j) là ánh xạ thành phần thứ j của f_n (tương ứng f) trong $\mathcal{B}$, ta có $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f khi và chỉ khi $(f_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến φ_j, với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

Ta chứng minh dễ dàng Mệnh đề sau đây.

◆ **Mệnh đề 1** Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến f.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ và $f \in E^X$. Để cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \text{Tồn tại } N_1 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } f_n - f \text{ bị chặn với mọi } n \geq N_1 \\ \|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

Chứng minh:

1) Giả sử $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f.

Nói riêng, tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \geq N_1, \forall t \in X, \qquad \|f_n(t) - f(t)\| \leq 1.$$

Điều đó chứng tỏ rằng mọi f_n (với $n \geq N_1$) đều bị chặn, và do đó có thể xét :

$$\|f_n - f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in X} \|f_n(t) - f(t)\|.$$

Cho $\varepsilon > 0$; vì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \geq N\ ,\ \forall t \in X, \qquad \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Khi đó với ký hiệu $N' = \operatorname{Max}(N_1, N)$, ta có:

$$\forall n \geq N', \qquad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Vậy ta đã chứng tỏ rằng:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N' \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon\right)$$

tức là $\quad \|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0.$

2) Đảo lại, giả sử tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} f_n - f \text{ bị chặn với mọi } n \geq N_1 \\ \|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

Cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\begin{cases} N \geq N_1 \\ \forall n \geq N, \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \end{cases}$.

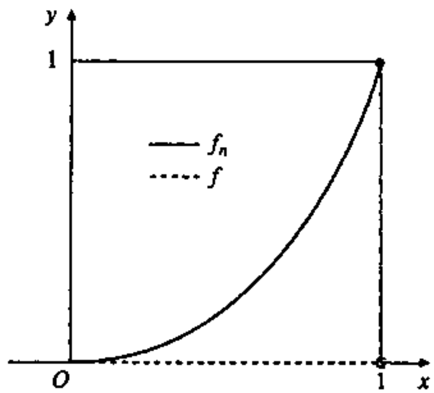
Vậy ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in X, \quad \left(n \geq N \Rightarrow \|f_n(t) - f(t)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon\right).$$

Điều này chứng tỏ rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f.

Thí dụ:

1) $f_n: \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n\end{array}$.



Rõ ràng là $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến : $f: \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \neq 1 \\ 1 \text{ nếu } x = 1\end{cases}\end{array}$.

Ta có ngay:

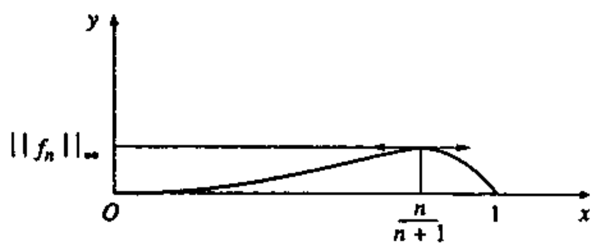
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n - f\|_\infty = 1$$

vì rằng:

$$\left(\begin{cases} \forall x \in [0;1], & |f_n(x) - f(x)| \le 1 \\ |f_n(x) - f(x)| \underset{x\to 1^-}{\to} 1 \end{cases}\right).$$

Ta kết luận: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đều đến f trên [0;1].

2) $f_n: \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n(1-x)\end{array}$



Với mỗi $x \in [0;1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0 (hãy tách riêng các trường hợp $x \in [0;1[$, $x = 1$); vậy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến 0 trên [0;1]. Cho $n \in \mathbb{N}^*$; f_n khả vi trên [0;1] và:

$$\forall x \in [0;1], \quad f'_n(x) = x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right).$$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của f_n:

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f'_n(x)$		+	0	−	
$f_n(x)$	0	↗		↘	0

Suy ra:
$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n+1},$$

do đó $\|f_n\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0$.

Ta kết luận: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến 0 trên [0;1].

Nhận xét:

1) Thí dụ 1) trên đây chứng tỏ rằng tính hội tụ không kéo theo tính hội tụ đều.

2) Khi $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên X nhưng không hội tụ đều trên X, thì thường người ta xác định các bộ phận Y của X trên đó dãy ánh xạ hội tụ đều. Trong thí dụ *1)* trên đây, với mọi $a \in [0;1[$ thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[0; a]$ đến 0, vì rằng:

$$\left\|f_n \mid_{[0;a]}\right\|_\infty = \left\|(f_n - f) \mid_{[0;a]}\right\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;a]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;a]} \left|f_n(x)\right| = f_n(a) \underset{n\infty}{\to} 0 .$$

3) Trong Tập 4, chúng ta sẽ thấy rằng nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên một bộ phận X của $\mathbb{R}$, và nếu mọi f_n đều liên tục trên X, thì f liên tục trên X. Ta có thể sử dụng tính chất này ở dạng phản đảo, để chứng minh rằng một dãy ánh xạ, mà ta đã biết là hội tụ đơn, không hội tụ đều (xem thi dụ *1)* trên đây, với X là $[0;1]$).

Bài tập

◊ **2.3.1** Khảo sát tính hội tụ (hội tụ đơn, hội tụ đều) của các dãy ánh xạ sau đây:

a) $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = n\left(\operatorname{Arc}\tan\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{Arc}\tan\left(x - \dfrac{1}{n}\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$

b) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \operatorname{Arc}\tan\dfrac{n+x}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}$

c) $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^\alpha\left(x^n(1-x) + x(1-x)^n\right)$, $n\in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định.

◊ **2.3.2** a) Chứng minh rằng ánh xạ $x \mapsto \dfrac{\sin^2 2\pi x}{(x-n)\left(x - \dfrac{n}{2}\right)}$ có một thác triển f_n liên tục trên $\mathbb{R}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Khảo sát tính hội tụ (hội tụ đơn, hội tụ đều) của dãy ánh xạ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

◊ **2.3.3** Cho $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ và $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\left(f(x)\right)^3}{\left(f(x)\right)^2 + \dfrac{1}{n}}, \text{ với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ đều đến f trên $\mathbb{R}$.

◊ **2.2.4** Cho X và Y là hai tập hợp không rỗng, $f \in Y^X$, $\left(g_n : Y \to E\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $g \in E^Y$; giả thiết $(g_n)_n$ hội tụ đều đến g trên Y. Chứng minh rằng $\left(g_n \circ f\right)_n$ hội tụ đều đến $g \circ f$ trên X.

◊ **2.3.5** Cho X là một bộ phận của $\mathbb{R}$, compac và khác rỗng, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ hội tụ đều trên X đến một ánh xạ liên tục $f : X \to E$.

Giả thiết $\forall \in \mathbb{N}, \quad f_n^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$.

Chứng minh: $f^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$.

2.3.3 Xấp xỉ đều bằng những ánh xạ bậc thang hay bằng những ánh xạ afin từng khúc và liên tục

Trong § 2.3.3 này (a, b) chỉ một cặp số thực thỏa mãn $a < b$.

♦ **Định lý** Cho $f : [a;b] \to E$ liên tục từng khúc.

Tồn tại một dãy $(e_n : [a;b] \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ hội tụ đều đến f trên $[a; b]$.

Chứng minh:

1) Trước hết ta khảo sát trường hợp f liên tục.

Cho $n \in \mathbb{N}$ cố định.

Vì f liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên theo định lý Heine, f liên tục đều trên $[a; b]$.

Vậy tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (t', t'') \in [a;b]^2, \qquad \left(|t' - t''| \leq \eta \ \Rightarrow \ \|f(t') - f(t'')\| \leq \frac{1}{n+1} \right).$$

Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{b-a}{N} \leq \eta$ (chẳng hạn $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{b-a}{\eta}\right) + 1$). Chú ý rằng η và N đều phụ thuộc n.

Xét phân hoạch "đều" của $[a; b]$:

$$s = \left(a + k\frac{b-a}{N} \right)_{0 \leq k \leq N}$$

và ánh xạ bậc thang $e_n : [a;b] \to E$ cho bởi:

$$\begin{cases} \forall k \in \{0,\dots,N-1\}, \ \forall t \in \left[a + k\dfrac{b-a}{N}; a + (k+1)\dfrac{b-a}{N} \right[, \qquad e_n(t) = f\left(a + k\dfrac{b-a}{N} \right) \\ e_n(b) = f(b) \end{cases}$$

Với mọi t thuộc $[a; b]$, tồn tại k thuộc $\{0, \dots, N-1\}$ sao cho

$$t \in \left[a + k\frac{b-a}{N}; a + (k+1)\frac{b-a}{N} \right[,$$

và do đó, ta có:

$$\|f(t)-e_n(t)\| = \left\|f(t)-f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)\right\| \le \frac{1}{n+1},$$

vì rằng: $$0 \le t-\left(a+k\frac{b-a}{N}\right) \le \frac{b-a}{N} \le \eta.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng $f-e_n$ bị chặn và $\|f-e_n\|_\infty \le \dfrac{1}{n+1}$, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

Như vậy, chúng ta đã xây dựng được một dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a;b]$ hội tụ đều trên $[a;b]$ đến f.

2) Bây giờ chúng ta khảo sát trường hợp tổng quát khi f liên tục từng khúc.
Tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, ..., a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ sao cho:

$$\begin{cases} a = a_0 < \ldots < a_p = b \\ \text{Với mọi } i \text{ thuộc } \{0,\ldots,p\text{-}1\}, f_{]a_i;a_{i+1}[} \text{ có thể thác triển} \\ \text{thành một ánh xạ } f_i \text{ liên tục trên } [a_i;a_{i+1}] \end{cases}.$$

Theo *1)*, với mọi i thuộc $\{0, ..., p\text{-}1\}$, tồn tại một dãy $(e_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a_i; a_{i+1}]$ hội tụ đều đến f_i trên $[a_i; a_{i+1}]$.
Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, ta ký hiệu $e_n : [a;b] \to E$ là ánh xạ bậc thang xác định bởi:

$$\begin{cases} \forall i \in \{0,\ldots,p-1\},\ \forall t \in]a_i;a_{i+1}[, & e_n(t) = e_{i,n}(t) \\ \forall i \in \{0,\ldots,p\}, & e_n(a_i) = f(a_i) \end{cases}$$

Như thế, ta có : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f-e_n\|_\infty \le \underset{0\le i\le p-1}{\mathrm{Max}} \|f_i - e_{i,n}\|_\infty$,

và do đó $\|f-e_n\|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, tức là $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[a; b]$ đến f.

■

Một ánh xạ φ: $[a;b] \to E$ được gọi là **afin từng khúc** khi và chỉ khi tồn tại $s = (a_0, ..., a_m) \in \mathcal{S}$ sao cho tồn tại $(A_i, B_i) \in E^2$ thỏa mãn:

$$\forall t \in]a_i;a_{i+1}[, \quad \varphi(t) = tA_i + B_i$$

với mọi i thuộc $\{0, ..., m\text{-}1\}$.

◆ **Mệnh đề** Cho $f:[a;b] \to E$ liên tục.
Tồn tại một dãy $\left(\varphi_n : [a;b] \to E\right)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ afin từng khúc và liên tục, hội tụ đều trên $[a; b]$ đến f.

Chứng minh:
Ta giữ lại các ký hiệu của *1)* trong phép chứng minh định lý trên đây, và ký hiệu:

$$a_k = a + k\frac{b-a}{N}, \qquad \text{với } k \in \{0, ..., N\}.$$

Xét φ_n : $[a; b] \to E$ xác định như sau:

$$\begin{cases} \forall k \in \{0,\dots,N-1\},\ \forall t \in [a_k;a_{k+1}[, \quad \varphi_n(t) = \dfrac{t-a_k}{a_{k+1}-a_k}\big(f(a_{k+1})-f(a_k)\big)+f(a_k) \\ \varphi_n(b) = f(b). \end{cases}$$

Rõ ràng là φ_n là một ánh xạ afin từng khúc và liên tục.
Cho $t \in [a; b[$, tồn tại $k \in \{0, \dots, N-1\}$ sao cho $t \in [a_k; a_{k+1}[$, và khi đó ta có:

$$\|\varphi_n(x)-f(x)\| \le \frac{t-a_k}{a_{k+1}-a_k}\|f(a_{k+1})-f(a_k)\| + \|f(a_k)-f(x)\|$$

$$\le \|f(a_{k+1})-f(a_k)\| + \|f(a_k)-f(x)\| \le \frac{2}{n+1}.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[a; b]$ đến f.

2.3.4 Tích phân các ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn

Trong § 2.3.4 này (trừ *3)*), (a, b) chỉ một cặp số thực thỏa mãn $a < b$.
Ta ký hiệu không gian vectơ các ánh xạ $[a; b] \to E$ liên tục từng khúc là $\mathcal{CM}$.

1) Tích phân của một ánh xạ liên tục từng khúc trên một đoạn

◆ **Định lý - Định nghĩa 1** Cho $f \in \mathcal{CM}$. Với mọi dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$ hội tụ đều trên $[a; b]$ đến f, dãy $\left(\int_{[a;b]} e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ (trong E) đến cùng một giới hạn gọi là **tích phân của** f (trên $[a;b]$) và ký hiệu là $\int_{[a;b]} f$ hay $\int_a^b f$ hay $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Chứng minh:

1) Theo 2.3.4, Định lý, tồn tại một dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a; b]$, hội tụ đều đến f. Ta chứng tỏ rằng dãy $\left(\int_{[a;b]} e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong E. Để làm việc này, ta sẽ chứng tỏ rằng dãy $\left(\int_{[a;b]} e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong E.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a;b] \quad \left(n \geq N \Rightarrow \|f(t) - e_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right).$$

Cho $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p \geq N$ và $q \geq N$ và $t \in [a;b]$. Ta có:

$$\|e_p(t) - e_q(t)\| \leq \|e_p(t) - f(t)\| + \|f(t) - e_q(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

suy ra:

$$\left\| \int_{[a;b]} e_p - \int_{[a;b]} e_q \right\| = \left\| \int_{[a;b]} (e_p - e_q) \right\| \leq \int_{[a;b]} \|e_p - e_q\| \leq \int_{[a;b]} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \Rightarrow \left\| \int_{[a;b]} e_p - \int_{[a;b]} e_q \right\| \leq \varepsilon \right),$$

tức là: dãy $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong E.

Vì E hữu hạn chiều nên E là không gian đủ (xem 1.4.2, Định lý 2), do đó $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong E.

Nhưng đến đây ta có thể đặt câu hỏi là liệu giới hạn của $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ có phụ thuộc vào việc chọn dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f không?

2) Ta sẽ chứng tỏ rằng với hai dãy ánh xạ bậc thang $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f thì :

$$\lim_{n\infty} \int_{[a;b]} e_n = \lim_{n\infty} \int_{[a;b]} \varepsilon_n .$$

Phương pháp thứ nhất

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\left\| \int_{[a;b]} e_n - \int_{[a;b]} \varepsilon_n \right\| \leq \int_{[a;b]} \|e_n - \varepsilon_n\| \leq (b-a)\|e_n - \varepsilon_n\|_\infty$$

và vì các dãy $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ và $\left(\int_{[a;b]} \varepsilon_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ nên:

$$\lim_{n\infty} \int_{[a;b]} e_n = \lim_{n\infty} \int_{[a;b]} \varepsilon_n .$$

Phương pháp thứ hai

Dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ cho bởi $u_n = e_{\frac{n}{2}}$ nếu n chẵn và $u_n = \varepsilon_{\frac{n-1}{2}}$ nếu n lẻ, hội tụ đều đến f trên $[a;b]$, do đó $\left(\int_{[a;b]} u_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ. Do các dãy $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ và $\left(\int_{[a;b]} \varepsilon_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ đều được trích ra từ dãy hội tụ đó, nên chúng hội tụ tới cùng một giới hạn.

■

Ta chứng minh dễ dàng mệnh đề sau.

◆ **Mệnh đề** Giả sử E có trang bị một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$.

Cho $f \in \mathcal{CM}, f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$, ta có:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{[a;b]} f_j \right) e_j .$$

2) Tính chất

◆ **Định lý 1** Ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathcal{CM} & \to & E \\ f & \mapsto & \int_{[a;b]} f \end{array}$ là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh:

Cho $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f,g) \in (\mathcal{CM})^2$. Tồn tại hai dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang hội tụ đều theo thứ tự đến f, g.

Khi đó $(\lambda e_n + \varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ bậc thang hội tụ đều đến $\lambda f + g$, vì lẽ với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ và mọi t thuộc $[a; b]$ ta có:

$$\|(\lambda f + g)(t) - (\lambda e_n + \varepsilon_n)(t)\| \le |\lambda| \|f(t) - e_n(t)\| + \|g(t) - \varepsilon(t)\|$$

và do đó: $$\|(\lambda f + g) - (\lambda e_n + \varepsilon_n)\|_\infty \le |\lambda| \|f - e_n\|_\infty + \|g - \varepsilon_n\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0.$$

Ta có: $$\int_{[a;b]} (\lambda e_n + \varepsilon_n) = \lambda \int_{[a;b]} e_n + \int_{[a;b]} \varepsilon_n \underset{n\infty}{\to} \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g .$$

Cuối cùng, từ đó suy ra:

$$\int_{[a;b]} (\lambda e_n + \varepsilon_n) = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g .$$ ■

◆ **Mệnh đề 1** Cho f, g: $[a;b] \to E$ liên tục từng khúc và trùng nhau, trừ ra một bộ phận hữu hạn của $[a; b]$.

Khi đó: $$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} g .$$

Chứng minh:

Vì f và g trùng nhau ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm, nên tồn tại một phân hoạch $s = (a_i)_{0\le i\le n}$ của $[a; b]$ sao cho:

$$\forall t \in [a;b] - \{a_i;\ 0 \le i \le n\}, \qquad f(t) = g(t) .$$

Ánh xạ $e: [a;b] \to E$, $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } \forall i \in \{0,\ldots,n-1\},\ t \notin]a_i;a_{i+1}[\\ g(a_i)-f(a_i) & \text{nếu } \exists i \in \{0,\ldots,n\},\ t=a_i \end{cases}$ là một ánh xạ bậc thang và có

các bậc bằng 0, do đó $\int_{[a;b]} e = 0$, từ đó suy ra:

$$\int_{[a;b]} g = \int_{[a;b]} (f+e) = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} e = \int_{[a;b]} f.$$

■

Mệnh đề 1 trên đây cho phép ta mở rộng định nghĩa tích phân ra trường hợp một ánh xạ f xác định trên một đoạn $[a;b]$ ngoại trừ trên một bộ phận hữu hạn của $[a;b]$ (mà lúc đó ta có thể gộp vào một phân hoạch $s = (a_0, \ldots, a_n)$ của $[a; b]$) khi mà thu hẹp của f trên mỗi $]a_i; a_{i+1}[$ $(0 \le i \le n-1)$ đều có thể thác triển thành một ánh xạ f_i liên tục trên $[a_i; a_{i+1}]$, bằng cách đặt:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i;a_{i+1}]} f_i .$$

◆ **Mệnh đề 2** **(Ảnh của một tích phân qua một ánh xạ tuyến tính)**

Cho f là một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều và $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Với mọi ánh xạ $f : [a;b] \to E$ liên tục từng khúc, ánh xạ $T \circ f: [a;b] \to F$ liên tục từng khúc và:

$$\int_{[a;b]} T \circ f = T\left(\int_{[a;b]} f \right).$$

Chứng minh:

Tồn tại một dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang hội tụ đều đến f trên $[a;b]$. Rõ ràng là $T \circ e_n$ là ánh xạ bậc thang trên $[a;b]$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, và rằng $T \circ f$ liên tục từng khúc trên $[a;b]$.

Vì T tuyến tính và E hữu hạn chiều, nên T tuyến tính liên tục (xem 1.3.2, Mệnh đề 1) và do đó tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho

$$\forall x \in E, \qquad \| T(x)\|_F \le M\|x\|_E .$$

Ta suy ra rằng $(T\circ e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến $T \circ f$, vì với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ và mọi t thuộc $[a;b]$:

$$\|(T\circ f)(t)-(T\circ e_n)(t))\|_F = \|T(f(t)-e_n(t))\|_F \le M\|f(t)-e_n(t)\|_E \le M\|f-e_n\|_\infty .$$

Suy ra: $\displaystyle\int_{[a;b]} T\circ e_n \underset{n\infty}{\to} \int_{[a;b]} T\circ f .$

Nhưng (xem 2.3.1, 2), Mệnh đề 4): $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{[a;b]} T\circ e_n = T\left(\int_{[a;b]} e_n\right)$,

từ đó do T liên tục ta suy ra rằng:

$$\int_{[a;b]} T \circ e_n \underset{n\infty}{\rightarrow} T\left(\int_{[a;b]} f\right).$$

Kết luận:
$$\int_{[a;b]} T \circ f = T\left(\int_{[a;b]} f\right).$$
■

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Với mọi khoảng I của $\mathbb{R}$, ta ký hiệu $\tau_\alpha I$ là tịnh tiến α của I, được định nghĩa là:

$$\tau_\alpha I = \{t+\alpha; t \in I\}.$$

Với mọi ánh xạ $f : I \rightarrow E$, ta ký hiệu $\tau_\alpha f$ là tịnh tiến α của f, định nghĩa là: $\tau_\alpha f : \begin{array}{ccc} \tau_\alpha I & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & f(t-\alpha) \end{array}$.

◆ **Mệnh đề 3** **(Tính bất biến của tích phân qua phép tịnh tiến)**

Ký hiệu: $J = [a;b]$. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ và $f : J \rightarrow E$ liên tục từng khúc. Thế thì $\tau_\alpha f$ liên tục từng khúc trên $\tau_\alpha J$ và:

$$\int_{\tau_\alpha J} \tau_\alpha f = \int_J f.$$

Chứng minh:

Dễ thấy rằng $\tau_\alpha f$ liên tục từng khúc trên $\tau_\alpha J$.

Tồn tại một dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên J hội tụ đều đến f trên J.

Rõ ràng là $(\tau_\alpha e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ bậc thang trên $\tau_\alpha J$, hội tụ đều đến $\tau_\alpha f$ trên $\tau_\alpha J$, và rằng:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\tau_\alpha J} \tau_\alpha e_n = \int_J e_n.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ (xem *1)*, Định lý - Định nghĩa), ta suy ra:

$$\int_{\tau_\alpha J} \tau_\alpha f = \lim_{n\infty} \int_{\tau_\alpha J} \tau_\alpha e_n = \lim_{n\infty} \int_J e_n = \int_J f.$$
■

Nhận xét:

Đây là một trường hợp riêng của định lý đổi biến trong tích phân (xem dưới đây, 2.3.8).

◆ **Định lý 2** Cho N là một chuẩn trên E. Ta có:

$$\forall f \in \mathcal{CM}, \qquad N\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_a^b N\big(f(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Chứng minh:

Tồn tại một dãy $(e_n : [a;b] \rightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a;b]$, hội tụ đều đến f trên $[a;b]$ (xem 2.3.3, Định lý).

Theo 2.3.4, *1)*, Định lý - Định nghĩa : $\int_a^b e_n \underset{n\infty}{\to} \int_a^b f$.

Mặt khác thì $(N \circ e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ bậc thang trên $[a;b]$ hội tụ đều đến Nof trên $[a;b]$, vì:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a;b], \quad |(N \circ e_n)(t) - (N \circ f)(t)| \le N(e_n(t) - f_n(t)) \le \beta \|e_n(t) - f(t)\|$$

trong đó $\beta > 0$ suy ra từ tính tương đương của các chuẩn N và $\| \cdot \|$ trên E.

Như thế: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|N \circ e_n - N \circ f\|_\infty \le \beta \|e_n - f\|_\infty$,

suy ra: $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_a^b N \circ e_n - \int_a^b N \circ f \right| \le \beta(b-a)\|e_n - f\|_\infty,$$

chứng tỏ rằng: $$\int_a^b N \circ e_n \underset{n\infty}{\to} \int_a^b N \circ f.$$

Nhưng (xem 2.1.3 *2)*, Mệnh đề 6): $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N\left(\int_a^b e_n\right) \le \int_a^b N \circ e_n$.

Chuyển qua giới hạn khi n dần đến $+\infty$, ta suy ra:

$$N\left(\int_a^b f\right) \le \int_a^b N \circ f.$$

■

Nhận xét:

Nói riêng, kết quả trên đây đúng với chuẩn $\| \cdot \|$ đã cho trên E:

$$\forall f \in \mathcal{CM}, \quad \left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\|$$

trong đó $\|f\| : \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$.

■

◆ **Hệ quả** **(Bất đẳng thức trung bình)**

$$\forall f \in \mathcal{CM}, \quad \left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\| \le (b-a) \underset{t\in[a;b]}{\mathrm{Sup}} \|f(t)\|.$$

■

◆ **Định nghĩa** Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ từ $[a; b]$ đến E liên tục từng khúc, và f là một ánh xạ từ $[a; b]$ đến E liên tục từng khúc. Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ theo trung bình đến** f khi và chỉ khi:

$$\int_{[a;b]} \|f_n - f\| \underset{n\infty}{\to} 0.$$

◆ **Mệnh đề 4** Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[a;b]$ đến f, thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ theo trung bình đến f.

Chứng minh:

Chỉ cần chú ý rằng:

$$\int_{[a;b]}\|f_n - f\| \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

■

Nhận xét: Với $f \in C([a;b],E)$, *khi ký hiệu* $\|f\|_1 = \int_a^b \|f\|$, *ta có:*

$$\forall f \in C([a;b],E), \qquad \|f\|_1 \le (b-a)\|f\|_\infty.$$

◆ **Định lý 3** **(Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)**

Nếu $f,g\colon [a;b]\to\mathbb{C}$ liên tục từng khúc thì:

$$\left|\int_a^b \overline{f}g\right|^2 \le \left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right).$$

Chứng minh:

Đặt $\beta = \int_a^b \overline{f}g \in \mathbb{C}$, $\gamma = \int_a^b |g|^2 \in \mathbb{R}_+$ và xét $h = \gamma f - \overline{\beta}g$, vốn liên tục từng khúc trên $[a;b]$, ta có:

$$0 \le \int_a^b |h|^2 = |\gamma|^2 \int_a^b |f|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\gamma\overline{\beta}\int_a^b \overline{f}g\right) + |\beta|^2 \int_a^b |g|^2$$

$$= \gamma^2 \int_a^b |f|^2 - 2|\beta|^2\gamma + |\beta|^2\gamma = \gamma\left(\gamma\int_a^b |f|^2 - |\beta|^2\right).$$

Nếu $\gamma \ne 0$ thì ta suy ra rằng $\gamma\int_a^b |f|^2 - |\beta|^2 \ge 0$, từ đó có được bất đẳng thức cần chứng minh.

Nếu $\gamma = 0$ thì do $|g|^2$ liên tục từng khúc và ≥ 0, nên g bằng không, trừ ra tại nhiều nhất một số hữu hạn điểm của $[a;b]$, do đó $\overline{f}g$ cũng vậy, và $\int_a^b \overline{f}g = 0$, từ đó hiển nhiên có bất đẳng thức cần chứng minh.

■

◆ **Định nghĩa 2** Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ từ $[a;b]$ đến $\mathbb{C}$ liên tục từng khúc, và f là một ánh xạ từ $[a;b]$ đến $\mathbb{C}$ liên tục từng khúc. Ta nói rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ theo **trung bình bình phương đến** f khi và chỉ khi:

$$\int_{[a;b]} |f_n - f|^2 \underset{n\infty}{\to} 0.$$

Mệnh đề 5 Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên (a,b), thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ theo trung bình bình phương đến f.

Chứng minh:
Chỉ cần chú ý rằng:

$$\int_{[a;b]} |f_n - f|^2 \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty^2$$

với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

Mệnh đề 6 Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến f theo trung bình bình phương, thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến f theo trung bình .

Chứng minh:
Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, áp dụng cho $f_n - f$ và 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b |f_n - f| \le \left(\int_a^b 1^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |f_n - f|^2\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f_n - f|^2\right)^{1/2}.$$

■

3) Hệ thức Chasles

Mệnh đề 1 Cho K là một đoạn bao hàm trong $J = [a;b]$. Với mọi ánh xạ $f : J \to E$ liên tục từng khúc trên J, ánh xạ $\chi_K f$ liên tục từng khúc trên J và:

$$\int_K f|_K = \int_J \chi_K f .$$

Ta nhắc lại rằng (xem Tập 5, 1.3.1, Thí dụ *5)*), χ_K là hàm đặc trưng của K:

$$\chi_K : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in K \\ 0 & \text{nếu } t \notin K \end{cases} \end{array}.$$

Chứng minh:
Tồn tại một dãy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang hội tụ đều đến f trên J. Rõ ràng là $(e_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ bậc thang trên K hội tụ đều đến $f|_K$ trên K, và rằng $(\chi_K e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ bậc thang trên J hội tụ đều đến $\chi_K f$ trên J (vì $\operatorname{Sup}_{t\in J}\left|(\chi_K f)(t) - (\chi_K e_n)(t)\right| \le \operatorname{Sup}_{t\in J}|f(t) - e_n(t)|$), và rằng $\int_K e_n|_K = \int_J \chi_K e_n$, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

Ta suy ra kết quả bằng cách cho n dần ra ∞. ■

◆ **Hệ quả** Cho $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $a < b < c$ và $f: [a;c] \to E$ liên tục từng khúc. Khi đó, các thu hẹp của f trên $[a; b]$ và trên $[b; c]$ liên tục từng khúc và ta có:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Chứng minh:

Áp dụng mệnh đề trên với chú ý rằng:

$$\chi_{[a;c[} = \chi_{[a;b]} + \chi_{]b;c]}.$$

◆ **Định nghĩa - Ký hiệu**

- $\int_a^b f = 0$ nếu $a = b$
- $\int_a^b f = -\int_b^a f$ nếu $a > b$ và nếu $f: [b;a] \to E$ liên tục từng khúc.

◆ **Mệnh đề 2** **(Hệ thức Chasles)**

Cho $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, f là một ánh xạ lấy giá trị trong E và liên tục từng khúc trên một đoạn chứa a, b, c. Ta có:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Bài tập

◊ **2.3.6** Cho $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $\int_0^1 f = 0$. Ta ký hiệu $m = \mathrm{Inf}(f)$, $M = \mathrm{Sup}(f)$. Chứng minh: $\int_0^1 f^2 \le -mM$ (trong đó $f^2 = ff$).

◊ **2.3.7** Cho f, g: $[0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn:

$$\int_0^1 (f^2 + g^2 + 2f^2g^2) = 2\int_0^1 (f+g)fg,\ f \ne 0;\ g \ne 0.$$

Chứng minh: $f = g = 1$.

◊ **2.3.8** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n : [a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục và không đều bằng 0.
Chứng minh rằng tồn tại $u_1, \dots, u_n : [a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục và thỏa mãn:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{f_k(t)} u_k(t) \right) dt = 1 .$$

◊ **2.3.9** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục đều, và $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, định nghĩa bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f .$$

Chứng minh rằng $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f trên $\mathbb{R}$.

◊ **2.3.10** Xác định : $\displaystyle \lim_{n\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{\sqrt{ij}} \right)$.

◊ **2.3.11** Chứng minh: $\forall x \in [0;+\infty[, \qquad \displaystyle \int_0^x \frac{\sin t}{t+1} dt \ge 0$.

◊ **2.3.12** Xác định: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t} dt$.

◊ **2.3.13** Xác định: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

◊ **2.3.14** Cho $a \in [0;1[$, $f : [0;1] \to E$ liên tục. Xác định: $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_0^1 f(a^n t) dt$.

◊ **2.3.15*** Cho $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ liên tục và $\alpha \in]1; +\infty[$. Xác định:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} f(t) dt .$$

◊ **2.3.16*** Chứng minh: $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1-t^2}{n} \right)^n dt = 0.$

◊ **2.3.17*** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $a < b$, $f : [a;b] \to E$ liên tục từng khúc. Xác định:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^b |\sin(xt)| f(t) dt .$$

2.3.5 Tổng Riemann

Trong § 2.3.5 này, (a, b) chỉ một cặp số thực thỏa mãn $a < b$.

◆ **Định nghĩa** Cho $f : [a;b] \to E$ liên tục, $s = (a_0, ..., a_n) \in \mathcal{S}$, và với mọi i thuộc $\{0, ..., n\text{-}1\}$, ξ_i là một phần tử của $[a_i; a_{i+1}]$. **Tổng Riemann liên kết với** f, s, $(\xi_i)_{0 \le i \le n-1}$ là phần tử của E:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i).$$

Người ta đã chứng minh được kết quả sau đây, tương tự như ở Tập 1, 6.2.7, Định lý.

◆ **Định lý** Cho $f : [a;b] \to E$ liên tục. Các tổng Riemann ứng với f đều hội tụ về $\int_a^b f$ khi bước của phân hoạch dần đến 0, nghĩa là:

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\alpha > 0$ sao cho với mọi phân hoạch $s = (a_0, ..., a_n)$ của $[a; b]$, với bước $\le \alpha$ và với mọi họ $(\xi_i)_{0 \le i \le n-1}$ thỏa mãn $(\forall i \in \{0, ..., n\text{-}1\},\ \xi_i \in [a_i; a_{i+1}])$, ta có:

$$\left\| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right\| < \varepsilon$$

Nhận xét:
Tương tự như ở Tập 1, 6.2.7, Nhận xét *3)*, ta chứng minh rằng nếu $f : [a;b] \to E$ là ánh xạ k-Lipschitz ($k \in \mathbb{R}_+$), thì với mọi phân hoạch $s = (a_0, ..., a_n)$ của $[a;b]$ với bước ký hiệu là $p(s)$ và mọi họ $(\xi_i)_{0 \le i \le n-1}$ thỏa mãn $(\forall i \in \{0, ..., n\text{-}1\},\ \xi_i \in [a_i; a_{i+1}])$, ta có:

$$\left\| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right\| < k(b-a)p(s).$$

◆ **Hệ quả**

- Cho $f : [a;b] \to E$ liên tục, ta có:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\infty}{\to} \int_a^b f.$$

- Nói riêng, nếu $f : [0;1] \to E$ liên tục thì:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 f.$$

Thí dụ:

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos\frac{k\pi}{n} & -\sin\frac{k\pi}{n}\\ \sin\frac{k\pi}{n} & \cos\frac{k\pi}{n}\end{pmatrix}\right)=\int_0^1\begin{pmatrix}\cos\pi t & -\sin\pi t\\ \sin\pi t & \cos\pi t\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{\pi}\\ \frac{2}{\pi} & 0\end{pmatrix}.$$

Bài tập

◊ **2.3.18** Xác định: $\lim\limits_{n\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}-1\right)$.

◊ **2.3.19** Xác định: $\lim\limits_{n\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}$.

2.3.6 Tích phân và đạo hàm

Trong §2.3.6 này, I chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm.

1) Hàm tích phân của cận trên

◆ **Mệnh đề** Cho $t_0 \in I$, $f: I \to E$ liên tục từng khúc trên I. Ta ký hiệu là F ánh xạ $I \to E$ định nghĩa bởi:

$$\forall t \in I, \quad F(t)=\int_{t_0}^{t} f.$$

Ta có:
1) F liên tục trên I
2) F thuộc lớp C^1 từng khúc trên I
3) F khả vi tại mọi điểm t_1 thuộc I mà tại đó f liên tục, và $F'(t_1)=f(t_1)$
4) $F(t_0)=0$.

Chứng minh:
Tương tự phép chứng minh ở Tập 1, 6.4.1, các Mệnh đề 1 và 2.

◆ **Hệ quả 1** Với mọi p thuộc $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, nếu f thuộc lớp C^p trên I, thì $F: \begin{array}{l} I \to E \\ t \mapsto \int_{t_0}^{t} f \end{array}$ (với $t_0 \in I$ cố định) thuộc lớp C^{p+1} trên I *và* $F' = f$.

◆ **Hệ quả 2** Cho I, J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên I sao cho $u(I) \subset J$ và $v(I) \subset J$, $f: J \to E$ liên tục. Thế thì ánh xạ $\psi: I \to E$ cho bởi: $\forall t \in I,\ \psi(t) = \displaystyle\int_{u(t)}^{v(t)} f$

thuộc lớp C^1 trên I và: $\forall t \in I,\quad \psi'(t) = v'(t) f\big(v(t)\big) - u'(t) f\big(u(t)\big)$.

2) Nguyên hàm

◆ **Định nghĩa** Cho f, $\phi \in E^I$. Ta nói rằng ϕ là **một nguyên hàm của** f **trên** I khi và chỉ khi: ϕ khả vi trên I và $\phi' = f$.

◆ **Định lý** Cho f: $I \to E$ liên tục; ta có:

1) Với mọi $t_0 \in I$, ánh xạ $\begin{array}{lcl} I & \to & E \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^{t} f \end{array}$ là một nguyên hàm của f trên I

2) Với mọi nguyên hàm ϕ_0 của f trên I, tập hợp các nguyên hàm của f trên I là: $\{\phi_0 + \Lambda;\ \ \Lambda \in E\}$.

Với $f : I \to E$ liên tục, ta ký hiệu một nguyên hàm bất kỳ của f trên I là $\int f$ hay:

$$\begin{array}{lcl} I & \to & E \\ x & \mapsto & \int f(x)\mathrm{d}x \end{array}.$$

◆ **Mệnh đề - Ký hiệu** Cho $(a, b) \in I^2$, $f: I \to E$ liên tục, $\phi : I \to E$ là một nguyên hàm của f trên I. Thế thì ta có:

$$\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a).$$

Phần tử $\phi(b) - \phi(a)$ được ký hiệu là $\left[\phi(t)\right]_{t=a}^{t=b}$ hay $\left[\phi(t)\right]_a^b$, và gọi là **biến phân của** ϕ **từ** a **đến** b.

3) Mở rộng khái niệm nguyên hàm

♦ **Định nghĩa** Cho $f, \phi \in E^I$. Ta nói rằng ϕ là **một nguyên hàm của** f **trên** I, khi và chỉ khi ϕ liên tục trên I, và với mọi đoạn $[a;b]$ bao hàm trong I, tồn tại một bộ phận hữu hạn A của $[a;b]$ sao cho:

ϕ khả vi tại mọi điểm thuộc $[a;b] - A$,

và với mọi t thuộc $[a;b] - A$, ta có: $\phi'(t) = f(t)$.

Ta chứng minh dễ dàng các mệnh đề sau đây.

♦ **Mệnh đề** Cho $f: I \to E$ liên tục từng khúc; ta có:

1) Với mọi $t_0 \in I$, ánh xạ $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^{t} f \end{array}$ là một nguyên hàm của f trên I.

2) Với mọi nguyên hàm ϕ_0 của f trên I, tập hợp các nguyên hàm của f trên I là tập hợp các $\phi_0 + \Lambda$, trong đó Λ là hằng trên I.

♦ **Mệnh đề - Ký hiệu** Cho $(a,b) \in I^2$, $f: I \to E$ liên tục từng khúc, $\phi : I \to E$ là một nguyên hàm của f trên I. Thế thì ta có:

$$\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a).$$

Phần tử $\phi(b) - \phi(a)$ của E được ký hiệu là $\left[\phi(t)\right]_{t=a}^{t=b}$ hay $\left[\phi(t)\right]_a^b$, và được gọi là **biến phân của** ϕ **từ** a **đến** b.

Bài tập

◊ **2.3.20** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$, $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $z = x + iy$. Chứng minh:

$$\left|e^{-az} - e^{-bz}\right| \le \frac{|z|}{x}\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right).$$

◊ **2.3.21** Chứng minh rằng tồn tại $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ sao cho với mọi $f : [0;1] \to E$ thuộc lớp C^1, ta có:

$$\sup_{t\in[0;1]} \|f(t)\| \le A \int_0^1 \|f'(t)\| dt + B \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

◊ **2.3.22** a) Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1, $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ liên tục, thỏa mãn: $\forall t \in [a;b]$, $g(t) > 0$. Chứng minh:

$$\left((f(b))^2-(f(a))^2\right)^2 \le 4\left(\int_a^b (f'(t))^2 g(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{(f(t))^2}{g(t)}\mathrm{d}t\right).$$

b) Từ đó suy ra *bất đẳng thức Carlson*:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^4 \le \pi^2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 x_k^2\right).$$

◊ **2.3.23** Khảo sát và biểu diễn đồ thị các hàm f sau đây, xác định bằng việc cho biểu thức $f(x)$ (x: biến số thực):

a) $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+t}}$ b) $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{ch}t}{t}\mathrm{d}t$ c) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

◊ **2.3.24** Tính $\displaystyle\int_{x-2y}^{x+2y}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t+\mathrm{ch}x}$, với $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2.3.7 Bất đẳng thức số gia hữu hạn

Trong § này, chúng ta xét việc tổng quát hóa các kết quả ở Tập 1, § 5.2.2.
Trước hết, ta chú ý rằng nếu $f:[a;b]\to E$ thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$, thì có thể không tồn tại phần tử c thuộc $]a;b[$ sao cho $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, như trong thí dụ sau:

$$a=0;\quad b=\pi,\qquad F:\begin{array}{l}[0;\pi]\to\mathbb{C}\\ t\ \mapsto e^{it}\end{array}.$$

◆ **Định lý (Bất đẳng thức số gia hữu hạn)**

Cho $(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $\|\,.\,\|$ là một chuẩn trên E, $f:[a;b]\to E$ liên tục trên $[a;b]$ *và* thuộc lớp C^1 trên $]a;b[$. Giả sử tồn tại $\lambda\in\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall t\in]a;b[,\quad \|f'(t)\|\le\lambda.$$

Thế thì: $$\|f(b)-f(a)\|\le\lambda|b-a|.$$

Chứng minh:

Với mọi $(\alpha,\beta)\in\,]a;b[^2$ sao cho $\alpha\le\beta$, ta có:

$$\|f(\beta)-f(\alpha)\|\le\left\|\int_\alpha^\beta f'(t)\mathrm{d}t\right\|\le\int_\alpha^\beta\|f'(t)\|\mathrm{d}t\le\lambda(\beta-\alpha).$$

Cho α dần đến a và β dần đến b (nếu $a\le b$), ta suy ra:

$$\|f(b)-f(a)\|\le\lambda(b-a).$$

◆ **Hệ quả 1** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\| \,.\, \|$ là một chuẩn trên E, $f:[a;b] \to E$ thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$. Thế thì

$$\|f(b)-f(a)\| \le |b-a| \sup_{t\in[a;b]} \|f'(t)\|.$$

Chứng minh:

Kết quả trên vẫn đúng nếu f liên tục trên $[a;b]$ và thuộc lớp C^1 từng khúc trên $[a;b]$. Thật vậy, trong trường hợp đó tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ và phân hoạch $s = (a_0, ..., a_n)$ của $[a;b]$ sao cho với mọi $i \in \{0, ..., n-1\}$, $f|_{[a_i;a_{i+1}]}$ liên tục trên $[a_i; a_{i+1}]$ và thuộc lớp C^1 trên $]a_i;a_{i+1}[$, suy ra:

$$\forall i \in \{0,...,n-1\}, \quad \|f(a_{i+1})-f(a_i)\| \le (a_{i+1}-a_i) \sup_{t\in]a_i;a_{i+1}[} \|f'(t)\|$$

rồi bằng cách lấy tổng:

$$\|f(b)-f(a)\| \le \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1})-f(a_i)\| \le \left(\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\right) \sup_{t\in[a;b]-\{a_0,...,a_n\}} \|f'(t)\|$$

$$= (b-a)\sup_t \|f'(t)\|$$

◆ **Hệ quả 2** Cho $f:[a;b] \to E$ liên tục trên $[a;b]$, thuộc lớp C^1 trên $]a;b]$. Nếu f' có giới hạn hữu hạn tại a thì f thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$.

Chứng minh:

Đặt $l = \lim_a f'$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $\eta > 0$ sao cho: $\quad \forall t \in]a;a+\eta], \quad \|f'(t)-l\| \le \varepsilon$.

Ánh xạ $g: \begin{array}{l}[a;a+\eta] \to E \\ t \mapsto f(t)-tl\end{array}$ liên tục trên $[a; a+\eta]$, thuộc lớp C^1 trên $]a; a+\eta]$, từ đó theo Định lý trên đây ta suy ra:

$$\forall t \in [a;a+\eta], \quad \|g(t)-g(a)\| \le (t-a)\varepsilon$$

Như thế, ta đã chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall t \in]a;a+\eta], \quad \|f(t)-f(a)-(t-a)l\| \le (t-a)\varepsilon,$$

tức là: $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall t \in]a;a+\eta], \quad \left\|\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} - l\right\| \le \varepsilon.$

Như vậy, f khả vi tại a và $f'(a) = l$, cuối cùng thì f thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$. ■

Một phép quy nạp đơn giản cho ta kết quả sau đây:

◆ **Hệ quả 3** Cho $k \in \mathbb{N}^*$, f: $[a; b] \to E$ liên tục trên $[a; b]$ và thuộc lớp C^k trên $]a; b]$. Nếu với mọi r thuộc $\{1, ..., k\}$, $f^{(r)}$ có giới hạn hữu hạn tại a, thì f thuộc lớp C^k trên $[a; b]$. ■

◆ **Mệnh đề** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to E$ thuộc lớp C^1 trên I.
1) Để f là ánh xạ hằng, điều kiện cần và đủ là $f' = 0$.
2) Để f là ánh xạ Lipschitz, điều kiện cần và đủ là f' bị chặn trên I; hơn nữa, nếu f' bị chặn trên I thì f là ánh xạ $\|f'\|_\infty$ - Lipschitz.

Chứng minh:

1) • Rõ ràng rằng nếu f là hằng thì $f' = 0$.

• Đảo lại, nếu $f' = 0$ thì bất đẳng thức số gia hữu hạn chứng tỏ rằng f là hằng.

2) • Giả thiết f là ánh xạ Lipschitz; tồn tại $k \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \qquad \|f(t_1) - f(t_2)\| \le k|t_1 - t_2|.$$

Cho $t_0 \in I$, vì: $\qquad \forall t \in I - \{t_0\}, \qquad \left\|\dfrac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0))\right\| \le k,$

nên bằng cách chuyển qua giới hạn khi t dần đến t_0, ta được:

$$\|f'(t_0)\| \le k.$$

• Đảo lại, giả thiết f' bị chặn trên I; tồn tại $k \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall t \in I, \qquad \|f'(t)\| \le k.$$

Khi đó, theo bất đẳng thức số gia hữu hạn, ta có:

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad \|f(t_2) - f(t_1)\| \le |t_2 - t_1| \sup_{t \in [t_1; t_2]} \|f'(t)\| \le k|t_2 - t_1|$$

và do đó f là ánh *xạ* k-Lipschitz.

Bài tập

◊ **2.3.25** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ và $f: [a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc.

a) Chứng minh rằng: $\left|(y - a)\int_a^x f - (x - a)\int_a^y f\right| \le (b - a)\int_a^b |f|$

với mọi $(x,y) \in [a;b]^2$.

b) Chứng minh rằng nếu tồn tại $(x,y) \in [a;b]^2$ thoả mãn:

$$\left|(y - a)\int_a^x f - (x - a)\int_a^y f\right| = (b - a)\int_a^b |f|$$

và nếu f liên tục trên $[a;b]$ thì $f = 0$.

◊ **2.3.26** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ và $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc, $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Chứng minh:

$$\forall (x,\lambda) \in [a;b] \times \mathbb{R}, \qquad \left|\int_a^x (f(t) - \mu)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t) - \lambda|\mathrm{d}t$$

(sử dụng bài tập 2.3.25).

◊ **2.3.27** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1 : [0;1] \to E$ liên tục, $f_2, ..., f_N : [0;1] \to E$ định nghĩa bởi:

$$\forall k \in \{1,...,n-1\}, \forall x \in [0;1], \qquad f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t .$$

Giả thiết: $\forall x \in [0;1], \qquad f_1(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

Chứng minh: $\qquad f_1 = \ldots = f_N = 0.$

◊ **2.3.28** Tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sao cho tồn tại $\alpha \in]1; +\infty[$ thỏa mãn:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\alpha} .$$

2.3.8 Đổi biến

♦ **Mệnh đề** Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi : [\alpha; \beta] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $[\alpha; \beta]$, f là một ánh xạ lấy giá trị trong E, liên tục trên một khoảng chứa $\varphi([\alpha; \beta])$. Thế thì:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\mathrm{d}u .$$

Ta nói rằng đã thực hiện **phép đổi biến** $u = \varphi(t)$.

Chứng minh:

Tương tự như ở tập 1, 6.4.3, Mệnh đề.

Nhận xét:

Công thức trên đây vẫn còn đúng nếu:

$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } [\alpha;\beta] \text{ và đơn điệu nghiêm ngặt} \\ f \text{ liên tục từng khúc trên đoạn } \varphi([\alpha;\beta]) \end{cases}$$

Thực vậy, giả thiết chẳng hạn φ tăng nghiêm ngặt, và ký hiệu $(a_0, ..., a_n)$ là một phân hoạch của $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta)]$ tương thích với f. Mỗi a_i $(0 \leq i \leq n)$ có đúng một tạo ảnh α_i qua φ, và $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ là một phân hoạch của $[\alpha; \beta]$. Ta có thể áp dụng Mệnh đề trên cho mỗi $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$:

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(u)\mathrm{d}u ,$$

từ đó bằng cách lấy tổng với i từ 0 đến n-1, ta suy ra kết quả.

Bài tập

◊ **2.3. 29** Tính các tích phân sau đây:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle I=\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}\mathrm{d}x$ và $\displaystyle J=\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle I=\int_{0}^{2\theta}\frac{x}{\cos(x-\theta)}\mathrm{d}x,\qquad \theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[.$

◊ **2.3.30** a) Cho $a\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, $f:[0;a]\to\mathbb{R}_{+}^{*}$ liên tục. Tính $\displaystyle\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\mathrm{d}t$.

b) *Áp dụng*: Tính $\displaystyle I=\int_{0}^{\pi/2}\frac{(\cos t)^{\sin t}}{(\cos t)^{\sin t}+(\sin t)^{\cos t}}\mathrm{d}t$

◊ **2.3.31** Đặt F: $]0;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ là ánh xạ định nghĩa là:

$$\forall x\in]0;+\infty[,\qquad F(x)=\int_{1}^{x}\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t.$$

a) Chứng tỏ rằng F thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall x\in]0;+\infty[,\qquad F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

b) Từ đó suy ra:

$$\forall x\in]0;+\infty[,\qquad \int_{1}^{x}\frac{\ln(x+t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\ln x)^2+F(x).$$

2.3.9 Phép tích phân từng phần

◆ **Mệnh đề (Phép tích phân từng phần)**

Cho u: $[a;b] \to \mathbb{K}$, v: $[a;b] \to E$ thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$; ta có:

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Chứng minh:

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$ ■

Nhận xét:
Tổng quát hơn, công thức trên vẫn đúng nếu u, v liên tục trên $[a;b]$ và thuộc lớp C^1 từng khúc trên $[a;b]$.
Thật vậy, khi đó, tồn tại một phân hoạch $(a_0, ..., a_n)$ của $[a;b]$ tương thích với u và với v, và ta có thể áp dụng Mệnh đề trên đây trên mỗi $[a_i; a_{i+1}]$ $(0 \le i \le n-1)$:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} u'v = [uv]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} uv'.$$

Từ đó suy ra kết quả bằng cách lấy tổng với i từ 0 đến n-1.

Bài tập

◇ **2.3.32** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $(E, <.,.>)$ là một không gian Hermite; f,g: $[a;b] \to E$ thuộc lớp C^1. Chứng minh:

$$\int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \left[\langle f(t), g(t)\rangle\right]_a^b - \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

◇ **2.3.33** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ đối xứng; X: $[a;b] \to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ thuộc lớp C^1 sao cho $X' = AX$, Y: $[a;b] \to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ thuộc lớp C^1 sao cho $AY = 0$, $Y(a) = Y(b) = 0$. Chứng minh:

$$\int_a^b {}^t X(t) Y'(t) \mathrm{d}t = 0.$$

◇ **2.3.34** Tính: $\displaystyle\int_0^1 x(\operatorname{Arc}\tan x)^2 \,\mathrm{d}x$.

◇ **2.3.35** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$; f: $[a;b] \to E$ thuộc lớp C^1.
a) Chứng minh rằng ta có:

$$(b-a)f(x)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^x (t-a)f'(t)\mathrm{d}t+\int_x^b (t-b)f'(t)\mathrm{d}t$$

với mọi x thuộc $[a;b]$.

b) Từ đó suy ra:

α) $$\forall x\in[a;b],\qquad \|f(x)\|\le\frac{1}{b-a}\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\|+\int_a^b\|f'(t)\|\mathrm{d}t$$

β) $$\left\|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\|\le\frac{1}{b-a}\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\|+\frac{1}{2}\int_a^b\|f'(t)\|\mathrm{d}t$$

◊ **2.3.36* Bất đẳng thức Van der Corput**

Cho $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $a<b$; $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Đặt $\lambda=\operatorname*{Inf}_{t\in[a;b]}|f''(t)|$

và giả thiết $\lambda>0$. Chứng minh:

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{if(t)}\mathrm{d}t\right|\le\frac{8}{\sqrt{\lambda}}.$$

2.3.10 Công thức Taylor với phần dư tích phân

♦ **Định lý (Công thức Taylor với phần dư tích phân)**

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $f: I\to E$ thuộc lớp C^n trên I và thuộc lớp C^{n+1} từng khúc trên I, $(a, b)\in I^2$. Ta có:

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\ .$$

Chứng minh:

Quy nạp theo n.

Tính chất này đã được chứng minh với $n=0$ vì nếu f liên tục trên $[a;b]$ và liên tục từng khúc trên $[a;b]$ thì:

$$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\ .$$

Giả thiết tính chất đúng với một số nguyên n, và $f: I\to E$ thuộc lớp C^{n+1} trên I và thuộc lớp C^{n+2} từng khúc trên I. Vì $t\mapsto\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ thuộc lớp C^1 trên I và vì $f^{(n+1)}$ liên tục trên I và thuộc lớp C^1 từng khúc trên I, nên bằng một phép tích phân từng phần (xem 2.3.9, Nhận xét) ta có:

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t,$$

từ đó suy ra tính chất ở cấp $n+1$. ■

Nhận xét:
Trong thực tế, công thức Taylor với phần dư tích phân thường được sử dụng với a cố định và b biến thiên.

◆ **Hệ quả** **(Bất đẳng thức Taylor - Lagrange)**

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to E$ thuộc lớp C^n trên I và thuộc lớp C^{n+1} từng khúc trên I, $(a, b) \in I^2$. Ta có :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \le \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Sup}_{t\in[a;b]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

Bài tập

◊ **2.3.37** Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, f: $[-a; a] \to E$ thuộc lớp C^2. Chứng minh:

$$\forall t \in [-a;a], \quad \|f'(t)\| \le \frac{1}{2a}\|f(a) - f(-a)\| + \frac{a^2+t^2}{2a} \operatorname*{Sup}_{u\in[-a;a]} \|f''(u)\|.$$

2.3.11 Định lý thay thế

Ta nhắc lại định lý sau đây (xem Tập 2, 7.10, Đnh lý 2).

◆ **Định lý 1** Ánh xạ $\varepsilon : \theta \to e^{i\theta}$ là một song ánh liên tục từ $]-\pi;\pi[$ lên $\mathbb{U} - \{-1\}$, và ánh xạ ngược của ε liên tục trên $\mathbb{U} - \{-1\}$.

Nhận xét:
Chúng ta đã biểu diễn tường minh ánh xạ ngược của ε, đó là ánh xạ cho tương ứng mỗi $z = x + iy$ $\left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$ thuộc $\mathbb{U} - \{-1\}$ với: $\quad \varepsilon^{-1}(z) = 2\operatorname{Arc}\tan\dfrac{y}{1+x}$.

Từ đó suy ra $\varepsilon^{-1}(z) \xrightarrow[\substack{z\mapsto -1\\ \mathrm{Im}(z)>0}]{} \pi$ và $\varepsilon^{-1}(z) \xrightarrow[\substack{z\mapsto -1\\ \mathrm{Im}(z)<0}]{} -\pi$, do đó ε^{-1} không thể thác triển liên tục ra $\mathbb{U}$.

◆ **Định lý 2** **(Mũ hóa một ánh xạ thuộc lớp C^n từ I đến $\mathbb{U}$, $n \geq 1$)**

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f: I \to \mathbb{U}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^n.

1) Tồn tại một ánh xạ φ: $I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^n sao cho:

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}.$$

Ta nói rằng φ là một **ánh xạ mũ hóa** của f.

2) Nếu φ_1, φ_2 là hai ánh xạ mũ hóa của f, thì tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Chứng minh:
Trường hợp $n = 1$ đã biết ở Tập 2, 7.10, Định lý 3, trong đó ta đã biểu diễn tường minh φ, và rõ ràng rằng trong phép chứng minh Định lý 3 đó, φ thuộc lớp C^n trên I. ■

2.3.12 Tích phân phụ thuộc một tham biến

Trong § 2.3.12 này (a,b) chỉ một cặp số thực sao cho $a \leq b$, $m \in \mathbb{N}^*$, A là một bộ phận của $\mathbb{R}^m$, $F : A\times[a;b] \to E$ là một ánh xạ.

Nếu ánh xạ $F(x,.) : \begin{array}{ccc}[a;b] & \to & E \\ t & \mapsto & F(x,t)\end{array}$ liên tục từng khúc với mọi x thuộc A thì ta có thể xét ánh xạ $f: A \to E$ cho bởi:

$$\forall x \in A, \qquad f(x) = \int_a^b F(x,t)\mathrm{d}t.$$

Mục tiêu của § 2.3.12 này là xét các tính chất của f từ các tính chất của F.
Trong các §§*2), 3)*, A sẽ chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$.

1) Tính liên tục

◆ **Định lý** **(Tính liên tục dưới dấu $\int_a^b$)**

Nếu $F : A\times[a;b] \to E$ liên tục trên $A\times[a;b]$ thì ánh xạ $f : A \to E$ định nghĩa là: $\quad \forall x \in A, \qquad f(x) = \int_a^b F(x,t)\mathrm{d}t$

liên tục trên A.

Chứng minh:

Phương pháp thứ nhất, áp dụng được cho mọi bộ phận A của $\mathbb{R}^m$.

Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong A, hội tụ đến phần tử x của A. Theo 1.3.1, Mệnh đề 1, bộ phận $C=\{x_n;\, n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ là một bộ phận compac của A, do đó $C\times[a;b]$ là một bộ phận compac của $A\times[a;b]$ (xem 1.3.1, Mệnh đề 4), và F, vốn liên tục trên bộ phận compac đó, sẽ liên tục đều trên tập compac nói trên (Định lý Heine, 1.3.1, Định lý).

Cho $\varepsilon>0$. Tồn tại $\eta>0$ sao cho:

$$\forall\big((c,t),(c',t')\big)\in\big(C\times[a;b]\big)^2,\quad \Big(\big\|(c,t)-(c',t')\big\|_1\le\eta\Rightarrow\big\|F(c,t)-F(c',t')\big\|\le\varepsilon\Big)$$

trong đó, $\|\ .\ \|_1$ là chuẩn xác định trên $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ bởi:

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},\ \ \|(x,t)\|_1=\|x\|+|t|.$$

Vì $(x_n)_n$ hội tụ đến x nên tồn tại $N\in\mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n\ge N,\quad \|x_n-x\|_1\le\eta.$$

Khi đó ta có:

$$\forall n\ge N,\ \forall t\in[a;b],\qquad \|(x_n,t)-(x,t)\|_1=\|x_n-x\|\le\eta,$$

do đó
$$\forall n\ge N,\ \forall t\in[a;b],\qquad \|F(x_n,t)-F(x,t)\|\le\varepsilon,$$

từ đó bằng phép tích phân ta được:

$$\forall n\ge N,\quad \|f(x_n)-f(x)\|=\left\|\int_a^b\big(F(x_n,t)-F(x,t)\big)\,\mathrm{d}t\right\|$$

$$\le\int_a^b\|F(x_n,t)-F(x,t)\|\,\mathrm{d}t\le\varepsilon(b-a),$$

và do đó:
$$f(x_n)\underset{n\infty}{\longrightarrow}f(x).$$

Như thế, chúng ta đã chứng minh (bằng cách sử dụng dãy) rằng f liên tục tại x, và cuối cùng thì f liên tục trên A.

Phương pháp thứ hai, áp dụng được khi A compac địa phương

Một bộ phận A của $\mathbb{R}^m$ được gọi là compac địa phương khi và chỉ khi với mọi a thuộc A, tồn tại $\alpha>0$ sao cho $B'(a;\alpha)\cap A$ là một bộ phận compac của A. Các bộ phận mở và các bộ phận đóng của A đều compac địa phương. Mọi khoảng của $\mathbb{R}$ đều compac địa phương.

Ở đây chúng ta giả thiết A compac địa phương.

Cho $x_0\in A$, $\varepsilon>0$, cố định.

Với mọi h thuộc $\mathbb{R}^m$ sao cho $x_0+h\in A$ ta có:

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|=\left\|\int_a^b\big(F(x_0+h,t)-F(x_0,t)\big)\,\mathrm{d}t\right\|\le\int_a^b\|F(x_0+h,t)-F(x_0,t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Vì A là một bộ phận compac địa phương của $\mathbb{R}^m$, nên tồn tại $\alpha>0$ sao cho

$B'(x_0;\alpha)\cap A$ là một bộ phận compac của $\mathbb{K}^m$. Theo Định lý Heine, vì f liên tục trên tập compac đó nên liên tục đều trên tập compac nói trên. Vậy tồn tại $\eta\in\,]0;\alpha]$ sao cho:

$$\forall\big((x',t'),(x'',t'')\big)\in\big(B'(x_0;\alpha)\cap A\big)^2,$$
$$\|(x',t')-(x'',t'')\|_1\le\eta\Rightarrow\|F(x',t')-F(x'',t'')\|\le\varepsilon$$

Với mọi h thuộc $B'(x_0;\alpha)\cap A$ ta có:

$$\forall t\in[a;b],\quad \|(x_0+h,t)-(x_0,t)\|=\|h\|_1\le\eta,$$

suy ra:
$$\forall t\in[a;b],\quad \|F(x_0+h,t)-F(x_0,t)\|\le\varepsilon,$$

và do đó khi lấy tích phân:

$$\int_a^b\|F(x_0+h,t)-F(x_0,t)\|\,\mathrm{d}t\le\varepsilon(b-a).$$

Như thế ta đã chứng minh rằng:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall h\in B'(x_0;\eta)\cap A,\quad \|f(x_0+h)-f(x_0)\|\le\varepsilon,$$

và do đó f liên tục tại x_0, và kết luận là f liên tục trên A. ■

***Thí dụ*:**

1) **Tích chập của các hàm liên tục và T - tuần hoàn**

Cho $T\in\mathbb{R}_+^*$; f,g: $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ liên tục và T-tuần hoàn, **tích chập** $f*g$ của f và g là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{C}$ được định nghĩa bởi:

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad (f*g)(x)=\int_0^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

Vì ánh xạ $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[0;T]&\to&\mathbb{C}\\(x,t)&\mapsto&f(t)g(x-t)\end{array}$ liên tục nên định lý trên đây chứng tỏ rằng $f*g$ liên tục.

Hơn nữa, $f*g$ là ánh xạ T - tuần hoàn, và với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ ta có:

$$(f*g)(x+T)=\int_0^T f(t)g(x+T-t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=(f*g)(x).$$

■

2) Ánh xạ $x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{\ln\big(1+|x-t|\big)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ liên tục trên $\mathbb{K}$.

Bây giờ chúng ta sẽ tổng quát hóa kết quả của định lý trên bằng cách cho a và b "biến thiên".

◆ **Mệnh đề** Cho I là một khoảng của $\mathbb{K}$, $F:A\times I\to E$ là một ánh xạ liên tục. Thế thì ánh xạ $\varphi:A\times I\times I\to E$ được định nghĩa bởi:

$$\forall(x,u,v)\in A\times I\times I,\qquad \varphi(x,u,v)=\int_u^v F(x,t)\mathrm{d}t$$

liên tục trên $A\times I\times I$.

Chứng minh:
Trước hết ta nhận xét rằng với mọi a thuộc I thì:

$$\forall(x,u,v)\in A\times I\times I,\qquad \varphi(x,u,v)=\int_a^v F(x,t)\mathrm{d}t-\int_a^u F(x,t)\mathrm{d}t\,.$$

Như thế chỉ cần chứng tỏ tính liên tục của ánh xạ $\varphi_a : A\times I\to E$ cho bởi:

$$\forall(x,u)\in A\times I,\qquad \varphi_a(x,u)=\int_a^u F(x,t)\mathrm{d}t\,.$$

Với $(x,u)\in A\times I$ cố định sao cho $u\neq a$, phép đổi biến $s=\dfrac{t-a}{u-a}$ cho ta:

$$\varphi_a(x,u)=(u-a)\int_0^1 F(x,a+s(u-a))\mathrm{d}s\,,$$

mặt khác thì công thức này là tầm thường khi $u = a$.
Theo Định lý trên đây, vì $\big((x,u),s\big)\mapsto F\big(x,a+s(u-a)\big)$ liên tục trên $(A\times I)\times I$, nên ánh xạ $(x,u)\mapsto \displaystyle\int_0^1 F\big(x,a+s(u-a)\big)\mathrm{d}s$ liên tục trên $A\times I$, và vì vậy φ_a liên tục trên $A\times I$, cuối cùng ta kết luận được rằng φ liên tục trên $A\times I\times I$.
Phiên bản chứng minh khác: Ngay khi xét $\varphi(x,u,v)$, ta có thể thực hiện phép đổi biến $s=\dfrac{t-u}{v-u}$ (nếu $u\neq v$) để thu được:

$$\forall(x,u,v)\in A\times I\times I,\qquad \varphi(x,u,v)=(v-u)\int_0^1 F\big(x,u+s(v-u)\big)\mathrm{d}s\,,$$

(đẳng thức vốn vẫn đúng khi $u = v$), chứng tỏ rằng φ liên tục trên $A\times I\times I$ khi áp dụng định lý trước.

2) Đạo hàm

Trong điểm *2)* này, A chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$.

♦ **Định lý** **("Đạo hàm dưới dấu $\displaystyle\int_a^b$ ")**

Nếu $\begin{cases} F \text{ liên tục trên } A\times[a;b] \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ tồn tại và liên tục trên } A\times[a;b]\end{cases}$,

thì ánh xạ $f: A\to E$ xác định bởi: $\forall x\in A,\quad f(x)=\displaystyle\int_a^b F(x,t)\mathrm{d}t$

thuộc lớp C^1 trên A và: $\forall x \in A, \quad f'(x) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Chứng minh:

Ký hiệu g: $A \to E$ là ánh xạ cho bởi: $\forall x \in A, \qquad g(x) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Cho $x_0 \in A$. Ký hiệu $A_0 = \{h \in \mathbb{R};\ x_0 + h \in A\} = (-x_0) + A$, tập hợp này vốn là một khoảng tịnh tiến của A, và $T : A_0 \times [a;b] \to E$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall (h,t) \in A_0 \times [a;b], \quad T(h,t) = \begin{cases} \frac{1}{h}\big(F(x_0+h,t) - F(x_0 t)\big) & \text{nếu} \quad h \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t) & \text{nếu} \quad h = 0 \end{cases}.$$

Vì với mọi t thuộc $[a;b]$, $F(.,t) : \begin{array}{l} A \to E \\ x \mapsto F(x,t) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên A, nên ta có với mọi (h, t) thuộc $A_0 \times [a;b]$:

$$F(x_0+h,t) - F(x_0,t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)\mathrm{d}y$$

nhờ phép đổi biến $y = \frac{1}{h}(x - x_0)$ khi $h \neq 0$, và tầm thường khi $h = 0$. Kết quả là:

$$\forall (h,t) \in A_0 \times [a;b], \qquad T(h,t) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)\mathrm{d}y.$$

Theo *1)*, Định lý, vì ánh xạ (hợp) $(h,t,y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)$ liên tục trên $\big(A_0 \times [a;b]\big) \times [0;1]$), nên ánh xạ T liên tục trên $A_0 \times [a;b]$.

Vẫn theo *1)*, Định lý, vì T liên tục trên $A_0 \times [a;b]$ nên ánh xạ $\tau : A_0 \to E$ cho bởi $\tau(h) = \int_a^b T(h,t)\mathrm{d}t$ liên tục trên A_0 với mọi h thuộc A_0. Đặc biệt: $\tau(h) \underset{h \to 0}{\to} \tau(0)$.

Nhưng với mọi h thuộc A_0-{0} thì:

$$\tau(h) = \int_a^b T(h,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{h}\big(F(x_0+h,t) - F(x_0,t)\big)\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)$$

và $$\tau(0) = \int_a^b T(0,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t.$$

Các kết quả trên chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) \underset{h\to 0}{\to} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t = g(x_0),$$

tức là f khả vi tại x_0 và $f'(x_0) = g(x_0)$.

Cuối cùng, vẫn theo *1)*, Định lý 1, vì $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên $A\times[a;b]$ nên g liên tục trên A.

Ta kết luận rằng f thuộc lớp C^1 trên A và $f' = g$.

Nhận xét:

Mở rộng cho các hàm nhiều biến

Ta có thể dễ dàng sửa đổi phép chứng minh trên để chứng minh kết quả tổng quát hơn sau đây:

Cho $m \in \mathbb{N}^*$, U là một bộ phận mở của $\mathbb{K}^m$, $F : \begin{array}{ccc} U\times[a;b] & \to & E \\ (x_1,\dots,x_m;t) & \mapsto & F(x_1,\dots,x_m;t)\end{array}$ là một ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} F \text{ liên tục trên } U\times[a;b] \\ \text{Với mỗi } i \text{ thuộc } \{1;\dots,m\},\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \text{ tồn tại và liên tục trên } U\times[a;b]\end{cases}$

thì ánh xạ f: $U \to E$ được định nghĩa bởi:

$$\forall(x_1,\dots,x_m)\in U,\qquad f(x_1,\dots,x_m) = \int_a^b F(x_1,\dots,x_m;t)\mathrm{d}t$$

thuộc lớp C^1 trên U và:

$$\forall i\in\{1,\dots,m\},\ \forall(x_1,\dots,x_m)\in U,\qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m;t)\mathrm{d}t\,.$$

◆ **Hệ quả** Cho $n \in \mathbb{N}$. Nếu $F, \dfrac{\partial F}{\partial x},\dots,\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}$ tồn tại và liên tục trên $A\times[a;b]$, thì f thuộc lớp C^n trên A, và với mọi i thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $i\le n$ ta có: $\qquad \forall x\in A,\qquad f^{(i)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)\mathrm{d}t\,.$

■

Thí dụ:

1) Tính $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x+\ln t)\mathrm{d}t$ với $x \in\ ]1;+\infty[$.

Ánh xạ F:$(x, t) \to \ln(x+\cos t)$ liên tục trên $]1;+\infty[\times[0;\pi]$, và $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $]1;+\infty[\times[0;\pi]$, do đó ánh xạ f : $]1;+\infty[\to\mathbb{R}$ xác định như là:

$$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad f(x) = \int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)\mathrm{d}t$$

thuộc lớp C^1 trên $]1;+\infty[$ và:

$$\forall x \in]1;+\infty[, \quad f'(x) = \int_0^{\pi} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{x+\cos t}\mathrm{d}t.$$

Phép đổi biến $u = \tan\frac{t}{2}$ (sẽ đưa vào một tích phân trên $[0;+\infty[$) cho ta:

$$f'(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(x+1)+(x-1)u^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\left[\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}u\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Vậy tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad f(x) = \pi\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

Mặt khác thì: $\qquad \forall x \in]1;+\infty[, \qquad f(x) = \pi\ln x + \int_0^{\pi}\ln\left(1+\frac{1}{x}\cos t\right)\mathrm{d}t.$

Ánh xạ $G: \begin{array}{ccc} [0;1[\times[0;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (y,t) & \mapsto & \ln(1+y\cos t) \end{array}$ liên tục, do đó (xem *I)*, Định lý), ánh xạ

$g: [0;1[\to \mathbb{R}$ xác định bởi: $\qquad \forall y \in [0;1[, \qquad g(y) = \int_0^{\pi} G(y,t)\mathrm{d}t$

liên tục.

Nói riêng $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y) = g(0) = 0$. Vậy ta có:

$$f(x) - \pi\ln x = \int_0^{\pi}\ln\left(1+\frac{1}{x}\cos t\right)\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nhưng: $\qquad f(x) - \pi\ln x = \pi\ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}+C \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pi\ln 2 + C.$

Từ đó suy ra $C = -\pi\ln 2$, và cuối cùng ta có:

$$\forall x \in \ ]1;+\infty[, \qquad \int_0^{\pi}\ln(x+\cos t)\mathrm{d}t = \pi\ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

2) Tính $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{(x+y\cos t)^3}\mathrm{d}t$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $|x| > |y|$.

Ký hiệu $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| > |y|\right\}$, U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^2$, và $F: \ U\times[0;\pi] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ định nghĩa là:

$$\forall\big((x,y),t\big)\in U\times[0;\pi],\qquad F(x,y,t)=\frac{1}{x+y\cos t}.$$

Vì $F,\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}...,$ tồn tại và liên tục trên $U\times[0;\pi]$ nên ánh xạ f: $U\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall(x,y)\in U,\qquad f(x,y)=\int_0^\pi\frac{dt}{x+y\cos t}$$

thuộc lớp C^∞, và ta có thể biểu diễn được các đạo hàm riêng của f bằng cách đạo hàm dưới dấu $\int\limits_0^\pi$ (xem Nhận xét).

Nói riêng:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=\int_0^\pi\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y;t)dt=\int_0^\pi\frac{2\cos t}{(x+y\cos t)^3}dt.$$

Nhưng mặt khác thì phép đổi biến $u=\tan\dfrac{t}{2}$ cho ta (như trong thí dụ *1)* trên đây):

$$f(x,y)=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{(x+y)+(x-y)u^2}=\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

trong đó $\varepsilon=\text{sgn}(x+y)=\text{sgn}(x)$.
Suy ra:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varepsilon\pi y(x^2-y^2)^{-3/2},\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=-3\varepsilon\pi xy(x^2-y^2)^{-5/2}.$$

Cuối cùng thì:
$$\int_0^\pi\frac{\cos t}{(x+y\cos t)^3}dt=-\frac{3\varepsilon\pi xy}{2(x^2-y^2)^{5/2}}.$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ tổng quát hóa kết quả bằng cách cho b "biến thiên".

♦ **Mệnh đề** Cho A, J là hai khoảng mở của $\mathbb{R}$, $F:A\times J\to E$.

Giả thiết: $\begin{cases}F \text{ liên tục trên } A\times J\\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ tồn tại và liên tục trên } A\times J\end{cases}$

Thế thì ánh xạ $\varphi:A\times J\to E$ định nghĩa bởi:

$$\forall(x,y)\in A\times J,\qquad \varphi(x,y)=\int_a^y F(x,t)dt$$

thuộc lớp C^1 và:

$$\forall (x,y) \in A \times J, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_a^y \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = F(x,y) \end{cases}.$$

Chứng minh:

1) Với $y \in J$ cố định, ta có thể áp dụng định lý về đạo hàm dưới dấu $\displaystyle\int_a^y$;

do đó ánh xạ $\varphi(.,y): \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên A và:

$$\forall x \in A, \quad \big(\varphi(.,y)\big)'(x) = \int_a^y \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \, ,$$

chứng tỏ rằng $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ tồn tại trên $A \times J$ và:

$$\forall (x,y) \in A \times J, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \int_a^y \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \, .$$

Vì $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên $A \times J$, nên Mệnh đề 1 cho phép suy ra rằng $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ liên tục trên $A \times J$.

2) Với $x \in A$ cố định, ánh xạ $F(x,.): \begin{array}{ccc} J & \to & E \\ t & \mapsto & F(x,t) \end{array}$ liên tục, vậy (xem 2.3.6, *1)*), ánh xạ $\varphi(x,\,.\,): \begin{array}{ccc} J & \to & E \\ y & \mapsto & \displaystyle\int_a^y F(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên J và:

$$\forall y \in J, \quad \big(\varphi(x,.)\big)'(y) = F(x,y) \, .$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ tồn tại trên $A \times J$ và:

$$\forall (x,y) \in A \times J, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = F(x,y) \, .$$

Vì F liên tục nên $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ liên tục trên $A \times J$.

♦ **Hệ quả** Cho A, J là hai khoảng mở của $\mathbb{R}$, $F : A\times J \to E$, $u: A \to J$.

Giả thiết: $\begin{cases} F \text{ liên tục trên } A\times J \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ tồn tại và liên tục trên } A\times J \\ u \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } A \end{cases}$.

Thế thì ánh xạ $\psi : A \to E$ xác định bởi:

$$\forall x \in A, \qquad \psi(x) = \int_a^{u(x)} F(x,t)\mathrm{d}t$$

thuộc lớp C^1 trên A và:

$$\forall x \in A,\ \psi'(x) = \int_a^{u(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + u'(x)F(x, u(x)).$$

Chứng minh:

Với các ký hiệu như trong mệnh đề trước ta có:

$$\forall x \in A, \qquad \psi(x) = \varphi\big(x,u(x)\big).$$

Vì *u và* φ đều thuộc lớp C^1 nên ψ cũng thế và (định lý về hợp của những ánh xạ thuộc lớp C^1, xem Tập 2, 12.3.2 , *3)*) khi $E = \mathbb{R}$):

$$\forall x \in A, \qquad \psi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\big(x,u(x)\big) + u'(x)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\big(x,u(x)\big)$$

$$= \int_a^{u(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + u'(x)F(x, u(x)).$$

Thí dụ:

Chứng minh: $\forall x \in]0;+\infty[, \quad \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t.$

Ánh xạ $f :\ ]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}\mathrm{d}t$$

thuộc lớp C^1 và:

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f'(x) = \int_1^x \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t + \frac{\ln(2x)}{x} = \frac{1}{x}\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+t}\right)\mathrm{d}t + \frac{\ln(2x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\big(\ln x - \ln(2x) + \ln(x+1)\big) + \frac{\ln(2x)}{x} = \frac{1}{x}\big(\ln x + \ln(x+1)\big).$$

Từ đó suy ra: $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)\mathrm{d}t$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\big(\ln t + \ln(t+1)\big)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t\,.$$

Xem thêm bài tập 2. 3. 31. ■

3) *Tích phân*

♦ **Định lý** **(Tích phân dưới dấu $\int_a^b$)**

Nếu $F : A\times[a;b]\to E$ liên tục trên $A\times[a;b]$, thì ánh xạ f: $A \to E$

xác định bởi: $\forall x \in A, \quad f(x) = \int_a^b F(x,t)\mathrm{d}t$

liên tục trên A, và với mọi $(\alpha, \beta) \in A^2$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta F(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\,.$$

Chứng minh:

Tính liên tục của f suy ra từ định lý ở *1)*.

Ký hiệu $G : A\times[a;b]\to E$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall(\beta,t)\in A\times[a;b], \qquad G(\beta,t) = \int_\alpha^\beta F(x,t)\mathrm{d}x$$

với α cố định trong A.

Vì F liên tục nên G liên tục (xem *1)*, Mệnh đề). Hơn nữa, $\dfrac{\partial G}{\partial \beta}$ tồn tại và bằng F, do đó liên tục. Theo *2)*, Định lý, ánh xạ H: $A \to E$ xác định bởi:

$$\forall \beta \in A, \qquad H(\beta) = \int_a^b G(\beta,t)\mathrm{d}t$$

thuộc lớp C^1 trên A và:

$$\forall \beta \in A, \qquad H'(\beta) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial \beta}(\beta,t)\mathrm{d}t = \int_a^b F(\beta,t)\mathrm{d}t = f(\beta)\,.$$

Vì $H(\alpha) = 0$ nên ta kết luận:

$$\forall \beta \in A, \qquad H(\beta) = H(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} H'(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x .$$

Nhận xét:
Định lý trên là một trường hợp riêng của định lý Fubini về các tích phân kép.

Bài tập

◊ **2.3.38** Với $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, tính **tích phân Poisson:**

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right)\mathrm{d}t .$$

◊ **2.3.39** a) Với $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, tính: $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + x\sin^2 t}$.

b) Từ đó suy ra giá trị của:

$$J(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x\sin^2 t)^2}\mathrm{d}t$$

với $x \in \mathbb{R}_+^*$.

◊ **2.3.40** a) Chứng minh:

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{8}\ln(1+x)^2 - \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t .$$

b) Suy ra: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

◊ **2.3.41** Với $(a,b) \in]1;+\infty[^2$, tính: $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\mathrm{d}t$.

◊ **2.3.42** Khảo sát và biểu diễn đồ thị hàm một biến thực f xác định bởi:

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\ \mathrm{d}t .$$

◊ **2.3.43** **Hàm Bessel J_0**
Chứng minh rằng ánh xạ J_0: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t$$

có một và chỉ một không điểm thuộc $[0; \pi]$, và không điểm đó thuộc $]0; \pi[$.

◊ **2.3.44** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f : I \to E$ thuộc lớp C^n trên I thỏa mãn $f(x_0) = 0$.

a) Chứng minh rằng tồn tại g: $I \to E$ thuộc lớp C^{n-1} trên I sao cho:

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = (x - x_0)g(x).$$

(Trong trường hợp $f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$, hãy thực hiện phép đổi biến $u = \dfrac{t - x_0}{x - x_0}$).

b) Chứng minh rằng nếu hơn nữa f', ..., $f^{(n)}$ đều bị chặn trên I thì g, g', ..., $g^{(n-1)}$ cũng đều bị chặn trên I và:

$$\forall p \in \{0,...,n-1\}, \qquad \left\|g^{(p)}\right\|_\infty \le \frac{1}{p+1}\left\|f^{(p+1)}\right\|_\infty .$$

◊ **2.3.45** Cho $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh *xạ* thuộc lớp C^2.

Xét phương trình hàm:

$$(E_p) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + P(x, y)$$

với ẩn là f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu f là nghiệm của (E_p) thì f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x + y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x, y).$$

b) Giải (E_p) với $P: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2y^2 \end{array}$.

c) Giải (E_p) với $P: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2y+xy^2 \end{array}$.

2.4 So sánh trong lân cận một điểm

Mục tiêu của §2.4 này là tổng quát hóa việc khảo sát đã thực hiện trong Tập 2, chương 8.

Các hàm được xét trong §2.4 này đều xác định trong lân cận một điểm a thuộc $\overline{\mathbb{R}}$, trên một tập hợp ký hiệu là V, và lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ hoặc trong một kgvđc hữu hạn chiều, ký hiệu là E hay F.
Các định nghĩa và kết quả có thể mở rộng dễ dàng cho:

- các hàm xác định trong lân cận của a, có thể trừ ra tại a
- các dãy lấy giá trị trong E, chúng vốn là các ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào E (ở đây ∞ đóng vai trò của a)
- các hàm xác định trong lân cận phải của a (hay lân cận trái của a).

2.4.1 Tính trội , ưu thế

1) Định nghĩa

◆ **Định nghĩa 1** Cho $f: V \to E$, $\varphi: V \to \mathbb{R}$.
Ta nói rằng f **không đáng kể so với** φ (hay: φ **trội hơn** f) trong lân cận của a khi và chỉ khi tồn tại $\varepsilon: V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall t \in V, \ \|f(t)\| = \varepsilon(t)\varphi(t) \\ \varepsilon(t) \underset{t \to a}{\to} 0 \end{cases}$$

Khi đó ta sẽ viết: $f \underset{a}{\ll} \varphi$ hay $f(t) \underset{a}{\ll} \varphi(t)$ (ký hiệu Hardy)

hoặc $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ hay $f(t) = \underset{t \to a}{o}\left(\varphi(t)\right)$ (ký hiệu Landau).

Nhận xét:

1) Nếu $\forall t \in V - \{a\}$, $\varphi(t) \neq 0$, thì:

$$f = \underset{a}{o}(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi} f \underset{a}{\to} 0 \\ \varphi(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \end{cases}.$$

2) $f = \underset{a}{o}(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{a} f = 0$.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $f: V \to E$, $\varphi: V \to \mathbb{R}$.
Ta nói rằng φ **chiếm ưu thế so với** f trong lân cận của a khi và chỉ tồn tại một ánh xạ $C: V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall t \in V, \ \|f(t)\| = C(t)\varphi(t) \\ C \text{ bị chặn trong lân cận của } a \end{cases}.$$

Khi đó ta sẽ viết $f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi$ hay $f(t) \underset{t \to a}{\preccurlyeq} \varphi(t)$ (ký hiệu Hardy)

hoặc $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ hay $f(t) = \underset{t \to a}{O}(\varphi(t))$ (ký hiệu Landau).

Nhận xét:

1) Nếu $\forall t \in V - \{a\}$, $\varphi(t) \neq 0$, thì $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\varphi} f$ bị chặn trong lân cận của a.

2) $f = \underset{a}{O}(1)$ khi và chỉ khi f bị chặn trong lân cận của a.

2) Các phép toán về ưu thế và tính trội

Trong mục này ta sẽ ký hiệu:
f, g là những hàm xác định trong lân cận a và lấy giá trị trong một kgvđc hữu hạn chiều
φ, ψ, u là những hàm xác định trong lân cận a và lấy giá trị trong $\mathbb{R}$
λ là một hàm xác định trong lân cận a và lấy giá trị trong $\mathbb{K}$
$\alpha \in \mathbb{K}$
h là một hàm xác định trong lân cận một phần tử b của $\overline{\mathbb{R}}$ và lấy giá trị thực.

♦ **Mệnh đề**

1) $f = o(\varphi) \Rightarrow f = O(\varphi)$

2) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ g = o(\varphi) \end{cases} \Rightarrow f + g = o(\varphi)$

3) $f = o(\varphi) \Rightarrow \alpha f = o(\varphi)$

4) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = O(\varphi) \end{cases} \Rightarrow f + g = O(\varphi)$

5) $f = O(\varphi) \Rightarrow \alpha f = O(\varphi)$

6) $\begin{cases} \lambda = O(\varphi) \\ g = O(\psi) \end{cases} \Rightarrow \lambda g = O(\varphi\psi)$

7) $\begin{cases} \lambda = O(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \Rightarrow \lambda g = o(\varphi\psi)$

8) $\begin{cases} \lambda = o(\varphi) \\ g = O(\psi) \end{cases} \Rightarrow \lambda g = o(\varphi\psi)$

9) $\begin{cases} \lambda = o(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \Rightarrow \lambda g = o(\varphi\psi)$

10) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \Rightarrow f = O(u)$

11) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \Rightarrow f = o(u)$

12) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = o(u) \end{cases} \Rightarrow f = o(u)$

13) $\begin{cases} f = \underset{a}{o}(\varphi) \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Rightarrow f \circ h = \underset{b}{o}(\varphi \circ h)$

14) $\begin{cases} f = \underset{a}{O}(\varphi) \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Rightarrow f \circ h = \underset{b}{O}(\varphi \circ h)$.

Chứng minh:
Tương tự như phép chứng minh ở Tập 2, 8.1.2, Mệnh đề 1.

2.4.2 Hàm tương đương

1) Định nghĩa

◆ **Định nghĩa** Cho $f, g: V \to E$. Ta nói f **tương đương với** g trong lân cận của a khi và chỉ khi:

$$f - g = \underset{a}{o}(\|g\|).$$

Khi đó, ta ký hiệu: $f \underset{a}{\sim} g$ hay $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$.

◆ **Mệnh đề 1**

$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \begin{cases} f = \underset{a}{O}(g) \\ g = \underset{a}{O}(f) \end{cases}.$$

◆ **Mệnh đề 2** Quan hệ $\underset{a}{\sim}$ là một quan hệ tương đương trong tập hợp các hàm xác định trong lân cận của a và lấy giá trị trong E.

Nhận xét:

1) Cho $l \in E$-$\{0\}$; ta có: $f \underset{a}{\sim} l \Leftrightarrow f \underset{a}{\to} l$.

2) $f \underset{a}{\sim} 0$ khi và chỉ khi f bằng không trong lân cận a.

2) *Các phép toán về hàm tương đương*

Trong mục này, ta sẽ ký hiệu f, g (tương ứng: φ, ψ; tương ứng λ, μ) là những hàm xác định trong lân cận a và lấy giá trị trong E (tương ứng: $\mathbb{R}$, tương ứng: $\mathbb{K}$), và h là một hàm xác định trong lân cận một phần tử b của $\overline{\mathbb{R}}$ và lấy giá trị thực.

♦ **Mệnh đề**

1) $\begin{cases} \lambda \underset{a}{\sim} \mu \\ f \underset{a}{\sim} g \end{cases} \Rightarrow \lambda f \underset{a}{\sim} \mu g$

2) $\begin{cases} \lambda \underset{a}{\sim} \mu \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow \lambda^n \underset{a}{\sim} \mu^n$ (trong đó $\lambda^n = \lambda \ldots \lambda$, n thừa số)

3) Nếu $\lambda \underset{a}{\sim} \mu$ và nếu trong lân cận của a (có thể trừ ra tại a) mà $\mu(t) \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\lambda}$ và $\dfrac{1}{\mu}$ xác định trong lân cận a (có thể trừ ra tại a) và $\dfrac{1}{\lambda} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{\mu}$.

4) $\begin{cases} f = \underset{a}{o}(\varphi) \\ \varphi \underset{a}{\sim} \psi \end{cases} \Rightarrow f = \underset{a}{o}(\psi)$

5) $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g = \underset{a}{o}(u) \end{cases} \Rightarrow f = \underset{a}{o}(u)$

6) $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Rightarrow f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$ (phép hợp bên phải)

7) $f = \underset{a}{o}(\|g\|) \Leftrightarrow f + g \underset{a}{\sim} g$.

Chứng minh:

Tương tự phép chứng minh ở Tập 2, 8.2.2, Mệnh đề 1.

Bài tập

◊ **2.4.1** Cho $f, g: V \to E$, $\varphi: V \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của E; $f_1, ..., f_N$ (tương ứng: $g_1, ..., g_N$) là các ánh xạ thành phần của f (tương ứng: g) trong $\mathcal{B}$.

a) Chứng minh: 1) $f = \underset{a}{o}(\varphi) \Leftrightarrow \left(\forall j \in \{1,...,N\}, \quad f_j = \underset{a}{o}(\varphi)\right)$

2) $f = \underset{a}{O}(\varphi) \Rightarrow \left(\forall j \in \{1,...,N\}, \quad f_j = \underset{a}{O}(\varphi)\right)$.

b) Chứng minh: $\left(\forall j \in \{1,...,N\}, \quad f_j \underset{a}{\sim} g_j\right) \Rightarrow f \underset{a}{\sim} g$.

Đảo lại có đúng không?

2.4.3 Khai triển hữu hạn vectơ

1) Định nghĩa

Đa thức vectơ (với hệ số trong E) là mọi ánh xạ P: $\mathbb{R} \to E$ sao cho tồn tại $p \in \mathbb{N}$, $A_0, ..., A_p \in E$ thỏa mãn:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) = \sum_{k=0}^{p} t^k A_k .$$

Khi đó **bậc** của P là số nguyên lớn nhất k thuộc $\{0, ..., p\}$ sao cho $A_k \neq 0$ (và $\deg(0) = -\infty$).

♦ **Định nghĩa** Cho $n \in \mathbb{N}$, $f: V \to E$. Ta nói rằng f **có khai triển hữu hạn đến bậc** n **tại** a (viết tắt là KTHH$_n(a)$ khi và chỉ khi tồn tại một đa thức vectơ P thỏa mãn:

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \forall t \in V, \quad f(t) = P(t-a) + \underset{t \to a}{o}\left((t-a)^n\right) \end{cases}$$

Tương tự như ở Tập 2, 8.3.1, Mệnh đề 1, ta chứng minh được tính duy nhất của P, gọi là **phần chính quy** của KTHH$_n(a)$ của f.

Tương tự, người ta cũng định nghĩa khái niệm khai triển hữu hạn tại $+\infty$ và $-\infty$.

Giả thiết E có trang bị một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_N)$, và ký hiệu $f_1, ..., f_N$ là các ánh xạ thành phần của f trong $\mathcal{B}$. Để f có KTHH$_n(a)$, điều kiện cần và đủ là với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, f_j có KTHH$_n(a)$. Hơn nữa, trong trường hợp này nếu ký hiệu P_j là một phần chính quy của $\mathrm{KTHH}_n(a)$ của f_j với $1 \le j \le N$, thì phần chính quy P của $\mathrm{KTHH}_n(a)$ của f là: $\quad P = \sum_{j=1}^{N} P_j e_j$.

2) Định lý Taylor - Young

◆ **Định lý (Định lý Taylor - Young)**

Cho $n \in \mathbb{N}$, $f: V \to E$. Nếu f thuộc lớp C^n trên V thì f có $\mathrm{KTHH}_n(a)$ với phần chính quy là: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{X}-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

Nói cách khác:

$$\forall t \in V, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{t \to a}{o}((t-a)^n).$$

Chứng minh:

Phương pháp thứ nhất

Sửa đổi cho thích hợp phép chứng minh định lý Taylor-Young đối với các hàm lấy giá trị thực đã biết ở Tập 2, (8.3.2, Định lý).

Phương pháp thứ hai

Áp dụng định lý Taylor - Young đối với các hàm lấy giá trị thực cho mỗi ánh xạ thành phần của f trong một cơ sở $\mathcal{B}$ đã chọn.

3) Đạo hàm và nguyên hàm một KTHH(a)

Cũng như trong Tập 2, 8.3.3, ta sẽ chứng minh hai kết quả sau đây.

◆ **Mệnh đề (Nguyên hàm của một KTHH(a))**

Cho $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ có chứa a, $f: I \to E$. Nếu f thuộc lớp C^1 trên I và nếu f' có $\mathrm{KTHH}_n(a)$, với phần chính quy ký hiệu là P, thì f có $\mathrm{KTHH}_{n+1}(a)$, mà phần chính quy là phần chính quy của nguyên hàm của P nhận giá trị $f(a)$ tại a:

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = f(a) + \int_a^t P \; + o\left((t-a)^{n+1}\right).$$

◆ **Hệ quả (Đạo hàm của một KTHH(a))**

Cho $n \in \mathbb{N}$, I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ có chứa a, $f: I \to E$. Nếu f thuộc lớp C^1 trên I và nếu f và f' có KTHH theo thứ tự bậc $n+1$ và n trong lân cận của a, thì phần chính quy của $\mathrm{KTHH}_n(a)$ của f' là đạo hàm của phần chính quy của $\mathrm{KTHH}_{n+1}(a)$ của f.

2.5 Tích phân trên một khoảng bất kỳ

Trong § 2.5 này, chúng ta sẽ tổng quát hóa và tiếp tục việc khảo sát đã thực hiện trong Tập 2, chương 10.
Ta ký hiệu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$.
Nếu không có ghi chú gì khác thì I chỉ một khoảng không rỗng và không thu về một điểm. Cũng vậy, nếu không ghi chú gì khác thì các hàm được xét đều giả thiết xác định và liên tục từng khúc trên I và lấy giá trị trong $\mathbb{K}$. Có thể khái quát việc khảo sát cho các hàm lấy giá trị trong một $\mathbb{K}$-kgvđc E hữu hạn chiều.
Ta ký hiệu $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ là tập hợp các ánh xạ liên tục từng khúc từ I đến $\mathbb{K}$. Rõ ràng $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ là một $\mathbb{K}$-đại số số giao hoán, kết hợp, có đơn vị đối với các luật thông thường $+$, $.$ (ngoài), $.$ (trong). Hơn nữa, nếu $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ thì $\overline{f}$, $\mathrm{Re}f$, $\mathrm{Im}f$, $|f|$ cũng thuộc $\mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, và nếu $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ thì f^+, f^-, $|f|$ cũng thuộc $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

2.5.1 Hàm khả tích với giá trị thực dương hay bằng không

1) Định nghĩa

◆ **Định nghĩa 1** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ sao cho $f \geq 0$. Ta nói rằng f **khả tích** (hay: **khả tổng**) trên I khi và chỉ khi tồn tại một phần tử M thuộc $\mathbb{R}_+$ sao cho :

$$\int_J f \leq M,$$

với mọi đoạn J bao hàm trong I.

Ta nhắc lại rằng một đoạn (của $\mathbb{R}$) là một khoảng đóng giới nội $[\alpha; \beta]$, trong đó $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \leq \beta$.

Nhận xét:
Nếu I là một đoạn, $I = [\alpha; \beta]$, và nếu $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ không âm, thì f khả tích trên I, vì rằng đối với mọi đoạn J bao hàm trong I ta có:

$$\int_J f \leq \int_\alpha^\beta f.$$

■

Với các ký hiệu trên, nếu $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ không âm và khả tích trên I, thì tập hợp các $\int_J f$ (khi J biến thiên trên khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong I) là một bộ phận của $\mathbb{R}$, không rỗng và bị chặn trên, do đó có biên trên trong $\mathbb{R}$.

Từ đó ta có định nghĩa sau:

◆ **Định nghĩa 2** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}), \geq 0$ và khả tích.

Tích phân của f **trên** I, ký hiệu là $\int_I f$, là biên trên của các $\int_J f$ khi J chạy khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong I.

Nhận xét:

1) Với các giả thiết và ký hiệu trong Định nghĩa 2 thì: $\int_I f \geq 0$.

2) Nếu I là một đoạn $[\alpha; \beta]$, thì mọi ánh xạ f thuộc $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R}), \geq 0$, đều khả tích trên I và: $\int_I f \leq \int_\alpha^\beta f$. Hơn nữa, khi đó f khả tích trên bốn khoảng $[\alpha; \beta]$, $]\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta[$, $]\alpha; \beta[$, và bốn tích phân của f trên bốn khoảng đó bằng nhau.

3) Ta quy ước rằng nếu I là một đơn tử thì mọi ánh xạ rỗng $f : I \to \mathbb{R}, \geq 0$ đều khả tích trên I và $\int_I f = 0$.

4) Ta có thể quy ước rằng nếu I rỗng thì mọi ánh xạ $f : I \to \mathbb{R}, \geq 0$ đều khả tích, và $\int_I f = 0$.

◆ **Mệnh đề 1**

Nếu $\begin{cases} f : I \to \mathbb{R} \text{ liên tục và } \geq 0 \\ f \text{ khả tích trên } I \\ \int_I f = 0 \end{cases}$, thì $f = 0$.

Chứng minh:

Cho $x_0 \in I$. Tồn tại một đoạn J không rỗng và không thu về một điểm sao cho $x_0 \in J \subset I$.

Thế thì ta có: $0 \leq \int_J f \leq \int_I f = 0$, vậy $\int_J f = 0$.

Theo Tập 1, 6.2.5, Hệ quả 4, ta suy ra: $\forall x \in J, \quad f(x) = 0$

và nói riêng $f(x_0) = 0$.

Như thế ta đã chứng minh: $\forall x_0 \in I, \quad f(x_0) = 0$,

tức là: $f = 0$.

◆ **Hệ quả**

1) Nếu $\begin{cases} f: I \to \mathbb{R} \text{ liên tục} \\ f^2 \ (= f.f) \text{ khả tích trên } I \\ \int_I f^2 = 0 \end{cases}$, thì $f = 0$

2) Nếu $\begin{cases} f: I \to \mathbb{C} \text{ liên tục} \\ |f| \text{ khả tích trên } I \\ \int_I |f| = 0 \end{cases}$, thì $f = 0$.

◆ **Mệnh đề 2**

Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}), \geq 0$. Các tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi:

(i) f khả tích trên I

(ii) Tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho với mọi dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I, ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{J_n} f \leq M.$$

(iii) Tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ và một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{J_n} f \leq M.$$

Hơn nữa, nếu (i), (ii) và (iii) được thỏa mãn thì ta có:

$$\int_I f = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f.$$

với mọi dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I.

Ở đây $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tăng có nghĩa là: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n \subset J_{n+1}$.

Để ngắn gọn, ta có thể gọi mọi dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn của I mà hợp bằng I là **dãy vét kiệt** các đoạn của I.

Chứng minh:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Giả thiết f khả tích trên I, và cho $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những đoạn sao cho:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I.$$

Theo các Định nghĩa 1 và 2, ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} f \leq \int_I f.$

Số thực $M = \int_I f$ thích hợp.

(ii) ⇒ (iii):

Chỉ cần chú ý rằng tồn tại ít nhất một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I, và xét các khoảng I có thể có. Chẳng hạn, với $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mà $a < b$:

$$]a;b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[a+\frac{b-a}{n};\ b\right], \qquad [a;+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[a;\ a+n].$$

(iii) ⇒ (i):

Giả thiết tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ và một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I, sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{J_n} f \leq M.$$

Cho $J = [\alpha;\beta]$ là một đoạn bao hàm trong I. Vì $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I$ nên tồn tại $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $\alpha \in J_{n_1}$ và $\beta \in J_{n_2}$. Ký hiệu $n_0 = \mathrm{Max}(n_1, n_2)$; vì $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tăng nên ta có $\alpha \in J_{n_0}$ và $\beta \in J_{n_0}$, suy ra $J = [\alpha;\beta] \subset J_{n_0}$ rồi vì $f \geq 0$ nên:

$$\int_J f \leq \int_{J_{n_0}} f \leq M.$$

Như thế, với mọi J bao hàm trong I thì: $\int_J f \leq M$. Kết quả này chứng tỏ rằng f khả tích trên I.

Giả thiết (i), (ii) hoặc (iii) được thỏa mãn, và cho $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những đoạn mà hợp bằng I.

- Dãy số thực $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tăng (vì $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tăng và $f \geq 0$), bị chặn trên bởi $\int_I f$,

do đó hội tụ đến số thực ký hiệu là M_0, và:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f = M_0 \leq \int_I f.$$

- Trong phép chứng minh (iii) $\Rightarrow$ (i), ta đã thấy rằng với mọi đoạn J bao hàm trong I, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $J \subset J_{n_0}$, và do vậy $\int_J f \leq \int_{J_{n_0}} f \leq M_0$. Chuyển qua biên trên khi J chạy khắp tập hợp các đoạn bao hàm trong I, ta suy ra:

$$\int_I f \leq M_0.$$

Cuối cùng, ta có: $$M_0 = \int_I f.$$

2) Các tính chất đại số

◆ **Mệnh đề 1**

Cho $\lambda \in \mathbb{R}_+$; $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ và ≥ 0.

Nếu f và g khả tích trên I thì $\lambda f + g$ khả tích trên I và:

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Chứng minh:

- Ánh xạ $\lambda f + g$ liên tục từng khúc và ≥ 0.
- Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \leq \lambda \int_I f + \int_I g,$$

do đó (xem I), Mệnh đề 2) $\lambda f + g$ khả tích.

Hơn nữa, vì $\int_{J_n} f \underset{n\infty}{\to} \int_I f$ và $\int_{J_n} g \underset{n\infty}{\to} \int_I g$ nên ta có:

$$\int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \underset{n\infty}{\to} \lambda \int_I f + \int_I g,$$

vậy: $$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

◆ **Mệnh đề 2** **(Định lý hàm trội)**

Cho $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

Nếu $\begin{cases} 0 \leq f \leq g \\ g \text{ khả tích trên } I \end{cases}$, thì f khả tích trên I và $\int_I f \leq \int_I g$.

Chứng minh:
Giả thiết $0 \leq f \leq g$ và g khả tích trên I.
Với mọi đoạn J bao hàm trong I, ta có:

$$\int_J f \leq \int_J g \leq \int_I g.$$

Theo *1)*, Định nghĩa 1 và 2, f khả tích trên I và:

$$\int_I f = \operatorname{Sup}_J \int_J f \leq \int_I g.$$

◆ **Định nghĩa**

Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0, I' là một khoảng thỏa mãn $I' \subset I$.

- Ta nói rằng f **khả tích trên** I' khi và chỉ khi thu hẹp $f|_{I'}$ khả tích trên I'.
- Nếu f khả tích trên I', ta ký hiệu $\int_{I'} f$ thay vì $\int_{I'} f|_{I'}$.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0, I' là một khoảng thỏa mãn $I' \subset I$. Nếu f khả tích trên I thì f khả tích trên I' và:

$$\int_{I'} f \leq \int_I f.$$

Chứng minh:
Giả thiết f khả tích trên I. Với mọi đoạn J' bao hàm trong I' (và do đó bao hàm trong I), ta có:

$$\int_{J'} f \leq \int_I f.$$

Kết quả trên chứng tỏ (xem *1)*, Định nghĩa 1 và 2) rằng f khả tích trên I' và:

$$\int_{I'} f \leq \int_I f.$$

◆ **Mệnh đề 4**

Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0, $a \in I$.

1) f khả tích trên I khi và chỉ khi f khả tích trên $]-\infty;a] \cap I$ và trên $I \cap [a;+\infty[$.

2) Hơn nữa, nếu f khả tích trên I thì:

$$\int_I f = \int_{]-\infty;a]\cap I} f + \int_{I\cap[a;+\infty[} f.$$

Chứng minh:

1) • Nếu f khả tích trên I thì theo Mệnh đề trước, f khả tích trên $]-\infty;a] \cap I$ và trên $I \cap [a;+\infty[$.

• Đảo lại, giả thiết f khả tích trên $]-\infty;a] \cap I$ và trên $I \cap [a;+\infty[$. Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn sao cho:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n =]-\infty; a] \cap I \quad \text{và} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a \in J_n\right)$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu: $J'_n =]-\infty;a] \cap J_n$, $J''_n = J_n \cap [a;+\infty[$. Rõ ràng là $(J'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ và $(J''_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là những dãy tăng những đoạn thoả mãn:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J'_n =]-\infty; a] \cap I \quad \text{và} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J''_n = I \cap [a;+\infty[.$$

Theo *1)*, Mệnh đề 2:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{]-\infty;a]\cap I} f = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J'_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J'_n} f \\ \displaystyle\int_{I\cap[a;+\infty[} f = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J''_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J''_n} f \end{cases}$$

Theo hệ thức Chasles (2.3.4, *3)*, Mệnh đề 1), ta suy ra:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{J_n} f = \int_{J'_n} f + \int_{J''_n} f \le \int_{]-\infty;a]\cap I} f + \int_{I\cap[a;+\infty[} f \ ,$$

và do vậy (xem *1)*, Định nghĩa 1 và 2), f khả tích trên I và:

$$\int_I f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J'_n} f + \lim_{n\infty} \int_{J''_n} f = \int_{]-\infty;a]\cap I} f + \int_{I\cap[a;+\infty[} f \ .$$

3) Hàm khả tích trên một khoảng nửa mở

♦ **Mệnh đề 1** Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\right)$ sao cho $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{R}), \ge 0$. Ký hiệu F: $[a;b[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall X \in [a;b[, \qquad F(X) = \int_a^X f \, .$$

Ba tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi một:

(i) f khả tích trên $[a;b[$

(ii) F bị chặn trên trên $[a;b[$

(iii) F có giới hạn hữu hạn tại b.

Hơn nữa, nếu một trong ba tính chất đó được thỏa mãn thì:

$$\int_{[a;b[} f = \sup_{X\in[a;b[} \int_a^X f = \lim_{X\to b} \int_a^X f \ .$$

Khi đó, tích phân $\int_{[a;b[} f$ cũng ký hiệu là $\int_a^b f$ (hay $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii):

Giả thiết f khả tích trên $[a; b[$. Với mọi X thuộc $[a; b[$, vì $[a; X]$ là một đoạn bao hàm trong $[a; b[$, nên ta có:

$$F(X) = \int_a^X f = \int_{[a;X]} f \le \int_{[a;b[} f ,$$

chứng tỏ f bị chặn trên (bởi $\int_{[a;b[} f$).

(ii) ⇒ (iii):

Giả thiết F bị chặn trên $[a;b[$. Vì F tăng (do $f \ge 0$), nên F có giới hạn hữu hạn tại b.

(iii) ⇒ (i):

Giả thiết F có giới hạn hữu hạn L tại b. Vì F tăng (do $f \ge 0$), nên ta có:

$$\forall X \in [a;b[, \qquad \int_a^X f = F(X) \le L .$$

Cho J là một đoạn bao hàm trong $[a; b[$; ký hiệu X là mút phải của J, ta có:

$$\int_J f \le \int_a^X f = F(X) \le L .$$

Như vậy (xem *1)*, Định nghĩa 1 và 2), f khả tích trên $[a; b[$ và $\int_{[a;b[} f \le L$.

Cuối cùng, với một trong các giả thiết (i), (ii), (iii), F có giới hạn hữu hạn L tại b.

Một mặt thì: $\quad L \le \int_{[a;b[} f \quad$ vì $\quad \forall X \in [a;b[, \ \ F(x) \le \int_{[a;b[} f$.

Mặt khác, ta đã thấy: $\int_{[a;b[} f \le L$.

Vậy:

$$\int_{[a;b[} f = L .$$

◆ **Hệ quả**

Cho $(a,b)\in\left(\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\right)\times\mathbb{R}$ sao cho $a < b$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0. Ký hiệu F: $]a;b] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall X \in \ ]a;b], \qquad F(X) = \int_X^b f.$$

Ba tính chất sau đây tương đương từng đôi một:
(i) f khả tích trên $]a; b]$
(ii) F bị chặn trên trên $]a; b]$
(iii) F có giới hạn hữu hạn tại a.
Hơn nữa, nếu một trong ba tính chất đó được thỏa mãn thì:

$$\int_{]a;b]} f = \operatorname*{Sup}_{X\in]a;b]} \int_X^b f = \lim_{X\to a} \int_X^b f.$$

Khi đó, tích phân $\displaystyle\int_{]a;b]} f$ cũng ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f$ (hay $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh:
Chỉ cần áp dụng Mệnh đề trên cho hàm $\begin{array}{ccc}[a;b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(a+b-x)\end{array}$ nếu $a \in \mathbb{R}$, hay hàm $\begin{array}{ccc}[-b;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x)\end{array}$ nếu $a = -\infty$.

Thí dụ:

1) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ánh xạ $x \mapsto e^{\alpha x}$ khả tích trên $[0; +\infty[$ khi và chỉ khi $\alpha < 0$, vì:

$$\forall X \in [0;+\infty[, \qquad \int_0^X e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right) & \text{nếu } \alpha \neq 0 \\ X & \text{nếu } \alpha = 0 \end{cases}$$

Hơn nữa, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha X} - 1\right) = \frac{1}{-\alpha}.$$

2) Ánh xạ $x \mapsto -\ln x$ khả tích trên $]0;1]$ vì:

$$\begin{cases} \forall X \in]0;1], \qquad \displaystyle\int_X^1 -\ln x\mathrm{d}x = \left[x - x\ln x\right]_X^1 = 1 - X + X\ln X \\ 1 - X + X\ln X \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$$

Hơn nữa: $\int_0^1 -\ln x\mathrm{d}x = 1$.

◆ **Định lý 1** **(Thí dụ Riemann tại $+\infty$)**

Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $[1;+\infty[$ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

Chứng minh:

Ta hãy tính $\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ với mọi X thuộc $[2;+\infty[$.

- Nếu $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X = \frac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$.

  1) Nếu $\alpha > 1$: $\dfrac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \underset{X\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\alpha-1}$ vậy $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $[1;+\infty[$, và: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$.

  2) Nếu $\alpha < 1$: $\dfrac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \underset{X\to+\infty}{\to} +\infty$ vậy $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ không khả tích trên $[1;+\infty[$.

- Nếu $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln X \underset{X\to+\infty}{\to} +\infty$, vậy $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ không khả tích trên $[1;+\infty[$.

◆ **Định lý 2** **(Thí dụ Riemann tại 0)**

Với α thuộc $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $]0;1]$ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

Chứng minh:

Phương pháp thứ nhất: cải biên phép chứng minh định lý trên đây.

Phương pháp thứ hai: bằng phép đổi biến $u = \dfrac{1}{x}$:

$$\forall X \in]0;1], \qquad \int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{1}{X}} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\mathrm{d}u,$$

và $\displaystyle\int_{[1;+\infty[} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\mathrm{d}u$ tồn tại khi và chỉ khi $-\alpha+2>1$, tức là $\alpha < 1$.

■

Thí dụ:

Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ khả tích trên $[1;+\infty[$ vì:

- $\forall x \in [1;+\infty[, \quad 0 \le \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \le 1$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ khả tích trên $[1;+\infty[$.

■

Phép đổi biến $u = x - a$ cho phép ta chứng minh Hệ quả sau, tổng quát hơn Định lý trên:

◆ **Hệ quả** Với mọi $(a, c, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ mà $a \ne c$, ánh xạ $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ khả tích trên $]a;c]$ (hay $[c;a[$) khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

◆ **Mệnh đề** **(Định lý hàm tương đương)**
Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\right)$ sao cho $a < b, f, g \in \mathcal{CM}([a;b[;\mathbb{R})$.
Giả thiết $f \ge 0, g \ge 0, f \underset{b}{\sim} g$.
Thế thì f khả tích trên $[a;b[$ khi và chỉ khi g khả tích trên $[a;b[$.

Chứng minh:
Vì $f \underset{b}{\sim} g$ nên tồn tại $c \in [a;b[$ thoả mãn:

$$\forall x \in [c;b[, \qquad |f(x) - g(x)| \le \frac{1}{2} g(x),$$

và do đó: $\qquad \forall x \in [c;b[, \qquad \dfrac{1}{2} g(x) \le f(x) \le \dfrac{3}{2} g(x).$

- Nếu f khả tích trên $[a;b[$, thì f khả tích trên $[c;b[$, và vì:
  $\forall x \in [c;b[, \qquad 0 \le g(x) \le 2f(x)$

nên g khả tích trên $[c;b[$, do đó khả tích trên $[a;b[$.

- Nếu g khả tích trên $[a;b[$ thì g khả tích trên $[c;b[$, và vì:

$$\forall x \in [c;b[, \qquad 0 \le f(x) \le \frac{3}{2} g(x)$$

nên f khả tích trên $[c;b[$, do đó khả tích trên $[a;b[$.

■

◆ **Mệnh đề 3** (**Quy tắc "** $x^{\alpha}f(x)$ **" tại** $+\infty$)

Cho $a \in \mathbf{R}_+^*$, $f \in \mathcal{CM}([a;+\infty[, \mathbb{R}), \geq 0$.

1) Nếu tồn tại $\alpha \in]1; +\infty[$ sao cho $x^{\alpha}f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ thì f khả tích trên $[a; +\infty[$.

2) Nếu tồn tại $\alpha \in]-\infty;1]$ sao cho $x^{\alpha}f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ thì f không khả tích trên $[a; +\infty[$.

Chứng minh:

1) Tồn tại $c \in [a;+\infty[$ sao cho: $\forall x \in [c;+\infty[, \quad 0 \leq x^{\alpha}f(x) \leq 1$,

suy ra: $$\forall x \in [c;+\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Ta kết luận theo Định lý hàm trội (*2)*, Mệnh đề 2) và thí dụ Riemann tại $+\infty$.

2) Tồn tại $c \in [a;+\infty[$ sao cho: $\forall x \in [c;+\infty[, \quad x^{\alpha}f(x) \geq 1$

suy ra: $$\forall x \in [c;+\infty[, \quad f(x) \geq \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Ta kết luận bằng phản đảo của định lý hàm trội và thí dụ Riemann tại $+\infty$.

***Nhận xét*:**

Việc áp dụng quy tắc "$x^{\alpha}f(x)$" (tại $+\infty$) quy về việc so sánh $f(x)$ và $\frac{1}{x^{\alpha}}$ (trong lân cận $+\infty$), với một α mà ta phải lựa chọn thích hợp. Đối với một số hàm thì phép so sánh đó không thực hiện được, và quy tắc "$x^{\alpha}f(x)$" (tại $+\infty$) không cho phép khảo sát tính khả tích của f trên $[a;+\infty[$. Chẳng hạn, với: $\begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x\ln x} \end{array}$ thì ta có:

$$\begin{cases} \forall \alpha \in]1;+\infty[, & x^{\alpha}f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \forall \alpha \in]-\infty;1], & x^{\alpha}f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

và như vậy quy tắc "$x^{\alpha}f(x)$" không áp dụng được.

Về thí dụ này, xem thí dụ Bertrand dưới đây.

■

◆ **Mệnh đề 4** (**Quy tắc** $(x-a)^{\alpha}f(x)$ **tại** a^+)

Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f \in \mathcal{CM}(]a;b], \mathbb{R}), \geq 0$.

1) Nếu tồn tại $\alpha \in]-\infty; 1[$ sao cho $(x-a)^{\alpha}f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} 0$ thì f khả tích trên $]a;b]$.

2) Nếu tồn tại $\alpha \in [1;+\infty[$ sao cho $(x-a)^{\alpha} f(x) \underset{x\to a^+}{\to} +\infty$ thì f không khả tích trên $]a;b]$.

Chứng minh:
Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 1.

Ta cũng có thể quy về Mệnh đề 1 bằng phép đổi biến $u = \dfrac{1}{x-a}$.

***Thí dụ*:**
Ánh xạ $f: x \mapsto -\ln x$ khả tích trên $]0;1]$ vì f liên tục, $f \geq 0$ và $x^{1/2} f(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$. Xem thêm thí dụ *2)*.

Thí dụ Bertrand tại +∞ (không thuộc chương trình)
Với $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, xét tính khả tích của $f_{\alpha,\beta}: [2;+\infty[\ \to \ \mathbb{R}$ định nghĩa bởi :

$$\forall x \in [2;+\infty[, \qquad f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}.$$

- Nếu $\alpha > 1$, khi ký hiệu $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$, ta có:

$$x^{\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}(\ln x)^{-\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} 0,$$

do đó $f_{\alpha,\beta}$ khả tích trên $[2;+\infty[$.

- Nếu $\alpha < 1$ thì ta có:

$$x f_{\alpha,\beta}(x) = x^{1-\alpha}(\ln x)^{-\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,$$

do đó $f_{\alpha,\beta}$ không khả tích trên $[2;+\infty[$.

- Nếu $\alpha = 1$, ta thực hiện phép đổi biến $u = \ln x$:

$$\forall X \in [2;+\infty[, \qquad \int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{u^{\beta}}\,du.$$

Vậy $f_{\alpha,\beta}$ khả tích trên $[2;+\infty[$ khi và chỉ khi $u \mapsto \dfrac{1}{u^{\beta}}$ khả tích trên $[\ln 2;+\infty[$, tức là khi và chỉ khi $\beta > 1$.
Cuối cùng thì: $f_{\alpha,\beta}$ khả tích trên $[2;+\infty[$ khi và chỉ khi:

$$\left|\begin{array}{l} \quad \alpha > 1 \\ \text{hay} \\ \quad (\alpha = 1 \quad \text{và} \quad \beta > 1) \end{array}\right.$$

Bài tập

◊ **2.5.1** Khảo sát tính khả tích của các ánh xạ (lấy giá trị trong $\mathbb{R}_+$) sau đây, với hàm $f(x)$ và khoảng tích phân cho trước:

a) $\dfrac{1}{\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right)}$, $]0;1]$ b) $\sqrt[4]{x^4+1}-x$, $[0;+\infty[$

c) $(1+\ln x)^{-\ln x}$, $[1;+\infty[$ d) $x^{-2(x-E(x))}$, $[1;+\infty[$

e) $e^{(-\ln x)^a}$, $[1;+\infty[$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ cố định.

◊ **2.5.2** Cho f: $[1;+\infty[\to]0;+\infty[$ liên tục thoả mãn $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in [0;1[$.

Chứng minh f khả tích trên $[1; +\infty[$.

◊ **2.5.3** Cho C là $\mathbb{C}$-không gian vectơ các ánh xạ liên tục từ $[-1;1]$ đến $\mathbb{C}$.

a) Chứng minh rằng, với mọi f thuộc C, các ánh xạ $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ và $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1+t}}$ khả tích theo thứ tự trên $[-1;1[$ và $]-1;1]$, và rằng các ánh xạ N, N': $C \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$N(f) = \int_{-1}^{1}\frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}dt \text{ và } N'(f) = \int_{-1}^{1}\frac{|f(t)|}{\sqrt{1+t}}dt$$

là những chuẩn trên C.

b) N và N' có tương đương không?

c) Ánh xạ $T: \begin{array}{ccc}(C,N) & \to & (C,N) \\ f & \mapsto & \breve{f}\end{array}$ có liên tục không?

(trong đó: $\forall\, t \in [-1;1]$, $\breve{f}(t) = f(-t)$).

◊ **2.5.4** a) Chứng minh: $\forall(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \mathrm{Inf}(\alpha,\beta) \le \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

b) Từ đó suy ra rằng, nếu f, g: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục và > 0 thì $\mathrm{Inf}(f, g)$ khả tích trên $[0;+\infty[$ khi và chỉ khi $\dfrac{fg}{f+g}$ khả tích trên $[0;+\infty[$.

◊ **2.5.5** **Dấu hiệu Ermakoff**

Cho $a \in \mathbb{R}$, f: $[a; +\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục thoả mãn $f \ge 0$, g: $[a;+\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho tồn tại $\lambda > 0$ thỏa mãn: $\forall x \in [a;+\infty[$, $g(x) \ge x + \lambda$.

a) Giả thiết tồn tại $k \in [0;1[$ thoả mãn: $\forall x \in [a;+\infty[$, $f\big(g(x)\big)g'(x) \le kf(x)$.

Chứng minh rằng f khả tích trên $[a; +\infty[$.

b) Giả thiết tồn tại $k \in]1; +\infty[$ sao cho:

$$\forall x \in [a;+\infty[, \qquad f\big(g(x)\big)g'(x) \ge kf(x) .$$

Chứng minh rằng f không khả tích trên $[a;+\infty[$.

◊ **2.5.6** Cho f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1) Chứng minh f khả tích trên $\mathbb{R}$ và: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

2) Suy ra rằng $x \mapsto f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ là ánh xạ hằng.

3) Kết luận rằng: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

◊ **2.5.7** a) Chứng minh rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại duy nhất $a_n \in \mathbb{R}_+$ thoả mãn:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a_n}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2^n}.$$

(Ta công nhận rằng $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, xem bài tập 2.5.6, c)).

b) Bằng cách xét hàm: $f: x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, chứng minh:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1}^2 - a_n^2 < 2 \ln 2.$$

◊ **2.5.8*** Chứng minh: $\int_0^{\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n$.

◊ **2.5.9** a) Cho f: $]0;1] \to \mathbb{R}_+$ liên tục, giảm, khả tích trên $]0;1]$. Chứng minh::

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

b) *Áp dụng*: Tính các giới hạn:

α) $\lim_{n\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ β) $\lim_{n\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{k+n}} \right)^{\frac{1}{\ln n}}$.

2.5.2 Hàm giá trị phức khả tích

1) Đại cương

◆ **Định nghĩa 1** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Ta nói rằng f **khả tích trên** I khi và chỉ khi $|f|$ (vốn liên tục từng khúc và ≥ 0) khả tích trên I.

Rõ ràng là định nghĩa này mở rộng Định nghĩa 1, 2.5.1.
Ta có thể dùng ký hiệu $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ để chỉ tập hợp các ánh xạ từ I đến $\mathbb{K}$, liên tục từng khúc và khả tích trên I.

Nhận xét:
Nếu I là một đoạn thì $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, xem 2.5.1, 1), Nhận xét.

Thí dụ:

1) $f : x \mapsto \dfrac{e^{ix}}{x^2}$ khả tích trên $[1;+\infty[$, vì $|f| : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ khả tích trên $[1;+\infty[$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{e^{ix}}{x}$ không khả tích trên $[1;+\infty[$, vì $|g| : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ không khả tích trên $[1;+\infty[$.

◆ **Mệnh đề 1** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.
Nếu $|f| \leq \varphi$ và nếu φ khả tích trên I, thì f khả tích trên I.

Chứng minh:
Chỉ cần áp dụng Định lý hàm trội (2.5.1, 2), Mệnh đề 2).

◆ **Hệ quả**

Nếu $\begin{cases} f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \\ I \text{ giới nội} \\ f \text{ bị chặn} \end{cases}$, thì f khả tích trên I.

Chứng minh:
Ánh xạ hằng $\varphi : x \mapsto \|f\|_\infty$ khả tích (vì I giới nội) và $|f| \leq \varphi$.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $\lambda \in \mathbb{K}$; $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.
Nếu f và g khả tích trên I thì $\lambda f + g$ khả tích trên I.

Chứng minh:
Vì $|\lambda f+g|\le|\lambda||f|+|g|$, và do $|f|$ và $|g|$ đều khả tích trên I, nên $|\lambda f+g|$ khả tích trên I (Định lý hàm trội, 2.5.1, 2), Mệnh đề 2) và do đó $\lambda f+g$ khả tích trên I. ■

◆ **Hệ quả**

$\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ là một $\mathbb{K}$-kgv đối với các luật thông thường.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $f\in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$, f khả tích trên I khi và chỉ khi f^+ và f^- khả tích trên I.

Ta nhắc lại rằng (xem Tập 1, 4.1.2, Định nghĩa 3) f^+ và f^- là các ánh xạ từ I đến $\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x\in I,\quad \begin{cases} f^+(x)=\operatorname{Sup}\big(f(x),0\big)\\ f^-(x)=\operatorname{Sup}\big(-f(x),0\big)\end{cases},$$

và rằng: $\qquad f=f^+-f^-$ và $|f|=f^++f^-$.

Hơn nữa, do f liên tục từng khúc, nên f^+ và f^- cũng liên tục từng khúc.

Chứng minh:

1) Nếu f khả tích trên I thì (theo định nghĩa) $|f|$ cũng khả tích trên I; vì $0\le f^+\le|f|$ và $0\le f^-\le|f|$, nên định lý hàm trội (2.5.1, 2), Mệnh đề 2) chứng tỏ rằng f^+ và f^- cũng khả tích trên I.

2) Đảo lại, nếu f^+ và f^- khả tích trên I, thì f cũng khả tích trên I vì $f=f^+-f^-$ (xem Mệnh đề 2).

◆ **Định nghĩa - Ký hiệu 2**

Cho $f\in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$. Nếu f khả tích trên I thì **tích phân của** f **trên** I, ký hiệu $\int_I f$, là số thực:

$$\int_I f=\int_I f^+-\int_I f^-.$$

Rõ ràng là định nghĩa này mở rộng định nghĩa ở 2.5.1, 1).

Nếu I là một đơn tử thì mọi ánh xạ $f:\ I\to\mathbb{K}$ đều khả tích và $\int_I f=0$.

◆ **Mệnh đề 4** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$; f khả tích trên I khi và chỉ khi $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ khả tích trên I.

Chứng minh:
Trước hết, ta chú ý rằng do f liên tục từng khúc nên $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ cũng liên tục từng khúc.

1) Giả thiết f khả tích trên I. Vì $|\operatorname{Re} f| \le |f|$ và $|\operatorname{Im} f| \le |f|$, nên định lý hàm trội (2.5.1, 2), Mệnh đề 2) chứng tỏ rằng $|\operatorname{Re} f|$ và $|\operatorname{Im} f|$ cũng khả tích trên I, do đó (theo định nghĩa) $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ đều khả tích trên I.

2) Đảo lại, nếu $\operatorname{Re} f$ và $\operatorname{Im} f$ khả tích trên I thì vì $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$, nên f khả tích trên I (xem Mệnh đề 2).

◆ **Định nghĩa - Ký hiệu 3** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$. Nếu f khả tích trên I thì **tích phân của f trên I**, ký hiệu $\int_I f$ là số phức:

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_I \operatorname{Im} f .$$

Rõ ràng định nghĩa này mở rộng định nghĩa đã biết trên đây.
Nếu I là một đơn tử thì mọi ánh xạ $f: I \to \mathbb{C}$ đều khả tích và $\int_I f = 0$.

Nhận xét:
Nếu I là một đoạn, $I = [\alpha, \beta]$, thì mọi ánh xạ $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ đều khả tích trên I và: $\int_I f = \int_\alpha^\beta f$. Hơn nữa, khi đó f khả tích trên bốn khoảng $[\alpha; \beta]$, $]\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta[$, $]\alpha; \beta[$ và bốn tích phân của f trên các khoảng đó bằng nhau (xem 2.5.1, 1), Nhận xét 2).

◆ **Mệnh đề 5** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, khả tích trên I.
Với mọi dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I, ta có:

$$\int_{J_n} f \underset{n\infty}{\to} \int_I f .$$

Chứng minh:

- Nếu f lấy giá trị thực thì:

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (f^+ - f^-) = \int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^- \underset{n\infty}{\to} \int_I f^+ - \int_I f^- = \int_I f .$$

- Còn khi f lấy giá trị phức thì:

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (\operatorname{Re} f + \mathrm{i}\operatorname{Im} f) = \int_{J_n} \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\int_{J_n} \operatorname{Im} f \underset{n\infty}{\rightarrow} \int_I \operatorname{Re} f + i\int_I \operatorname{Im} f = \int_I f.$$

■

Nhận xét:

Có thể tổng quát hóa việc khảo sát trên cho trường hợp các ánh xạ $f: I \rightarrow E$ liên tục từng khúc trên I và lấy giá trị trong một không gian Banach như sau:

- Theo định nghĩa, $f: I \rightarrow E$ khả tích trên I khi và chỉ khi $\|f\|: \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$ khả tích trên I.

- Nếu f khả tích trên I thì với mọi dãy tăng $(J_n)_{n\geq 1}$ những đoạn của I mà hợp bằng I, dãy $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geq 1}$ hội tụ trong E, và giới hạn của nó không phụ thuộc vào cách chọn $(J_n)_{n\geq 1}$. Thực vậy với mọi (p,q) thuộc $(\mathbb{N}^*)^2$, sao cho chẳng hạn $p \geq q$, ta có:

$$\left\| \int_{J_p} f - \int_{J_q} f \right\| = \left\| \int_{J_p - J_q} f \right\| \leq \int_{J_p - J_q} \|f\| = \int_{J_p} \|f\| - \int_{J_q} \|f\|,$$

do đó $\left(\int_{J_p} f\right)_{p\geq 1}$ là dãy Cauchy trong F nên hội tụ.

Và nếu $(J_n)_{n\geq 1}$, $(K_n)_{n\geq 1}$ là hai dãy tăng những đoạn của I mà hợp bằng I, thì khi ký hiệu L_n là đoạn nhỏ nhất của $\mathbb{R}$ có chứa J_n và K_n, thì $(L_n)_{n\geq 1}$ là một dãy tăng những đoạn của I mà hợp bằng I, và:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{J_n} f - \int_{K_n} f \right\| &= \left\| \int_{J_n} f - \int_{L_n} f + \int_{L_n} f - \int_{K_n} f \right\| \leq \left\| \int_{J_n} f - \int_{L_n} f \right\| + \left\| \int_{K_n} f - \int_{L_n} f \right\| \\ &\leq \int_{L_n - J_n} \|f\| + \int_{L_n - K_n} \|f\| = 2\int_{L_n} \|f\| - \int_{J_n} \|f\| - \int_{K_n} \|f\| \\ &\underset{n\infty}{\rightarrow} 2\int_I \|f\| - \int_I \|f\| - \int_I \|f\| = 0 \end{aligned}$$

Như vậy giới hạn của $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geq 1}$ không phụ thuộc vào việc chọn dãy $(J_n)_{n\geq 1}$.

2) Các tính chất

◆ **Mệnh đề 1 (Tính chất tuyến tính của tích phân)**

Cho $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ khả tích trên I. Khi đó $\lambda f + g$ khả tích trên I và:

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Chứng minh:
Theo 1), Mệnh đề 2, $\lambda f+g$ khả tích trên I. Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I. Theo 1), Mệnh đề 5:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{J_n}(\lambda f+g) \underset{n\infty}{\to} \int_I(\lambda f+g) \\ \displaystyle\lambda\int_{J_n}f+\int_{J_n}g \underset{n\infty}{\to} \lambda\int_I f+\int_I g\end{cases}.$$

Vì (xem Tập 1, 6.3, Mệnh đề 1):

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_{J_n}(\lambda f+g) \underset{n\infty}{\to} \lambda\int_{J_n}f+\int_{J_n}g,$$

nên bằng cách chuyển qua giới hạn với n dần đến $+\infty$, ta suy ra:

$$\int_I(\lambda f+g)=\lambda\int_I f+\int_I g.$$

Kết quả này mở rộng kết quả ở 2.5.1, 2), Mệnh đề 1. ■

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f\in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C})$.

1) f khả tích trên I khi và chỉ khi $\overline{f}$ khả tích trên I.

2) Nếu f khả tích trên I thì $\displaystyle\int_I\overline{f} = \overline{\int_I f}$.

Chứng minh:

$$\text{1) } (f \text{ khả tích trên } I) \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Re} f \text{ khả tích trên } I\\ \operatorname{Im} f \text{ khả tích trên } I\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{f} \text{ khả tích trên } I).$$

$$\text{2) } \int_I\overline{f} = \int_I(\operatorname{Re} f-\mathrm{i}\operatorname{Im} f) = \int_I\operatorname{Re} f - \mathrm{i}\int_I\operatorname{Im} f$$

$$= \overline{\int_I\operatorname{Re} f+\mathrm{i}\int_I\operatorname{Im} f} = \overline{\int_I f}.$$

◆ **Mệnh đề 3** **(Tính đồng biến của tích phân)**

Cho $f, g\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ khả tích trên I. Nếu $f\le g$ thì $\displaystyle\int_I f \le \int_I g$.

Chứng minh:
Giả thiết f, g liên tục và khả tích trên I và $f\le g$.

Thế thì $g - f \geq 0$ và $g - f$ khả tích trên I (xem 2.5.2, 1), Mệnh đề 2). Theo 2.5.2, 1), Nhận xét 1), ta có: $\displaystyle\int_I (g-f) \geq 0.$

Khi đó theo Mệnh đề trên đây: $\displaystyle\int_I g - \int_I f = \int_I (g-f) \geq 0,$

suy ra: $$\int_I f \leq \int_I g.$$

◆ **Mệnh đề 4** Với mọi $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ khả tích trên I, ta có:
$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Chứng minh:
Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I. Theo 2.5.2, Mệnh đề 5:
$$\int_{J_n} f \underset{n\infty}{\to} \int_I f \quad \text{và} \quad \int_{J_n} |f| \underset{n\infty}{\to} \int_I |f|.$$
Do (xem Tập 1, 6.3, Mệnh đề 2):
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_{J_n} f\right| \leq \int_{J_n} |f|,$$
nên bằng cách chuyển qua giới hạn với n dần đến vô cùng, ta suy ra:
$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

◆ **Mệnh đề 5** Tập hợp các ánh xạ liên tục và khả tích trên I, với giá trị trong $\mathbb{K}$, là một $\mathbb{K}$-kgv, và ánh xạ N_1 cho bởi: $f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ là một chuẩn trên $\mathbb{K}$-kgv đó.

Chứng minh:
Ta ký hiệu ở đây $C\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ là tập hợp các ánh xạ liên tục và khả tích trên I, với giá trị trong $\mathbb{K}$; rõ ràng là $C\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ là một $\mathbb{K}$-kgvc của $\mathbb{K}$-kgv $C(I, \mathbb{K})$ (xem *1)*, Mệnh đề 2).
Hơn nữa ánh xạ $N_1 : \begin{array}{ccc} C\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_I |f| \end{array}$ là một chuẩn trên $C\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, vì (xem 1.1.1, *1)*, Định nghĩa), với mọi α thuộc $\mathbb{K}$, và mọi f, g thuộc $C\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ ta có:

1) $N_1(\lambda f) = \int_I |\lambda f| = \int_I |\lambda||f| = |\lambda| \int_I |f| = |\lambda| N_1(f)$

2) $N_1(f) = 0 \Leftrightarrow \int_I |f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (xem 2.5.1, 1), Hệ quả)

3) $N_1(f+g) = \int_I |f+g| \le \int_I (|f|+|g|) = \int_I |f| + \int_I |g| = N_1(f) + N_1(g)$.

◆ **Định nghĩa 1** Cho $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$, và $f \in \mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$. Ta nói rằng $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **hội tụ theo trung bình** đến f khi và chỉ khi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến f theo chuẩn N_1.

Nói cách khác: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ theo trung bình đến f khi và chỉ khi:

$$\int_I |f_n - f| \underset{n\infty}{\rightarrow} 0.$$

■

◆ **Mệnh đề 6** **(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)**

Cho $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Nếu f^2 và g^2 khả tích trên I thì $\overline{f}g$ khả tích trên I và:

$$\left|\int_I \overline{f}g\right|^2 \le \left(\int_I |\overline{f}g|\right)^2 \le \left(\int_I |f|^2\right)\left(\int_I |g|^2\right).$$

Ở đây f^2 chỉ $\overline{f}.f$.

Chứng minh:

1) Khai triển $(|f| - |g|)^2 \ge 0$, ta được: $0 \le |\overline{f}g| \le \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. Do f^2 và g^2 khả tích trên I, nên $\frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ cũng khả tích trên I, do đó (định lý hàm trội, 2.5.1, 2), Mệnh đề 2) $|\overline{f}g|$ cũng thế, và như vậy $\overline{f}g$ khả tích trên I.

2) Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những đoạn mà hợp bằng I. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đối với các tích phân những hàm liên tục từng khúc trên một đoạn (xem 2.3.4, 2), Định lý 3) ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\int_{J_n} |\overline{f}g|\right)^2 \le \left(\int_{J_n} |f|^2\right)\left(\int_{J_n} |g|^2\right).$$

Chuyển qua giới hạn với n dần đến vô cùng, ta thu được kết quả cần chứng minh.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Ta nói rằng f **bình phương khả tích** trên I khi và chỉ khi $|f|^2$ khả tích trên I.

◆ **Mệnh đề 7** Tập hợp các ánh xạ liên tục trên I và bình phương khả tích trên I, với giá trị trong $\mathbb{K}$, là một $\mathbb{K}$-kgv, và ánh xạ: $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \overline{f}g$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{K}$-kgv đó. Ta ký hiệu

chuẩn liên kết là N_2 : $\qquad N_2(f) = \left(\int_I |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Chứng minh:
Tại đây ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ liên tục và bình phương khả tích trên I, với giá trị trong $\mathbb{K}$, là $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, với mọi (f, g) thuộc $\left(\mathcal{CL}^2(I,\mathbb{K})\right)^2$, thì $\overline{f}g$ khả tích trên I, vậy ánh xạ φ : $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \overline{f}g$ xác định hoàn toàn là một ánh xạ từ $\left(\mathcal{CL}^2(I,\mathbb{K})\right)^2$ đến $\mathbb{K}$.

Với mọi α thuộc $\mathbb{K}$ và mọi f, g, h thuộc $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$, ta có:

- $\varphi(g, f) = \int_I \overline{g}f = \int_I \overline{\overline{f}g} = \overline{\int_I \overline{f}g} = \overline{\varphi(f, g)}$
- $\varphi(f, \alpha g + h) = \int_I \overline{f}(\alpha g + h) = \int_I (\alpha \overline{f}g + \overline{f}h) = \alpha \int_I \overline{f}g + \int_I \overline{f}h$
  $= \alpha\varphi(f, g) + \varphi(f, h)$
- $\varphi(f, f) = \int_I |f|^2 \geq 0$
- $\varphi(f, f) = 0 \Leftrightarrow \int_I |f|^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$, vì f liên tục trên I.

Kết quả này chứng tỏ φ là một tích vô hướng trên $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$.

◆ **Định nghĩa 3** Cho $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$, và $f \in \mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$.

Ta nói rằng $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **hội tụ theo trung bình bình phương** đến f khi và chỉ khi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến f theo chuẩn N_2.

Nói cách khác: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ theo trung bình bình phương đến f khi và chỉ khi:

$$\int_I |f_n - f|^2 \underset{n\infty}{\to} 0.$$

Nhận xét:

1) Với mọi f, g thuộc $\mathcal{CL}^2(I,\mathbb{K})$, ta có:

$$|(f|g)| = \left|\int_I \overline{f}g\right| \le \int_I |\overline{f}g| = \int_I |fg| = N_1(fg) \le N_2(f)N_2(g).$$

2) Ánh xạ tích vô hướng $\varphi:\ (f, g) \to (f|g)$ liên tục trên $\left(\mathcal{CL}^2(I,\mathbb{K})\right)^2$, xem 1.6.2, Mệnh đề 3.

◆ **Mệnh đề 8** Cho $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, và I' là một khoảng thỏa mãn $I' \subset I$. Nếu f khả tích trên I thì f khả tích trên I'.

Chứng minh:
Bằng cách áp dụng 2.5.1, 2), Mệnh đề 3, lược đồ phép chứng minh như sau:

(f khả tích trên I) $\Leftrightarrow$ ($|f|$ khả tích trên I)

$\Rightarrow$ ($|f|$ khả tích trên I') $\Leftrightarrow$ (f khả tích trên I').

◆ **Mệnh đề 9**

Cho $a \in I$, $I' =]-\infty;a] \cap I$, $I'' = I \cap [a;+\infty[$, $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

1) Để f khả tích trên I, điều kiện cần và đủ là f khả tích trên I' và trên I''.

2) Hơn nữa, nếu f khả tích trên I thì: $$\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f.$$

Chứng minh:

1) Suy ra từ Mệnh đề 5 và từ 2.5.1, 2), Mệnh đề 4.

2) Giả thiết f khả tích trên I.

Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những đoạn có hợp bằng I sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a \in J_n.$$

Thế thì:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_{J_n} f = \int_{]-\infty;a]\cap J_n} f + \int_{J_n\cap[a;+\infty[} f,$$

và $$\int_{J_n} f \underset{n\infty}{\to} \int_I f,\qquad \int_{]-\infty;a]\cap J_n} f \underset{n\infty}{\to} \int_{I'} f,\qquad \int_{J_n\cap[a;+\infty[} f \underset{n\infty}{\to} \int_{I''} f$$

(do $\left(]-\infty;a]\cap J_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những đoạn mà hợp bằng I', và cũng tương tự với I''), suy ra:

$$\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f.$$

■

Chẳng hạn, nếu $a < c < b$, thì để f khả tích trên $]a;b[$, điều kiện cần và đủ là f khả tích trên $]a;c]$ và trên $[c;b[$, và khi đó ta có:

$$\int_{]a;b[} f = \int_{]a;c]} f + \int_{[c;b[} f.$$

■

Nhận xét:

Cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Nếu f khả tích trên I, thì với mọi khoảng I' sao cho $I' \subset I$, ta có:

$$\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f,$$

trong đó $\chi_{I'}$ là hàm đặc trưng của I': $\|f\| : \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in I' \\ 0 & \text{nếu } x \notin I' \end{cases} \end{array}$.

◆ **Ký hiệu** Nếu $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ khả tích trên I, và nếu $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ thỏa mãn: mọi khoảng mở nối a và b đều bao hàm trong I, thì ta ký hiệu: $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.

◆ **Mệnh đề 10** **(Hệ thức Chasles)**

Nếu $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ khả tích trên I thì với mọi $(a, b, c) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^3$ sao cho các khoảng mở nối a và b, a và c, b và c đều bao hàm trong I, thì

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Chứng minh:

Ta tách thành nhiều trường hợp tùy theo vị trí tương đối của a, b, c, rồi áp dụng Mệnh đề 9.

Bài tập

◊ **2.5.10 Ánh xạ bỏ được (hoặc không đáng kể)**

Một ánh xạ $f: I \to \mathbb{K}$ được gọi là bỏ được (hoặc không đáng kể) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K}) \\ f \quad \text{khả tích trên } I \\ \int_I |f| = 0 \end{cases}$$

Ở đây, ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ bỏ được từ I đến $\mathbb{K}$ là $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

a) Chứng minh rằng với mọi $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, f bỏ được khi và chỉ khi $f|_{[a;b]}$ bằng không với mọi đoạn $[a; b]$ bao hàm trong I, trừ ra tại một số hữu hạn điểm.

b) Chứng minh rằng $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$ là một iđêan của đại số $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, tức là:

$$\begin{cases} \mathcal{N} \neq \varnothing \\ \forall \alpha \in \mathbf{K};\ \forall f, g \in \mathcal{N}(I,\mathbf{K}), \quad \alpha f + g \in \mathcal{N}(I,\mathbf{K}) \\ \forall h \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{K});\ \forall f \in \mathcal{N}(I,\mathbf{K}); \quad hf \in \mathcal{N}(I,\mathbf{K}) \end{cases}$$

c) Cho $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy trong $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ khả tích trên I sao cho $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ theo trung bình trên I đến f. Chứng minh: $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

◊ **2.5.11 Tính khả tích của một hàm không xác định khắp nơi**

Cho D là một bộ phận của I sao cho với mọi đoạn J bao hàm trong I, $J \cap D$ giới nội, và cho $f: I\text{-}D \to \mathbb{K}$ là một ánh xạ. Ta nói rằng f khả tích trên I khi và chỉ khi tồn tại $f_1 \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ khả tích trên I và thoả mãn: $f_1|_{I-D} = f$.

Cho f: $I\text{-}D \to \mathbb{K}$ khả tích trên I. Chứng minh rằng với mọi $f_2 \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ mà $f_2|_{I-D} = f$ thì f_2 khả tích trên I và $\int_I f_2 = \int_I f_1$.

Tính chất trên cho phép ta định nghĩa :

$$\int_I f = \int_I f_2$$

trong đó, f_2 là một phần tử bất kỳ của $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ thác triển f.

Thí dụ: $\|f\| : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ khả tích trên $\mathbb{R}$.

◊ **2.5.12 Các không gian $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$**

Với $p \in [1;+\infty[$, ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ liên tục $f: I \to \mathbb{K}$ sao cho $|f|^p$ khả tích trên I, là $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$, và ký hiệu $\|\cdot\|_p$ là ánh xạ định nghĩa bởi:

$$\forall f \in \mathcal{CL}^p(I,\mathbb{K}), \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Thêm nữa, ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ bị chặn từ I đến $\mathbb{K}$ là $\mathcal{CL}^\infty(I, \mathbb{K})$, và ký hiệu $\|\cdot\|_\infty$ là ánh xạ từ $\mathcal{CL}^\infty(I, \mathbb{K})$ vào $\mathbb{R}$ định nghĩa là:

$$\forall f \in \mathcal{CL}^\infty(I,\mathbb{K}), \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in I} |f(x)| .$$

Cho $p \in [1;+\infty[$. Chứng minh rằng, $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$ là một $\mathbb{K}$-kgv, và rằng $\|\cdot\|_p$ là một chuẩn trên $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$, và nếu $p \in]1;+\infty[$ thì với $q = \dfrac{p}{p-1}$ (tức là sao cho $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$), ta có:

$$\forall f \in \mathcal{CL}^p(I,\mathbb{K}),\ \forall g \in \mathcal{CL}^q(I,\mathbb{K}), \qquad \begin{cases} fg \in \mathcal{CL}^1(I,\mathbb{K}) \\ \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \end{cases}$$

(Sử dụng bài tập 1.1.9).

◊ **2.5.13*** Cho $f \in C(I, \mathbb{K})$. Ký hiệu $E_f = \left\{u \in]0;1];\ f \in \mathcal{CL}^{1/u}(I,\mathbb{K})\right\}$, xem bài tập 2.5.12.

a) Chứng minh rằng E_f là một khoảng của $\mathbb{R}$.

b) Giả thiết $f \neq 0$ và $E_f \neq \varnothing$. Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : \begin{array}{l} E_f \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \ln(\|f\|_{1/u}) \end{array}$ lồi.

c) Suy ra rằng với mọi $(p, r, s) \in [1;+\infty[^3$ thoả mãn $r < p < s$, ta có:

$$\mathcal{CL}^r(I,\mathbb{K}) \cap \mathcal{CL}^s(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{CL}^p(I,\mathbb{K}) .$$

◊ **2.5.14** Cho $p, p' \in [1;+\infty[$ sao cho $p < p'$. Chứng minh rằng các thu hẹp của $\|\cdot\|_p$ và $\|\cdot\|_{p'}$, trên $E = \mathcal{CL}^p(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \cap \mathcal{CL}^{p'}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (xem bài tập 2.5.12) không so sánh với nhau được, tức là tồn tại $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ trong E thỏa mãn:

$$\begin{cases} \|f_n\|_p \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty & \text{và} \quad \|f_n\|_{p'} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \|g_n\|_p \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{và} \quad \|g_n\|_{p'} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}.$$

3) Tính khả tích trên một khoảng nửa đóng hoặc nửa mở

◆ **Mệnh đề 1**

Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K})$. Ký hiệu $F: [a;b[\to \mathbb{K}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall X \in [a;b[, \quad F(X) = \int_a^X f .$$

Nếu f khả tích trên $[a;b[$ thì F có giới hạn hữu hạn tại b và:

$$\int_{[a;b[} f = \lim_{X \to b} \int_a^X f .$$

Khi đó, tích phân $\int_{[a;b[} f$ cũng được ký hiệu là $\int_a^b f$ (hay: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh:

1) Trường hợp f lấy giá trị thực

Giả thiết f khả tích trên $[a;b[$ và lấy giá trị thực. Khi đó f^+ và f^- đều khả tích trên $[a;b[$ và:

$$\int_{[a;b[} f = \int_{[a;b[} f^+ - \int_{[a;b[} f^-$$

Theo 2.5.1, 3), Mệnh đề 1:

$$\int_a^X f^+ \underset{X \to b}{\to} \int_{[a;b[} f^+ \text{ và } \int_a^X f^- \underset{X \to b}{\to} \int_{[a;b[} f^-$$

Vì: $\quad \forall X \in [a;b[, \quad F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (f^+ - f^-) = \int_a^X f^+ - \int_a^X f^-$,

nên suy ra F có giới hạn hữu hạn tại b và:

$$\lim_{X \to b} F(x) = \int_{[a;b[} f^+ - \int_{[a;b[} f^- = \int_{[a;b[} f .$$

2) Trường hợp f lấy giá trị phức

Giả thiết f: $[a;b[\to \mathbb{C}$ khả tích trên $[a;b[$. Khi đó, Ref và Imf đều khả tích trên $[a;b[$ và:

$$\int_{[a;b[} f = \int_{[a;b[} \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_{[a;b[} \operatorname{Im} f .$$

Theo 1) (trường hợp giá trị thực):

$$\int_a^X \operatorname{Re} f \underset{X \to b}{\to} \int_{[a;b[} \operatorname{Re} f \quad \text{và} \quad \int_a^X \operatorname{Im} f \underset{X \to b}{\to} \int_{[a;b[} \operatorname{Im} f$$

Vì: $\forall X \in [a;b[,\quad F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (\operatorname{Re} f + \mathrm{i}\operatorname{Im} f) = \int_a^X \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\int_a^X \operatorname{Im} f$

nên suy ra rằng F có giới hạn hữu hạn tại b và:

$$\lim_{X\to b} F(x) = \int_{[a;b[} \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\int_{[a;b[} \operatorname{Im} f = \int_{[a;b[} f.$$

Nhận xét:

1) Kết quả này mở rộng kết quả ở 2.5.1, 3), Mệnh đề 1 (ngoại trừ những gì không liên quan đến cận trên).

2) Có thể xảy ra là F có giới hạn hữu hạn tại b nhưng F không khả tích trên $[a;b[$.

Xét thí dụ: $a = 1$, $b = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

- Ta chứng minh f không khả tích trên $[1;+\infty[$.

Cho $X \in [3;+\infty[$, ta có: $\displaystyle\int_{1+\pi/2}^{X+\pi/2} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x \underset{[y=x-\pi/2]}{=} \int_1^X \frac{|\cos y|}{y+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y$,

suy ra: $$2\int_{1+\pi/2}^{X+\pi/2}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_{1+\pi/2}^{X+\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x + \int_1^X \frac{|\cos y|}{y+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y \geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{1+\pi/2}^{X} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \left[\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_{x+\frac{\pi}{2}}^{X} = \ln\left(X+\frac{\pi}{2}\right) - \ln(1+\pi),$$

do đó: $$\int_1^X \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \underset{X\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Kết quả đó chứng tỏ $|f|$ không khả tích trên $[1;+\infty[$, và vì vậy theo định nghĩa, f không khả tích trên $[1;+\infty[$.

- Bằng cách tích phân từng phần, ta có với mọi $X \in [1;+\infty[$:

$$F(X) = \int_1^X f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Một mặt, ta có: $-\dfrac{\cos X}{X} + \cos 1 \underset{X\to+\infty}{\to} \cos 1$.

Mặt khác thì $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ khả tích trên $[1;+\infty[$ (theo định lý hàm trội và thí dụ Riemann, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$) do đó, theo mệnh đề trên, $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x \underset{X\to+\infty}{\to} \int_{[1;+\infty[} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$.

Kết quả là F có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$:

$$F(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 1 - \int_{[1;+\infty[} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x \ .$$

Xem thêm dưới đây, § 2.5.4. ■

◆ **Hệ quả** Cho $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ sao cho $a < b$, $f \in \mathcal{CM}(]a;b], \mathbb{K})$. Ký hiệu F: $]a;b] \to \mathbb{K}$ là ánh xạ định nghĩa bởi:

$$\forall X \in]a;b], \qquad F(X) = \int_X^b f \ .$$

Nếu f khả tích trên $]a;b]$ thì F có giới hạn hữu hạn tại a, và:

$$\int_{]a;b]} f = \lim_{X\to a} \int_X^b f \ .$$

Khi đó, tích phân $\displaystyle\int_{]a;b]} f$ cũng được ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f$ (hay: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh:
Cùng một phương pháp như đối với hệ quả của Mệnh đề 1 ở 2.5.1, 3). ■

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, f: $[a;b[\to \mathbb{K}$ liên tục và có giới hạn hữu hạn l tại b.
Khi đó f khả tích trên $[a;b[$, và nếu ký hiệu $\tilde{f} : [a;b] \to \mathbb{K}$ là thác triển liên tục của f trên $[a;b]$, xác định bởi:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu} \quad x \in [a;b[\\ l & \text{nếu} \quad x = b \end{cases} ,$$

thì ta có:
$$\int_{[a;b[} f = \int_a^b \tilde{f} \ .$$

Chứng minh:

- Với mọi đoạn J bao hàm trong $[a;b[$, ta có:

$$\int_J |f| = \int_J |\tilde{f}| \le \int_a^b |\tilde{f}| \ .$$

Kết quả trên chứng tỏ $|f|$ khả tích trên $[a;b[$, do đó, f khả tích trên $[a;b[$.

- Vì $\tilde{f}$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nên $\tilde{f}$ bị chặn và với mọi X thuộc $[a;b[$,

ta có:

$$\left|\int_a^X f - \int_a^b \tilde{f}\right| = \left|\int_a^X \tilde{f} - \int_a^b \tilde{f}\right| = \left|\int_b^X \tilde{f}\right| \le \int_X^b \left|\tilde{f}\right| \le (b-X)\left\|\tilde{f}\right\|_\infty \underset{X\to b}{\to} 0\ ,$$

do đó: $\displaystyle\int_a^X f \underset{X\to b}{\to} \int_a^b \tilde{f}$.

Theo Mệnh đề 1, ta kết luận rằng: $\displaystyle\int_{[a;b[} f = \int_a^b \tilde{f}$.

◆ **Mệnh đề 3**

Cho $(a,b)\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ sao cho $a<b, f\in \mathcal{CM}(]a;b[,\mathbb{K})$.

1) Ba tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi:

(i) f khả tích trên $]a;b[$

(ii) Tồn tại $c\in\ ]a;b[$ sao cho f khả tích trên $]a;c]$ và trên $[c;b[$

(iii) Với mọi c thuộc $]a;b[$, f khả tích trên $]a;c]$ và trên $[c;b[$.

2) Nếu f khả tích trên $]a;b[$ thì với mọi c thuộc $]a;b[$, ánh xạ

F: $]a;b[\ \to \mathbb{K}$ định nghĩa bởi: $\displaystyle F(X)=\int_c^X f$ có giới hạn hữu hạn tại a

và tại b, và ta có:

$$\int_{]a;b[} f = \lim_{X\to b} F(x) - \lim_{X\to a} F(x)$$

Khi đó, tích phân $\displaystyle\int_{]a;b[} f$ cũng được ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f$ (hay: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

Chứng minh:

1) Xem 2.5.2, 2), Mệnh đề 9.

2) Theo hệ thức Chasles: $\displaystyle\int_{]a;b[} f = \int_{]a;c]} f + \int_{[c;b[} f$.

Mặt khác, do f khả tích trên $]a;c]$ và trên $[c;b[$, nên theo Mệnh đề 1, ta có:

$$F(X) = -\int_X^c f \underset{X\to a}{\to} -\int_{]a;c]} f \quad \text{và} \quad F(X)=\int_c^X f \underset{X\to b}{\to} \int_{[c;b[} f\ .$$

Ta kết luận: $\displaystyle\int_{]a;b[} f = \lim_{X\to b} F(X) - \lim_{X\to a} F(X)$. ■

◆ **Ký hiệu** Cho $(a,b)\in(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})\times(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ sao cho $a < b$, I là một khoảng có các mút là a, b; $F: I \to \mathbb{E}$ là một ánh xạ liên tục trên I. Nếu F có giới hạn hữu hạn tại a và tại b thì ta ký hiệu:

$$\left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b} = \left[F(x)\right]_a^b = \lim_b F - \lim_a F \ .$$

Như thế, theo mệnh đề trên, nếu $f \in \mathcal{CM}(]a;b[, \mathbb{E})$ khả tích trên $]a;b[$ thì nếu ký hiệu Φ là một nguyên hàm (liên tục) của f trên $]a;b[$, ta có:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\Phi(x)\right]_a^b \ .$$

■

◆ **Mệnh đề 4** Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})$, $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{E})$, $g \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{R})$.

Nếu: $\begin{cases} g \ge 0 \\ g \text{ khả tích trên } [a;b[\\ f = \underset{b}{O}(g) \end{cases}$, thì f khả tích trên $[a;b[$.

Chứng minh:
Vì $f = \underset{b}{O}(g)$, nên tồn tại $c \in [a;b[$ và $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall x \in [c;b[, \qquad |f(x)| \le Mg(x) \ .$$

Vì g khả tích trên $[c;b[$ nên ta suy ra f khả tích trên $[c;b[$ (định lý hàm trội), và do đó f khả tích trên $[a;b[$.

■

Để tính một tích phân $\int_{[a;b[} f$, trước hết ta chứng minh rằng f khả tích trên $[a;b[$, sau đó tính $\lim_{X\to b} \int_a^X f$. Về điểm này, ta sẽ sử dụng phương pháp tính tích phân (Tập 1, chương 6) hoặc phép tính nguyên hàm (chương 9). Thường ta sẽ phải sử dụng những phép tính tích phân từng phần hay những phép đổi biến.

◆ **Định lý (Phép đổi biến)**
Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, J là một khoảng của $\mathbb{R}$ với các mút ký hiệu là α, β; $\varphi: J \to I$ là một C^1-vi phôi, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{E})$. Khi đó f khả tích trên I khi và chỉ khi $(f\circ\varphi)\varphi'$ khả tích trên J, và trong trường hợp này thì:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta^-)} f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' \ .$$

Chứng minh:
Ta nhắc lại (xem Tập 1, 5.3.1, Định nghĩa) rằng $\varphi : J \to I$ là một C^1-vi phôi khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } J \\ \varphi \text{ là song ánh} \\ \varphi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I \end{cases}$$
và (xem Tập 1, 5.3.1, Định lý 4) rằng $\varphi: J \to I$ là một C^1-vi phôi khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } J \\ \varphi(J) = I \\ \varphi' > 0 \text{ hoặc } \varphi' < 0 \end{cases}$$
Giả thiết, chẳng hạn $J = [\alpha; \beta[$, và φ tăng nghiêm ngặt, do đó $I = [\varphi(\alpha); \varphi(\beta^-)[$.

1) Giả thiết f khả tích trên I. Ánh xạ $y \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^{y} |f|$ có giới hạn hữu hạn khi y dần tới $\varphi(b^-)$. Vì $\varphi(x) \underset{x\to\beta}{\to} \varphi(\beta^-)$, nên ánh xạ $x \mapsto \int_{\alpha}^{x} |f \circ \varphi||\varphi'| = \int_{\phi(\alpha)}^{\varphi(x)} |f|$ có giới hạn hữu hạn khi x dần đến β. Theo 2.5.1, 3), Mệnh đề 1, ta suy ra rằng $(f\circ\varphi)\varphi'$ khả tích trên J.

2) Đảo lại, giả thiết $(f\circ\varphi)\varphi'$ khả tích trên J. Ánh xạ $x \mapsto \int_{\alpha}^{x} |f \circ \varphi||\varphi'|$ có giới hạn hữu hạn khi x dần đến β, do đó ánh xạ: $x \mapsto \int_{\phi(\alpha)}^{\varphi(x)} |f| = \int_{\alpha}^{x} |f \circ \varphi||\varphi'|$ cũng thế.

Và do $y \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^{y} |f| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\varphi^{-1}(y))} |f|$ cũng có giới hạn hữu hạn khi y dần đến $\varphi(\beta^-)$ theo phép hợp giới hạn, và cuối cùng thì f khả tích trên $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta^-)[$
3) Với các giả thiết trên, vì với mọi x thuộc $[\alpha; \beta[$ ta có:
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f = \int_{\alpha}^{x} (f \circ \varphi)\varphi'$$
và do f và $(f\circ\varphi)\varphi'$ theo thứ tự khả tích trên $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta^-)[$ và $[\alpha; \beta[$, nên chuyển qua giới hạn với x dần đến β, ta được:
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta^-)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' .$$

Bài tập

◊ **2.5.15** Khảo sát sự tồn tại và tính các tích phân sau đây (chứng minh tính khả tích, sau đó tính tích phân; $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, nếu nó tồn tại, sẽ chỉ tích phân: $\int_{[a;b]} f$ hay $\int_{]a;b]} f$, hay $\int_{[a;b[} f$, hay $\int_{]a;b[} f$, tuỳ theo từng thí dụ:

a) $\int_1^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^3(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$

b) $\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(x^5+1)^{3/2}}\mathrm{d}x$

c) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{x^2+1}}$

d) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

e) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$

f) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

g) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

h) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x^2}}$

i) $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{1}{x-\alpha}\mathrm{d}x$, $\alpha\in\,]-\infty;0[\,\cup\,[1;+\infty[$

j) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2, 0<a<b$

k) $\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x)^{3/2}}\mathrm{d}x$

l) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\mathrm{d}x$

m) $\int_0^{+\infty}(\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1})\mathrm{d}x$

n) $\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{Arc}\tan x-\pi}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

o) $\int_0^{+\infty}\frac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

p) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^2}dx$

q) $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\ln\tan x\mathrm{d}x$

và r) $\int_0^{\pi}x\ln\sin x\mathrm{d}x$

r) $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\ln\sin x\mathrm{d}x$

◊ **2.5.16** Cho f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu} \quad x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$

Chứng minh: a) f khả vi trên $[0;1]$
b) f' không khả tích trên $]0;1]$.

◊ **2.5.17** Với $\alpha \in \mathbb{R}$, khảo sát sự tồn tại và tính tích phân (nếu tồn tại):

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos\alpha \cos x}.$$

◊ **2.5.18** Tìm điều kiện cần và đủ đối với $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ để $x \mapsto x(\text{Arc}\tan x)^2 - ax - b - \dfrac{c}{x}$ khả tích trên $[1;+\infty[$, và tính tích phân trong trường hợp đó.

◊ **2.5.19** Với $(a,b,c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, tính $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x} dx$.

◊ **2.5.20** Chứng minh rằng, với mọi x thuộc $]-1;1[$, tích phân: $f(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ tồn tại và: $f(x) + f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$.

◊ **2.5.21** Với $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, tính: $\displaystyle\min_{0 \le k \le 2n-2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{x^{2n}+1} dx \right)$.

◊ **2.5.22** Chứng minh:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{x^4 + \sin^4 t}} dt \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}}$

b) $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^3}} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{-\frac{1}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 nx} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

d)* $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 nx} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \int_1^{+\infty} e^{-t^x} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

◊ **2.5.23** Cho f: $[0;1] \to \mathbb{C}$ liên tục. Xác định $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{1}{t^2} f(t) dt$.

◊ **2.5.24** Khảo sát và biểu diễn đồ thị các hàm sau đây (x : biến thực):

a) $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$ b) $f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ c) $f(x)=\int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t}dt$.

◊ **2.5.25** Cho f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ liên tục, bị chặn. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(\frac{t}{x})}{1+t^2}dt$.

◊ **2.5.26** Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, liên tục và bình phương khả tích trên $[0;+\infty[$ là $C\mathcal{L}^2([0;+\infty[, \mathbb{R})$.

Cho $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 sao cho f, f', f'' thuộc $C\mathcal{L}^2([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

a) Kiểm chứng rằng : $f^2 + f''^2 - f'^2 = (f + f' + f'')^2 - ((f + f')^2)'$

b) Chứng minh: $\int_0^{+\infty}\left(f^2 + f''^2 - f'^2\right) \geq 0$ và khảo sát trường hợp đẳng thức.

◊ **2.5.27** Với $x \in \mathbb{R}_+^*$, ta ký hiệu:

$$I(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}} \quad \text{và} \quad J(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}dt .$$

a) Chứng minh: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad I(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$.

b) Chứng minh: $I(x)-J(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t}dt = \ln 2$.

c) Tính $J(x)$ với $x \in]0;1[$.

d) Suy ra: $I(x) = -\ln x + 2\ln 2 + \underset{x\to 0^+}{o}(1)$.

◊ **2.5.28** Tính : $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t(x-t)}}dt$.

◊ **2.5.29*** Cho f : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ liên tục, bình phương khả tích trên $[0;+\infty[$, và g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f & \text{nếu} \quad x\neq 0\\ f(0) & \text{nếu} \quad x=0\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng g liên tục trên $\mathbb{R}_+$.

b) Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 \leq a < b$.

α) Chứng minh: $\int_a^b g^2 = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b fg$.

β) Suy ra: $$\int_a^b g^2 \le a g^2(a) + 2\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$$

và $$\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} \le \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2} + \left(a g^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}.$$

c) Chứng minh rằng g^2 và fg khả tích trên $[0;+\infty[$ và $\int_0^{+\infty} g^2 = 2\int_0^{+\infty} fg$.

◊ **2.5.30** Cho $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục và khả tích trên $\mathbb{R}$. Chứng minh:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

◊ **2.5.31** Với mọi $n \in \mathbb{N}$, xét f_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+|x-n|}$

a) Khảo sát dãy $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Tính : $\int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x))^2\,\mathrm{d}x$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

c) Cho g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và bình phương khả tích trên $\mathbb{R}$. Chứng minh:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

◊ **2.5.32** Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $(h, r) \in \mathbb{N}^2$ duy nhất sao cho

$$\left(n = 2^h + r,\quad 0 \le r < 2^h\right),$$

và ta ký hiệu f_n: $[0;1[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \left[\dfrac{r}{2^h}; \dfrac{r+1}{2^h}\right[\\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Chứng minh rằng, với mọi p thuộc $[1;+\infty[$, dãy $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đến 0 trong ($\mathcal{CL}^p([0;1[,\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_p$) (xem bài tập 2.5.12), nhưng $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ phân kỳ với mọi x thuộc $[0;1[$.

2.5.3 Tích phân các quan hệ so sánh

Trong § 2.5.3 này, $(a,b)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ sao cho $a<b$.

1) Trường hợp các hàm khả tích

◆ **Mệnh đề 1** Cho $f\in\mathcal{CM}([a;b[,\mathbb{K})$, $g\in\mathcal{CM}([a;b[,\mathbb{R})$.

$$\text{Nếu } \begin{cases} g\ge 0 \\ g \text{ khả tích trên } [a;b[\\ f = \underset{b}{o}(g) \end{cases},\quad \text{thì } \begin{cases} f \text{ khả tích trên } [a;b[\\ \displaystyle\int_x^b f = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g\right) \end{cases}$$

Chứng minh:

Ta đã biết (xem 2.5.3 *3)*, Mệnh đề 4) rằng f khả tích trên $[a;b[$.

Cho $\varepsilon>0$. Vì $f=\underset{b}{o}(g)$ nên tồn tại $X\in[a;b[$ sao cho:

$$\forall t\in[X;b[,\quad |f(t)|\le\varepsilon g(t).$$

Vậy với mọi x thuộc $[X;b[$:

$$\left|\int_x^b f\right|\le\int_x^b|f|\le\int_x^b\varepsilon g=\varepsilon\int_x^b g,$$

chứng tỏ rằng:
$$\int_x^b f=\underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g\right).$$

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f\in\mathcal{CM}([a;b[,\mathbb{K})$, $g\in\mathcal{CM}([a;b[,\mathbb{R})$.

$$\text{Nếu } \begin{cases} g\ge 0 \\ g \text{ khả tích trên } [a;b[\\ f = \underset{b}{O}(g) \end{cases},\quad \text{thì } \begin{cases} f \text{ khả tích trên } [a;b[\\ \displaystyle\int_x^b f = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g\right) \end{cases}$$

Chứng minh:
Tương tự như trên đây.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $f, g\in\mathcal{CM}([a;b[,\mathbb{R})$.

$$\text{Nếu } \begin{cases} g\ge 0 \\ g \text{ khả tích trên } [a;b[\\ f \underset{b}{\sim} g \end{cases},\quad \text{thì } \begin{cases} f \text{ khả tích trên } [a;b[\\ \displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g \end{cases}$$

Chứng minh:

Từ các giả thiết ta suy ra rằng f khả tích trên $[a;b[$ (Định lý hàm tương đương, 2.5.1, *3)*, Mệnh đề 2).

Ta lại có:

$$f \underset{b}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = \underset{b}{o}(g) \Rightarrow \int_x^b (f-g) = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g\right) \Leftrightarrow \int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g .$$

2) Trường hợp các hàm không khả tích

◆ **Mệnh đề 1** Cho $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{R})$.

Nếu $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ không khả tích trên } [a;b[, \\ f = \underset{b}{o}(g) \end{cases}$ thì $\displaystyle\int_a^x f = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g\right)$.

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $f = \underset{b}{o}(g)$ nên tồn tại $X \in [a;b[$ sao cho:

$$\forall t \in [X;b[, \qquad |f(t)| \leq \varepsilon g(t) .$$

Cho $x \in [X;b[$, ta có:

$$\left|\int_a^x f\right| \leq \int_a^X |f| + \int_X^x |f| \leq \int_a^X |f| + \varepsilon \int_X^x g = \int_a^X (|f| - \varepsilon g) + \varepsilon \int_a^x g .$$

Do $g \geq 0$ nên ánh xạ $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$ tăng trên $[a;b[$. Vì $g \geq 0$ và vì g không khả tích trên $[a;b[$ nên theo 2.5.1, 3), Mệnh đề 1, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$ không có giới hạn hữu hạn tại b. Kết luận: $\displaystyle\int_a^x g \underset{x\to b}{\to} +\infty$.

Do $\displaystyle\int_a^X (|f| - \varepsilon g)$ cố định và không phụ thuộc x, và do $\displaystyle\int_a^x g \underset{x\to b}{\to} +\infty$, nên tồn tại $X_1 \in [X;b[$ sao cho :

$$\forall x \in [X_1;b[, \quad \int_a^X (|f| - \varepsilon g) \leq \varepsilon \int_a^x g .$$

Như thế: $$\forall x \in [X_1;b[, \quad \left|\int_a^x f\right| \le 2\varepsilon \int_a^x g,$$

và cuối cùng là: $$\int_a^x f = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g\right).$$

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{E})$, $g \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{E})$.

Nếu $\begin{cases} g \ge 0 \\ g \text{ không khả tích trên } [a;b[\\ f = \underset{b}{O}(g) \end{cases}$, thì $\int_a^x f = \underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x g\right)$.

Chứng minh:

Tương tự như trên đây.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $f, g \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{R})$.

Nếu $\begin{cases} g \ge 0 \\ g \text{ không khả tích trên } [a;b[\\ f \underset{b}{\sim} g \end{cases}$, thì $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \left(\int_a^x g\right)$.

Chứng minh:

$$f \underset{b}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = \underset{b}{o}(g) \Rightarrow \int_a^x (f-g) = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g\right) \Leftrightarrow \int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g.$$

Bài tập

◊ **2.5.33** Chứng minh: $$\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.$$

◊ **2.5.34** Chứng minh: $$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \mathrm{e}^{-t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

◊ **2.5.35** Cho $f \in \mathcal{CM}([0;+\infty[, \mathbb{K})$. Chứng minh rằng nếu f có giới hạn hữu hạn l tại $+\infty$ thì:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} l.$$

2.5.4 Tích phân suy rộng

◆ **Định nghĩa 1** Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho:

$$a < b, f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K}).$$

Ta nói rằng **tích phân suy rộng** $\int_a^{\to b} f$ (hay: $\int_a^{\to b} f(x)\mathrm{d}x$) **hội tụ** khi và chỉ khi ánh xạ $F: \begin{array}{ccc} [a;b[& \to & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \int_a^X f \end{array}$ có giới hạn hữu hạn tại b; trong trường hợp này thì giới hạn đó được ký hiệu một cách lạm dụng là $\int_a^b f$ (hay: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$) và được gọi là **tích phân suy rộng của** f **trên** $[a;b[$.

Tương tự, nếu $-\infty \le a < b < +\infty$ và $f \in \mathcal{CM}(]a;b], \mathbb{K})$, ta nói rằng **tích phân suy rộng** $\int_{\to a}^{b} f$ (hay: $\int_{\to a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$) **hội tụ** khi và chỉ khi ánh xạ $F: \begin{array}{ccc}]a;b] & \to & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \int_X^b f \end{array}$ có giới hạn hữu hạn tại a; trong trường hợp này thì giới hạn đó được ký hiệu một cách lạm dụng là $\int_a^b f$ (hay: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$) và được gọi là **tích phân suy rộng của** f **trên** $]a;b]$.

Với các thuật ngữ trên, Mệnh đề 1 ở 2.5.2, *3)* được diễn tả bởi Mệnh đề sau.

◆ **Mệnh đề 1** Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\right)$ sao cho:

$$a < b, f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K}).$$

Nếu f khả tích trên $[a;b[$ thì tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ hội tụ, và tích phân suy rộng $\int_a^b f$ bằng $\int_{[a;b[} f$.

Nhận xét:

Một ánh xạ $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K})$ có thể không khả tích trên $[a;b[$, mà tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ lại hội tụ. Chẳng hạn ta đã thấy là $f: \begin{array}{ccc}[1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x}\end{array}$ không hội tụ trên $[1;+\infty[$, nhưng trong khi đó thì tích phân suy rộng $\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ hội tụ, và ánh xạ $F: \begin{array}{ccc}[1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \int_1^X \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\end{array}$ có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho:

$$a < b, f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K}).$$

Ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ (hay: $\int_a^{\to b} f(x)\mathrm{d}x$) **bán hội tụ** khi và chỉ khi f không khả tích trên $[a;b[$, và tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ hội tụ.

Định nghĩa tương tự đối với $\int_{\to a}^{b} f$.

Thí dụ:

Tích phân suy rộng $\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ bán hội tụ.

Nhận xét:

1) Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K})$. Ta nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ **hội tụ tuyệt đối** khi và chỉ khi $\int_a^{\to b} |f|$ hội tụ.

- Tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi f khả tích trên $[a;b[$.

- Tích phân suy rộng $\int_a^{\to b} f$ bán hội tụ khi và chỉ khi: tích phân suy rộng

$\int_a^{\to b} f$ hội tụ và không hội tụ tuyệt đối.

2) Như ta đã thấy trên đây, một phép tính tích phân từng phần thường có thể cho phép thay việc khảo sát một tích phân suy rộng bán hội tụ bằng việc khảo sát tích phân của một hàm khả tích.

Chẳng hạn: $\forall X \in [1;+\infty[,\quad \int_1^X \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}dx,$

do đó vì mọi số hạng đều có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$ nên:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx,$$

trong đó tích phân $\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ bán hội tụ và $\int_1^{\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ hội tụ tuyệt đối.

■

- **Mệnh đề 2 (Đổi cận dưới)**

Cho $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho:

$$a < b, c \in [a; b[, f \in \mathcal{CM}([a;b[, \mathbb{K}).$$

1) $\int_a^{\to b} f$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_c^{\to b} f$ hội tụ.

2) Trong trường hợp đó, ta có: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Chứng minh:

Ta có: $\forall X \in [a;b[,\quad \int_a^X f = \int_a^c f + \int_c^X f.$

Vậy $X \mapsto \int_a^X f$ có giới hạn hữu hạn khi X dần đến b khi và chỉ khi $X \mapsto \int_c^X f$ có giới hạn hữu hạn, và trong trường hợp đó, thì bằng cách chuyển qua giới hạn khi X dần đến b, ta có:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

■

Mệnh đề trên cho phép ta định nghĩa:

◆ **Định nghĩa 3** Cho $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ sao cho:

$a < b, f \in \mathcal{CM}(]a;b[, \mathbb{K})$.

Ta nói rằng **tích phân suy rộng** $\int_{\to a}^{\to b} f$ **hội tụ** khi và chỉ khi tồn tại $c \in\,]a;b[$ sao cho hai tích phân suy rộng $\int_{\to a}^{c} f$ và $\int_{c}^{\to b} f$ hội tụ.

Trong trường hợp đó, phần tử $\int_a^c f + \int_c^b f$ của $\mathbb{K}$ không phụ thuộc vào việc chọn c thuộc $]a;b[$ và được gọi là **tích phân suy rộng của f trên** $]a;b[$, ký hiệu là $\int_a^b f$.

• Theo Mệnh đề 2, nếu tồn tại $c \in\,]a;b[$ sao cho các tích phân suy rộng $\int_{\to a}^{c} f$ và $\int_{c}^{\to b} f$ hội tụ, thì với mọi d thuộc $]a;b[$, các tích phân suy rộng $\int_{\to a}^{d} f$ và $\int_{d}^{\to b} f$ cũng hội tụ.

• Trong trường hợp đó, ta có với mọi $(c,d) \in\,]a;b[^2$:

$$\int_a^d f + \int_d^b f = \left(\int_a^c f + \int_c^d f\right) + \left(\int_d^c f + \int_c^b f\right) = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

■

Loại của một tích phân suy rộng $\int_{\to a}^{b} f$ hay $\int_{a}^{\to b} f$ hay $\int_{\to a}^{\to b} f$ là tính hội tụ hoặc phân kỳ của nó.

♦ **Mệnh đề 3** Cho $(a,b)\in(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})\times(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ sao cho:

$$a<b,\ c\in\,]a;b[\,,\ f\in \mathcal{CM}(]a;b[,\mathbb{K}).$$

Nếu f khả tích trên $]a;b[$ thì $\int_{\to a}^{\to b} f$ hội tụ và tích phân suy rộng $\int_a^b f$ bằng $\int_{]a;b[} f$.

Chứng minh:

Áp dụng Mệnh đề 1 cho các tích phân $\int_{\to a}^{c} f$ và $\int_{c}^{\to b} f$, với $c\in\,]a;b[$ bất kỳ.

Bài tập

◊ **2.5.36** Xác định loại của các tích phân suy rộng sau đây:

a) $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ b) $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{\sin x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

c) $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\operatorname{sh}\sqrt{x}}dx$ d) $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty}\frac{1}{x}e^{i\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx$

e) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\sin(x+\ln x)dx$.

◊ **2.5.37** Chứng minh rằng $\displaystyle\int_{1}^{\to+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}}\sin x\,dx$ hội tụ.

◊ **2.5.38** Xác định: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{\cos t}{t+\sin t}dt$.

◊ **2.5.39** Chứng minh: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

◊ **2.5.40** Chứng minh: $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\cos x}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

◊ **2.5.41** Cho f: $]0;1] \to \mathbb{C}$ liên tục sao cho: $\displaystyle\int_{\to 0}^{1}\frac{1}{t}f(t)dt$ hội tụ.

a) Chứng minh rằng $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} f$ hội tụ.

b) Ta ký hiệu ánh xạ xác định bởi: $\forall x \in [0;1],\quad g(x) = \displaystyle\int_0^x f$

là g: $[0;1] \to E$. Chứng minh rằng g khả vi bên phải tại 0 và $g'_p(0) = 0$.

2.5.5 Tích phân phụ thuộc tham số

Trong mục này, chúng ta sẽ tổng quát hóa việc khảo sát ở §2.3.12 cho trường hợp các hàm khả tích trên một khoảng bất kỳ.

Trong § 2.5.5 này, I chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, A là một bộ phận của $\mathbb{R}^m$, $F : A\times I \to \mathbb{K}$ là một ánh xạ.

Nếu với mỗi x thuộc A mà ánh xạ $F(x, .) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & F(x,t)\end{array}$ liên tục từng khúc và khả tích trên I, thì ta có thể xét ánh xạ f: $A \to \mathbb{K}$ được định nghĩa là:

$$\forall x \in A,\qquad f(x) = \int_I F(x,t)dt.$$

Mục tiêu của § 2.5.5 này là suy ra các tính chất của f từ các tính chất của F.

Trong điểm *I)* này, A chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$.

I) Tính liên tục

◆ **Định nghĩa 1** Ta nói rằng một ánh xạ $F : A\times I \to \mathbb{K}$ **thỏa mãn giả thiết có hàm trội** (viết tắt: GTHT) trên $A \times I$ khi và chỉ khi tồn tại một ánh xạ φ: $I \to \mathbb{R}$ liên tục, ≥ 0, khả tích trên I, sao cho:

$$\forall (x,t) \in A\times I,\qquad |F(x,t)| \leq \varphi(t).$$

***Nhận xét*:**

Có thể thay giả thiết φ liên tục bởi: $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

♦ **Định lý** **(Tính liên tục dưới dấu $\int_I$)**

Nếu $\begin{cases} \bullet\ F \text{ liên tục trên } A \times I \\ \bullet\ F \text{ thỏa mãn giả thiết có hàm trội trên } A \times I \end{cases}$

thì $\begin{cases} \bullet\ \text{Với mọi } x \text{ thuộc } A,\ F(x,.) \text{ khả tích trên } I \\ \bullet\ \text{Ánh xạ } f : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ liên tục trên } A \end{cases}$

Chứng minh:

Theo định lý hàm trội (2.5.1, *2)*, Mệnh đề 2), với mọi x thuộc A, $F(x, .)$ khả tích trên I. Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại một đoạn J bao hàm trong I sao cho $\int_{I-J} \varphi(t)\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{3}$,

trong đó $\int_{I-J} \varphi(t)\mathrm{d}t$ chỉ tổng của hai tích phân trên các đoạn con của I. Với mọi (x_0, x) thuộc A^2, ta có:

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = \left|\int_I F(x,t)\mathrm{d}t - \int_I F(x_0,t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le \left|\int_J \big(F(x,t) - F(x_0,t)\big)\mathrm{d}t\right| + \int_{I-J} \left|F(x,t)\right|\mathrm{d}t + \int_{I-J} \left|F(x_0,t)\right|\mathrm{d}t .$$

Một mặt ta có:

$$\int_{I-J} \left|F(x,t)\right|\mathrm{d}t + \int_{I-J} \left|F(x_0,t)\right|\mathrm{d}t \le 2 \int_{I-J} \left|\varphi(t)\right| dt \le \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Mặt khác, theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_a^b$ (2.3.12, *1)*, Định lý) áp dụng cho đoạn J, tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall x \in A, \qquad \left(\left\|x - x_0\right\| \le \eta \Rightarrow \left|\int_J (F(x,t) - F(x_0,t))\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Như thế: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A$, $\left\|x - x_0\right\| \le \eta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| \le \varepsilon$,

và do đó f liên tục trên A.

■

***Thí dụ*:**

Cho $f \in \mathcal{CL}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ và bị chặn.

Thế thì ánh xạ h: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$

xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên $\mathbb{R}$, vì ánh xạ $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)g(x-t) \end{array}$ liên tục trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ và thỏa mãn GTHT trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nếu chọn: $\quad \varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \|g\|_\infty |f(t)| \end{array}$.

◆ **Định nghĩa 2** Ta nói rằng một ánh xạ $f: A\times I \to \mathbb{K}$ **thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương** (viết tắt: GTHTĐP) trên $A \times I$ khi và chỉ khi, với mọi bộ phận compac K bao hàm trong A, tồn tại một ánh xạ $\varphi_K: I \to \mathbb{R}$ liên tục, ≥ 0, khả tích trên I, thỏa mãn:

$$\forall (x,t) \in K\times I, \quad |F(x,t)| \leq \varphi_K(t).$$

***Nhận xét*:**

Có thể thay giả thiết φ_K liên tục bởi: $\quad \varphi_K \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

◆ **Mệnh đề (Mở rộng cho trường hợp giả thiết có hàm trội được thỏa mãn trên một bộ phận compac bất kỳ bao hàm trong A)**

Nếu $\begin{cases} \bullet\ F \text{ liên tục trên } A\times I \\ \bullet\ F \text{ thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương trên } A\times I \end{cases}$

thì $\begin{cases} \bullet\ \text{Với mọi } x \text{ thuộc } A,\ F(x,.) \text{ khả tích trên } I \\ \bullet\ \text{Ánh xạ } f: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ liên tục trên } A. \end{cases}$

Chứng minh:

Cho $x \in A$ và $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong A hội tụ đến x. Theo 1.3.1, Mệnh đề 1:

$$K = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

là một bộ phận compac bao hàm trong A.

Theo Định lý trên đây, áp dụng cho $F|_{K\times I}$, với mọi x thuộc K, ánh xạ $F(x, .)$ khả tích trên I, và ánh xạ $\begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ liên tục. Ta suy ra rằng với mọi x thuộc A, $F(x,.)$ khả tích trên I và:

$$f(x_n) \underset{n\infty}{\to} f(x),$$

chứng tỏ rằng f liên tục tại x.

Thí dụ:

Ánh xạ $f:\ x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+|t|}dt$ liên tục trên $]0;+\infty[$. Thật vậy, ánh xạ

$$F:\ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-t^2}}{x+|t|} \end{array}$$

liên tục trên $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ và thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương trên $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, vì với mọi bộ phận compac K bao hàm trong A, tồn tại $a>0$ sao cho $K\subset[a;+\infty[$, và nếu ký hiệu:

$$\varphi_K:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^{-t^2}}{a+|t|}=F(a,t) \end{array},$$

thì φ_K liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\mathbb{R}$, và: $\quad \forall(x,t)\in K\times\mathbb{R},\quad |F(x,t)|\leq \varphi_K(t).$

2) Đạo hàm

Trong điểm 2) này ta giả thiết rằng A là một khoảng của $\mathbb{R}$.

◆ **Định lý** **("Đạo hàm dưới dấu $\int_I$")**

Nếu
- F liên tục trên $A\times I$
- F thỏa mãn giả thiết có hàm trội trên $A\times I$
- $\frac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $A\times I$
- $\frac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn giả thiết có hàm trội trên $A\times I$

thì
- Với mọi x thuộc A, $F(x,.)$ và $\frac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên I
- $f:\ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)dt \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên A và:

$$\forall x\in A,\quad f'(x)=\int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$$

Chứng minh:

Theo Định lý hàm trội, với mọi x thuộc A, $F(x,.)$ và $\frac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ đều khả tích trên I.

Ta tiến hành phép chứng minh bằng cách lặp lại phép chứng minh Định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$, 2.3.12.

Ký hiệu $g : A \to \mathbb{K}$ là ánh xạ cho bởi: $\forall x \in A,\quad g(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Cho $x_0 \in A$. Ký hiệu $A_0 = \{h \in \mathbb{K}\,;\, x_0 + h \in A\} = (-x_0) + A$, là một khoảng tịnh tiến của A, và $T : A_0 \times I \to \mathbb{K}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall (h,t) \in A_0 \times I,\quad T(h,t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(F(x_0+h,t) - F(x_0,t)) & \text{nếu } h \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t) & \text{nếu } h = 0 \end{cases}.$$

Do $F(.\,,t) : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x,t) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên A với mọi t thuộc I, nên ta có với mọi (h,t) thuộc $A_0 \times I$:

$$F(x_0+h,t) - F(x_0,t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x = h\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)\mathrm{d}y.$$

Suy ra: $\forall (h,t) \in A_0 \times I,\quad T(h,t) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)\mathrm{d}y$.

Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_0^1$ (2.3.12, *1*), Định lý), vì ánh xạ:

$$(h,t,y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)$$

liên tục trên $(A_0 \times I) \times [0;1]$, nên ánh xạ T liên tục trên $A_0 \times I$.

Ánh xạ T liên tục trên $A_0 \times I$ và thỏa mãn GTHT trên $A_0 \times I$, vì nếu ta ký hiệu $\psi : I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ khả tích thực hiện tính trội của $\frac{\partial F}{\partial x}$ trên $A_0 \times I$, thì ta có:

$$\forall (h,t) \in A_0 \times I,\quad |T(h,t)| \leq \int_0^1 \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x_0+hy,t)\right|\mathrm{d}y \leq \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}y = \psi(t).$$

Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$ (*1*), Định lý), ta suy ra rằng ánh xạ

$\tau : A_0 \to \mathbb{K}$, cho bởi: $\tau(h) = \int_I T(h,t)\mathrm{d}t$,

liên tục trên A_0. Nói riêng: $\tau(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \tau(0)$.

Nhưng với mọi h thuộc $A_0 - \{0\}$ ta có:

$$\tau(h) = \int_I \frac{1}{h}(F(x_0+h,t) - F(x_0,t))\mathrm{d}t = \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)),$$

và: $\tau(0) = \int_I T(0,t)\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Kết quả đó chứng tỏ: $\frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) \underset{h\to 0}{\to} \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t = g(x_0)$,

tức là f khả vi tại x_0 và rằng $f'(x_0) = g(x_0)$.
Như vậy f khả vi trên A, và $f' = g$.

Cuối cùng theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$ (*1*), Định lý), vì $\frac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên $A \times I$ và thỏa mãn GTHT trên $A \times I$, nên g liên tục trên A.
Cuối cùng ta có: f thuộc lớp C^1 trên A và $f' = g$.

■

Nhận xét:

1) Theo phép chứng minh trên rõ ràng giả thiết F có hàm trội có thể thay thế bằng: với mọi x thuộc A, $F(x,.)$ khả tích trên I.

2) Mở rộng cho các hàm nhiều biến

Ta có thể sửa đổi dễ dàng phép chứng minh trên để thu được kết quả tổng quát hơn sau đây:

Cho $m \in \mathbb{N}^*$, U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^m$, $F: \begin{array}{ccc} U\times I & \to & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_m;t) & \mapsto & F(x_1,\dots,x_m;t) \end{array}$ là một ánh xạ.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \bullet\ F \text{ liên tục trên } U\times I \\ \bullet\ F \text{ thỏa mãn GTHT trên } U\times I \\ \bullet\ \text{Với mỗi } i \text{ thuộc } \{1,\dots,m\},\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \text{ tồn tại và liên tục trên } U\times I \\ \bullet\ \text{Với mỗi } i \text{ thuộc } \{1,\dots,m\},\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \text{ thỏa mãn GTHT trên } U\times I \end{cases},$$

$$\text{thì } \begin{cases} \bullet\ \text{Với mọi } x \text{ thuộc } U,\ F(x,.) \text{ và } \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x,.)\ (1\le i\le m) \text{ khả tích trên } I \\ \bullet\ \text{Ánh xạ } f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x_1,\dots,x_m;t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I \text{ và:} \\ \quad \forall i\in\{1,\dots,m\}, \forall (x_1,\dots,x_m)\in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m) = \int_I \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m;t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

■

Một phép quy nạp đơn giản cho ta Hệ quả sau đây.

♦ **Hệ quả** Cho $n \in \mathbb{N}$.

Nếu $\begin{cases} \bullet\ F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ tồn tại và liên tục trên } A \times I \\ \bullet\ F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ thỏa mãn giả thiết có hàm trội trên } A \times I \end{cases}$,

thì $\begin{cases} \bullet\ \text{Với mọi } x \text{ thuộc } A,\ F(x,.), \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.), \dots, \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,.) \text{ khả tích trên } I \\ \bullet\ \text{Ánh xạ } f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ thuộc lớp } C^n \text{ trên } A \text{ và:} \\ \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall x \in A,\ \ f^{(i)}(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$

♦ **Mệnh đề** **(Mở rộng cho trường hợp giả thiết có hàm trội được thỏa mãn trên một bộ phận compac bất kỳ bao hàm trong A)**

Nếu $\begin{cases} \bullet\ F \text{ liên tục trên } A \times I \\ \bullet\ F \text{ thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương trên } A \times I \\ \bullet\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ tồn tại và liên tục trên } A \times I \\ \bullet\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương trên } A \times I \end{cases}$

thì $\begin{cases} \bullet\ \text{Với mọi } x \text{ thuộc } A,\ F(x,.) \text{ và } \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.) \text{ khả tích trên } I \\ \bullet\ \text{Ánh xạ } f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } A \text{ và:} \\ \quad \forall x \in A,\ \ f'(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$

Chứng minh:

Suy ra từ định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_I$ theo cách tương tự như cách suy Mệnh đề ở mục 1) từ định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$.

♦ **Hệ quả** Cho $n \in \mathbb{N}$.

Nếu
- $F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}$ tồn tại và liên tục trên $A \times I$
- $F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}$ thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương trên $A \times I$

thì
- Với mọi x thuộc A, $F(x,.), \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.), \dots, \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,.)$ khả tích trên I
- Ánh xạ $f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ thuộc lớp C^n trên A và:

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall x \in A, \quad f^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)\mathrm{d}t$$

Nhận xét:

Trong Tập 4 (4.1.6, Nhận xét) chúng ta sẽ thấy rằng có thể suy ra các định lý về tính liên tục và đạo hàm dưới dấu $\int_I$ từ định lý hội tụ bị chặn.

3) Hàm Euler

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 1**

Với mọi x thuộc $]0; +\infty[$, ánh xạ $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ khả tích trên $]0; +\infty[$.

Ánh xạ: $\Gamma : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \end{array}$

được gọi là **hàm Euler** Γ.

Chứng minh:

Ký hiệu $F : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \end{array}$.

Với $x \in]0; +\infty[$ cố định, ánh xạ $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ khả tích trên $]0; +\infty[$, ≥ 0. Hơn nữa:

- $F(x, t) \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ và $t \mapsto t^{x-1}$ khả tích trên $]0; 1]$ vì $x - 1 > -1$, vậy $F(x, .)$ khả tích trên $]0; 1]$.

- $t^2F(x,t) = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, vậy $F(x, .)$ khả tích trên $[1; +\infty[$.

Vậy $F(x, .)$ khả tích trên $]0; +\infty[$.

Mệnh đề 2

1) $\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$.

Chứng minh:

1) Cho $(\varepsilon, T) \in]0; 1] \times [1; +\infty[$. Bằng một phép tích phân từng phần ta có:

$$\int_\varepsilon^T t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^T + \int_\varepsilon^T xt^{x-1}e^{-t}dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - T^x e^{-T} + x\int_\varepsilon^T t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Từ đó bằng cách chuyển qua giới hạn khi ε dần đến 0 và T dần đến $+\infty$, ta suy ra:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

2) Quy nạp theo n:

- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$
- Nếu $\Gamma(n+1) = n!$, thì $\Gamma(n+2) = (n+1)\,\Gamma(n+1) = (n+1).n! = (n+1)!$.

Mệnh đề 3 Hàm Γ thuộc lớp C^∞ trên $]0; +\infty[$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Chứng minh:

Ký hiệu $F: \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t} \end{array}$.

Rõ ràng rằng $F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}, \ldots$ tồn tại và liên tục trên $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, và rằng:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x,t) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \quad \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$

Cho K là một bộ phận compac bao hàm trong $]0; +\infty[$. Tồn tại $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho:

$$0 < a \leq 1 \leq b \quad \text{và} \quad K \subset [a; b].$$

Với $k \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\varphi_{K,k}:]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad \varphi_{K,k}(t) = |\ln t|^k \mathrm{Max}(t^{a-1}, t^{b-1})\, e^{-t}.$$

$$\forall t \in \,]0;+\infty[\,, \quad \varphi_{K,k}(t) = \left|\ln t\right|^k \operatorname{Max}(t^{a-1}, t^{b-1})\,e^{-t}.$$

Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, rõ ràng là $\varphi_{K,k}$ liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall (x,t) \in K[\times\,]0;+\infty[\,, \quad \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_{K,k}(t).$$

Như thế, với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}$ tồn tại và liên tục trên $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, và thỏa mãn giả thiết có hàm trội địa phương trên $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

Ta suy ra kết quả cần chứng minh từ *2)*, Hệ quả.

◆ **Mệnh đề 4** $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Chứng minh:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt \underset{[u=\sqrt{t}]}{=} \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

xem chẳng hạn bài tập 2.5.6, *c)*.

■

Việc khảo sát hàm Γ sẽ được tiếp tục trong bài tập 2.5.57.

Bài tập

◊ **2.5.42** **Tầm quan trọng của giả thiết có hàm trội**

Ta ký hiệu $A = [0; +\infty[$, $I = [0; +\infty[$, $F: \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & xe^{-xt} \end{array}$.

Chứng minh: 1) F liên tục trên $A \times I$

2) Với mọi x thuộc A, $F(x, .)$ khả tích trên I

3) $f: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_I F(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ không liên tục trên A.

◊ **2.5.43** a) Chứng minh rằng: $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{ch}2xt\,\mathrm{d}t$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x f(x).$$

b) Suy ra rằng: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{ch}2xt\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$.

◊ **2.5.44** Chứng minh: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{zt}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}e^{\frac{z^2}{4}}$.

◊ **2.5.45** a) Tìm miền xác định (trong $\mathbb{R}$) của $f: x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2 t)\mathrm{d}t$.

b) Chứng minh rằng: f thuộc lớp C^1 trên $]-1; +\infty[$, và:

$$\forall x \in]-1; +\infty[,\ f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})} .$$

c) Suy ra: $\forall x \in [-1; +\infty[$, $f(x) = \pi\ln\frac{1+\sqrt{x+1}}{2}$.

◊ **2.5.46** a) Khảo sát miền xác định (trong $\mathbb{R}$), tính khả vi, đạo hàm của:

$$f: x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\mathrm{d}t .$$

b) Suy ra: $\forall x \in]-1; +\infty[$, $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\mathrm{d}t = \ln\frac{x+2}{x+1}$.

◊ **2.5.47** a) Chứng minh rằng với mọi (α, β) thuộc $]0; +\infty[^2$, $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ khả tích trên $]0; +\infty[$.

Mục đích của bài tập này là tính $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t$ theo hai phương pháp.

b) Cho $(\varepsilon, T) \in]0; +\infty[^2$ sao cho $\varepsilon \le T$. Chứng minh:

$$\int_{\varepsilon}^{T}\frac{e^{-\alpha t}-e^{\beta t}}{t}dt = \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}du - \int_{\alpha T}^{\beta T}\frac{e^{-v}}{v}dv,$$

và từ đó suy ra: $$\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}dt = \ln\beta - \ln\alpha.$$

c) Chứng minh kết quả trên bằng cách sử dụng định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_{0}^{+\infty}$.

d) Bằng một phép đổi biến, tìm lại kết quả của bài tập 2.5.46. *b)*.

◊ **2.5.48** a) Tìm miền xác định (trong $\mathbb{R}$) của $f:\ x \mapsto \int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$.

b) Chứng minh rằng: f thuộc lớp C^2 trên $]1;+\infty[$ và biểu thị $f'(x)$, $f''(x)$ bằng những tích phân.

c) Khảo sát các giới hạn của f tại 1 và $+\infty$. Lập bảng biến thiên của f. Vẽ đường cong biểu diễn của f.

d) α) Cho $x \in]1;+\infty[$. Ta ký hiệu $U_x:\ \begin{array}{ccc}[0;1] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \sqrt{t(1-t)(x-t)}\end{array}$.

Hãy kiểm chứng rằng :

$$\forall t \in]0;1[,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{U_x(t)}{(x-t)^2}\right) = \frac{-(t-x)^2+(2-4x)(t-x)+(3x-x^2)}{2(x-t)^2U_x(t)}.$$

β) Từ đó suy ra rằng f là nghiệm trên $]1;+\infty[$ của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai:

$$4x(1-x)y''+4(1-2x)y'-y=0.$$

◊ **2.5.49** a) Khảo sát miền xác định (trong $\mathbb{R}$), tính khả vi, đạo hàm của:

$$f:\ x \mapsto \int_{0}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt.$$

b) Suy ra: $\forall x \in]0;+\infty[$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}dt = \sqrt{\pi x}$.

c) Hãy tìm lại kết quả của b) bằng một phép đổi biến và một phép tích phân từng phần.

◊ **2.5.50** Khảo sát và biểu diễn đồ thị hàm $f:\ x \mapsto f(x)$ (x thực) trong các thí dụ sau đây:

a) $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{x}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t(x-t)}}dt$ b) $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty}\sqrt{1+xt}\,e^{-t^2}dt$

c) $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-t^3-xt^2}dt$.

◊ **2.5.51** a) Chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ khả tích trên $[0;+\infty[$. Ký hiệu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

b) Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và tính $f'(x)$ với $x \in [0; +\infty[$.

c) Suy ra : $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$. Biểu thị $f(x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

d) Suy ra: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt = \pi\ln 2$.

◊ **2.5.52** Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,dt = \pi\ln(1+|x|)$.

◊ **2.5.53** a) Chứng minh sự tồn tại với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ của:

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt, \qquad g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,dt,$$

$$h(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt, \qquad k(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt.$$

b) Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = 2h(x)$.

c) Chứng minh rằng h thuộc lớp C^1 trên $[0; +\infty[$ và rằng $h' = f - k$, rồi chứng minh rằng k thuộc lớp C^1 trên $[0; +\infty[$ và rằng $k' = -h$.

d) Suy ra rằng f thuộc lớp C^2 trên $]0; +\infty[$ và: $f'' = f$.

e) Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\,e^{-|x|}$,

rồi chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)\,e^{-|x|}$.

◊ **2.5.54** a) Chứng minh rằng với mọi x thuộc $[0; +\infty[$, tích phân suy rộng

$$\int_0^{\to+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{t}\sin t\,dt$$

hội tụ; ta ký hiệu: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{t}\sin t\,dt$.

b) α) Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên $]0; +\infty[$ và:

$$\forall x \in\ ]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

β) Suy ra tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho: $\forall x \in\ ]0; +\infty[$, $f(x) = \operatorname{Arctan} x + C$.

c) α) Ký hiệu $A : [0; +\infty[\ \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t \in [0; +\infty[, \qquad A(t) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } t = 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng A liên tục trên $[0; +\infty[$, khả vi trên $]0; +\infty[$, và:

$$\forall t \in\ ]0; +\infty[, \qquad A'(t) \le 0.$$

β) Suy ra: $\forall x \in\ ]0; +\infty[$, $0 \le f(x) - f(0) \le 2x$.

γ) Chứng minh rằng f liên tục tại 0 và $C = 0$.

δ) Suy ra: $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

d) Từ kết quả trên suy ra giá trị của các tích phân sau đây:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt \quad , \alpha \in \mathbb{R}$ *2)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha t}{t^2}\,dt \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^3}\,dt$ *4)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t^2}\,dt \quad , (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *6)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos at \cos bt}{t^2}\,dt \quad , (a, b) \in \mathbb{R}^2.$

◊ **2.5.55** Cho $\alpha \in \,]0; +\infty[$.

a) Chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}$ khả tích trên $[0; +\infty[$.

Ta ký hiệu: $$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}dt.$$

b) Chứng minh rằng f_α thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_\alpha(x) = i\int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}e^{ixt}dt.$$

c) Bằng một phép tích phân từng phần, chứng minh :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -(i+x)f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x),$$

rồi từ đó suy ra rằng: $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\,(x^2+1)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{i\alpha \operatorname{Arctan} x}.$$

Trên đây ta đã tính được biến đổi Laplace (xem Tập 4, C4. 1) của $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{ixt}$.

d) Suy ra: $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

◊ **2.5.56** Ta ký hiệu $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it\sin u}du.$$

Chứng minh rằng với mọi x thuộc $]0; +\infty[$, ánh xạ $t \mapsto J(t)e^{-xt}$ khả tích trên $[0; +\infty[$ và:

$$\int_0^{+\infty} J(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(\pi + i\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)$$

Trên đây ta đã tính được biến đổi Laplace (xem Tập 4, **C4.1**) của J.

◊ **2.5.57** a) Chứng minh rằng Γ lồi trên $]0; +\infty[$.

b) Chứng minh: $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

c) Vẽ đường cong biểu diễn Γ.

◊ **2.5.58** Chứng minh rằng $\ln \circ \Gamma$ lồi trên $]0; +\infty[$.

◊ **2.5.59** Chứng minh: $\forall x \in]0; +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1}\ln t \, dt = \Gamma(x)$.

◊ **2.5.60** Chứng minh: $\forall x \in]0; +\infty[, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t} dt = \Gamma(x)$.

◊ **2.5.61** Chứng minh:

$$\forall a \in]0; +\infty[, \forall m \in]-1; +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

◊ **2.5.62** Chứng minh:

$$\forall(\alpha, \beta) \in]-1; +\infty[^2, \quad \int_0^1 x^\alpha(-\ln x)^\beta dx = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$$

◊ **2.5.63 Hàm B của Euler**

a) Xác định tập hợp các cặp (p, q) thuộc $\mathbb{R}^2$ sao cho ánh xạ $t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ khả tích trên $]0; 1[$.

Ta ký hiệu $B :]0; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2, B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

b) Kiểm chứng:

$$\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2, \quad B(p, q) = B(q, p) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta.$$

c) α) Với $(p, x) \in]0; +\infty[\times [0; +\infty[$, ta ký hiệu: $\varphi_p(x) = x^{2p-1}e^{-x^2}$

Với $a \in [0; +\infty[$, ta ký hiệu:

$$D_a = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2;\ x^2 + y^2 \le a^2\} \quad \text{và} \quad \Delta_a = [0; a]^2.$$

Với $(a, p, q) \in [0; +\infty[\times]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, ta ký hiệu :

$$I_a = \iint_{D_a} \varphi_p(x)\varphi_q(y) dx dy, \quad J_a = \iint_{\Delta_a} \varphi_p(x)\varphi_q(y) dx dy.$$

1) Chứng minh: $\forall a \in [0; +\infty[, \quad I_a \le J_a \le I_{a\sqrt{2}}$.

2) Biểu thị I_a và J_a với $a \in [0; +\infty[$.

β) Suy ra: $\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2, \quad \Gamma(p+q)B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$.

γ) Tính $B(p, q)$ với $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Các bài tập 2.5.64 và 2.5.65 sẽ phải cần dùng đến hàm B của Euler (bài tập 2.5.63).

◊ **2.5.64** a) Chứng minh: $\forall x \in]0; +\infty[, \quad B(x, x) = 2^{-2x+1}B\left(\frac{1}{2}, x\right).$

b) Suy ra: $\forall x \in]0; +\infty[, \; 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2x).$

c) Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$.

◊ **2.5.65** Chứng minh:

$$\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2, \quad \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2p-1}(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}}\, dx = 2^{p+q-2}B(p, q).$$

Trong Tập 4 độc giả sẽ thấy các công thức Gauss và Weierstrass, và công thức phần bù.

Bổ sung

◊ **C2.1 Phần nâng cao dành cho ban MP* : Tính đủ của một số không gian hàm**
Cho $(F, \|\cdot\|)$ là một kgvđc.

1) Tính đủ của B($X; F$)
Cho X là một tập hợp không rỗng. Chứng minh rằng nếu F đủ thì B($X; F$) (tức là tập hợp các ánh xạ bị chặn từ X đến F, xem 2.1.4) là một kgvđc đủ.
Đặc biệt, l^∞ (= B($\mathbb{N}; \mathbb{K}$)) là một không gian Banach.

2) Tính đủ của $CB(X, F)$
Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một kgvđc, X là một bộ phận không rỗng của E, $CB(X, F)$ là tập hợp các ánh xạ liên tục, bị chặn, từ X đến F.
a) Chứng minh rằng $CB(X, F)$ là một kgvc đóng của B($X; F$).
b) Suy ra rằng nếu F đủ thì $CB(X, F)$ là một kgvđc đủ.
Đặc biệt, nếu X là một bộ phận compac không rỗng của E và nếu F đủ, thì $(CB(X, F), \|\cdot\|_\infty)$ là một kgvđc đủ (xem 1.3.2, Hệ quả).

3) Tính đủ của $\mathcal{LC}(E, F)$
Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một kgvđc. Chứng minh rằng nếu F đủ thì $(\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|)$ là một kgvđc đủ.
Đặc biệt, với *mọi* kgvđc E, đối ngẫu tôpô E' của E (xem 1.2.6, $E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{K})$) đủ.

◊ **C2.2* Bất đẳng thức số gia giới nội với đạo hàm bên phải**
1) Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f : [a; b] \to E$, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a; b]$ và có tại mọi điểm thuộc $]a; b[$ các đạo hàm phải thỏa mãn:

$$\forall t \in \,]a; b[, \quad \|f'_p(t)\| \le g'_p(t).$$

Cho $\varepsilon > 0$, $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall t \in [a; b], \quad \varphi(t) = \|f(t) - f(a)\| - (g(t) - g(a)) - \varepsilon(t - a)$$

và $\quad X = \{t \in [a; b];\ \varphi(t) \le \varepsilon\}$.
a) Chứng minh rằng X có biên trên trên $\mathbb{R}$, và ta sẽ ký hiệu biên trên đó là c.
b)* Chứng minh $c = b$ (hãy lập luận phản chứng).
c) Suy ra: $\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a)$.

2) *Một áp dụng*
Suy ra rằng nếu $f : I \to E$ liên tục trên một khoảng I, khả vi phải tại mọi điểm thuộc $\overset{\circ}{I}$, và sao cho f'_p bị chặn trên $\overset{\circ}{I}$, thì f là ánh xạ M-Lipschitz, nếu ký hiệu

$$M = \operatorname*{Sup}_{t \in I} \|f'_p(t)\|.$$

Đặc biệt, nếu $f : I \to E$ liên tục trên khoảng I, khả vi phải tại mọi điểm thuộc $\overset{\circ}{I}$, và nếu:

$$(\forall t \in \overset{\circ}{I},\ f'_p(t) = 0), \text{ thì } f \text{ là ánh xạ hằng trên } I.$$

◊ **C2. 3 Tích chập của các hàm liên tục với giá bị chặn**

Ta ký hiệu $\mathcal{C}$ là đại số các ánh xạ liên tục từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$.

Với $f \in \mathcal{C}$, **giá** của f là tập hợp $\overline{\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}}$, tức là bao đóng (trên $\mathbb{R}$) của tập hợp các điểm tại đó f không triệt tiêu. Ta ký hiệu $\mathcal{K}$ là bộ phận của $\mathcal{C}$ tạo nên bởi các ánh xạ liên tục có giá giới nội.

1) Kiểm chứng lại rằng $\mathcal{K}$ là một idêan của đại số $\mathcal{C}$, tức là:

$$\begin{cases} \mathcal{K} \neq \varnothing \\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{K},\ \ \varphi + \psi \in \mathcal{K} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \varphi \in \mathcal{K},\ \ \alpha\varphi \in \mathcal{K} \\ \forall f \in \mathcal{C},\ \ \forall \varphi \in \mathcal{K},\ f\varphi \in \mathcal{K} \end{cases}$$

Với $(f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$, ta ký hiệu $f * \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ, được gọi là **đối hợp** của f và φ, định nghĩa là:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2) a) Chứng minh rằng định nghĩa $f * \varphi$ như trên đây hợp lệ.

b) Chứng minh: α) $\forall (f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}, \quad f * \varphi \in \mathcal{C}$

β) $\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2, \qquad \varphi * \psi \in \mathcal{K}$

3) Chứng minh:

$$\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x\right).$$

4) Chứng minh rằng $*$ là một luật hợp thành trong, giao hoán và kết hợp, trên $\mathcal{K}$.

5) Ta ký hiệu $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{nếu } x \in]-1;1[\\ 0 & \text{nếu } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $\theta \in \mathcal{K}$, và rằng θ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

b) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = \gamma_n \theta(nx),$$

trong đó γ_n là số thực > 0 thỏa mãn: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1.$

Chứng minh rằng với mọi φ thuộc $\mathcal{K}$, $(\varphi * \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ hội tụ đều đến φ trong $\mathbb{R}$.

c) Suy ra rằng tập hợp các ánh xạ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và có giá giới nội là trù mật trong $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\infty)$.

Chương 3

Chuỗi

$\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$; E chỉ một $\mathbb{K}$ -kgvđc, với chuẩn ký hiệu là $\|\cdot\|$.

3.1 Chuỗi với số hạng trong một kgvđc

3.1.1 Đại cương

1) Khái niệm chuỗi

♦ **Định nghĩa 1** **Chuỗi** với số hạng trong E là mọi cặp $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tạo nên bởi một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có các số hạng thuộc E và dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ định nghĩa là:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k .$$

Một chuỗi số (tương ứng: **thực**; tương ứng: **phức**) là một chuỗi với các số hạng thuộc $\mathbb{K}$ (tương ứng: $\mathbb{R}$; tương ứng: $\mathbb{C}$).

Phần tử u_n gọi là **phần tử thứ** n (hoặc: số hạng tổng quát) của chuỗi, và S_n gọi là **tổng riêng thứ** n của chuỗi.

Chuỗi được ký hiệu là $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Đối với một dãy $(u_n)_{n\geq n_0}$ với chỉ số "xuất phát" là n_0, $n_0 \in \mathbb{N}$, ta cũng dùng các thuật ngữ như trên.

♦ **Định nghĩa 2**

1) Ta nói rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ **hội tụ** khi và chỉ khi dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ các tổng riêng hội tụ (trong E), và trong trường hợp này thì giới hạn của

dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **tổng của chuỗi** $\sum_{n\geq 0} u_n$ và được ký hiệu là $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2) Ta nói rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ **phân kỳ** khi và chỉ khi nó không hội tụ.

3) Hai chuỗi được gọi là cùng loại khi và chỉ khi cả hai đều hội tụ hay cả hai đều phân kỳ.

♦ **Mệnh đề** **(Đổi chỉ số xuất phát)**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi có số hạng thuộc E, và $n_0 \in \mathbb{N}$.

Các chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq n_0} u_n$ cùng loại , và nếu chúng hội tụ thì:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n ,$$

Chứng minh:

1) Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ thì vì: $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$,

nên $\sum_{n\geq n_0} u_n$ hội tụ, và $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$.

2) Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ thì vì: $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$,

nên $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ. ■

Như thế loại của một chuỗi (tính hội tụ hay phân kỳ) không thay đổi khi ta thay đổi chỉ số xuất phát, nhưng tổng (khi chuỗi hội tụ) có thể biến đổi. Do đó thay vì $\sum_{n\geq 0} u_n$ hay $\sum_{n\geq n_0} u_n$, ta có thể viết $\sum_{n} u_n$ nếu vấn đề chỉ là khảo sát tính hội tụ của chuỗi.

Bài tập

◊ **3.1.1** Cho $(u_n)_{n \geq 0}$ là một dãy trong E. Chứng minh rằng nếu $\sum_{p \geq 0} u_{2p}$ hội tụ và $\sum_{p \geq 0} u_{2p+1}$ phân kỳ, thì $\sum_{n \geq 0} u_n$ phân kỳ.

2) Điều kiện cần để một chuỗi hội tụ

♦ **Mệnh đề**

Nếu chuỗi $\sum_{n \geq 0} u_n$ hội tụ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

Chứng minh:

Ký hiệu $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, và $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$,
vậy $u_n \underset{n\infty}{\to} S - S = 0$.

■

Khi $u_n \underset{n\infty}{\not\to} 0$ thì ta nói rằng chuỗi $\sum_{n \geq 0} u_n$ **phân kỳ thô**. Chẳng hạn, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ phân kỳ thô.

Nhận xét:

Đảo của Mệnh đề trên sai; có thể xảy ra trường hợp $\sum_{n \geq 0} u_n$ phân kỳ mà $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

Thí dụ:

1) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ (với $n \geq 1$).

- $\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1) \underset{n\infty}{\to} +\infty$, vậy $\sum_{n \geq 1} u_n$ phân kỳ.
- $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\to} 0$.

2) **Chuỗi điều hòa**

Chuỗi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ được gọi là **chuỗi điều hòa**; người ta thường hay ký hiệu:

$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (xem Tập 1, bài tập3.1.18).

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, khi ký hiệu $m = \mathrm{E}(\frac{\ln n}{\ln 2})$, ta có: $n \geq 2^m$, suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8}+\ldots+2^{m-1}.\frac{1}{2^m} = 1+\frac{m}{2} \underset{m\infty}{\rightarrow} +\infty,$$

và do đó $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ **phân kỳ.**

- $\frac{1}{n} \underset{n\infty}{\rightarrow} 0.$

Bài tập

◊ **3.1.2** Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0}\sin n$ phân kỳ.

3) *Phần dư cấp n của một chuỗi hội tụ*

◆ **Định nghĩa**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc E, hội tụ. Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, tổng của chuỗi $\sum_{k\geq n+1} u_k$ (chuỗi này vốn hội tụ theo *2)*, Mệnh đề) được gọi là **phần dư thứ *n*** (hay: **phần dư cấp *n***) của chuỗi đã cho, và thường được ký hiệu là R_n:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

Như thế ta có: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n .$

Nhận xét:

Khái niệm phần dư cấp n chỉ có nghĩa khi chuỗi đang xét hội tụ.

♦ **Mệnh đề**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc E, hội tụ, và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, R_n là phần dư cấp n. Khi đó ta có: $R_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Chứng minh:

Ký hiệu $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, ta có: $R_n = S - S_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$.

3.1.2 Cấu trúc đại số của tập hợp các chuỗi hội tụ

Các chuỗi được xét đến trong §3.1.2 này đều có số hạng thuộc một $\mathbb{K}$-kgvđc E.

♦ **Mệnh đề 1**

Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ hội tụ, thì với mọi λ thuộc $\mathbb{K}$, chuỗi $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ hội tụ và :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

Chứng minh:
Chỉ cần áp dụng 1.1.9, *2)*, Mệnh đề 2 cho các dãy tổng riêng, và chú ý rằng:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} v_k .$$

Nhận xét:
Theo Mệnh đề 1, tập hợp $A_1(E)$ các dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ với số hạng trong E sao cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ là một $\mathbb{K}$-kgv và ánh xạ $\begin{array}{ccc} A_1(E) & \to & E \\ (u_n)_{n\geq 0} & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ là ánh xạ $\mathbb{K}$-tuyến tính.

■

Như thế từ Mệnh đề 1 chúng ta đã suy ra các tính chất sau đây:

1) Với mọi chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ và mọi λ thuộc $\mathbb{K} - \{0\}$, các chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ cùng loại.

2) Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ phân kỳ (lập luận phản chứng, và chú ý rằng $v_n = (u_n + v_n) - u_n$).

Nhận xét:

Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ phân kỳ, thì ta không được phép (mà không có giả thiết thêm) suy ra loại của chuỗi $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$. Chẳng hạn:

- $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_n = -1 \end{cases}$: $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ phân kỳ, $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ hội tụ
- $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_n = 1 \end{cases}$: $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$, $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ phân kỳ

◆ **Mệnh đề 2**

Cho E là một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ là một cơ sở của E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong E. Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, ta ký hiệu $(u_{n,i})_{1\leq i\leq m}$ là các thành phần của u_n trong cơ sở $\mathcal{B}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{m} u_{n,i} e_i .$$

Khi đó $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ (trong E) khi và chỉ khi với mọi i thuộc $\{1, .., m\}$, chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_{n,i}$ hội tụ (trong $\mathbb{K}$), và trong trường hợp đó:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i .$$

Chứng minh:

Áp dụng 1.1.9, *1)*, Mệnh đề 2 cho dãy các tổng riêng $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_{n\geq 0}$.

◆ **Hệ quả**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng phức.

Ta có:

$$\left(\sum_{n\geq 0} u_n \text{ hội tụ}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}(u_n) \text{ hội tụ} \\ \sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}(u_n) \text{ hội tụ}\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} \overline{u_n} \text{ hội tụ}\right).$$

Chứng minh:

Áp dụng Mệnh đề 2 cho $\mathbb{C}$ xem như một $\mathbb{R}$-kgv với cơ sở $(1, i)$.

■

Ta có kết quả tổng quát hơn trong Mệnh đề sau đây.

◆ **Mệnh đề 3**

Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-kgvđc, $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc E.

Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ (trong E), thì $\sum_{n\geq 0} f(u_n)$ hội tụ (trong F) và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n) = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

Chứng minh:

Do f là ánh xạ tuyến tính nên ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} f(u_k) = f\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$.

Vì $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\infty}{\to} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, và do f liên tục nên ta suy ra: $f\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \underset{n\infty}{\to} f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)$.

Như thế:

$$\sum_{k=0}^{n} f(u_k) \underset{n\infty}{\to} f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right).$$

■

◆ **Mệnh đề 4**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ là hai chuỗi hội tụ với số hạng thực sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.$$

Thế thì:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Chứng minh:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \le \sum_{k=0}^{n} v_k$, rồi chuyển qua giới hạn khi n dần đến vô cùng.

***Nhận xét*:**
Dưới đây (3.2.2, Định lý 1) chúng ta sẽ thấy rằng nếu $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ge 0)$, thì sự hội tụ của $\sum_{n\ge 0} v_n$ kéo theo sự hội tụ của $\sum_{n\ge 0} u_n$.

3.2 Chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$

Trong mục 3.2 này các chuỗi được xét đến đều có số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$, ngoại trừ trong §3.2.4. Độc giả nên so sánh mục này với mục tương tự về các tích phân trên một khoảng bất kỳ (2.5.1).

3.2.1 Bổ đề cơ bản

♦ **Bổ đề** Cho $\sum_{n\ge 0} u_n$ là một chuỗi có số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$. Điều kiện cần và đủ để chuỗi $\sum_{n\ge 0} u_n$ hội tụ là tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \le M.$$

Chứng minh:

Vì $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ge 0)$ nên dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\ge 0}$ của chuỗi $\sum_{n\ge 0} u_n$ tăng. Để $(S_n)_{n\ge 0}$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là $(S_n)_{n\ge 0}$ bị chặn trên (xem Tập 1, 3.2.1).

***Nhận xét*:**

1) Nếu: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ge 0 \\ \sum_{n\ge 0} u_n \text{ hội tụ} \end{cases}$, thì $\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} u_k \le \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

2) Nếu: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0 \\ \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$, thì $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$.

3.2.2 Các định lý so sánh

♦ **Định lý 1** **(Định lý chặn trên)**

Cho $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ là hai chuỗi với số hạng thực.

Nếu $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ hội tụ} \end{cases}$, thì $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

Chứng minh:

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} v_k \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$.

Theo bổ đề ta suy ra rằng $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

Nhận xét:

1) Ta có thể cải biên dễ dàng Định lý 1 cho trường hợp các chuỗi với số hạng trong $\mathbb{R}_-$.

Tuy nhiên chúng tôi cho rằng khi mà: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \leq 0 \\ v_n \leq 0 \end{cases}$, thì tiện lợi nhất là khảo sát các chuỗi với số hạng đối: $\sum\limits_{n\geq 0} -u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} -v_n$.

2) Bằng cách chuyển qua phản đảo của Định lý 1, ta được:

Nếu $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$, thì $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ phân kỳ.

3) Trong Định lý 1, ta có thể thay giả thiết $(\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n)$ bằng giả thiết yếu hơn sau đây: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$).

♦ **Định lý 2** Cho $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ là hai chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$.

Nếu $\begin{cases} u_n = \underset{n\infty}{O}(\alpha_n) \\ \sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n \text{ hội tụ} \end{cases}$, thì $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

Chứng minh:
Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ và $C \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le u_n \le C\alpha_n$.
Do $\sum_{n\ge 0} \alpha_n$ hội tụ nên $\sum_{n\ge N} C\alpha_n$ hội tụ, rồi (Định lý 1) $\sum_{n\ge N} u_n$ hội tụ, và do đó $\sum_{n\ge 0} u_n$ hội tụ.

♦ **Định lý 3** **(Định lý hàm tương đương)**
Cho $\sum_{n\ge 0} u_n$, $\sum_{n\ge 0} v_n$ là hai chuỗi với số hạng thực.
Nếu $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & 0 \le v_n \\ u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \end{cases}$, thì hai chuỗi $\sum_{n\ge 0} u_n$ và $\sum_{n\ge 0} v_n$ cùng loại.

Chứng minh:
1) Trước tiên chúng ta chứng tỏ rằng: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \quad u_n \ge 0$.
Do $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \ge N, \quad |u_n - v_n| \le v_n$,
và do vậy:

$\forall n \ge N, \quad 0 \le u_n (\le 2v_n)$.

2) Vì $$u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \begin{cases} u_n = \underset{n\infty}{O}(v_n) \\ v_n = \underset{n\infty}{O}(u_n) \end{cases},$$
nên Định lý 2 cho phép ta kết luận: $\sum_{n\ge 0} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{n\ge 0} v_n$ hội tụ.

***Nhận xét*:**
Giả thiết $v_n \ge 0$ là cốt yếu, và cần chú ý không áp dụng Định lý hàm tương đương cho các chuỗi có số hạng phức hay có số hạng tổng quát với dấu thay đổi (xem 3.3.6, Thí dụ).

3.2.3 Chuỗi Riemann

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định. Chúng ta hãy xác định loại của chuỗi $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$, được gọi là chuỗi Riemann.

Nếu $\alpha \le 0$, thì $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{\not\to} 0$, do đó $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ thô.

Nếu $\alpha = 1$, thì $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ, vì đây chính là chuỗi điều hòa, xem 3.1.1, *2)*, Thí dụ 2).

Nếu $0 < \alpha < 1$, thì $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ vì với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có: $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$, và $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Cuối cùng giả thiết $\alpha > 1$.
Cho $N \in \mathbb{N}$ sao cho $N \geq 2$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $n \geq 2$ ta có:

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right),$$

suy ra: $$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

Theo bổ đề cơ bản, ta suy ra rằng chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ.

Ta tóm tắt kết quả khảo sát:

◆ **Định lý** **(Thí dụ Riemann)**

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

■

◆ **Mệnh đề 1** **("Quy tắc $n^\alpha u_n$")**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$.

Nếu tồn tại $\alpha \in]1; +\infty[$ sao cho $n^\alpha u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$ thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

Chứng minh:

Tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $\forall n \geq N, \quad 0 \leq n^\alpha u_n \leq 1$; tức là: $\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$.

Do $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ (vì $\alpha > 1$) nên định lý hàm trội cho phép suy ra rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

Thí dụ: Xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là: $u_n = \mathrm{e}^{-(\ln n)^a}$, với $a \in \mathbb{R}$ cố định.

Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ta có: $n^\alpha u_n = \exp(\alpha \ln n - (\ln n)^a)$.

- Nếu $a > 1$ thì với mọi $\alpha > 0$ cố định, $\alpha \ln n - (\ln n)^a \underset{n\infty}{\rightarrow} -\infty$, và do đó

$n^{\alpha}u_n \underset{n\infty}{\to} 0$. Nói riêng $n^2 u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, và do đó $\sum_{n\geq 1} u_n$ hội tụ.

- Nếu $a = 1$ thì $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n})$, do đó $\sum_{n\geq 1} u_n$ phân kỳ.
- Nếu $a < 1$ thì với mọi $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, do đó $\sum_{n\geq 2} u_n$ phân kỳ.

■

Việc khảo sát các chuỗi Bertrand dưới đây không thuộc chương trình nhưng lại rất tiện lợi.

Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Ta xét chuỗi $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$.

1) Nếu $\alpha > 1$, thì với ký hiệu $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, ta có:

$$n^{\gamma}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = n^{\frac{1-\alpha}{2}}(\ln n)^{-\beta} \underset{n\infty}{\to} 0,$$

và do đó (xem Mệnh đề 1), chuỗi đang xét hội tụ.

2) Nếu $\alpha < 1$, thì do $n\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = n^{1-\alpha}(\ln n)^{-\beta} \underset{n\infty}{\to} +\infty$, nên tồn tại một chỉ số mà kể từ đó $\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \geq \frac{1}{n}$, và do vậy chuỗi đang xét phân kỳ.

3) Giả thiết $\alpha = 1$.

Chúng ta sẽ sử dụng một phương pháp so sánh chuỗi-tích phân, xem thêm dưới đây, 3.3.7.

Vì hàm $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$ giảm trong lân cận $+\infty$ (hãy khảo sát đạo hàm của hàm đó), nên tồn tại $N \geq 3$ thỏa mãn:

$$\forall n \geq N,\quad \int_N^{n+1}\frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}dx \leq \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^{\beta}} \leq \int_{N-1}^{n}\frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}dx.$$

- Nếu $\beta > 1$ thì với mọi n sao cho $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^{\beta}} \leq \int_{N-1}^{n}\frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}dx \underset{y=\ln x}{=} \int_{\ln(N-1)}^{\ln n}\frac{dy}{y^{\beta}}$$

$$= \frac{(\ln(N-1))^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}}{\beta - 1} \leq \frac{(\ln(N-1))^{1-\beta}}{\beta-1}.$$

Theo bổ đề cơ bản, ta suy ra rằng $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ hội tụ.

- Nếu $\beta = 1$ thì với mọi n sao cho $n \geq N$ ta có:

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k(\ln k)} \geq \int_{N}^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln N}^{\ln(n+1)} \frac{dy}{y} = \ln \ln(n+1)) - \ln \ln N \underset{n\infty}{\to} +\infty,$$

vậy $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ phân kỳ.

- Nếu $\beta < 1$ thì do : $\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}} \geq \frac{1}{n \ln n}$, nên $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ phân kỳ.

Ta tóm tắt kết quả khảo sát.

◆ **Mệnh đề 2 (Thí dụ Bertrand)**

Với mọi $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chuỗi $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ hội tụ khi và chỉ

khi:
$$\left| \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{hay} \\ (\alpha = 1 \text{ và } \beta > 1) \end{array} \right.$$

3.2.4 Chuỗi lũy thừa

1) Chuỗi lũy thừa trong $\mathbb{K}$

◆ **Định nghĩa**

Với mọi r thuộc $\mathbb{K}$, chuỗi $\sum_{n\geq 0} r^n$ được gọi là **chuỗi luỹ thừa.**

◆ **Định lý** Cho $r \in \mathbb{K}$. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n\geq 0} r^n$ hội tụ khi và chỉ khi

$|r| < 1$. Hơn nữa nếu $|r| < 1$ thì:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Chứng minh:

1) Nếu $|r| \geq 1$ thì $(\forall n \in \mathbb{N},\ |r^n| \geq 1)$, do đó $r^n \underset{n\infty}{\not\to} 0$, $\sum_{n\geq 0} r^n$ phân kỳ thô.

2) Nếu $|r| < 1$ thì $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \underset{n\infty}{\to} \frac{1}{1-r}$, vậy $\sum_{n\geq 0} r^n$ hội tụ và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Nhận xét:
Cho $r \in \mathbb{K}$ sao cho $|r| < 1$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = r^{n+1}\sum_{p=0}^{+\infty} r^p = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

2) Khai triển thập phân của một số thực dương hay bằng không

◆ **Định nghĩa** Cho $x \in \mathbb{R}_+$.
Khai triển thập phân của x là mọi dãy $(d_n)_{n\geq 0}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \ d_n \in \mathbb{N} & (1) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leq d_n \leq 9 & (2) \\ x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n} & (3) \end{cases}$$

và khi đó ta ký hiệu: $x = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

Cần chú ý rằng điều kiện (2) bảo đảm rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} d_n 10^{-n}$ hội tụ.

Vì $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 9.10^{-n} \leq 1$ nên ta có (trừ trường hợp: $\forall n \geq 1,\ \ d_n = 9$), $d_0 = E(x)$. Như vậy ta có thể quy về trường hợp $x \in [0; 1[$ một cách dễ dàng.
Chúng ta khảo sát sự tồn tại và duy nhất của $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ với $x \in [0; 1[$.

1) Tồn tại
Xem thêm Tập 1, 3.2.2.
Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ký hiệu: $u_n = 10^{-n}E(10^n x)$ và $v_n = 10^{-n}(E(10^n x) + 1)$.

Như thế ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \leq x \leq v_n \\ 10^n u_n \in \mathbb{N} \ \text{ và } \ 10^n v_n \in \mathbb{N}. \\ v_n - u_n = 10^{-n} \end{cases}$

Cho $n \in \mathbb{N}$. Do: $\begin{cases} E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1 \\ E(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \end{cases}$,

nên ta có: $\begin{cases} 10E(10^n x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \\ E(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < 10\left(E(10^n x) + 1\right) \end{cases}$.

Vì $10\mathrm{E}(10^n x)$, $\mathrm{E}(10^{n+1}x)$, $\mathrm{E}(10^{n+1}x)+1$, $10(\mathrm{E}(10^n x)+1)$ đều nguyên, nên ta suy ra:

$$\begin{cases} 10\mathrm{E}(10^n x) \le \mathrm{E}(10^{n+1}x) \\ \mathrm{E}(10^{n+1}x)+1 \le 10\Big(\mathrm{E}(10^n x)+1\Big) \end{cases}, \qquad \text{từ đó có: } \begin{cases} u_n \le u_{n+1} \\ v_{n+1} \le v_n \end{cases}$$

Như vậy $(u_n)_{n\geq 0}$ và $(v_n)_{n\geq 0}$ kề nhau, do vậy hội tụ về cùng một giới hạn l.

Vì hơn nữa ta có: $(\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \le x \le v_n)$, nên ta được: $l = x$, và ta kết luận:

$$u_n \underset{n\infty}{\to} x \quad \text{và} \quad v_n \underset{n\infty}{\to} x.$$

Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng u_{n+1} (là một số thập phân có $n+1$ chữ số sau dấu phẩy) có n chữ số thập phân đầu tiên như ở u_n.

Cho $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: • $u_n \le u_{n+1}$, do đó: $10^n u_n \le 10^n u_{n+1}$

• $u_{n+1} = 10^{-(n+1)}\mathrm{E}(10^{n+1}x) < 10^{-n}(\mathrm{E}(10^n x)+1) = u_n + 10^{-n}$

từ đó ta suy ra: $10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$.

Như vậy: $10^n u_n \le 10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$, và $10^n u_n \in \mathbb{N}$.

Kết quả trên chứng tỏ: $\mathrm{E}(10^n u_{n+1}) = 10^n u_n$. Vì $10^n u_{n+1}$ là một số thập phân chỉ có $n+1$ chữ số sau dấu phẩy, nên ta kết luận rằng u_n và u_{n+1} có cùng các chữ số thập phân cho đến hàng thứ n.

Ký hiệu $d_0 = 0$, và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, d_n là chữ số thập phân thứ n của u_n. Như thế ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n = \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k}.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng x có ít nhất một khai triển thập phân: $x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$.

2) Khảo sát tính duy nhất

Trước hết rõ ràng là có thể không có một khai triển thập phân duy nhất. Chẳng hạn:

$$\frac{1}{10} = 1,00\ldots0\ldots \qquad \text{và} \qquad \frac{1}{10} = 0,099\ldots9\ldots$$

Cho $x \in [0; 1[$. Giả thiết x nhận hai khai triển thập phân khác nhau:

$$x = 0,d_1 d_2 \ldots d_n \ldots \qquad \text{và} \qquad x = 0,e_1 e_2 \ldots e_n \ldots$$

Do tập hợp $\{n \in \mathbb{N}^*;\ d_n \neq e_n\}$ là một bộ phận không rỗng của $\mathbb{N}$, nên chúng ta có thể xét phần tử nhỏ nhất của nó, ký hiệu là N. Vậy ta có:

$$\begin{cases} d_N \neq e_N \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n < N \Rightarrow d_n = e_n) \end{cases}$$

Ta có thể giả thiết chẳng hạn: $e_N < d_N$.

Khi đó ta có: $d_N\, 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_n 10^{-n} = e_N\, 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e_n 10^{-n}$, từ đó suy ra: $$(d_N - e_N)\,10^{-N} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n - d_n) 10^{-n}.$$

Một mặt thì $d_N \geq e_N + 1$, do đó $(d_N - e_N)10^{-N} \geq 10^{-N}$.
Mặt khác thì ta lại có: $\forall n \geq N+1,\ 0 \leq |e_N - d_N| \leq 9$,

suy ra: $$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n - d_n) 10^{-n}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |e_n - d_n| 10^{-n} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 10^{-N}.$$

Như thế ta nhất thiết phải có: $$\begin{cases} d_N - e_N = 1 \\ \forall n \geq N+1, \quad e_n - d_n = 9 \end{cases}.$$

Nhưng vì các d_n và e_n đều thuộc $\{0,..,9\}$, nên ta suy ra:
$$\forall n \geq N+1, \quad (e_n = 9 \text{ và } d_n = 0).$$

Kết quả này chứng tỏ rằng x nhận đúng hai khai triển thập phân:
$$x = d_0{,}d_1 d_2 \ldots d_N 0 \ldots 0 \ldots \qquad \text{và} \qquad x = d_0{,}d_1 d_2 \ldots d_{N-1}\, e_N\, 9 \ldots 9 \ldots$$
trong đó: $e_N \in \{0,..,8\}$, và $d_N = e_{N+1}$.
Đặc biệt, x là một số thập phân.
Đảo lại, rõ ràng rằng nếu x là một số thập phân thì x nhận ít nhất hai khai triển thập phân, thuộc loại như trên đây.
Ta tóm tắt kết quả khảo sát.

◆ **Mệnh đề** Mọi phần tử x thuộc $\mathbb{R}_+$ nhận ít nhất một khai triển thập phân:
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}, \qquad \text{trong đó: } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & d_n \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & 0 \leq d_n \leq 9 \end{cases},$$
mà ta ký hiệu là: $x = d_0{,}d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

Nếu x không phải là số thập phân thì x có một khai triển thập phân duy nhất.

Nếu x thập phân và khác không thì x có đúng hai khai triển thập phân, dạng:
$$x = d_0{,}d_1 d_2 \ldots d_{N-1}\, d_N\, 0 \ldots 0 \ldots \quad \text{và } x = d_0{,}d_1 d_2 \ldots d_{N-1}\, e_N\, 9 \ldots 9 \ldots$$
trong đó: $e_N \in \{0,\ldots,8\}$ và $d_N = e_N + 1$.

Có thể cải biên dễ dàng việc khảo sát trên đây bằng cách thay 10 bằng bất kỳ số nguyên ≥ 2 nào.
Đặc biệt:

- trong hệ cơ số 2 ta được dạng **khai triển nhị phân** của x,
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n 2^{-n}, \text{ trong đó } b_0 \in \mathbb{N} \text{ và } (\forall n \geq 1, b_n \in \{0,1\})$$
- trong hệ cơ số 3 ta được dạng **khai triển tam phân** của x,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 3^{-n} \text{ , trong đó } c_0 \in \mathbb{N} \text{ và } (\forall n \geq 1, c_n \in \{0,1,2\}),$$

xem C **3.1**.
Các hệ cơ số 8 và 16 được sử dụng trong công nghệ thông tin.

3) Quy tắc d'Alembert

Chúng ta nhắc lại kết quả sau đây (xem Tập 2, 8.1.2, Mệnh đề 2).

◆ **Mệnh đề (So sánh lôgarit)**

Cho $(u_n)_{n\geq 0}$, $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ là hai dãy số thực > 0. Nếu tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \geq N, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

thì: $$u_n = \underset{n\infty}{O}(\alpha_n).$$

◆ **Định lý (Quy tắc d'Alembert)**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thực > 0. Ta giả thiết rằng dãy

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0} \text{ có giới hạn hữu hạn } l \text{ trong } \mathbb{R}_+.$$

1) Nếu $l < 1$ thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ

2) Nếu $l > 1$ thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ phân kỳ.

Chứng minh:

1) Giả thiết: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} l < 1$; ký hiệu $\lambda = \frac{l+1}{2}$, do đó $l < \lambda < 1$, và với $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \lambda^n$. Do $0 < \lambda < 1$ nên chuỗi lũy thừa $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ hội tụ.

Do $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} l < \lambda$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$.
Theo Mệnh đề trên đây, $u_n = \underset{n\infty}{O}(\alpha_n)$, sau đó theo định lý hàm trội (xem 3.2.2, Định lý 2), $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

2) Giả thiết $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} l > 1$. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Như thế $(u_n)_{n\geq N}$ là dãy tăng. Vậy ta có: $\forall n \geq N, \quad u_n \geq u_N > 0$, và do đó $u_n \underset{n\infty}{\not\to} 0$.

Như vậy $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ phân kỳ thô.

Nhận xét:

1) Việc áp dụng quy tắc d'Alembert cho một dãy nguyên $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ (với các số hạng dương) quy về việc so sánh $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ với những chuỗi lũy thừa.

2) Ta sẽ thử áp dụng quy tắc d'Alembert mỗi khi số hạng tổng quát u_n có "chứa" những hàm mũ hay hàm lũy thừa bậc n.

Thí dụ:

Xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là: $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\infty}{\to} e^{-1} < 1.$$

Theo quy tắc d'Alembert, ta kết luận: $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ hội tụ.

Nhận xét:

1) Nếu $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ không có giới hạn, thì $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ có thể hội tụ hay phân kỳ.

Thí dụ:

- $u_n = (2 + (-1)^n)\, 2^{-n}$. Trong thí dụ này $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ không có giới hạn và $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

- $u_n = 2 + (-1)^n$. Trong thí dụ này $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ không có giới hạn và $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ phân kỳ.

2) Nếu $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\infty}{\to} 1$ thì $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ có thể hội tụ hay phân kỳ.

Thí dụ:

- $u_n = \dfrac{1}{n}$. Trong thí dụ này $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ và $\sum_{n\geq 1} u_n$ phân kỳ.
- $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Trong thí dụ này $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} 1$ và $\sum_{n\geq 1} u_n$ hội tụ.

Bài tập

◊ **3.2.1** Xác định loại của các chuỗi có số hạng tổng quát là:

a) $\ln\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$ b) $\text{th}\dfrac{1}{n} + \ln\dfrac{n^2-n}{n^2+1}$

c) $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ d) $(\ln n)^{-\sqrt{n}}$

e) $n^{-\ln(\ln n)}$ f) $n^{-\text{ch}\frac{1}{n}}$

g) $n^{-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$ h) $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$

i) $\dfrac{1}{n}(\ln n)^{-\text{ch}\frac{1}{n}}$ j) $(\ln n \ln \text{ch} n)^{-1}$

k) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ l) $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2}$

m) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ n) $\left(\dfrac{n+3}{3n+1}\right)^{(\ln n)^2}$

o) $\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^n$ p) $\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$

q) $\dfrac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$ r) $\left(\text{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{-n^3}$

s) $\left(\text{sh}\sqrt[3]{\ln n}\right)^{-3}$ t) $\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}\right)^{-\sqrt{n}}$

u) $\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)^{\sqrt{n}}$ v) $\dfrac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

w) $\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3+n-1}$

x) $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

y) $\tan\frac{\pi n+1}{4n+2}-2\sin\frac{\pi n+1}{6n+1}$

z) $(n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n+1}}$

a') $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$

b') $n^{\frac{1}{n^2}}-1$

c') $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{e}}$

d') $\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}}$

e') $\operatorname{Arccos}\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}$

f') $\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+1}{n}\right)$

g') $\left(\operatorname{ch}(\ln n)\ln(\operatorname{ch}n)\right)^{-\frac{1}{2}}$

h') $\operatorname{Arcsin}\frac{n+1}{2n+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{n-1}{2n-1}$

i') $\operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$

j') $\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)$

k') $\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3}$

l') $\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{n^2+1}{n}\right)$

m') $\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\right)$

n') $\frac{1}{n}\left(\operatorname{Arctan}n-2\operatorname{Arctan}\frac{n-1}{n}\right)$

o') $\sin\sqrt{\operatorname{Arctan}(n^2+1)}-\sin\left(\operatorname{Arctan}n-2\operatorname{Arctan}(n^2)\right)$

p') $\frac{(n!)^3}{n^{n^2}}$

q') $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

r') $\frac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$

u') $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin x}{1+\operatorname{ch}^2x}dx$

v') $\int_0^{\frac{1}{n}}(\operatorname{sh}x)^{\frac{3}{2}}dx$

w') $\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x+1}}$

x') $\int_n^{2n}\frac{dx}{1+x^{3/2}}$

y') $\int_n^{2n}\frac{dx}{x^{5/2}-\sin^2x}$

z') $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$

a") $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}$

b") $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx$

c") $\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3-x-1}$

d") $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^n}$

e") $\int_0^{+\infty} e^{-nx} \operatorname{Arctan} x\,dx$ f") $\dfrac{1}{n^2(\ln n)^2\left|\sin(n\pi\sqrt{2})\right|}$

g") $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^2-k^2}$

h") $(\alpha(n))^{-\alpha(n)}$, trong đó $\alpha(n)$ là số các chữ số trong cách viết thập phân của n.

◊ **3.2.2** Xác định loại của các chuỗi có số hạng tổng quát là:

a) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+an+b}$, trong đó $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

b) $\exp(-\sqrt{(\ln n)^2+a})$, $a \in \mathbb{R}$ c) $n^{n^a}-1$, $a \in \mathbb{R}$

d) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$ e) $\operatorname{Arctan}\left(1+\dfrac{1}{n^a}\right)-\dfrac{\pi}{4}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

f) $\dfrac{\left(\prod_{k=2}^{n} \ln k\right)^a}{(n!)^b}$, $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ g) $(\ln n)^a((n+1)^b-n^b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$

h) $(\ln n)^{a\ln n}$, $a \in \mathbb{R}$ i) $\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}\right)^{\sqrt[3]{n}}$ $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

j) $\left(n^a+1\right)^{\frac{1}{a}} - \left(n^b+1\right)^{\frac{1}{b}}$, $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ k) $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^a}\right)\right)-1$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

l) $\dfrac{(\ln(n!))^a}{n^b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ m) $\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{-n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

n) $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$ o) $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

p) $\left(\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} n)^a\right)$, $a \in \mathbb{R}$ q) $\left(\dfrac{4}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)-1\right)^b$, $(a,b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$

r) $\operatorname{Arctan}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^a\right)-\operatorname{Arctan}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^a\right)$, $a \in \mathbb{R}$

s) $n^a \displaystyle\int_1^n \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}}dt$, $a \in \mathbb{R}$ t) $\dfrac{(\ln(n!))^a}{(n!)^b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

u) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(2-e^{\frac{a}{k}}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ v) $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$

w) $\dfrac{1}{ne^n}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\operatorname{sh} k\right)^a$, $a \in \mathbb{R}$ x) $\dfrac{1}{n^a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

y) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\ln\left(1+\frac{k}{n^a}\right)\right)-1$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

◊ **3.2.3** Cho $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$, và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$,

$v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

a) Chứng minh rằng nếu $\sum_n u_n$ hội tụ thì $\sum_n v_n$ hội tụ.

b) Chứng minh rằng nếu $\sum_n u_n$ phân kỳ và nếu $(u_n)_n$ bị chặn trên thì $\sum_n v_n$ phân kỳ.

c) Cho một thí dụ trong đó $\sum_n u_n$ phân kỳ và $\sum_n v_n$ hội tụ.

◊ **3.2.4** Cho $\sum_n u_n$ là một dãy hội tụ với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$. Chứng minh rằng $\sum_n u_n^2$ hội tụ.

◊ **3.2.5** Cho $p, q \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, và $\sum_{n\geq 1} u_n$ là một dãy hội tụ với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$. Chứng minh rằng tồn tại $A \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k^{1/p} \leq A\, n^{1/q}.$$

(Áp dụng bất đẳng thức Hölder trong $\mathbb{R}^n$, Tập 1, 5.4.3, 2)).

◊ **3.2.6** Cho $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $(u_n)_{n\geq 0}, (a_n)_{n\geq 0}$ là hai dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\lambda}{a_n}.$$

Chứng minh rằng $\sum_n u_n$ hội tụ.

◊ **3.2.7** Cho $\alpha \in]1; +\infty[$. Chú ý rằng $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$, hãy chứng minh lại rằng chuỗi Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ.

◊ **3.2.8** Cho $\sum_n u_n$ và $\sum_n v_n$ là hai chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho tồn tại $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $\quad \forall n \geq N,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Chứng minh rằng nếu $\sum_n v_n$ hội tụ thì $\sum_n u_n$ hội tụ.

◊ **3.2.9 Quy tắc Raabe và Duhamel**

Cho $\sum_n u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$. Ta giả thiết tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Chứng minh: a) nếu $\alpha > 1$ thì $\sum_n u_n$ hội tụ.

b) nếu $\alpha < 1$ thì $\sum_n u_n$ phân kỳ.

(Áp dụng bài tập 3.2.8).

◊ **3.2.10** Cho $\sum_n u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Chứng minh rằng $\sum_n u_n$ phân kỳ.

◊ **3.2.11** Với $(a,b) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}_-)^2$, xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là:

$$u_n = \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)}.$$

(Áp dụng bài tập 3.2.9).

◊ **3.2.12** *Khái quát hóa bài tập 3.2.11.*

Cho $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,..., a_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, $(r_1,..., r_p) \in \mathbb{R}^p$. Với $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $[a]_n = a(a+1)...(a+n-1)$. Hãy xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là:

$$u_n = \prod_{k=1}^{p}\left([a_k]_n\right)^{r_k}.$$

(Áp dụng các bài tập 3.2.9 và 3.2.10).

◊ **3.2.13** Hãy xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là:

a) $\dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$ b) $\dfrac{\ln(n!)}{n!}$ c) $n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^k}$ d) $\left(C_{pn}^{n}\right)^{-1}$, $p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ cố định.

◊ **3.2.14 Quy tắc Cauchy**

Cho $\sum_n u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$. Ta giả thiết tồn tại $l \in [0; +\infty[$ sao cho

$u_n^{1/n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l.$

Chứng minh rằng: $\begin{cases} \text{Nếu } l < 1 \text{ thì } \sum\limits_{n\geq 1} u_n \text{ hội tụ} \\ \text{Nếu } l > 1 \text{ thì } \sum\limits_{n\geq 1} u_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$.

Thí dụ:
Hãy xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là:

a) $\left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$ b) $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

◊ **3.2.15 So sánh các quy tắc d'Alembert và Cauchy**

a) Cho $\sum\limits_{n} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} l \in [0; +\infty[$.

Chứng minh rằng khi đó: $u_n^{1/n} \underset{n\infty}{\to} l$,

Nói cách khác, nếu đủ điều kiện để áp dụng quy tắc d'Alembert thì cũng đủ điều kiện để áp dụng quy tắc Cauchy.

b) Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 < a < 1 < b$; với $n \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $\alpha_n = E(\ln n)$.

So sánh các quy tắc d'Alembert và Cauchy đối với chuỗi có số hạng tổng quát là:

$$u_n = a^{n-\alpha_n} b^{\frac{1}{2}\alpha_n(\alpha_n+1)}.$$

◊ **3.2.16*** Cho $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ là một chuỗi với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Chứng minh rằng $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ hội tụ.

◊ **3.2.17** Cho $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy tăng nghiêm ngặt với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$, và có giới hạn là $+\infty$. Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(a_n)_{n\geq 0}$ và $(b_n)_{n\geq 0}$ với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \geq 0,\ b_n \leq a_n u_n \\ \sum\limits_{n\geq 0} a_n \text{ hội tụ} \\ \sum\limits_{n\geq 0} b_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$$

◊ **3.2.18** Cho $(u_n)_{n\geq 1}$ là một dãy xác định bởi: $u_1 = 1$ và

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

Chứng minh rằng $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$ (có thể biểu thị u_{n+1} theo n và u_n).

◊ **3.2.19** Cho $\sum_n u_n$ là một chuỗi thực hội tụ. Chứng minh rằng:

$$\liminf_{n\infty} n\,u_n \le 0 \le \limsup_{n\infty} n\,u_n .$$

(Về các ký hiệu giới hạn dưới và giới hạn trên, xem Tập 1, C3. 2).

◊ **3.2.20*** Cho $(u_n)_{n\ge1}$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$, sao cho $\sum_n u_n$ hội tụ.

a) Giả thiết $(u_n)_{n\ge1}$ giảm.

α) Chứng minh: $n\,u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

β) Từ đó suy ra loại của các chuỗi $\sum_n nu_n^2$ và $\sum_n \frac{u_n}{1-nu_n}$.

b) Xét trường hợp khi không có giả thiết $(u_n)_{n\ge1}$ giảm.

◊ **3.2.21*** Cho $(u_n)_{n\ge1}$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$,và $(v_n)_{n\ge1}$ là một dãy xác định như sau:

$$v_n = \frac{1}{n}\left(u_1 + \frac{u_1+u_2}{2} + \ldots + \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}\right)$$

Khảo sát tính hội tụ của $\sum_n v_n$.

◊ **3.2.22** Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục thỏa mãn:

$$\forall(\lambda,x,y) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

Cho $(x_n)_{n\ge0}$, $(y_n)_{n\ge0}$ là hai dãy thực sao cho $\sum_{n\ge0} x_n^2$ và $\sum_{n\ge0} y_n^2$ hội tụ.

Chứng minh rằng $\sum_{n\ge0}\left(f(x_n,y_n)\right)^2$ hội tụ.

◊ **3.2.23** Cho $(u_n)_n$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$, sao cho $(nu_n)_n$ giảm và $\sum_n u_n$ hội tụ.

Chứng minh: $u_n = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

◊ **3.2.24** Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$, giảm và sao cho tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ và $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ thỏa mãn: $\forall n \ge n_0,\ ku_{kn} \ge u_n$. Chứng minh rằng $\sum_n u_n$ phân kỳ.

◊ **3.2.25** Cho $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là một đơn ánh. Chứng minh rằng:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}f(k)\right)$$

phân kỳ.

◊ **3.2.26** a) Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, phương trình $x - \ln x - n = 0$, ẩn là $x \in [1; +\infty[$ có nghiệm duy nhất, ký hiệu x_n.

b) Với $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định thì chuỗi $\sum_{n\geq 1} x_n^{\alpha}$ thuộc loại nào?

◊ **3.2.27** Với $\alpha \in \mathbb{R}$ và $(u_n)_{n\geq 0}$ là chuỗi xác định bởi: $u_0 = 1$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{1+3u_n} - 1.$$

Khảo sát loại của $\sum_{n\geq 0} u_n^{\alpha}$.

◊ **3.2.28** Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ và $(u_n)_{n\geq 1}$ là chuỗi xác định bởi:

$$u_1 = 2 \text{ và: } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n}.$$

Khảo sát loại của $\sum_{n\geq 1} u_n^{\alpha}$.

◊ **3.2.29** Cho $(u_n)_{n\geq 1}$ là một chuỗi với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ và $(v_n)_{n\geq 1}$ là chuỗi xác định bởi: $v_1 \in \mathbb{R}_+$ và $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}\right)$.

Chứng minh rằng để cho chuỗi $\sum_n u_n$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là dãy $(v_n)_n$ hội tụ.

(Có thể khảo sát các dãy có số hạng tổng quát là:

$$v_{n+1}(v_{n+1} - v_n), \quad v_{n+1}^2 - v_n^2, \quad v_n(v_{n+1} - v_n)).$$

◊ **3.2.30** a) Chứng minh rằng, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, tồn tại một phần tử u_n của $\mathbb{R}_+^*$ duy nhất sao cho:

$$\int_{u_n}^{1}\frac{e^t}{t}\,dt = n,$$

b) Chứng minh rằng $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

c) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu: $v_n = n + \ln(u_n)$.

Khảo sát $(v_n)_{n\geq 1}$ (chứng minh rằng $(v_n)_n$ hội tụ và biểu thị giới hạn của dãy đó bằng một tích phân).

d) Xác định loại của $\sum_n u_n$.

◊ **3.2.31*** Cho $a \in \mathbb{R}^*$ và $(u_n)_{n\geq 1}$ là dãy xác định bởi $u_1 = a$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \ln\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}.$$

a) Khảo sát dãy $(u_n)_{n\geq 1}$.

b) Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)$ hội tụ và tính tổng của chuỗi đó.

◊ **3.2.32*** Cho $(u_n)_{n\geq 1}$ là dãy thực thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leq 1.$$

Chứng minh rằng các chuỗi $\sum\limits_{n\geq 2}\left(u_n\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-u_k)\right)$ và $\sum\limits_{n\geq 1}\left(u_n\prod\limits_{k=1}^{n}(1-u_k)\right)$ hội tụ.

◊ **3.2.33** Xác định loại của chuỗi các cực trị địa phương của

$$f:\ ]0;+\infty[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}.$$

◊ **3.2.34*** Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ký hiệu $a(n)$ là số chữ số không trong cách viết n trong hệ cơ số 3. Với các số x nào thuộc $\mathbb{R}_+^*$ thì chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}$ hội tụ?

◊ **3.2.35** Khảo sát sự hội tụ của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi: $u_0 = 1$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)^{2^{1/k}}\right) - 1.$$

◊ **3.2.36*** Cho $(u_n)_{n\geq 1}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$, giảm, sao cho tồn tại $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, giảm nghiêm ngặt thỏa mãn: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{\sigma(n)} \geq \dfrac{1}{\sigma(n)}$.

Chứng minh rằng $\sum\limits_{n} u_n$ phân kỳ.

◊ **3.2.37** Cho $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi hội tụ với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$. Với $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu: $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{n\geq 0} nu_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$ hội tụ, và trong trường hợp hội tụ thì hai chuỗi đó có tổng như nhau.

◊ **3.2.38*** a) Cho $f : [0;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Với $n \in \mathbb{N}$, đặt:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^n f''(t)\left(t - \mathrm{E}(t) - \frac{1}{2}\right)^2 dt.$$

Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{1}{8}(f'(n) - f'(0)) + \dfrac{1}{2}(f(n) + f(0))$.

b) Với $\alpha \in\ ]1;+\infty[$, đặt $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ (*hàm dzêta của Riemann*). Từ a) suy ra rằng:

$$\forall \alpha \in\ ]1;+\infty[, \quad \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8}.$$

Trường hợp riêng: $\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{\alpha-1}$.

3.3 Chuỗi với số hạng trong một kgvđc

Trong § 3.3 này các chuỗi được xét đều có số hạng thuộc $\mathbb{K}$-kgvđc E.

3.3.1 Điều kiện cần và đủ Cauchy

◆ **Định nghĩa** Mọi $\mathbb{K}$-kgvđc đủ được gọi là **không gian Banach** (xem 1.4.2, Định nghĩa).

Theo 1.4.2, Định lý 2, mọi kgvđc hữu hạn chiều là không gian Banach.
Một kgvđc "vô hạn chiều" có thể là không gian Banach (xem bài tập 1.4.7) hoặc không phải là không gian Banach (xem bài tập 3.3.8).

◆ **Định lý** **(Điều kiện cần và đủ Cauchy để một chuỗi với số hạng thuộc một không gian Banach hội tụ)**

Một chuỗi $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ với số hạng thuộc một không gian Banach E hội tụ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(N \leq p < q \Rightarrow \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leq \varepsilon\right).$$

Chứng minh:
Chỉ cần áp dụng điều kiện cần và đủ cho một chuỗi với số hạng trong một không gian Banach đối với dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vì:

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k = S_q - S_p .$$

■

Dưới đây, khi nghiên cứu sự hội tụ tuyệt đối (3.3.2, Định lý), chúng ta sẽ sử dụng đến Điều kiện cần và đủ Cauchy,

Nhận xét: Nếu tồn tại hai dãy $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$, với số hạng thuộc $\mathbb{N}$, sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leq \beta_n \\ \alpha_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \infty \\ \beta_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \infty \\ \sum\limits_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k \underset{n\infty}{\not\to} 0 \end{cases}$$

thì chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ phân kỳ.

Thí dụ: Ta hãy chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ phân kỳ.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, đặt $\alpha_n = \mathrm{E}(\exp(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)) + 1$, và $\beta_n = \mathrm{E}(\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi))$.

Khi đó ta có $\alpha_n \leq \beta_n$, $\alpha_n \underset{n\infty}{\to} \infty$, $\beta_n \underset{n\infty}{\to} \infty$, và:

$$\sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\sin(\ln k)}{k} \geq \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{k} \geq \frac{\beta_n - \alpha_n + 1}{\beta_n \sqrt{2}}$$

$$\geq \frac{\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi) - 1 - \exp(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)}{\sqrt{2}\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)} \underset{n\infty}{\to} \frac{e^{\pi/2} - 1}{\sqrt{2}e^{\pi/2}} \neq 0.$$

Bài tập

◊ **3.3.1** Chứng tỏ rằng các chuỗi với số hạng tổng quát sau đây phân kỳ:

a) $\frac{(-1)^{\mathrm{E}(\ln n)}}{n}$ b) $\frac{\cos(\ln \ln n)}{\ln n}$.

3.3.2 Sự hội tụ tuyệt đối

♦ **Định nghĩa** Một chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ với số hạng thuộc một $\mathbb{K}$-kgvđc E

được gọi là **hội tụ tuyệt đối** khi và chỉ khi $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ hội tụ.

Trường hợp đặc biệt, nếu $E = \mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$, thì chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ

khi chuỗi $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ hội tụ.

♦ **Mệnh đề 1** Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ hội tụ tuyệt đối, thì với mọi λ thuộc $\mathbb{K}$, chuỗi $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh:
Chỉ cần chú ý rằng: $\forall n \in \mathbb{N},\quad \|u_n + \lambda v_n\| \leq \|u_n\| + |\lambda|\|v_n\|$
và áp dụng định lý hàm trội đối với các chuỗi có số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ (3.2.2, Định lý 1).

Nhận xét:
Theo Mệnh đề 1, tập hợp $\ell^1(E)$ các dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ với số hạng thuộc E sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ tuyệt đối, là một $\mathbb{K}$-kgv, và rõ ràng là ánh xạ $\begin{array}{rcl} \ell^1(E) & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\geq 0} & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\| \end{array}$ là một chuẩn trên $\ell^1(E)$.

♦ **Định lý**

Cho E là một không gian Banach và $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc E. Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ tuyệt đối, thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ và: $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|$.

Chứng minh: Cho $\varepsilon > 0$ cố định; vì $\sum_{n\geq 0}\|u_n\|$ hội tụ, nên theo Điều kiện cần và đủ Cauchy (3.3.1, Định lý), tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(N \leq p < q \ \Rightarrow\ \sum_{k=p+1}^{q}\|u_k\| \leq \varepsilon\right).$$

Do $\left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q}\|u_k\|$, nên ta suy ra:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(N \leq p < q \ \Rightarrow\ \left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| \leq \varepsilon\right),$$

và do đó (theo Điều kiện cần và đủ Cauchy), $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ. Hơn nữa:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|,$$

nên bằng cách cho n dần đến $+\infty$ ta suy ra:

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

Nhận xét:

1) Vì $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ đều là không gian đủ, nên định lý trên đây chứng tỏ rằng mọi chuỗi số hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

2) Nếu kgvđc E không đủ, thì có thể xảy ra trường hợp một chuỗi trong E hội tụ tuyệt đối nhưng lại không hội tụ (xem bài tập 3.3.8).

3) Đảo của định lý trên sai: tồn tại những chuỗi hội tụ và không hội tụ tuyệt đối. Một chuỗi hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối được gọi là **bán hội tụ**. Xem thí dụ về các chuỗi Riemann đan dấu: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$,3.3.5.

◆ **Mệnh đề 2**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$, và $\sum_{n\geq 0} v_n$ là hai chuỗi với số hạng thuộc E.

Nếu $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} v_n & \text{hội tụ tuyệt đối} \\ u_n = \underset{n\infty}{O}(v_n) \end{cases}$, **thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ tuyệt đối.**

Chứng minh: Theo giả thiết, tồn tại $A \in \mathbb{R}_+$ và $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq A\|v_n\|.$$

Vì $\sum_{n\geq 0} \|v_n\|$ hội tụ, nên định lý hàm trội đối với các chuỗi có số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ chứng tỏ rằng $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ hội tụ.

Thí dụ:

Chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + \sin n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối do:

$$\frac{(-1)^n \sqrt{n} + \sin n}{n^2} = \underset{n\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Nhận xét:

1) Nếu $\sum_n u_n$ và $\sum_n v_n$ là hai chuỗi thỏa mãn: $\sum_n v_n$ hội tụ và $u_n = \underset{n\infty}{O}(v_n)$, thì ta không thể suy ra rằng $\sum_n u_n$ hội tụ. Chẳng hạn:

$$u_n = \frac{1}{n} \text{ và } v_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

2) Nếu $\sum_n u_n$ và $\sum_n v_n$ là hai chuỗi thỏa mãn: $\sum_n v_n$ phân kỳ và $u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n)$, thì ta không thể suy ra rằng $\sum_n u_n$ hội tụ. Chẳng hạn:

$$u_n = \frac{1}{n\ln n} \quad \text{và} \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

Bài tập

◊ **3.3.2** Xác định loại của các chuỗi với số hạng tổng quát là:

a) $(-1)^n(\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}})$

b) $(1-\frac{n}{\ln n})^{-n}$

c) $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$

d) $\left(\text{th}\left(a+\frac{b}{n}\right)\right)^n$, $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

e) $\displaystyle\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}\mathrm{d}x$.

◊ **3.3.3** Cho $\sum_n u_n$ là một chuỗi thực bán hội tụ. Chứng minh rằng $\sum_n u_n^+$ và $\sum_n u_n^-$ phân kỳ (trong đó ta đã ký hiệu:

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}, \text{ và } \quad x^- = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x > 0 \\ -x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{với } x \in \mathbb{R}),$$

xem Tập 1, bài tập 4.1.3).

◊ **3.3.4** Cho $\sum_{n\geq 0} z_n$ là một chuỗi hội tụ với số hạng thuộc $\mathbb{C}^*$ sao cho tồn tại $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[$ thỏa mãn: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{Arg}(z_n)| \leq \alpha$. Chứng minh rằng $\sum_n |z_n|$ hội tụ.

◊ **3.3.5** Xác định loại của chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$, trong đó $u_0 \in \mathbb{R}$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)^3 u_{n+1} = (n+1)\, u_n + n.$$

◊ **3.3.6** Chứng minh rằng tồn tại $a \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho: $\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{n}}$.

Nên sử dụng hệ thức: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)$, xem dưới đây 3.3.7, *1)*, Thí dụ.

◊ **3.3.7*** Cho $(a_n)_{n\geq 1}$ là một dãy trong $\mathbb{C}^*$ sao cho:

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad (p \neq q \quad \Rightarrow \quad |a_p - a_q| \geq 1).$$

Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^3}$ hội tụ.

◊ **3.3.8* Một thí dụ về chuỗi hội tụ tuyệt đối và phân kỳ**

Cho $E = C([0;1], \mathbb{R})$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_1$, $(f_n)_{n\geq 1}$ là một dãy những phần tử của E xác định bởi:

$$\begin{cases} \forall x \in [0;1] - [\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}], \quad f_n(x) = 0 \\ f_n \text{ afin trên hai nửa-khoảng của } [\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}] \\ f_n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = n \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ tuyệt đối và phân kỳ.

3.3.3 Các chuỗi thông dụng trong một đại số Banach

Chúng ta nhắc lại rằng một đại số (kết hợp và có đơn vị) là một tập hợp A có trang bị ba luật ký hiệu là: + (trong), . (ngoài), . (trong) thỏa mãn:

$$\begin{cases} (A,+,.) \text{ là một } \mathbb{K}\text{-kgv} \\ . \text{ phân phối đối với } + \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall y \in A,\quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \\ . \text{ có tính kết hợp} \\ . \text{ có phần tử trung hòa ký hiệu là } e \end{cases}$$

(các luật . , . thường được chỉ bằng cách không viết ký hiệu nào cả).

Đại số A được gọi là định chuẩn nếu nó được trang bị một ánh xạ $\|\ .\ \| : A \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \|\ .\ \| \text{ là một chuẩn trên } \mathbb{K}\text{-kgv } A \\ \forall (x,y) \in A^2,\quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\| \end{cases}$$

Tùy theo ngữ cảnh có thể phải có thêm điều kiện: $\|e\| = 1$.

Cho A là một đại số Banach, tức là một đại số định chuẩn sao cho $\mathbb{K}$-kgvđc A đủ. Khi đọc lần đầu tiên, có thể chỉ giới hạn trong trường hợp A hữu hạn chiều.

1) Chuỗi lũy thừa

Vấn đề ta xét ở đây là khảo sát chuỗi $\sum_{n\geq 0} a^n$, với $a \in A$ cố định, trong đó $a^0 = e$ và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$a^{n+1} = a^n\, a.$$

Giả thiết $\|a\| < 1$.

Bằng một phép quy nạp đơn giản, ta có ngay: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a^n\| \leq \|a\|^n$, nên chuỗi $\sum_{n\geq 0} a^n$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ. Ký hiệu tổng của nó là S: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ta có:

$$(e-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = e - a^{n+1},$$

và cũng tương tự: $$\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)(e-a) = e - a^{n+1}.$$

Do $\sum_{k=0}^{n} a^k \underset{n\infty}{\to} S$, và do $a^{n+1} \underset{n\infty}{\to} 0$, và vì ánh xạ $\begin{matrix} A^2 & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{matrix}$ liên tục, nên bằng cách

chuyển qua giới hạn ta được: $(e-a)S = S(e-a) = e$.
Ta tóm tắt kết quả khảo sát:

◆ **Định lý**
Cho A là một đại số Banach.
Với mọi a thuộc A sao cho $\|a\| < 1$, chuỗi lũy thừa $\sum_{n\geq 0} a^n$ hội tụ, $e-a$ khả nghịch trong A, và: $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (e-a)^{-1}$.

Nhận xét:

Có thể xảy ra trường hợp (khi $\dim(A) \geq 2$) là $\|a\| \geq 1$, và chuỗi $\sum_{n=1} a^n$ hội tụ, như trong thí dụ sau đây:

$$A = \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \|\cdot\| = 2\|\cdot\|_\infty, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trong thí dụ này, $\|a\| = 4$, và $\sum_{n\geq 0} a^n$ hội tụ và có tổng bằng $\mathbf{I}_2 + a$, vì lẽ:

$$\forall n \geq 2, \qquad a^n = 0.$$

2) *Chuỗi hàm mũ*

Trong điểm này ta xét chuỗi $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a^n$, với $a \in A$ cố định.

Do: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|\frac{1}{n!}a^n\right\| \leq \frac{\|a\|^n}{n!}$, và vì $\sum_{n\geq 0} \frac{\|a\|^n}{n!}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

◆ **Định lý - Định nghĩa** Cho A là một đại số Banach.
Với mọi a thuộc A, chuỗi $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ hội tụ.
Ánh xạ được ký hiệu là $\exp : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ a & \mapsto & \exp(a) \end{array}$, và định nghĩa bởi:

$$\forall a \in A, \qquad \exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n,$$

được gọi là **hàm mũ**.

Nếu $A = \mathbb{K}$ thì ta lại trở lại hàm mũ phức hay thực đã được định nghĩa trước đây.
Dưới đây (bài tập 3.4.22) chúng ta sẽ thấy rằng nếu $a, b \in A$ giao hoán thì:

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b).$$

3.3.4 Dãy khả tổng thực hay phức

Độc giả nên so sánh việc khảo sát ở mục này với việc khảo sát các hàm liên tục từng khúc và khả tích, §2.5.
Ta sẽ ký hiệu tập hợp các bộ phận giới nội của $\mathbb{N}$ là $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$.

1) Trường hợp các dãy với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$

◆ **Định nghĩa 1** Một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ được gọi là **khả tổng** khi và chỉ khi tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall J \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}), \qquad \sum_{n\in J} u_n \le M.$$

Nếu $(u_n)_{n\ge 0}$ khả tổng, thì $\{\sum_{n\in J} u_n \,;\, J \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})\}$ là một bộ phận không rỗng và giới nội của $\mathbb{R}$, do đó có biên trên trong $\mathbb{R}$. Từ đó ta có Định nghĩa sau đây:

◆ **Định nghĩa 2** Cho $(u_n)_{n\ge 0}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$, khả tổng. **Tổng** của $(u_n)_{n\ge 0}$, được ký hiệu là $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, là số thực:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \operatorname*{Sup}_{J\in\mathfrak{F}(\mathbb{N})} \Big(\sum_{n\in J} u_n\Big).$$

Nhận xét:

1) *Trường hợp dãy có giá hữu hạn*:

Nếu tồn tại $J_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N} - J_0, \quad u_n = 0,$

thì $(u_n)_{n\ge 0}$ khả tổng và: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in J_0} u_n$.

2) Nếu $(u_n)_{n\ge 0}$ có số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ và khả tổng, và nếu $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$, thì:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = 0.$$

♦ **Mệnh đề 1** Cho $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$. Các tính chất sau đây tương đương với nhau từng đôi một:

(i) $(u_n)_{n\geq 0}$ khả tổng

(ii) Tồn tại $M\in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n\in J_p} u_n \leq M$$

với mọi dãy tăng $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$.

(iii) Tồn tại $M\in \mathbb{R}_+$ và một dãy tăng $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n\in J_p} u_n \leq M.$$

Hơn nữa, nếu (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, thì với mọi dãy tăng $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$ ta có:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \operatorname*{Sup}_{p\in\mathbb{N}^*}\Big(\sum_{n\in J_p} u_n\Big) = \lim_{p\infty}\Big(\sum_{n\in J_p} u_n\Big).$$

Ở đây nói $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ tăng có nghĩa là: $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_p \subset J_{p+1}$.

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii):

Giả thiết $(u_n)_{n\geq 0}$ khả tổng, và cho $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ sao cho:

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} J_p = \mathbb{N}.$$

Theo các Định nghĩa 1 và 2, ta có: $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n\in J_p} u_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Số thực $M = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ thích hợp.

(ii) ⇒ (iii):

Chỉ cần chú ý rằng tồn tại ít nhất một dãy tăng $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$, chẳng hạn: $J_p = \{n\in \mathbb{N};\ 0\leq n\leq p\}$.

(iii) ⇒ (i):

Giả thiết tồn tại $M\in \mathbb{R}_+$ và một dãy tăng $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$ sao cho: $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n\in J_p} u_n \leq M.$

Cho J là một bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$; ký hiệu $n_1,\ldots,n_k$ là các phần tử của J ($k \in \mathbb{N}$).
Do $\mathbb{N} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} J_p$, nên tồn tại $p_1,\ldots, p_k \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n_1 \in J_{p_1},\ldots, n_k \in J_{p_k}$.

Ký hiệu phần tử lớn nhất (viết tắt: ptln) trong các $p_1,\ldots, p_k$ là

$$p_0 = \text{ptln}(p_1,\ldots, p_k).$$

Vì $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ tăng nên ta có: $J_{p_1} \subset J_{p_0},\ldots, J_{p_k} \subset J_{p_0}$.

Từ đó ta suy ra: $n_1 \in J_{p_0},\ldots, n_k \in J_{p_0}$, và do đó $J \subset J_{p_0}$, từ đây do các u_n đều ≥ 0 nên:

$$\sum_{n\in J} u_n \leq \sum_{n\in J_{p_0}} u_n \leq M.$$

Theo Định nghĩa 1, $(u_n)_{n\geq 0}$ khả tổng.

Giả thiết (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, và cho $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$.

- Dãy số thực $(\sum_{n\in J_p} u_n)_{p\in\mathbb{N}^*}$ tăng, bị chặn trên bởi $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, do đó hội tụ

đến một số thực mà ta ký hiệu là M_0, và ta có:

$$\operatorname*{Sup}_{p\in\mathbb{N}^*} \Big(\sum_{n\in J_p} u_n\Big) = \lim_{p\infty} \Big(\sum_{n\in J_p} u_n\Big) = M_0 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Trong phép chứng minh (iii) $\Rightarrow$ (i), ta đã thấy rằng, với mọi bộ phận hữu hạn J của $\mathbb{N}$ tồn tại $p_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $J \subset J_{p_0}$, và do đó: $\sum_{n\in J} u_n \leq \sum_{n\in J_{p_0}} u_n \leq M_0$.

Chuyển qua biên trên khi J chạy khắp $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$, ta suy ra: $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq M_0$.

Cuối cùng ta được:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = M_0.$$

Nhận xét:

Để ngắn gọn, ta có thể gọi mọi dãy tăng $(J_p)_{p\geq 1}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$ là *dãy vét kiệt* trong $\mathbb{N}$.

Chúng ta vừa thấy trong phép chứng minh trên rằng, nếu như $(J_p)_{p\geq 1}$ là một dãy vét kiệt trong $\mathbb{N}$ thì: $\forall J \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}),\ \exists\, p_0 \in \mathbb{N},\quad J \subset J_{p_0}$.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$.

Để cho $(u_n)_{n\geq 0}$ khả tổng, điều kiện cần và đủ là chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ,

và với điều kiện đó thì: $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Chứng minh:
Với $p \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $J_p = \{0,...,p\}$. Theo Mệnh đề 1, $(u_n)_{n\geq 0}$ khả tổng khi và chỉ khi dãy $\left(\sum_{n\in J_p} u_n\right)_{p\geq 1}$, tức là dãy $\left(\sum_{n=0}^{p} u_n\right)_{p\geq 1}$, bị chặn trên, điều kiện này theo bổ đề cơ bản về các chuỗi với số hạng ≥ 0, tương đương với điều kiện là chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ. Hơn nữa, với các điều kiện đó thì theo Mệnh đề 1:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{p\infty}\left(\sum_{n=0}^{p} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

2) Trường hợp các dãy với số hạng thuộc $\mathbb{K}$

♦ **Định nghĩa 1** Một dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ với số hạng thuộc $\mathbb{K}$ được gọi là **khả tổng** khi và chỉ khi dãy $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ khả tổng.

Nhận xét:
Theo 1), Mệnh đề 1, dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ khả tổng khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

♦ **Định nghĩa 2** Cho dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{K}$, khả tổng. **Tổng** của $(u_n)_{n\geq 0}$, ký hiệu là $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, là phần tử của $\mathbb{K}$ cho bởi:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

♦ **Mệnh đề** Cho dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy với số hạng thuộc $\mathbb{K}$, khả tổng. Với mọi dãy tăng $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ mà hợp bằng $\mathbb{N}$, ta có:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{p\infty}\left(\sum_{n\in J_p} u_n\right).$$

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$. Do $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ hội tụ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_n| \leq \varepsilon$.

Vì $(J_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ tăng và vì $\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} J_p = \mathbb{N}$, nên tồn tại $p_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $\{0,1,...,n_0\} \subset J_{p_0}$.
Khi đó với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$p \ge p_0 \Rightarrow J_{p_0} \subset J_p \Rightarrow \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n - \sum_{n\in J_p} u_n \right| \le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_n| \le \varepsilon,$$

và cuối cùng ta có:
$$\sum_{n\in J_p} u_n \underset{p\infty}{\to} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n .$$

Nhận xét:
Sự hội tụ giao hoán
Như chúng ta sẽ thấy một cách tổng quát hơn trong 3.4.2, *2)*, Hệ quả, ba tính chất sau đây từng đôi một tương đương với nhau, với mọi dãy $(u_n)_{n\ge0}$ với số hạng thuộc $\mathbb{K}$:

(i) $(u_n)_{n\ge0}$ khả tổng

(ii) Với mọi song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, chuỗi $\sum_{n\ge0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ tuyệt đối.

(iii) Tồn tại một song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho chuỗi $\sum_{n\ge0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ tuyệt đối.

Hơn nữa, nếu (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, thì với mọi song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} .$$

3) Không gian $\ell^1(\mathbb{K})$

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa** Tập hợp $\ell^1(\mathbb{K})$ các dãy $(u_n)_{n\ge0}$ với phần tử trong $\mathbb{K}$, khả tổng, là một $\mathbb{K}$-kgv, và ánh xạ

$$N_1 : \begin{array}{l} \ell^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\ge0} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \end{array}$$

là một chuẩn trên $\mathbb{K}$-kgv đó.

Nếu không thể nhầm lẫn giữa $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$, và $\mathbb{C}$, thì ta có thể viết ℓ^1 thay vì $\ell^1(\mathbb{K})$.

Chứng minh:

- $\ell^1 \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, và $0 \in \ell^1$, do đó $\ell^1 \neq \varnothing$.
- Cho $u = (u_n)_{n\ge0} \in \ell^1$, $v = (v_n)_{n\ge0} \in \ell^1$.

Khi đó $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ hội tụ tuyệt đối, do đó $u+v \in \ell^1$, và:

$$N_1(u+v) = \sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n+v_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n+v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}(|u_n|+|v_n|) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|+\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|+\sum_{n\in\mathbb{N}}|v_n| = N_1(u)+N_1(v).$$

- Cho $\alpha \in \mathbb{K}$, $u=(u_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$.

Khi đó $\sum_{n\geq 0}\alpha u_n$ hội tụ tuyệt đối, do đó $\alpha u \in \ell^1$, và:

$$N_1(\alpha u) = \sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha u_n| = |\alpha|\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| = |\alpha|\ N_1(u).$$

- Nếu $u=(u_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$ thỏa mãn : $N_1(u)=0$, thì $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| = 0$, do đó :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0), \quad u = 0.$$

Xem thêm 3.3.2, ***Nhận xét***.

4) Không gian $\ell^2(\mathbb{K})$

- **Định nghĩa** Một dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ thuộc $\mathbb{K}^n$ được gọi là **bình phương khả tổng** khi và chỉ khi dãy $(u_n^2)_{n\geq 0}$ khả tổng.

Như vậy $(u_n)_{n\geq 0}$ là bình phương khả tổng khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 0}|u_n|^2$ hội tụ.

- **Mệnh đề - Định nghĩa** Tập hợp $\ell^2(\mathbb{K})$ các dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ với phần tử trong $\mathbb{K}$, bình phương khả tổng, là một $\mathbb{K}$-kgv, và ánh xạ $(u,v) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{u_n}v_n$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{K}$-kgv đó.

  Ta ký hiệu chuẩn liên kết là N_2 (hay $\|\cdot\|_2$):

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{K}), \qquad N_2(u) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nếu không thể nhầm lẫn giữa $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$, thì ta có thể viết ℓ^2 thay cho $\ell^2(\mathbb{K})$.

Chứng minh:

- $\ell^2 \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, và $0 \in \ell^2$, do đó $\ell^2 \neq \varnothing$.

- Cho $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Dãy $(\overline{u_n}v_n)_{n\geq 0}$ khả tổng vì:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\overline{u_n}v_n\right| = |u_n||v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)\ .$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng ánh xạ $\varphi : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{K}$ đã được xác định đúng đắn.
$$(u,v) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{u_n}v_n$$

- Cho $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n + v_n|^2 \leq (|u_n| + |v_n|)^2 = |u_n|^2 + 2|u_n||v_n| + |v_n|^2$$
$$\leq |u_n|^2 + (|u_n|^2 + |v_n|^2) + |v_n|^2 = 2(|u_n|^2 + |v_n|^2),$$

vậy: $$u + v \in \ell^2.$$

- Rõ ràng rằng: $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in \ell^2,\quad \alpha u \in \ell^2$.
- Dễ dàng chứng minh được các tính chất sau đây:
  - $\forall u,v \in \ell^2,\quad \varphi(v,u) = \overline{\varphi(u,v)}$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v, w \in \ell^2,\quad \varphi(u, \alpha v + w) = \alpha\varphi(u,v) + \varphi(u,w)$
  - $\forall u \in \ell^2,\quad \varphi(u,u) \geq 0$
  - $\forall u \in \ell^2,\ (\varphi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0)$

Xem thêm C3. 6.

■

***Nhận xét*:**

Ta có $\ell^1 \subset \ell^2$ vì nếu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khả tổng, thì $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, do đó kể từ một hàng nhất định sẽ có: $|u_n| \leq 1$, suy ra $|u_n|^2 \leq |u_n|$, và như thế $(|u_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ khả tổng.

3.3.5 Chuỗi đan dấu

Trong § 3.3.5 này các chuỗi được xét đều có số hạng thực.

◆ **Định nghĩa** Một chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ với số hạng thực được gọi là **chuỗi đan dấu** khi và chỉ khi:

$$\left|\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n\ |u_n| \\ \textbf{hay} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -(-1)^n\ |u_n|. \end{array}\right.$$

Rõ ràng trường hợp này có thể quy về trường hợp kia bằng cách xét các số đối.

◆ **Định lý** **(Định lý đặc biệt cho một số chuỗi đan dấu (Đlđbcđd)**

Cho $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thực.

Nếu: $\begin{cases} \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ đan dấu} \\ u_n \underset{n\infty}{\to} 0 \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ giảm} \end{cases}$, thì $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

Chứng minh: Giả thiết chẳng hạn: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n\,|u_n|$.

Ký hiệu $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ là tổng riêng thứ n, với $n \in \mathbb{N}$. Với mọi p thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

- $S_{2p+2} - S_{2p} = u_{2p+1} + u_{2p+2} = -\,|u_{2p+1}| + |u_{2p+2}| \leq 0$
- $S_{2p+3} - S_{2p+1} = u_{2p+2} + u_{2p+3} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+3}| \geq 0$
- $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \underset{p\infty}{\to} 0$

Các kết quả trên chứng tỏ rằng các dãy $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ và $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ kề nhau (xem Tập 1, 3.2.2, Định nghĩa), do đó hội tụ và có cùng một giới hạn. Từ đó suy ra (xem Tập 1, 3.3, Mệnh đề 2) rằng $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ, tức là $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

***Thí dụ*:** **Chuỗi đan dấu Riemann,** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định.

1) Nếu $\alpha \leq 0$ thì $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\infty}{\not\to} 0$, vậy chuỗi đó phân kỳ thô.

2) Nếu $0 < \alpha \leq 1$ thì $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ không hội tụ tuyệt đối (vì rằng $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ), nhưng lại hội tụ theo Đlđbcđd, do đó bán hội tụ.

3) Nếu $\alpha > 1$ thì $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ hội tụ tuyệt đối.

Bài tập

◊ **3.3.9** Xác định loại của các chuỗi với số hạng tổng quát là:

a) $\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$ b) $(-1)^n n^{-(1+n^a)}$, $a \in \mathbb{R}$

c) $(-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$ d) $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n!)}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{(-1)^n}{n^a}} \frac{\sqrt{|t|}}{1+\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

◊ **3.3.10** Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta ký hiệu:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ là bình phương của một số nguyên} \\ \dfrac{(-1)^n}{n} & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 1} u_n$ hội tụ và: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

◊ **3.3.11** Cho $(a_n)_{n\geq 0}$ là một chuỗi thực giảm và có giới hạn 0, và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$ và $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Chứng minh rằng $\sum_n a_n^2$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_n u_n U_n$ hội tụ.

3.3.6 Thí dụ về việc sử dụng một khai triển tiệm cận

Trong nhiều thí dụ về việc xác định loại của một chuỗi đan dấu $\sum_{n\geq 0} u_n$, trong đó $|u_n|$ "còn có chứa $(-1)^n$ bên trong", nên Đlđbcđd không áp dụng được, vì lẽ $(|u_n|)_{n\geq 0}$ có thể không giảm. Khi đó ta có thể thử sử dụng một cách khai triển tiệm cận u_n khi n dần đến vô cùng (theo một thang bậc mà ta cần xác định).

Thí dụ: Xác định loại của chuỗi $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Ta có: $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

- $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ bán hội tụ
- $\sum_n \dfrac{1}{n}$ phân kỳ
- $\sum_n O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ hội tụ tuyệt đối.

Ta kết luận rằng chuỗi đang xét phân kỳ.

Như thế $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, tuy rằng hai chuỗi $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ và $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ thuộc hai loại khác nhau. Kết quả trên chứng tỏ rằng định lý tương đương của các chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{E}_+$ (3.2.2, Định lý 3) không thể áp dụng cho các chuỗi với số hạng thực và có dấu thay đổi. ■

Nếu trong khai triển tiệm cận mà *o* hay *O* không áp dụng đối với số hạng tổng quát của một chuỗi hội tụ tuyệt đối, thì ta sẽ thử nhóm các o hay O đó với một số hạng khác, số hạng này phải có dấu cố định, nhằm áp dụng định lý về chuỗi tương đương.

Thí dụ: Xác định loại của: $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$.

Ta có: $\dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\ln n}+o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\right)$

$$= \frac{(-1)^n}{\ln n}+\left(-\frac{1}{(\ln n)^2}+o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)\right).$$

- $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ hội tụ (Đlđbcdd)
- $-\dfrac{1}{(\ln n)^2}+o\left(\dfrac{1}{(\ln n)^2}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{1}{(\ln n)^2} < 0$ và $\sum_n -\dfrac{1}{(\ln n)^2}$ phân kỳ, do đó

$\sum_n \left(-\dfrac{1}{(\ln n)^2}+o\left(\dfrac{1}{(\ln n)^2}\right)\right)$ phân kỳ.

Cuối cùng ta kết luận rằng chuỗi đang xét phân kỳ.

Bài tập

◊ **3.3.12** Xác định loại của các chuỗi có số hạng tổng quát là:

a) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

b) $\dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}+(-1)^n n^{1/3}}$

c) $\dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}+n^{1/3}+(-1)^n}$

d) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n+1}}$

e) $(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

f) $\dfrac{(-1)^n \ln(n+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n+2}}$

g) $(-1)^n \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n+1}{n^2+3}\right)$

h) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{1}{n}$

i) $(-1)^n \sqrt[n]{n}\sin\dfrac{1}{n}$

j) $(-1)^n \dfrac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

k) $\dfrac{(-1)^n}{\cos n+n^{3/4}}$

l) $(-1)^n n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$

m) $(-1)^n \ln\dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1}$

n) $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

o) $\dfrac{(-1)^n}{\left(\ln n+(-1)^n\right)^2}$

p) $\dfrac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$

q) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n \ln(\ln n)}$

r) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n+(-1)^n}$

s) $(-1)^n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}-e^{-1}\right)$

t) $(-1)^n\left(\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$

u) $(-1)^n\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n^{\frac{1}{n}}\right)$

v) $\ln\left(1+(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right)$

w) $\cos\left(\pi n^2 \ln\dfrac{n}{n-1}\right)$

x) $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)$

y) $\sin\left(\left(1+(-1)^n\sqrt{n}\right)^{-1}\right)$

z) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$, $\quad a\in\mathbb{R}_+^*$

a') $\ln\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}+a}{n+(-1)^n\sqrt{n}+b}$, $\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

b') $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}}$, $\quad a\in\mathbb{R}_+^*$

c') $(-1)^n n^a \displaystyle\int_n^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x(x+1)}dx$, $a\in\mathbb{R}$.

◊ **3.3.13** Cho $(u_n)_{n\geq 0}$ là dãy xác định bởi $u_0 \in \mathbb{R}_+$ và: $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

Xác định loại của chuỗi $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n u_n$.

3.3.7 So sánh một chuỗi với một tích phân

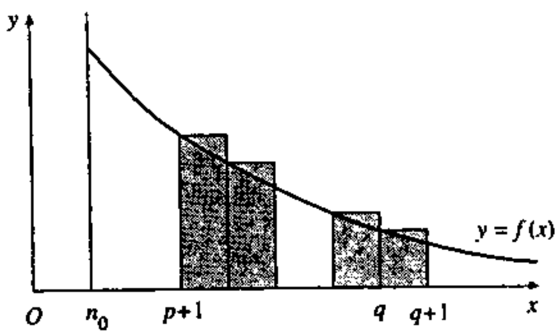
1) Nghiên cứu sơ bộ một hàm đơn điệu

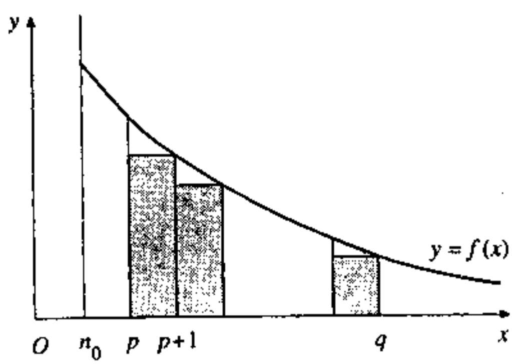
a) Trường hợp một hàm giảm

◆ **Mệnh đề** Cho $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục từng khúc và giảm. Với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$ sao cho $n_0 \leq p < q$ ta có:

$$\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leq \int_{p}^{q} f.$$

Chứng minh:





Do f giảm nên ta có: $\forall k \geq n_0$, $\forall x \in [k; k+1]$, $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$,

suy ra: $\forall k \geq n_0$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq f(k)$,

hay cũng là: $\forall k > n_0$, $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f$.

Lấy tổng với k từ $p+1$ đến q, ta được: $\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leq \int_p^q f$. ∎

Thí dụ:

Trường hợp riêng, khi áp dụng Mệnh đề 1 cho $f : [1 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\int_1^{n+1} \frac{1}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{và} \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x \right).$$

Như thế ta suy ra (vì $\ln(n+1) \underset{n\infty}{\sim} \ln n$ và $1 + \ln n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$) : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

Dưới đây chúng ta sẽ xác định thêm kết quả này bằng hằng số Euler γ.

◆ **Hệ quả** Cho $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0 ; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ liên tục từng khúc và giảm.

Chuỗi $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ hội tụ khi và chỉ khi ánh xạ f khả tích trên $[n_0; +\infty[$,

và với điều kiện đó thì ta có:

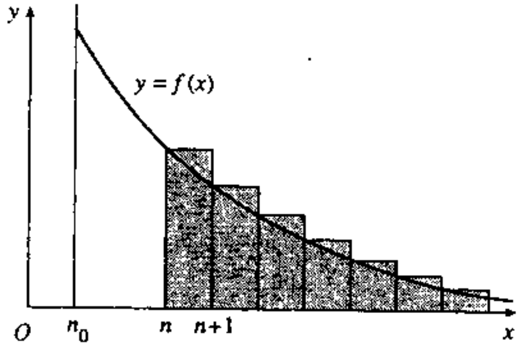
$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f.$$

Chứng minh:

1) Giả thiết f khả tích trên $[n_0 ; +\infty[$. Theo Mệnh đề 1:

$$\forall n > n_0, \quad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f \leq \int_{n_0}^{+\infty} f,$$

kết quả đó chứng tỏ, theo bổ đề hàm trội, rằng chuỗi $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ hội tụ. Hơn nữa, theo

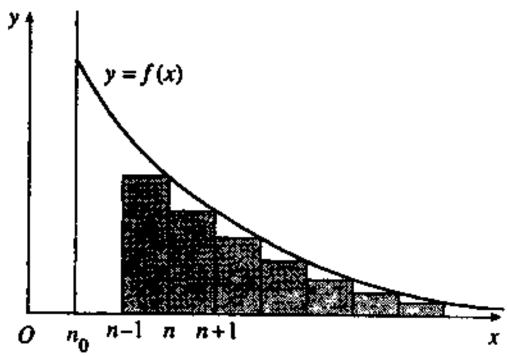


Mệnh đề, với mọi (n, q) sao cho: $n_0 \le n < q$, ta có:

$$\int_{n+1}^{q+1} f \le \sum_{k=n+1}^{q} f(k) \le \int_{n}^{q} f,$$

từ đó bằng cách cho q dần ra vô cùng (với n cố định), ta được:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \le \int_{n}^{+\infty} f.$$



2) Đảo lại, giả thiết $\sum_{n \ge n_0} f(n)$ hội tụ.

Theo Mệnh đề và do $f \ge 0$ nên ta có:

$$\forall n \geq n_0, \qquad \int_{n_0+1}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k),$$

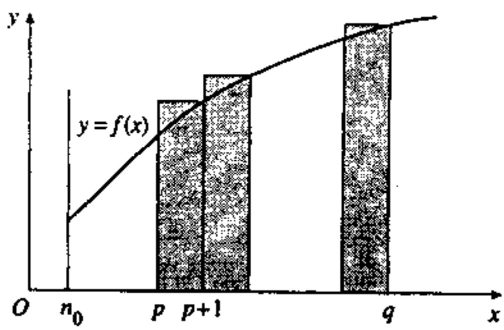
và như vậy (xem 2.5.1, *3)*, Mệnh đề 1), f khả tích trên $[n_0\,; +\infty\,[$.

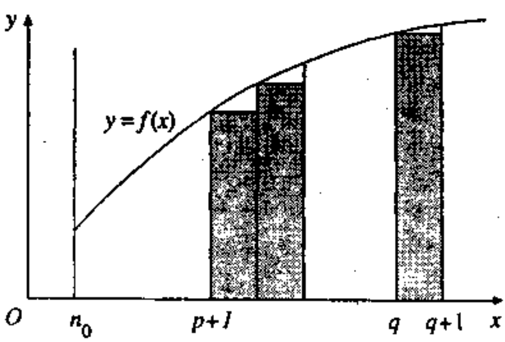
b) Trường hợp một hàm tăng

♦ **Mệnh đề** Cho $n_0 \in \mathbb{N}, f : [n_0\,; +\infty\,[\to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục từng khúc và tăng. Với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$ sao cho $n_0 \leq p < q$ ta có:

$$\int_p^q f \leq \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leq \int_{p+1}^{q+1} f\,.$$

Chứng minh:
Áp dụng Mệnh đề ở *a)* cho hàm $-f$.





Thí dụ: Khi áp dụng Mệnh đề trên cho $f : \begin{array}{ccc}[1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x\end{array}$ ta được:

$$\forall n \geq 2\ ,\ \int_1^n \ln x\, \mathrm{d}x \ \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \int_2^{n+1} \ln x\, \mathrm{d}x\ ,$$

tức là: $\forall n \geq 2\ ,\ n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1,$

suy ra: $\sum_{k=2}^{n} \ln k \underset{n\infty}{\sim} n\ln n\ ,$ tức là: $\ln(n!) \underset{n\infty}{\sim} n\ln n\ .$

2) Trường hợp một hàm giảm với giá trị thuộc $\mathbb{R}_+$

Cho $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc, ≥ 0, giảm. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ký hiệu:

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t \ - f(n).$$

Do f giảm nên ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n-1; n],\ \ f(n) \leq f(t) \leq f(n-1),$

suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t \ \leq f(n-1),$

và do đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\quad 0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n).$

Kết quả trên chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} w_n$ có các số hạng ≥ 0, và rằng với mọi N thuộc $\mathbb{N}^*$ thì:

$$\sum_{n=1}^{N} w_n \leq \sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N) \ \leq f(0).$$

Theo bổ đề cơ bản ta kết luận chuỗi $\sum_{n\geq 0} w_n$ hội tụ.

Hơn nữa với mọi N thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} w_n = \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \ - \sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)\mathrm{d}t \ - \sum_{n=1}^{N} f(n)\,.$$

Do chuỗi $\sum_{n\geq 1} w_n$ hội tụ, nên suy ra dãy $\left(\int_0^N f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 1} f(n)$ hội tụ.

- Nếu f khả tích trên $[0\,; +\infty[$, thì $\int_0^N f(t)\mathrm{d}t \underset{N\infty}{\to} \int_{[0;+\infty[} f$, và do đó chuỗi

$\sum_{n\geq 1} f(n)$ hội tụ.

- Đảo lại, giả thiết chuỗi $\sum_{n\geq 0} f(n)$ hội tụ. Khi đó chuỗi $\left(\int_0^n f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ, do đó bị chặn trên; tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^n f \leq M.$

Như vậy $([0;n])_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy tăng những đoạn mà hợp bằng $[0\,;+\infty[$,và thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_{[0;n]} f \leq M.$$

Theo 2.5.2, *1)*, Mệnh đề 2, f khả tích trên $[0\,;+\infty[$.
Ta tóm tắt kết quả khảo sát.

◆ **Định lý** Cho $f: [0\,;+\infty[\,\to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục từng khúc, ≥ 0, giảm. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu: $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$. Khi đó:

1) Chuỗi $\sum_{n\geq 1} w_n$ hội tụ.

2) f khả tích trên $[0\,;+\infty[$ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 1} f(n)$ hội tụ.

3) Nếu f khả tích trên $[0\,;+\infty[$ hay nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} f(n)$ hội tụ thì:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_{[0;+\infty[} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

***Thí dụ*: Hàng số Euler γ**

Xét $f: [1\,;+\infty[\,\to \mathbb{N}$, vốn liên tục, ≥ 0, giảm.
$\quad t \mapsto \frac{1}{t}$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ký hiệu: $\quad w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n).$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N} - \{0,1\}$ ta có:

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Mặt khác, theo định lý trên đây, chuỗi $\sum_{n\geq 2} w_n$ hội tụ.

Do vậy dãy $\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} w_k\right)_{n\geq 1}$ có giới hạn hữu hạn, ký hiệu là γ, và được gọi là hằng số Euler.

Như vậy:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)}$$

Hơn nữa, vì $\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = 1 - \gamma$ và do với mọi $n \geq 2$ thì $w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n} = \ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}$,

nên ta suy ra: $\quad \gamma = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$,

hoặc: $$\gamma = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \right).$$

Một giá trị gần đúng là: $\quad \gamma \approx 0,577...$

Hiện nay (1997) người ta vẫn chưa biết được rằng liệu γ có phải là một số hữu tỷ không. ■

3) Trường hợp một hàm lấy giá trị thuộc $\mathbb{K}$

Cho $f : [0 ; +\infty[\to \mathbb{K}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 sao cho f' khả tích trên $[0 ; +\infty[$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ký hiệu: $\quad w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt - f(n).$

Bằng một phép tích phân từng phần, ta được với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$w_n = \left[(t-n+1)f(t)\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} (t-n+1)f'(t)\, dt - f(n) = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1)f'(t)\, dt,$$

suy ra: $$|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} (t-n+1)|f'(t)|\, dt \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)| dt.$$

Từ đó ta suy ra mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}|w_k| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}|f'(t)|dt = \int_{0}^{n}|f'(t)|dt \le \int_{[0;+\infty[}|f'|.$$

Bổ đề cơ bản cho phép ta kết luận rằng chuỗi $\sum_{n\ge1} w_n$ hội tụ tuyệt đối.

Hơn nữa, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_0^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Đặc biệt, nếu f khả tích trên $[0 ; +\infty[$, thì $\displaystyle\int_0^n f(t)dt \underset{n\infty}{\to} \int_{[0;+\infty[} f$, vậy chuỗi

$\sum_{n\ge1} f(n)$ hội tụ, và: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_{[0;+\infty[} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Ta tóm tắt kết quả khảo sát:

♦ **Định lý** Cho $f : [0 ; +\infty[\to \mathbb{K}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 sao cho f' khả tích trên $[0 ; +\infty[$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu:

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n).$$

Khi đó:

1) Chuỗi $\sum_{n\ge1} w_n$ hội tụ tuyệt đối.

2) Nếu có thêm điều kiện f khả tích trên $[0 ; +\infty[$, thì chuỗi $\sum_{n\ge1} f(n)$

hội tụ và: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_{[0;+\infty[} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

4) *Công thức Stirling*

Ánh xạ $f : \begin{array}{l}[1;+\infty[\;\to\; \mathbb{R} \\ \quad t \;\;\mapsto\;\; \ln t\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[1 ; +\infty[$; tuy nhiên, do $f' : t \mapsto \frac{1}{t}$ không khả tích trên $[1 ; +\infty[$, nên ta không thể áp dụng trực tiếp Định lý ở *3)*.

Với $n \ge 2$, ký hiệu: $\displaystyle w_n = \int_{n-1}^{n} \ln t\, dt - \ln n$.

Như thế với mọi $n \ge 2$, ta có:

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \int_1^n \ln t \, dt - \sum_{k=2}^{n} \ln k = n\ln n - n + 1 - \ln(n!).$$

Cũng như ở *3)*, ta có với mọi $n \ge 2$: $\qquad w_n = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\frac{1}{t}dt$,

rồi bằng một phép tích phân từng phần:

$$w_n = -\left[\frac{(t-n+1)^2}{2}\frac{1}{t}\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{2}\frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}dt.$$

Ta ký hiệu với $n \ge 2$: $\qquad x_n = \int_{n-1}^{n} (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2}dt$

Do $\qquad 0 \le x_n \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$,

nên chuỗi $\sum_{n \ge 2} x_n$ hội tụ.

Sử dụng hằng số Euler γ ta được:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} x_k$$

$$= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k\right) + \underset{n\infty}{o}(1).$$

Như thế, với ký hiệu $K = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k\right)$, ta có:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + \underset{n\infty}{o}(1),$$

suy ra: $\qquad n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^{K+o(1)}$, tức là $n! \underset{n\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^K$.

Để xác định K, người ta sử dụng các tích phân Wallis (xem Tập 1, 6.4.4, Thí dụ 1):

Ký hiệu $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, ta được với mọi p thuộc $\mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{và} \qquad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!},$$

suy ra: $\qquad I_{2p} I_{2p+1} \underset{p\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p\infty}{\sim} \frac{\pi}{4p}$, và từ đó dễ dàng có: $I_n I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

Mặt khác thì: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1}$,

suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n I_{n+1} \le I_n^2 \le I_n I_{n-1}$.

Do $I_n I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ và $I_{n-1} I_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$, ta suy ra: $I_n^2 \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$,

rồi sau đó: $I_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ **(Công thức Wallis)**

Nhưng: $$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{p\infty}{\sim} \frac{(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}e^K}{(p^p e^{-p}\sqrt{p}e^K)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2p}e^K},$$

nên: $e^K = \sqrt{2\pi}$.

Ta kết luận:

◆ **Định lý** **(Công thức Stirling)**

$$\boxed{n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Bài tập

◊ **3.3.14** Xác định loại của các chuỗi sau đây (có thể sử dụng công thức Stirling):

a) $\dfrac{n^n}{n!e^n}$ b) $\dfrac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}$, $a \in \mathbb{R}$ c) $\dfrac{(2n)!}{n!a^n n^n}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

d) $\dfrac{(n!)^a n^{bn}}{((2n)!)^c}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e) $\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

◊ **3.3.15** Xác định $\lim\limits_{n\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{n!}{n^n\sqrt{n}}$.

◊ **3.3.16** Khảo sát sự tồn tại và tính tích phân: $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x}dx$.

3.3.8 Khảo sát giá trị của tổng của một chuỗi

Với một chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ cho trước mà ta giả thiết hội tụ, mục tiêu của §3.3.8 này là tính $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (nếu có thể), hoặc là tìm ra một xấp xỉ tiệm cận hay xấp xỉ bằng số của tổng đó.

1) Tính đúng tổng của một chuỗi

Phép tính đúng này ít khi thực hiện được. Ta có thể thử các phương pháp sau đây:

- quy về những chuỗi mà ta đã biết tổng: chuỗi lũy thừa, các chuỗi nguyên thông thường (xem Tập 4, chương 5), các chuỗi Fourier (xem Tập 4, chương 6).
- viết số hạng tổng quát dưới một dạng cho phép tính các tổng riêng bằng cách tính dần từng bộ phận (xem *b)* dưới đây).

a) Chuỗi lũy thừa

Chúng ta nhắc lại (xem 3.2.4, 1)) rằng, với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, chuỗi nhân $\sum_{n\geq 0} z^n$ hội tụ và : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

b) Chuỗi khử chéo được

Giả thiết rằng số hạng tổng quát u_n của chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ (mà ta muốn tính tổng) có thể viết dưới dạng: $u_n = a_{n+1} - a_n$,

trong đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy có giới hạn hữu hạn l đã biết. Vì:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} u_k = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0$$

nên ta suy ra:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l - a_0 .$$

Thí dụ: *1) Tính* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Do: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

nên ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, và do đó: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2) Tính $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4+n^2+2}$.

Chú ý rằng $n^4 + n^2 + 2 = 1 + (n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)$, ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4+n^2+2} &= \operatorname{Arctan} \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{1+(n^2+n+1)(n^2-n+1)} \\
&= \operatorname{Arctan}(n^2 + n + 1) - \operatorname{Arctan}(n^2 - n + 1) \\
&= \operatorname{Arctan}((n+1)^2 - (n + 1) + 1) - \operatorname{Arctan}(n^2 - n + 1),
\end{aligned}$$

và do đó: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{2k}{k^4+k^2+2} = \operatorname{Arctan}(n^2 + n + 1) - \operatorname{Arctan} 1 \underset{n\infty}{\to} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$,

từ đó có kết quả cuối cùng: $$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4+n^2+2} = \frac{\pi}{4}.$$

c) Tổng quát hóa các chuỗi khử chéo được

Có thể xảy ra trường hợp u_n có thể viết thành tổng của nhiều số hạng (số các số hạng này không phụ thuộc n) sao cho sau khi giản ước thì trong $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ ta có thể chuyển qua giới hạn khi n dần đến vô cùng.

Thí dụ:

Khảo sát tính hội tụ và tính tổng của chuỗi $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$, trong đó:

$$u_n = (n-1)^\alpha + (n+1)^\alpha - 2n^\alpha, \qquad \text{với } \alpha \in \mathbb{R} \text{ cố định.}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= 1^\alpha - 2.2^\alpha + \cancel{3^\alpha}, \\
u_3 &= 2^\alpha - \cancel{2.3^\alpha} + \cancel{4^\alpha}, \\
u_4 &= \cancel{3^\alpha} - \cancel{2.4^\alpha} + \cancel{5^\alpha}, \\
&\;\;\vdots \\
u_{n-2} &= \cancel{(n-3)^\alpha} - \cancel{2(n-2)^\alpha} + \cancel{(n-1)^\alpha} \\
u_{n-1} &= \cancel{(n-2)^\alpha} - \cancel{2(n-1)^\alpha} + n^\alpha \\
u_n &= \cancel{(n-1)^\alpha} - 2n^\alpha + (n+1)^\alpha
\end{aligned}$$

Như thế ta được:

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - 2^{\alpha} - n^{\alpha} + (n+1)^{\alpha} = 1 - 2^{\alpha} + n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right)$$

$$= 1 - 2^{\alpha} + n^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - 2^{\alpha} + \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}).$$

Kết quả này chứng tỏ rằng $\sum_{k=2}^{n} u_k$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng khi và chỉ khi $\alpha \le 1$.

Cuối cùng ta thấy $\sum_{n\ge 2} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha \le 1$, và khi đó thì:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \begin{cases} 1-2^{\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \\ 0 & \text{nếu } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Ta có thể nhận xét rằng thí dụ đưa ra chính là một chuỗi có thể khử chéo được, vì lẽ:

$$u_n = ((n-1)^{\alpha} - n^{\alpha}) - (n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha}).$$

Bài tập

◊ **3.3.17** Chứng minh tính hội tụ và tính tổng của các chuỗi sau đây:

a) $\sum_{n\ge 0} x^n \cos n\theta$ và $\sum_{n\ge 0} x^n \sin n\theta$, $(x,\theta) \in]-1;1[\times \mathbb{R}$

b) $\sum_{n\ge 0} x^n \operatorname{ch} n\theta$ và $\sum_{n\ge 0} x^n \operatorname{sh} n\theta$, $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $|x|e^{|\theta|} < 1$

c) $\sum_{n\ge 1} \frac{\cos nx}{2^n \cos^n x}$ và $\sum_{n\ge 1} \frac{\sin nx}{2^n \cos^n x}$, $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|2\cos x| > 1$

d) $\sum_{n\ge 1} \frac{\operatorname{ch} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x}$ và $\sum_{n\ge 1} \frac{\operatorname{sh} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x}$, $x \in \dot{\mathbb{R}}$

e) $\sum_{n\ge 2} \ln \frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n)(\ln(n+2))}$

f) $\sum_{n\ge 0} \frac{1+\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$

g) $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$

h) $\sum_{n\ge 1} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}$

i) $\sum_{n\ge 0} \operatorname{Arctan} \frac{a}{1+a^2 n + a^2 n^2}$, $a \in \mathbb{R}$

j) $\sum_{n\ge 1} \operatorname{Arctan} \frac{8n}{n^4 - 2n^2 + 5}$

k)* $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}$ l) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\mathrm{sh}na.\mathrm{sh}(n+1)a}$, $a\in\mathbb{R}^*$

m) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\mathrm{ch}na.\mathrm{ch}(n+1)a}$, $a\in\mathbb{R}^*$ n) $\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}}-1}$, $z\in\mathbb{C}$ thỏa mãn $|z|\neq 1$

o) $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$, $z\in\mathbf{C}$ thỏa mãn $|z|<1$

p) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n}\cos^3(3^n\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$ q) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\sin^3(3^n\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$

r) $\sum_{n\geq 0}3^n\mathrm{sh}^3\frac{x}{3^n}$, $x\in\mathbb{R}$ s) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$, $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

t) $\sum_{n\geq 0}\ln\left(2\mathrm{ch}\frac{x}{2^n}-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$ u) $\sum_{n\geq 0}\ln\left(4\mathrm{ch}^2\frac{x}{2^n}-2\mathrm{ch}\frac{x}{2^n}-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

◊ **3.3.18** Cho $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Khảo sát tính hội tụ và tính tổng (khi chuỗi hội tụ) của chuỗi $\sum_{n\geq 0}u_n$ trong đó: $\forall p\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}u_{2p}=a^pb^p\\ u_{2p+1}=a^pb^{p+1}\end{cases}$.

◊ **3.3.19** Chứng minh rằng, với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+^*$, ta có:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+2n+1}+\frac{1}{x+2n}-\frac{1}{x+n}\right)=\ln 2$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+2n+1)^2}+\frac{1}{(x+2n)^2}-\frac{1}{(x+n)^2}\right)=0$

◊ **3.3.20** Cho $x\in\mathbb{R}^*-\{-\frac{1}{n};\,n\in\mathbb{N}^*\}$. Chứng minh rằng chuỗi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)}$$

hội tụ và tính tổng của chuỗi đó.

◊ **3.3.21** Tính $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$, rồi tính $\lim_{n\infty}\left(\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\right)^n$.

◊ **3.3.22** Chứng minh: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)=n$.

◊ **3.3.23** a) Với $n\in\mathbb{N}^*$, giải phương trình $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1}=1$, với ẩn $z\in\mathbb{C}$.

b) Suy ra: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$.

c) Chứng minh: $\forall u \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\quad \text{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \text{cotan}^2 u$.

d) Kết luận rằng: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2) Ước lượng phần dư của một chuỗi hội tụ

Cho $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ là một chuỗi hội tụ, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ là phần dư cấp n. Mục đích ở đây là thu được một ước lượng có ích của R_n, hoặc là một đại lượng tương đương với R_n khi n dần đến vô cùng.

a) So sánh chuỗi-tích phân

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ và một ánh xạ $f : [n_0; +\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc và giảm sao cho: $\quad (\forall n \geq n_0, \quad u_n = f(n))$,
thì ta có thể áp dụng cách so sánh chuỗi-tích phân, sẽ cho:

$$\forall n \geq n_0, \qquad \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f .$$

Thí dụ:

Cho $\alpha \in]1; +\infty[$; vì $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}}$ liên tục và giảm trên $[1; +\infty[$ nên ta được:

$$\forall n \geq 1, \qquad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

tức là: $$\forall n \geq 1, \qquad \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

và suy ra: $$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

b) Chuỗi có thể so sánh với một chuỗi lũy thừa

Giả thiết rằng ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$) và tồn tại $\lambda \in [0; 1[$ và $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \geq N, \quad 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda.$$

Bằng cách nhân các bất đẳng thức, ta suy ra: $\quad \forall n > N, \quad 0 < u_n \leq \lambda^{n-N} u_N$.

rồi: $\forall n \ge N, \quad 0 < R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \le \lambda^{-N} u_N \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k = \dfrac{\lambda^{-N+1}}{1-\lambda} u_N \lambda^n,$

■

Thí dụ : Tính một giá trị gần đúng với độ chính xác 10^{-6} của $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2+\dfrac{\sin n}{n}\right)^{-n}$.

- Do $\left(2+\dfrac{\sin n}{n}\right)^{-1} \underset{n\infty}{\rightarrow} \dfrac{1}{2}$, nên ta tính, chẳng hạn, một số nguyên N thỏa

mãn: $\forall n \ge N, \quad 0 < \left(2+\dfrac{\sin n}{n}\right)^{-1} \le 0,6$.

Để có được ước lượng đó chỉ cần $\left(2-\dfrac{1}{N}\right)^{-1} \le 0,6$, tức là $N \ge 3$.

- Như thế với mọi $n \ge 2$ ta có:

$$0 \le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(2+\frac{\sin k}{k}\right)^{-k} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty}(0,6)^k = \frac{(0,6)^{n+1}}{1-0,6} = 2,5.(0,6)^n.$$

Như vậy để có $0 \le R_n < \dfrac{1}{2}.10^{-6}$, thì chỉ cần $2,5.(0,6)^n < \dfrac{1}{2}.10^{-6}$, tức là $n \ge 31$.

Nói riêng: $0 \le R_{31} < \dfrac{1}{2}.10^{-6}$.

- Với máy tính bỏ túi ta được:

$$S_{31} = \sum_{k=1}^{31}\left(2+\frac{\sin k}{k}\right)^{-k} \simeq 0,809509, \text{ với độ chính xác tới } \frac{1}{2}.10^{-6}.$$

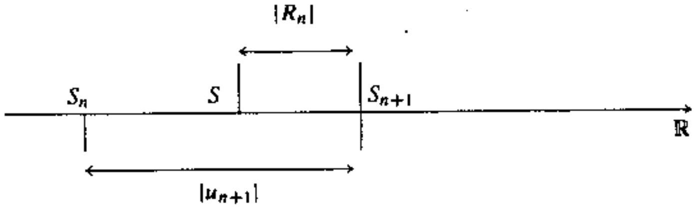
- Ta kết luận: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2+\dfrac{\sin n}{n}\right)^{-n} \simeq 0,809509$, với độ chính xác tới $\dfrac{1}{2}.10^{-6}$.

c) Các chuỗi có thể áp dụng **Đlđbcđd**

Giả thiết rằng có thể áp dụng Đlđbcđd (xem 3.3.5) cho $\sum_{n\ge 0} u_n$, tức là:

$$\begin{cases} \sum_{n\ge 0} u_n \text{ là chuỗi đan dấu} \\ u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} 0 \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ giảm} \end{cases}$$

Chúng ta đã thấy (3.3.5) rằng khi đó với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, tổng $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ bao hàm giữa các tổng riêng S_n và S_{n+1}, suy ra: $|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|$.



Như vậy ta đã thu được Mệnh đề sau đây:

♦ **Mệnh đề** Nếu có thể áp dụng Đlđbcđd cho chuỗi thực $\sum_{n\geq 0} u_n$ thì:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |R_n| \leq |u_{n+1}|,$$

trong đó $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ là phần dư cấp n.

Thí dụ: Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ cố định. Vì có thể áp dụng Đlđbcđd cho chuỗi Riemann đan dấu $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, nên ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Nhận xét:
Ta cũng sẽ áp dụng Mệnh đề trên để chứng minh tính hội tụ đều của một số chuỗi hàm nhất định (xem Tập 4, 4.2.1, Thí dụ, *4)*).

Bài tập

◊ **3.3.24** Tính các giới hạn:

a) $\lim_{n\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right)^{-\frac{1}{2\ln n}}$ b) $\lim_{n\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right|^{\frac{1}{\ln(\ln n)}}$

3.3.9 Cộng các hệ thức so sánh

Nên so sánh §3.3.9 này với §2.5.3 về việc tích phân các hệ thức so sánh (xem thêm bài tập 3.3.25).
Trong suốt §3.3.9 này, E sẽ chỉ một không gian Banach. Trong lần đọc đầu tiên và theo đúng chương trình, có thể chỉ giới hạn vào trường hợp $E = \mathbb{K}$.

1) Trường hợp các chuỗi hội tụ

◆ **Mệnh đề 1**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi có các số hạng thuộc E, $\sum_{n\geq 0} v_n$ là một chuỗi với số hạng thực.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} v_n \quad \text{hội tụ} \\ u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n) \end{cases}, \qquad \text{thì } \begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{hội tụ} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \end{cases}.$$

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n)$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $\forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq \varepsilon v_n$

Theo định lý hàm trội, $\sum_{n>N} u_n$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ (vì E là không gian đủ, xem 3.3.2, Định lý) và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$:

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon v_k = \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

chứng tỏ rằng: $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

◆ **Mệnh đề 2**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi có các số hạng thuộc E, $\sum_{n\geq 0} v_n$ là một chuỗi với số hạng thực.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} v_n \quad \text{hội tụ} \\ u_n = \underset{n\infty}{O}(v_n) \end{cases}, \quad \text{thì } \begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{hội tụ} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\infty}{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \end{cases}.$$

Chứng minh: Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 1.

◆ **Mệnh đề 3**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ là hai chuỗi với số hạng thực.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} v_n \quad \text{hội tụ} \\ u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \end{cases}, \quad \text{thì } \begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{hội tụ} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \end{cases}$$

Chứng minh:

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \quad u_n - v_n = \underset{n\infty}{o}(v_n) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - v_k) = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k .$$

***Thí dụ*: Tính phần chính của** $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k}$ **khi** n **dần đến vô cùng.**

Có thể áp dụng Mênh đề 2, do đó $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k} \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Mặt khác thì bằng phương pháp so sánh chuỗi-tích phân, ta được:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

và:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

2) Trường hợp các chuỗi phân kỳ

◆ **Mệnh đề 1**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi có các số hạng thuộc E, $\sum_{n\geq 0} v_n$ là một chuỗi với số hạng thực.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} v_n \quad \text{phân kỳ}, \\ u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n) \end{cases} \qquad \text{thì} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Chứng minh:

Cho $\varepsilon > 0$. Vì rằng $u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n)$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \geq N$, $\|u_n\| \leq \varepsilon v_n$.

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > N$, ta có:

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \|u_k\| + \sum_{k=N+1}^{n} \|u_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \|u_k\| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{N} \left(\|u_k\| - \varepsilon v_k\right) + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k .$$

Do $\sum_{k=0}^{N} \left(\|u_k\| - \varepsilon v_k\right)$ đã cố định (không phụ thuộc n), và vì $\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\infty}{\to} +\infty$ (do $\sum_{n\geq 0} v_n$ phân kỳ và lấy các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$, nên tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $N_1 \geq N$ và

thỏa mãn: $\quad \forall n \geq N_1, \quad \sum_{k=0}^{N} \left(\|u_k\| - \varepsilon v_k\right) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Cuối cùng ta được: $\quad \forall n \geq N_1, \quad \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k\right\| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$,

và do đó: $\quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$

♦ **Mệnh đề 2**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi có các số hạng thuộc E, $\sum_{n\geq 0} v_n$ là một chuỗi với số hạng thực.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} v_n \quad \text{phân kỳ}, \\ u_n = \underset{n\infty}{O}(v_n) \end{cases} \quad \text{thì} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\infty}{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Chứng minh: Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 1.

♦ **Mệnh đề 3**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ là hai chuỗi với số hạng thực.

$$\text{Nếu } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n\geq 0} v_n \quad \text{phân kỳ}, \\ u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \end{cases} \quad \text{thì} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\infty}{\sim} \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Chứng minh: Tương tự như phép chứng minh Mệnh đề 2 ở *1)*.

Thí dụ: Tính phần chính của $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+(-1)^k}$ khi n dần đến vô cùng.

Có thể áp dụng được Mệnh đề 2, do đó: $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+(-1)^k} \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Mặt khác, bằng phương pháp so sánh chuỗi-tích phân (xem 3.3.7, *1)*, Thí dụ), ta được: $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$,

và cuối cùng là: $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+(-1)^k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$.

Bài tập

◊ **3.3.25** Chứng minh rằng ta có thể suy ra các định lý về việc cộng các hệ thức so sánh đối với các chuỗi (3.3.9) từ các định lý tương ứng đối với các tích phân (2.5.3) bằng cách xét các ánh xạ $f, g : [0; +\infty[\to E$ hoặc $\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n; n+1[,\quad \begin{cases} f(t) = u_n \\ g(t) = v_n \end{cases}.$$

◊ **3.3.26** Cho $\sum_{n\geq 1} u_n$ là một chuỗi có các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$ và với $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Giả thiết rằng $\sum_{n\geq 1} u_n$ phân kỳ và $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$. Với n đủ lớn ta ký hiệu:

$v_n = \dfrac{1}{\ln S_n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{u_k}{S_k}$. Chứng minh: $v_n \underset{n\infty}{\to} 1$.

◊ **3.3.27** Cho $\sum_{n} u_n$ là một chuỗi phân kỳ với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ sao cho $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

Chứng minh: $\sum_{k=1}^{n} u_k S_k \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} S_n^2$ (trong đó $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$).

◊ **3.3.28** Xác định phần chính (theo thang bậc các n^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$) khi n dần đến vô cùng của $u_n = \sum_{1\leq p,q\leq n} \dfrac{pq}{p+q}$.

◊ **3.3.29** Cho $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ là hai dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, và giả thiết rằng:

$$\frac{S_n}{nu_n} \underset{n\infty}{\to} \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\quad \frac{T_n}{nv_n} \underset{n\infty}{\to} \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

Tính: $\displaystyle\lim_{n\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k u_k v_k}{n^2 u_n v_n}$.

3.3.10 Bổ sung: nhóm các số hạng

Các chuỗi được xét đến trong §3.3.10 này đều có số hạng thuộc một kgvđc E.

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi và $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một hàm trích, tức là một ánh xạ tăng nghiêm ngặt. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ký hiệu $v_n = \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} u_k$. Ta nói rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} v_n$ **thu được từ chuỗi** $\sum_{n\geq 0} u_n$ **bằng cách nhóm các số hạng**. Các v_n thường được gọi là các **nhóm**, $\sigma(n+1)-\sigma(n)$ gọi là **độ dài** của nhóm v_n.

Ở đây chúng ta quan tâm đến các mối liên hệ có thể có giữa loại của các chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$, và trong trường hợp hội tụ, thì ta chú ý đến mối liên hệ giữa các tổng của chúng.

1) Một điều kiện cần

◆ **Mệnh đề**

Nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ, thì $\sum_{n\geq 0} v_n$ hội tụ và: $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=\sigma(0)}^{+\infty} u_k$.

Chứng minh: Với mọi N thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} u_k\right) = \sum_{k=\sigma(0)}^{\sigma(N+1)-1} u_k .$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng dãy $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\geq 0}$ các tổng riêng của chuỗi $\sum_{n\geq 0} v_n$ được trích ra từ dãy $\left(\sum_{k=\sigma(0)}^{M} u_k\right)_{M\geq\sigma(0)}$ các tổng riêng của chuỗi $\sum_{k\geq\sigma(0)} u_k$, chính điều này cho phép ta suy ra kết luận của Mệnh đề.

Nhận xét:

1) Đảo của Mệnh đề trên sai, như trong thí dụ sau:

$$u_n = (-1)^n \ , \ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$$

trong đó $\sum_{n\geq 0} u_n$ phân kỳ còn $\sum_{n\geq 0} v_n$ thì hội tụ (vì: với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = 0$). Ta có thể lược đồ hóa thí dụ đó như sau:

$$\begin{cases} 1+(-1)+1+(-1)+\dots & \text{phân kỳ} \\ (1+(-1))+(1+(-1))+\dots & \text{hội tụ} \end{cases}$$

2) Trong thực tế thì Mệnh đề trên đây rất ít giá trị, vì nó đòi hỏi điều kiện $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

2) Một điều kiện đủ

Giả thiết $\sum_{n\geq 0} v_n$ hội tụ.

Cho $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $N \geq \sigma(0)$. Vì $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tăng nghiêm ngặt, nên tồn tại $n_N \in \mathbb{N}$ duy nhất thỏa mãn: $\sigma(n_N) \leq N < \sigma(n_N + 1)$.

Ta có:
$$\sum_{k=\sigma(0)}^{N} u_k = \sum_{k=\sigma(0)}^{\sigma(n_N)-1} u_k + \sum_{k=\sigma(n_N)}^{N} u_k = \sum_{n=0}^{n_N-1} v_n + \sum_{k=\sigma(n_N)}^{N} u_k .$$

Rõ ràng là: $n_N \underset{n\infty}{\to} \infty$, và do $\sum_n v_n$ hội tụ nên suy ra: $\sum_{n=0}^{n_N-1} v_n \underset{N\infty}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Để kết luận chúng ta chỉ cần chứng tỏ rằng $\sum_{k=\sigma(n_N)}^{N} u_k \underset{N\infty}{\to} 0$. Về điểm này, do

$$\left\| \sum_{k=\sigma(n_N)}^{N} u_k \right\| \leq \sum_{k=\sigma(n_N)}^{N} \|u_k\| \leq \sum_{k=\sigma(n_N)}^{\sigma(n_N+1)-1} \|u_k\|,$$

nên chỉ cần điều kiện $u_k \underset{k\infty}{\to} 0$ và dãy $(\sigma(n+1) - \sigma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn (ta nói rằng độ dài các nhóm bị chặn).

Như thế ta đã thu được kết quả sau đây.

◆ **Định lý (Định lý nhóm các số hạng)**

Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi với số hạng thuộc một kgvđc E và $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một ánh xạ tăng nghiêm ngặt; với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu:

$$v_n = \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} u_k .$$

Nếu $\begin{cases} u_n \underset{n\infty}{\to} 0 \\ (\sigma(n+1)-\sigma(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ bị chặn} \end{cases}$,

thì các chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ cùng loại, và trong trường hợp chúng hội tụ thì: $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=\sigma(0)}^{+\infty} u_k$.

Ta thường hay gặp hàm trích: $\sigma: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \alpha n \end{array}$ ($\alpha \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ cố định), hàm trích này thỏa mãn điều kiện trên đây (các nhóm có độ dài không đổi).

Thí dụ: Xác định loại của chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$, trong đó với $p \in \mathbb{N}$:

$u_n = \dfrac{1}{4p+1}$ nếu $n = 3p$, $u_n = \dfrac{1}{4p+2}$ nếu $n = 3p+1$, $u_n = \dfrac{1}{4p+3}$ nếu $n = 3p+2$.

Theo Định lý trên đây, vì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, và vì rằng ($\forall p \in \mathbb{N}$, $3(p+1) - 3p = 3$), nên chuỗi $\sum_n u_n$ cùng loại với chuỗi $\sum_p v_p$ thu được từ $\sum_n u_n$ bằng cách nhóm từng ba số hạng lại: $\forall p \in \mathbb{N}$, $v_p = u_{3p} + u_{3p+1} + u_{3p+2}$.

Ta có: $v_p = \dfrac{1}{4p+1} + \dfrac{1}{4p+2} - \dfrac{2}{4p+3} = \dfrac{12p+5}{(4p+1)(4p+2)(4p+3)} \underset{p\infty}{\sim} \dfrac{3}{16p^2} \geq 0.$

Theo thí dụ Riemann và định lý tương đương đối với các chuỗi với số hạng trong $\mathbb{R}_+$, chuỗi $\sum_p v_p$ hội tụ, và cuối cùng chuỗi $\sum_n u_n$ hội tụ.

Nhận xét:

Nếu như độ dài các nhóm không bị chặn, thì có thể xảy ra trường hợp $\sum_n u_n$ phân kỳ mà $\sum_n v_n$ hội tụ. Một thí dụ được trình bày sơ lược:

$$\sum_{n\geq 0} u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Chuỗi này phân kỳ theo Mệnh đề ở *1)*, vì rằng chuỗi được nhóm theo cách đó:

$$1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

phân kỳ, nhưng:

$$\sum_{n\geq 0} v_n=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

hội tụ.

Bài tập

◊ **3.3.30** Xác định loại của các chuỗi có số hạng tổng quát là:

a) $\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ b) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n}$.

3.4 Họ khả tổng

3.4.1 Khái niệm về tính đếm được

Xem thêm Tập 1, **C1**. 2.

◆ **Định nghĩa**

- Một tập hợp I được gọi là **đếm được** khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ $\mathbb{N}$ lên I.
- Một tập hợp I được gọi là **không quá đếm được** khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ một bộ phận của $\mathbb{N}$ lên I.

◆ **Mệnh đề 1** Cho P là một bộ phận vô hạn của $\mathbb{N}$. Tồn tại một và chỉ một song ánh tăng nghiêm ngặt từ $\mathbb{N}$ lên P.

Chứng minh:

1) Cho $\varphi : \mathbb{N} \to P$ là một song ánh tăng nghiêm ngặt. Khi đó ta có:

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) \ldots,$$

do đó:

$\varphi(0) = \text{ptnh}(P)$, $\varphi(1) = \text{ptnh}(P - \{\varphi(0)\}), \ldots, \varphi(n+1) = \text{ptnh}(P - \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)\})$,
các hệ thức này xác định duy nhất φ.

2) Rõ ràng là ánh xạ $\varphi : \mathbb{N} \to P$ xác định bởi:
$\varphi(0) = \text{ptnh}(P)$, $\varphi(1) = \text{ptnh}(P - \{\varphi(0)\}), \ldots, \varphi(n+1) = \text{ptnh}(P - \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)\})$,
là một song ánh tăng nghiêm ngặt từ $\mathbb{N}$ lên P.

Xem thêm Tập 1, **C1**, 2, *1) a)*.

◆ **Hệ quả**

Mọi bộ phận của $\mathbb{N}$ đều hữu hạn hay đếm được.

■

◆ **Mệnh đề 2** Một tập hợp I là không quá đếm được khi và chỉ khi tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I.

Chứng minh:

1) Giả thiết I không quá đếm được. Tồn tại một bộ phận P của $\mathbb{N}$ và một song ánh $f : P \to I$.

Nếu P hữu hạn thì I hữu hạn, nên ta có thể chọn $J_n = I$, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$.
Giả thiết P vô hạn. Theo Mệnh đề 1, tồn tại một song ánh tăng nghiêm ngặt:

$$\varphi : \mathbb{N}^* \to P.$$

Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta ký hiệu $J_n = f \circ \varphi(\{1,...,n\})$, khi đó thì: với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, J_n là một bộ phận hữu hạn của I và: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = f \circ \varphi(\mathbb{N}^*) = f(P) = I$.

2) Đảo lại, giả thiết tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I.

- Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $J_n = J_{n_0}$, với mọi $n \geq n_0$, thì $I = J_{n_0}$, do đó I hữu hạn.
- Nếu ngược lại khi loại đi những phần tử lặp lại có thể có trong $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, thì ta lại quy về trường hợp một dãy $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tăng nghiêm ngặt. Khi đó ta chỉ cần đánh số các phần tử thuộc J_0, $J_1 - J_0$, $J_2 - J_1$,... để thu được một song ánh từ $\mathbb{N}$ lên I.

■

♦ **Hệ quả**

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}$ đếm được.

Chứng minh:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{k \in \mathbb{Z};\quad -n \leq k \leq n\},$$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{k \in \mathbb{N};\quad 0 \leq k \leq n\}^2,$$

$$\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{k \in \mathbb{Z};\quad -n \leq k \leq n\}^2,$$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{r \in \mathbb{Q};\ \exists(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\quad r = \frac{p}{q}, -n^2 \leq p \leq n^2, q \leq n\},$$

xem thêm Tập 1, **C1**.2, A, *2), 3)*).

***Nhận xét*:**

1) Tập hợp $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$ các bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$ là đếm được, vì:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathfrak{P}(\{0,...,n\}).$$

2) $\mathbb{R}$ không đếm được (xem Tập 1, **C1**.2, B, *2)*).

3.4.2 Họ khả tổng những phần tử của $\mathbb{K}$

Ở đây chúng ta sẽ tổng quát hóa các kết quả của §3.3.4.
Ta sẽ ký hiệu tập hợp các bộ phận hữu hạn của một tập hợp I (không rỗng) là $\mathfrak{F}(I)$.

1) Trường hợp các phần tử của họ thuộc $\mathbb{R}_+$

◆ **Định nghĩa 1** Một họ $(u_i)_{i\in I}$ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$ được gọi là **khả tổng** khi và chỉ khi tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall J \in \mathfrak{F}(I), \qquad \sum_{i\in J} u_i \le M.$$

Nếu $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng thì tập hợp các $\sum_{i\in J} u_i$ (khi J chạy khắp $\mathfrak{F}(I)$) là một bộ phận không rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, do đó có biên trên trong $\mathbb{R}$. Từ đó ta có Định nghĩa sau đây.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$, khả tổng.

Tổng $\sum_{i\in I} u_i$ của $(u_i)_{i\in I}$ là phần tử của $\mathbb{R}_+$ xác định bởi:

$$\sum_{i\in I} u_i = \operatorname*{Sup}_{J\in\mathfrak{F}(I)} \left(\sum_{i\in J} u_i\right).$$

Nhận xét:

1) *Trường hợp một họ có giá hữu hạn*

Nếu tồn tại $J_0 \in \mathfrak{F}(I)$ sao cho: $\forall i \in I - J_0,\ u_i = 0,$

thì $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng và: $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in J_0} u_i$.

2) Nếu $(u_i)_{i\in I}$ có các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$ và khả tổng, và nếu $\sum_{i\in I} u_i = 0$, thì:

$$\forall i \in I, \quad u_i = 0.$$

◆ **Mệnh đề 1** Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$. Nếu $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng, thì tập $\{i \in I;\ u_i > 0\}$ không quá đếm được.

Chứng minh:

Giả thiết $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng; tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

Chứng minh:

Giả thiết $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng; tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall J \in \mathfrak{F}(I), \qquad \sum_{i\in J} u_i \le M.$$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, xét: $I_n = \{i \in I; u_i \ge \frac{M+1}{n}\}$.

Giả thiết tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho I_n vô hạn. Khi đó tồn tại $i_1, ..., i_n \in I$, từng đôi một khác nhau, sao cho: $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $u_{ik} \ge \frac{M+1}{n}$, từ đó với ký hiệu $J_n = \{i_1, ..., i_n\}$

ta có: $$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \ge n\frac{M+1}{n} = M+1 > M,$$

mâu thuẫn.

Kết quả đó chứng tỏ rằng I_n hữu hạn, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$.

Mặt khác thì với mọi i thuộc I sao cho $u_i > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\frac{M+1}{n} \le u_i$, và do đó $i \in I_n$.

Như thế: $$\{i \in I; u_i > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n.$$

Áp dụng Mệnh đề 2, 3.4.1, ta kết luận rằng tập $\{i \in I; u_i > 0\}$ không quá đếm được.

Nhận xét:
Mệnh đề trên chứng tỏ rằng trong việc khảo sát các họ khả tổng (với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$), ta có thể giới hạn vào các họ được chỉ số hóa bằng một tập hợp không quá đếm được.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$.

Nếu $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng, thì họ $(u_i)_{i\in I'}$ khả tổng với mọi bộ phận I' của I, và: $$\sum_{i\in I'} u_i \le \sum_{i\in I} u_i.$$

Như vậy mọi họ con của một họ khả tổng (với số hạng thuộc $\mathbb{R}_+$) cũng khả tổng.

Chứng minh:

Giả thiết $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng. Mọi bộ phận hữu hạn J của I' cũng là bộ phận hữu hạn của I, do vậy $\sum_{i\in J} u_i \le \sum_{i\in I} u_i$. Điều này chứng tỏ (xem Định nghĩa 1 và 2) rằng $(u_i)_{i\in I'} \le \sum_{i\in I} u_i$.

Mệnh đề 3 Cho $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ là hai họ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$.

Nếu $\begin{cases}\forall i\in I, \quad 0\le u_i \le v_i \\ (v_i)_{i\in I} \text{ khả tổng}\end{cases}$, thì $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng và:

$$\sum_{i\in I} u_i \le \sum_{i\in I} v_i .$$

Chứng minh:

Với mọi bộ phận hữu hạn J của I, thì $\sum_{i\in J} u_i \le \sum_{i\in J} v_i \le \sum_{i\in I} v_i$, do đó $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng và:

$$\sum_{i\in I} u_i \le \sum_{i\in I} v_i .$$

■

Ta chứng minh Mệnh đề sau đây theo cách tương tự như ở 3.3.4.

Mệnh đề 4 Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$.
Các tính chất sau đây đôi một tương đương:

(i) $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng

(ii) Tồn tại $M\in \mathbb{R}_+$ sao cho, với mọi dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I, ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{i\in J_n} u_i \le M.$$

(iii) Tồn tại $M\in \mathbb{R}_+$ và một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I, sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i\in J_n} u_i \le M.$$

Hơn nữa, nếu (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, thì với mọi dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I, ta có:

$$\sum_{i\in I} u_i = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right) = \lim_{n\infty}\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right).$$

■

Mệnh đề 5 Cho I là một họ khả tổng, $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{R}_+$. Ba tính chất sau đây đôi một tương đương:

(i) $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng

(ii) Với mọi song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to I$, chuỗi $\sum_{n\ge 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ

(iii) Tồn tại một song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to I$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ.

Hơn nữa, nếu (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, thì với mọi song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to I$, ta có:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii):

Giả thiết $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng, và cho $\varphi : \mathbb{N} \to I$ là một song ánh.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, do $\{\varphi(k); 0 \leq k \leq n\}$ là một bộ phận hữu hạn của I, nên ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \leq \sum_{i\in I} u_i,$$

và suy ra (bổ đề cơ bản) rằng $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ, và: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \leq \sum_{i\in I} u_i$.

(ii) ⇒ (iii):

Hiển nhiên, vì do I đếm được nên tồn tại một song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to I$.

(iii) ⇒ (i):

Giả thiết một song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to I$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ.

Cho J là một bộ phận hữu hạn của I. Khi đó $\varphi^{-1}(J)$ là một bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}$, và do đó tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\varphi^{-1}(J) \subset \{0, 1, \ldots, N\}$, suy ra:

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Kết quả (xem các Định nghĩa 1 và 2) là $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng và:

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Nếu $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng hay nếu tồn tại một song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to I$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ, thì theo các kết quả trên đây:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$ ■

Nhận xét:

Với mọi chuỗi thực $\sum_{n\geq 0} u_n$ bán hội tụ và với mọi S thuộc $\mathbb{R}$, tồn tại một hoán vị φ

của ℕ sao cho $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ và có tổng bằng S, xem bài tập 3.4.25.

Mệnh đề sau đây không thuộc chương trình, nhưng có thể rất có ích.

♦ **Mệnh đề 6** **(Tính kết hợp của tính khả tổng)**

Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\overline{\mathbb{R}}_+$, khả tổng, và $\Pi = \{I_x\,;\, x\in X\}$ là một phân hoạch của I. Thế thì:

1) Với mọi x thuộc X, $(u_i)_{i\in I_X}$ khả tổng

2) $\left(\sum_{i\in I_X} u_i\right)_{x\in X}$ khả tổng

3) $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{x\in X}\left(\sum_{i\in I_X} u_i\right)$.

Chứng minh:

1) Với mọi x thuộc X, I_X là một bộ phận của I, do đó $(u_i)_{i\in I_X}$ khả tổng (xem Mệnh đề 3).

2) Cho A là một bộ phận hữu hạn của X. Vì các họ $(u_i)_{i\in I_X}$ (với x chạy khắp A) đều khả tổng, và rằng các I_X đôi một rời nhau, nên họ $(u_i)_{i\in \bigcup_{x\in A} x}$ khả tổng và:

$$\sum_{x\in A}\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right) = \sum_{i\in \bigcup_{x\in A} I_x} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i\,.$$

Từ đó suy ra (xem các Định nghĩa 1 và 2) rằng $\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right)_{x\in X}$ khả tổng và:

$$\sum_{x\in X}\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right) \leq \sum_{i\in I} u_i\,.$$

3) Cho J là một bộ phận hữu hạn của I. Tồn tại một bộ phận hữu hạn A của X sao cho $J \subset \bigcup_{x\in A} I_x$, và như thế ta có:

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in \bigcup_{x\in A} I_x} u_i = \sum_{x\in A}\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right) \leq \sum_{x\in X}\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right)$$

Từ 1) và 2) ta kết luận được rằng:

$$\sum_{x\in X}\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i .$$

Nhận xét:

Đảo lại, ta chứng minh được rằng, nếu $(u_i)_{i\in I_X}$ khả tổng và nếu $\left(\sum_{i\in I_x} u_i\right)_{x\in X}$ khả tổng với mọi x thuộc X, thì $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng.

2) Trường hợp các phần tử của họ thuộc $\mathbb{K}$

♦ **Định nghĩa** Một họ $(u_i)_{i\in I}$ những phần tử thuộc $\mathbb{K}$ được gọi là **khả tổng** khi và chỉ khi họ $(|u_i|)_{i\in I}$ khả tổng.

Từ các Mệnh đề 1 và 2 ở *1)*, ta dễ dàng suy ra các Mệnh đề 1 và 2 dưới đây.

♦ **Mệnh đề 1** Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{K}$.
Nếu $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng thì tập $\{i \in I;\ u_i \neq 0\}$ không quá đếm được.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{K}$. Nếu $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng, thì với mọi bộ phận I' của I, họ $(u_i)_{i\in I'}$ khả tổng.

Nói cách khác, mọi họ con của một họ khả tổng (với số hạng thuộc $\mathbb{K}$) cũng khả tổng.

♦ **Mệnh đề-Định nghĩa 3** Cho I là một tập hợp không quá đếm được, $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{K}$, khả tổng. Với mọi dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I, dãy $\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ trong $\mathbb{K}$, và giới hạn của dãy đó không phụ thuộc cách chọn dãy $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Giới hạn này được gọi là **tổng** của họ khả tổng $(u_i)_{i\in I}$ và được ký hiệu là $\sum_{i\in I} u_i$.

Chứng minh:

1) Cho $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I
Ký hiệu $v_0=\sum_{i\in J_1}u_i$, và $v_n=\sum_{i\in J_{n+1}}u_i-\sum_{i\in J_n}u_i$, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

Vì các tập hợp J_1 , $J_2-J_1,\dots,J_{n+1}-J_n$ đôi một rời nhau, nên với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}|v_k|\le\sum_{i\in J_{n+1}}|u_i|\le\sum_{i\in I}|u_i|.$$

Kết quả này chứng tỏ (bổ đề cơ bản) rằng chuỗi $\sum_{n\ge0}|v_n|$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n\ge0}v_n$ hội tụ, và vì vậy chuỗi $\left(\sum_{i\in J_n}u_i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ trong $\mathbb{E}$.

2) Cho $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là hai chuỗi tăng những bộ phận hữu hạn của I, thỏa mãn:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}J_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}K_n=I.$$

Theo *1)* , tồn tại $(\lambda,\mu)\in\mathbb{E}^2$ sao cho:

$$\sum_{i\in J_n}u_i\underset{n\infty}{\to}\lambda\qquad\text{và}\qquad\sum_{i\in K_n}u_i\underset{n\infty}{\to}\mu.$$

Để chứng minh $\lambda=\mu$, chỉ cần chứng tỏ rằng: $\sum_{i\in J_n}u_i-\sum_{i\in K_n}u_i\underset{n\infty}{\to}0.$

Vì với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\left|\sum_{i\in J_n}u_i-\sum_{i\in K_n}u_i\right|\le\left|\sum_{i\in J_n}u_i-\sum_{i\in J_n\bigcup K_n}u_i\right|+\left|\sum_{i\in J_n\bigcup K_n}u_i-\sum_{i\in K_n}u_i\right|$$

và do tính đối xứng, nên chỉ cần chứng tỏ rằng: $\sum_{i\in J_n\bigcup K_n}u_i-\sum_{i\in J_n}u_i\underset{n\infty}{\to}0.$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\left|\sum_{i\in J_n\cup K_n}u_i-\sum_{i\in J_n}u_i\right|=\left|\sum_{i\in J_n-K_n}u_i\right|\le\sum_{i\in J_n-K_n}|u_i|=\sum_{i\in J_n\bigcup K_n}|u_i|-\sum_{i\in J_n}|u_i|.$$

Vì $(J_n)_{n\ge1}$ và $(J_n\cup K_n)_{n\ge1}$ là những dãy tăng những bộ phận hữu hạn của I mà hợp bằng I, nên theo 3.4.2, *1)* , Mệnh đề 4, ta có:

$$\sum_{i\in J_n\bigcup K_n}|u_i|\underset{n\infty}{\rightarrow}\sum_{i\in I}|u_i| \text{ và } \sum_{i\in J_n}|u_i|\underset{n\infty}{\rightarrow}\sum_{i\in I}|u_i|,$$

từ đây suy ra kết quả phải chứng minh.

◆ **Hệ quả** Cho I là một tập hợp đếm được, $(u_i)_{i\in I}$ là một họ những phần tử thuộc $\mathbb{K}$. Ba tính chất sau đây đôi một tương đương:

(i) $(u_i)_{i\in I}$ khả tổng

(ii) Với mọi song ánh $\varphi:\mathbb{N}\to I$, chuỗi $\sum_{n\geq 0}u_{\varphi(n)}$ hội tụ tuyệt đối.

(iii) Tồn tại một song ánh $\varphi:\mathbb{N}\to I$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0}u_{\varphi(n)}$ hội tụ tuyệt đối.

Hơn nữa, nếu (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, thì với mọi song ánh $\varphi:\mathbb{N}\to I$:

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{\varphi(n)}.$$

Nhận xét: Cho I là một tập hợp không quá đếm được.

1) Tập hợp các họ khả tổng $(u_i)_{i\in I}$ với các số hạng thuộc $\mathbb{K}$ và chỉ số hóa bởi I (xem thêm 3.3.4, *3)*), ký hiệu là $\ell^1(I,\mathbb{K})$, là một $\mathbb{K}$-kgv, ánh xạ

$$\|\cdot\|_1:(u_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}|u_i|$$

là một chuẩn trên $\ell^1(I,\mathbb{K})$, còn ánh xạ $(u_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}u_i$ là một dạng tuyến tính liên tục trên $(\ell^1(I,\mathbb{K}),\|\cdot\|_1)$.

2) Một họ $(u_i)_{i\in I}$ những phần tử của $\mathbb{K}$, chỉ số hóa bởi I, được gọi là **bình phương khả tổng khi và chỉ khi** họ $(u_i^2)_{i\in I}$ khả tổng. Cũng tương tự như ở 3.3.4, *4)*, ta chứng minh rằng tập hợp các họ bình phương khả tổng, với số hạng thuộc $\mathbb{K}$ và chỉ số hóa bởi I, được ký hiệu là $\ell^2(I,\mathbb{K})$, là một $\mathbb{K}$-kgv và rằng ánh xạ

$$((u_i)_{i\in I},(v_i)_{i\in I})\mapsto\sum_{i\in I}\overline{u_i}v_i \text{ là một tích vô hướng trên } \ell^2(I,\mathbb{K}).$$

Mệnh đề sau đây không thuộc chương trình, nhưng có thể rất có ích.

◆ **Mệnh đề 4** Cho I là một tập hợp không quá đếm được và $(u_i)_{i\in I}$ là một họ khả tổng những phần tử thuộc $\mathbb{K}$. Thế thì với mọi dãy tăng $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận (không nhất thiết hữu hạn) của I thỏa mãn:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = I,$$

ta có:

- với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $(u_i)_{i\in I_n}$ khả tổng
- $\sum_{i\in I_n} u_i \underset{n\infty}{\to} \sum_{i\in I} u_i$.

Chứng minh:
Bằng cách sử dụng *2)*, Mệnh đề 2, ta có với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$(u_i)_{i\in I} \text{ khả tổng} \Longrightarrow (u_i)_{i\in I_n} \text{ khả tổng.}$$

Tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những bộ phận hữu hạn của I sao cho $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I$,

và ta có: $\quad \sum_{i\in J_n} |u_i| \underset{n\infty}{\to} \sum_{i\in I} |u_i|$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $J_{n_0} \subset J_{n_1}$, và ta có với mọi n thỏa mãn $n \ge n_1$:

$$\left|\sum_{i\in I_n} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| = \left|\sum_{i\in I-I_n} u_i\right| \le \sum_{i\in I-I_n} |u_i| \le \sum_{i\in I-J_{n0}} |u_i| \le \varepsilon.$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng: $\quad \sum_{i\in I_n} u_i \underset{n\infty}{\to} \sum_{i\in I} u_i$.

3) Các dãy kép

Mọi họ $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ những phần tử của $\mathbb{K}$, chỉ số hóa bởi $\mathbb{N}^2$ **được gọi là dãy kép.**

◆ **Mệnh đề 1** **(Hoán vị các phép lấy tổng, trường hợp $\mathbb{R}_+$)**

Cho $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ là một dãy kép những phần tử của $\mathbb{R}_+$. Ba tính chất sau đây đôI một tương đương:

(i) Họ $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng

(ii) $\begin{cases} \text{Với mọi } q \text{ thuộc } \mathbb{N}, \text{ chuỗi } \sum_{p\ge 0} u_{p,q} \text{ hội tụ} \\ \text{Chuỗi } \sum_{q\ge 0}\left(\sum_{P=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \text{ hội tụ} \end{cases}$

$$\text{(iii)}\quad \begin{cases} \text{Với mọi } p \text{ thuộc } \mathbb{N}, \text{ chuỗi } \sum_{q\geq 0} u_{p,q} \text{ hội tụ} \\ \text{Chuỗi } \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \text{ hội tụ} \end{cases}$$

Hơn nữa, với các điều kiện trên ta có:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Chứng minh:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Giả thiết $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\{q\}}$ khả tổng.

- Với mọi q thuộc $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \{q\}$ là một bộ phận của $\mathbb{N}^2$, do đó $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng (xem 3.4.2, *1)* , Mệnh đề 2), và như vậy $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ hội tụ.

- Cho $n \in \mathbb{N}$. Vì các chuỗi $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ $(0 \leq q \leq n)$ hội tụ nên chuỗi

$\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}\right)$ hội tụ và: $\quad \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}\right).$

Vì với mọi m thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\sum_{p=0}^{m}\left(\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}\right) = \sum_{(p,q)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}} u_{p,q} \leq \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q},$$

nên dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ bị chặn trên bởi $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$, do

đó chuỗi $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ hội tụ và: $\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leq \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}.$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Giả thiết rằng với mọi q thuộc $\mathbb{N}$, chuỗi $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ hội tụ, và rằng chuỗi

$\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ hội tụ.

Cho J là một bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}^2$. Tồn tại $(m, n)\in\mathbb{N}^2$ sao cho $J \subset \{0,\dots, m\}\times\{0,\dots, n\}$, và ta có:

$$\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \le \sum_{(p,q)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{m} u_{p,q}\right)$$
$$\le \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \le \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Kết quả trên chứng tỏ rằng $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} \le \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Bằng cách hoán vị các vai trò của p và q, ta được các hệ thức kéo theo (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i).

Nếu (i), (ii) hay (iii) được thỏa mãn, thì theo các kết quả trên đây:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Ta cũng có thể sử dụng *1)* , Mệnh đề 6, vốn không thuộc chương trình, bằng cách áp dụng nó đối với các phân hoạch của $\mathbb{N}^2$: $(\mathbb{N}\times\{q\})_{q\in\mathbb{N}}$ và $(\mathbb{N}\times\{p\})_{p\in\mathbb{N}}$.

◆ **Mệnh đề 2** **(Hoán vị các phép lấy tổng, trường hợp $\mathbb{K}$)**

Cho $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ là một dãy kép những phần tử của $\mathbb{K}$. Ta giả thiết $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng. Thế thì:

1) $\begin{cases}\text{Với mọi } q \text{ thuộc } \mathbb{N}, \text{ chuỗi } \displaystyle\sum_{p\ge 0} u_{p,q} \text{ hội tụ}\\ \text{Chuỗi } \displaystyle\sum_{q\ge 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \text{ hội tụ}\end{cases}$

2) $\begin{cases}\text{Với mọi } p \text{ thuộc } \mathbb{N}, \text{ chuỗi } \displaystyle\sum_{q\ge 0} u_{p,q} \text{ hội tụ}\\ \text{Chuỗi } \displaystyle\sum_{p\ge 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \text{ hội tụ}\end{cases}$

3) $$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Chứng minh:

1) Theo Mệnh đề 1, với mọi q thuộc $\mathbb{N}$, chuỗi $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ, và chuỗi $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ hội tụ; do đó chuỗi $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)$ hội tụ tuyệt đối, nên hội tụ, vì rằng: $\forall q\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right|\leq \sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|$.

2) Tương tự như ở *1)*, bằng cách hoán vị các vai trò của p và q.

3) Phương pháp thứ nhất (sử dụng Mệnh đề 6, 3.4.2, *1)*, không thuộc chương trình)

Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $I_n=\mathbb{N}\times\{0,...,n\}$. Rõ ràng là $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những bộ phận của $\mathbb{N}^2$ mà hợp bằng $\mathbb{N}^2$. Theo *2)*, Mệnh đề 4:

$$\sum_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}\underset{n\infty}{\to}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_{p,q}.$$

Vì với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có: $\sum_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}=\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)$,

nên ta kết luận: $$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_{p,q}.$$

Ta thu được bất đẳng thức kia bằng cách hoán vị các vai trò của p và q.

Phương pháp thứ hai

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ta có:

$$\left|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)\right|=\left|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}u_{p,q}\right)\right|$$
$$\leq\sum_{q=0}^{n}\left|\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}u_{p,q}\right)\right|\leq\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=n+1}^{+\infty}|u_{p,q}|=\left|\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}|u_{p,q}|\right)\right|$$

Do dãy kép $(|u_{p,q}|)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ với các số hạng trong $\mathbb{R}_+$ khả tổng, nên theo định lý hoán vị (3.4.2, *3)*, Mệnh đề 1), $\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\underset{n\infty}{\to}\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|$, và theo 3.4.2, *1)*, Mệnh đề 4, vì $(\{0,...,n\}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy vét kiệt của $\mathbb{N}^2$, nên:

$$\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{n}|u_{p,q}|\underset{n\infty}{\to}\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|.$$

Ta suy ra: $$\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)-\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)\underset{n\infty}{\to}0.$$

Cuối cùng, do: $$\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)\underset{n\infty}{\to}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)$$

và vì: $$\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)=\sum_{(p,q)\in\{o,\dots,n\}^2}u_{p,q}\underset{n\infty}{\to}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_{p,q},$$

nên ta kết luận: $$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right),$$

còn bất đẳng thức kia thu được bằng cách hoán vị các vai trò của p và q.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ là hai dãy khả tổng những phần tử của $\mathbb{K}$. Thế thì dãy kép $(a_pb_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}a_pb_q=\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}a_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}}b_q\right).$$

Chứng minh:

Với mọi q thuộc $\mathbb{N}$, $\sum_{p\geq 0}a_pb_q$ hội tụ tuyệt đối, và có tổng bằng $\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_p\right)b_q$. Do $\sum_{q\geq 0}b_q$ hội tụ tuyệt đối, nên chuỗi $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|a_p|\right)|b_q|$ hội tụ, vậy (xem Mệnh đề 1), dãy kép $(a_pb_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}a_pb_q=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_pb_q\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_p\right)b_q\right)=\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}b_q\right)$$
$$=\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}a_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}}b_q\right).$$

Thí dụ: Với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{C}^2$ sao cho $|x|<1$ và $|y|<1$, dãy kép $(x^py^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} x^p y^q = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} x^p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} y^q\right) = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y}.$$

4) Tích Cauchy của hai chuỗi số

◆ **Định nghĩa** Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ là hai chuỗi với số hạng thuộc $\mathbb{K}$.

Tích Cauchy của $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ là chuỗi $\sum_{n\geq 0} w_n$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_p v_q .$$

◆ **Định lý** Nếu các chuỗi số $\sum_{n\geq 0} u_n$ và $\sum_{n\geq 0} v_n$ hội tụ tuyệt đối, thì tích Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ của chúng hội tụ tuyệt đối, và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Chứng minh:
Theo Mệnh đề trên đây, vì các dãy $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ và $(v_q)_{q\in\mathbb{N}}$ đều khả tổng, nên dãy kép $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ cũng hội tụ, và:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\right).$$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ký hiệu $J_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2;\ p+q \leq n\}$.

Rõ ràng là $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}^2$ mà hợp bằng $\mathbb{N}^2$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| = \sum_{p+q\leq n} |u_p v_q| = \sum_{(p,q)\in J_n} |u_p v_q| \leq \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} |u_p v_q|,$$

chứng tỏ rằng $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khả tổng, tức là $\sum_{n\geq 0} w_n$ hội tụ tuyệt đối.

Cuối cùng ta có: $$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{(p,q)\in J_n} u_p v_q \underset{n\infty}{\rightarrow} \sum_{(p,q)\in \mathbb{N}^2} u_p v_q .$$

◆ **Hệ quả**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z').$$

Chứng minh:

Với mọi z thuộc $\mathbb{C}$, chuỗi $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ hội tụ tuyệt đối, và tổng của nó được ký hiệu là $\exp(z)$ (3.3.3, *2)*).

Cho $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Theo định lý trên đây, chuỗi tích $\sum_{n\geq 0} w_n$ của các chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ và $\sum_{n\geq 0} \frac{z'^n}{n!}$ cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng $\exp(z)\exp(z')$. Nhưng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{z'^{\,n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z'^{\,n-k} = \frac{1}{n!}(z + z')^n ,$$

suy ra: $$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z + z')^n = \exp(z + z').$$

Bài tập

◇ **3.4.1** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng cũng không thu về một điểm, $f : I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tăng.

a) Chứng minh rằng với mỗi điểm gián đoạn x_0 của f ta có thể cho liên kết một số hữu tỷ r_0 thuộc $]\lim\limits_{x_0^-} f\,;\ \lim\limits_{x_0^+} f[$, và rằng ánh xạ $\varphi : x_0 \mapsto r_0$ xây dựng theo cách đó là một đơn ánh.

b) Suy ra rằng tập hợp các điểm gián đoạn của f không quá đếm được.

◇ **3.4.2** Các họ sau đây có khả tổng không:

a) $(x)_{x\in[0;\,1]}$ b) $(x)_{x\in\mathbb{Q}}$ c) $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$?

◊ **3.4.3** Với $x \in \mathbb{C}^*$, họ $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ có khả tổng không?

◊ **3.4.4** Chứng minh rằng với mọi $(a, b) \in\ ]0; +\infty[^2$, dãy kép $\left(e^{-ap-bq}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và tính tổng của chuỗi đó.

◊ **3.4.5** Chứng minh rằng, với mọi (a, b) thuộc $]1; +\infty[^2$, dãy kép $\left(\dfrac{1}{a^p + b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng.

◊ **3.4.6** Cho $(\alpha, \beta) \in\ ]1; +\infty[^2$. Chứng minh rằng ba tính chất sau đây đôi một tương đương:

(i) $\left(\dfrac{p+q}{(1+p^\alpha)(1+q^\beta)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng

(ii) $\left(\dfrac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng

(iii) $\alpha > 2$ và $\beta > 2$.

◊ **3.4.7** Chứng minh rằng, với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, dãy kép $\left(z^{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng và: $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} z^{pq} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.

◊ **3.4.8** Với $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, hãy khảo sát tính khả tổng của dãy kép $\left(\dfrac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

◊ **3.4.9** Xác định tập hợp E các cặp (x, y) thuộc $\mathbb{C}^2$ sao cho họ $\left(C_{p+q}^{p} x^p y^q\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng, và tính tổng đó với $(x, y) \in E$. Ta sẽ thừa nhận rằng:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+q}^{p} z^p = \frac{1}{(1-z)^{q+1}},$$

với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$ và với mọi q thuộc $\mathbb{N}$.
Xem Tập 4, 5.3.

◊ **3.4.10** Với $z \in \mathbb{C}$, hãy khảo sát tính khả tổng và tính tổng (nếu tồn tại) của các chuỗi: a) $\left(\dfrac{z^n}{p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ b) $\left(\dfrac{z^n}{p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

◊ **3.4.11** Với $\alpha \in\ ]0; +\infty[$, hãy khảo sát tính khả tổng của chuỗi kép:

$$\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2},$$

và trong trường hợp khả tổng, hãy tính tổng đó; biểu thị kết quả qua hàm Riemann ζ

xác định với $x \in]1; +\infty[$ bởi: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

◊ **3.4.12** Chứng minh rằng họ $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p|q}$ khả tổng và tính tổng đó; ta thừa

nhận: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, và $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, xem Tập 4, 6.4.

◊ **3.4.13** Cho $u, v \in \mathbb{C}$ sao cho $|u| < 1$ và $|v| > 1$; với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ký hiệu:

$$z_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u^{2^{p+n}}.$$

Chứng minh: $(v-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z_n}{v^n} = v\sum_{q=0}^{+\infty}u^{2^q} - \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{u^{2^q}}{v^q}$.

◊ **3.4.14** Cho $z \in \mathbb{C}$. Chứng minh rằng dãy kép $\left(\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ khả tổng khi và

chỉ khi $|z| < 1$, và rằng trong trường hợp đó thì tổng bằng $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 - z^2}$.

◊ **3.4.15** Xét hàm Riemann ζ, được xác định với $x \in]1; +\infty[$ bởi: $\zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} p^x$.

Chứng minh: $\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n) - 1) = 1$ và $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n) - 1) = \frac{1}{2}$.

◊ **3.4.16** Chứng minh rằng họ $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ p\wedge q=1}$ khả tổng và tính tổng đó; ta sẽ

thừa nhận rằng $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, và $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

◊ **3.4.17** Chứng minh rằng dãy kép $\left(2^{-3q-p-(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và tính tổng đó.

◊ **3.4.18** Chứng minh rằng dãy kép $\left(\frac{p!q!}{(p+q+2)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và tính tổng đó.

Ta sẽ thừa nhận rằng: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

◊ **3.4.19*** a) Với $q \in \mathbb{N}^*$ cố định, chứng minh rằng chuỗi $\sum_{\substack{p \ge 1 \\ p \ne q}} \frac{1}{p^2 - q^2}$ hội tụ và tính tổng của chuỗi đó.

b) Với $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, ký hiệu $u_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2 - q^2} & \text{nếu } p \ne q \\ 0 & \text{nếu } p = q \end{cases}$.

Chứng minh: $$\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q}\right) = -\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}\right) \ne 0.$$

Dãy kép $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ có khả tổng không?

Đối với các bài tập 3.4.20 *và* 3.4.21, *ta sẽ thừa nhận rằng:* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, *với mọi* x *thuộc* $[-1; 1[$.

◊ **3.4.20*** Chứng minh: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma$.

◊ **3.4.21*** Chứng minh: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma$.

◊ **3.4.22** Cho A là một đại số Banach (kết hợp và có đơn vị). Với $x \in A$, ta đã định nghĩa: $$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{(xem 3.3.3, } 2\text{))}.$$

Chứng minh rằng với mọi (x, y) thuộc A^2 sao cho $xy = yx$, ta có:
$$e^x e^y = e^y e^x = e^{x+y}.$$

Nói riêng, với mọi x thuộc A, e^x khả nghịch trong A và:
$$\left(e^x\right)^{-1} = e^{-x}.$$

◊ **3.4.23*** **Định lý Mertens**

Cho $\sum_{n\ge 0} u_n$ là một chuỗi hội tụ tuyệt đối, và $\sum_{n \ge 0} v_n$ là một chuỗi hội tụ. Với $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu: $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

Với $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p < q$, ta ký hiệu: $V_{p,q} = \sum_{k=p+1}^{q} v_k$.

a) Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n V_n - W_n = \sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}$.

b)* Từ đó suy ra: $U_n V_n - W_n \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$.

c) Hãy kết luận.

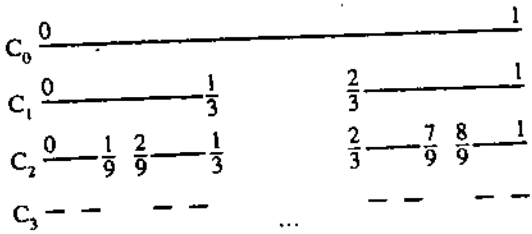
◊ **3.4.24** a) Chứng minh rằng tích của chuỗi bán hội tụ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ với chính nó là một chuỗi hội tụ.

b) Chứng minh rằng tích của chuỗi bán hội tụ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ với chính nó là một chuỗi hội tụ.

◊ **3.4.25*** a) Cho $\sum_{n\geq 0} u_n$ là một chuỗi bán hội tụ. Chứng minh rằng, với mọi S thuộc $\mathbb{R}$, tồn tại một hoán vị φ của $\mathbb{N}$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ và có tổng bằng S.

Bổ sung

◊ **C3.1 Tập hợp tam phân Cantor**



Ký hiệu $C_0 = [0;1]$, $C_1 = C_0 - \left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$, $C_2 = C_1 - \left(\left]\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right[\right)$, v.v....

$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ được gọi là **tập hợp tam phân Cantor.**

Ta đã biết (xem bài tập 1.3.6) rằng C là một tập compac của $\mathbb{R}$ và rằng $\mathring{C} = \varnothing$.

1) Chứng minh rằng ánh xạ φ, cho ứng mỗi phần tử $a = (a_n)_{n \geq 1}$ thuộc $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ với $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ là một song ánh từ $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ lên C.

2) a) Chứng minh rằng ánh xạ f cho ứng mỗi x thuộc C với $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 2^{-n-1}$, trong đó $(a_n)_{n \geq 1} = \varphi^{-1}(x)$, là một toàn ánh từ C lên $[0;1]$.

b) Suy ra rằng C không đếm được (áp dụng tính không đếm được của $\mathbb{R}$).

3) Chứng minh: $\forall p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\underbrace{C+...+C}_{p \text{ số hạng}} = [0;p]$.

(Có thể bắt đầu bằng các trường hợp $p = 2$, $p = 3$).

◊ **C3. 2* Số Liouville**

1) Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sao cho tồn tại $P \in \mathbb{Z}[X]$, bậc n, thỏa mãn $P(\alpha) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}.$$

2) Cho $(u_n)_{n \geq 1}$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{Z}$, bị chặn trên và không phải là dãy dừng tại 0; ký hiệu $L = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 10^{-n!}$. Chứng minh rằng L là **số siêu việt**, tức là không tồn tại đa thức P thuộc $\mathbb{Z}[X] - \{0\}$ nào thỏa mãn $P(L) = 0$. Chẳng hạn $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ là số siêu việt.

◊ **C3. 3 Xác suất để hai số nguyên ≥ 1 nguyên tố cùng nhau**

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu q_n là số các cặp (u, v) thuộc $(\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $u \le n$, $v \le n$, ƯCLN$(u, v) = 1$..

1) Chứng minh rằng $q_n = n^2 - \sum_{p_1}\left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_1}\right)\right)^2 + \sum_{p_1<p_2}\left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_1p_2}\right)\right)^2 - \ldots$

trong đó các tổng được lấy các chỉ số nguyên tố ≥ 2.

2) Cho $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ là hàm MÖbius, được cho bởi:

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(p_1 \ldots p_r) = (-1)^r & \text{nếu } r \in \mathbb{N}^* \text{ và } p_1,\ldots,p_r \text{ nguyên tố và đôi một khác nhau} \\ \mu(n) = 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$: $\quad q_n = \sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)\right)^2$.

b) Từ đó suy ra : $\quad \lim_{n\infty} \frac{q_n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}$.

3) a) Cho $(a_k)_{k\ge1}, (b_l)_{l\ge1}$ là hai dãy với số hạng phức, và $\alpha \in \mathbb{N}$, sao cho các chuỗi $\sum_{k\ge1}\frac{a_k}{k^\alpha}$ và $\sum_{l\ge1}\frac{b_l}{l^\alpha}$ hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh: $\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{k^\alpha}\right)\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{b_l}{l^\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(\sum_{d|n}a_d b_{\frac{n}{d}}\right)$.

b) Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n \ne 1 \end{cases}$.

c) Từ đó suy ra: $\quad \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}\right)\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{l^2}\right) = 1.$

4) Bằng cách áp dụng: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (xem bài tập 3.3.23), chứng minh rằng xác suất để hai số nguyên ≥ 1 nguyên tố cùng nhau là $\frac{6}{\pi^2}$ (xác suất này theo định nghĩa ở đây là: $\lim_{n\infty}\frac{q_n}{n^2}$).

◊ **C3. 4 Tích vô hạn**

Cho $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{C} - \{0\}$. Ta nói rằng **tích vô hạn** $\prod_{n\ge0} z_n$ **hội tụ** khi và chỉ khi dãy $(P_n)_{n\ge0}$ xác định bởi: $(\forall n \in \mathbb{N},\quad P_n = \prod_{k=0}^{n} z_k)$ có giới hạn khác không trong $\mathbb{K}$. Nếu tồn tại thì giới hạn đó được ký hiệu: $\prod_{n=0}^{+\infty} z_n$.

1) a) Chứng minh rằng nếu một tích vô hạn $\prod_{n\geq 0} z_n$ hội tụ thì $z_n \underset{n\infty}{\rightarrow} 1$.

b) Xét mệnh đề đảo của a).

2) Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$. Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod_{n\geq 0} x_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 0} \ln x_n$ hội tụ, và trong trường hợp hội tụ thì:

$$\prod_{n=0}^{+\infty} x_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln x_n\right).$$

3) a) Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy với các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$. Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

b) Khảo sát loại (hội tụ hay phân kỳ) của các tích vô hạn sau đây, trong đó $\alpha \in]0;+\infty[$ cố định:

α) $\prod_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n^\alpha})$ β) $\prod_{n\geq 2}(1-\frac{1}{n^\alpha})$ γ) $\prod_{n\geq 2}(1+\frac{1}{n\ln n})$.

4) a)* Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy với các số hạng phức sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & |u_n| < 1 \\ \sum_{n\geq 0} |u_n| & \text{hội tụ} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ hội tụ.

b) Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy với các số hạng phức sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & 0 < |a_n| < 1 \\ \sum_{n\geq 0} (1-|a_n|) & \text{hội tụ} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho tích vô hạn $\prod_{n\geq N} \frac{|a_n|(a_n - z)}{a_n(1-\bar{a}_n z)}$ hội tụ.

5) a) Xét dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Kiểm chứng rằng $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ phân kỳ và rằng $\sum_{n\geq 1} u_n$ hội tụ.

b) Xét dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{p}}{p} & \text{nếu } n = 2p,\ p \in \mathbb{N}^* \\ -\dfrac{1}{\sqrt{p+1}} & \text{nếu } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Kiểm chứng rằng $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ hội tụ và $\sum_{n\geq 1} u_n$ phân kỳ.

6) Tính: a) $\prod_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$ b) $\prod_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$.

◊ **C3. 5 Các không gian ℓ^p**

Ký hiệu:

Cho $p \in [1; +\infty[$. Ta ký hiệu tập hợp các dãy phức $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0}|u_n|^p$ hội tụ là ℓ^p; với $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, ta ký hiệu $\|u\|_p = \sum_{n\geq 0}|u_n|^p$. Ta ký hiệu tập hợp các dãy phức bị chặn là ℓ^∞; với $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, ta ký hiệu $\|u\|_\infty = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

Với $p \in]1; +\infty[$, ta ký hiệu $q = \dfrac{p}{p-1}$; như thế ta có: $q \in]1; +\infty[$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Ta quy ước rằng: $\begin{cases} \text{nếu } p = 1 \text{ thì } q = +\infty \\ \text{nếu } p = +\infty \text{ thì } q = 1 \end{cases}$.

1) Cho $p \in]1; +\infty[$. Tại đây ta có thể sử dụng kết quả của bài tập 1.1.8.

a) Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$.

α) Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0}\overline{u_n}v_n$ hội tụ tuyệt đối và: $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{u_n}v_n\right| \leq \|u\|_p\,\|v\|_p$.

β) Từ đó suy ra rằng ℓ^p là một $\mathbb{C}$-kgv và rằng:

$$\forall (u,v) \in (\ell^p)^2, \qquad \|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

b) Chứng minh rằng $\|\cdot\|_p$ là một chuẩn trên ℓ^p.

2) Chứng minh rằng $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ và $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ là những kgvđc.

3) a) Cho $(p_1, p_2) \in [1; +\infty[^2$, sao cho $p_1 \leq p_2$. Chứng minh: $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.

b) Đẳng thức $\bigcup_{p\in[1;+\infty[}\ell^p = \ell^\infty$ có đúng không?

c) Chứng minh rằng với mọi u cố định trong ℓ^1 ta có: $\|u\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|u\|_\infty$.

4) Chứng minh rằng, với mọi p thuộc $[1; +\infty[$, ℓ^p là không gian đủ.

◊ **C3. 6 Không gian Hilbert ℓ^2**

Ta ký hiệu tập hợp các dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0}|u_n|^2$ hội tụ là ℓ^2.

1) a) Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$; chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} \overline{u_n} v_n$ hội tụ tuyệt đối, và rằng:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n\right|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2\right).$$

b) Chứng minh rằng ánh xạ $<.\,,.>: \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2,\ \forall v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2, \quad <u\,,v> = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$$

là một tích vô hướng Hermite trên ℓ^2.

Ta ký hiệu $\|\,.\,\|_2$ là chuẩn liên kết, xác định bởi:

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2, \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Chứng minh rằng ℓ^2 là không gian đủ. Như vậy ℓ^2 là một không gian Hilbert.

3) Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, ta ký hiệu: $e_k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$, trong đó

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = n \\ 0 & \text{nếu } k \neq n \end{cases}$$

là ký hiệu Kronecker.

Chứng minh rằng với mọi $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc ℓ^2:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = <e_n\,,u>$
- $u = \sum_{n=0}^{+\infty} <e_n, u> e_n$.

4) *Một thí dụ về tự đồng cấu f của ℓ^2 có một ánh xạ phụ hợp và sao cho:*

$\mathrm{Im}(f) \neq \left(\mathrm{Ker}(f^*)\right)^{\perp}$ và $\mathrm{Im}(f^*) \neq \left(\mathrm{Ker}(f)\right)^{\perp}$ (xem bài tập C 1.3, *4*)).

Cho $f: \ell^2 \to \ell^2$ xác định bởi: $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $\quad f(u) = \left(\dfrac{u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chứng minh: a) $f \in \mathcal{LC}(\ell^2)$.

b) f có một ánh xạ phụ hợp, và $f^* = f$

c) $\mathrm{Im}(f) \neq \left(\mathrm{Ker}(f)\right)^{\perp}$.

5) *Một thí dụ về tự đồng cấu f của một không gian tiền Hilbert không có ánh xạ phụ hợp* (xem bài tập C 1.3, *4*)).

a) Chứng minh rằng công thức

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2, \quad g(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}(e_0 + e_n)$$

xác định một tự đồng cấu liên tục g của ℓ^2.

Chứng minh rằng g có một ánh xạ phụ hợp và xác định ánh xạ đó.

b) Ký hiệu $E = g(\ell^2)$ và $f: \begin{array}{ccc} E & \to & E; \\ u & \mapsto & g(u) \end{array}$ E được trang bị tích vô hướng cảm sinh bởi tích vô hướng của ℓ^2.

α) Chứng minh: $f \in \mathcal{LC}(E)$.

β) Chứng tỏ rằng f không có ánh xạ phụ hợp.

◊ **C3.7 * Định lý Abel**

1) Phép biến đổi Abel

Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{E}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy những phần tử của một $\mathbb{E}$-kgv E. Với mọi (p,q) thuộc $\mathbb{N}^2$ sao cho $q \geq p+1$, ta ký hiệu $\sigma_{p,q} = \sum_{k=p+1}^{q} v_k$. Chứng minh:

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = u_q \sigma_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k}$$

với mọi (p,q) thuộc $\mathbb{N}^2$ sao cho $q \geq p+1$.

2) Định lý Abel

Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một $\mathbb{E}$-kgvdc đủ. Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy thực giảm và có giới hạn bằng 0, và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong E, với các tổng riêng bị chặn, tức là sao cho tồn tại $M \in \mathbb{E}_+$ thỏa mãn:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(q \geq p+1 \;\Rightarrow\; \left\| \sum_{k=p+1}^{q} v_k \right\| \leq M \right).$$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ hội tụ trong E.

3) *Các thí dụ*

a) Chứng minh rằng với mọi (t, α) thuộc $(\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}) \times]0; +\infty[$, chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n^\alpha}$ hội tụ.

b) Xác định loại của chuỗi có số hạng tổng quát là:

i) $\dfrac{(-1)^n \cos n}{n + (-1)^n \sin n}$ ii) $\dfrac{\sin n}{n - \sqrt{n}\sin n}$

iii) $\left(e^{\frac{\sin(n\sqrt{2})}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \ln\left(1 + \dfrac{\sin(en)}{\sqrt{n}}\right)$ iv) $\sin\left(\dfrac{\sin n}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in]0; +\infty[$ cố định

v) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n}$, $\alpha \in]0; +\infty[$ cố định.

Phần thứ hai

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 1

1.1.1 $\begin{cases} 2\|x\| = \|(x+y)+(x-y)\| \le \|x+y\| + \|x-y\| \\ 2\|y\| = \|(x+y)-(x-y)\| \le \|x+y\| + \|x-y\| \end{cases}$, rồi cộng lại.

1.1.2 **Tính duy nhất:** Nếu N thích hợp thì: $\forall x \in E,\ N(x) = d(0, x)$.

Tồn tại : hãy chứng minh rằng $N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(0,x) \end{array}$ là một chuẩn trên E

và: $\forall (x, y) \in E^2,\quad d(x, y) = N(x - y)$.

Ta chú ý rằng điều kiện *1)* thừa:

$d(y, x) = d(0, x - y) = |-1|\, d(0, (-1)(x - y)) = d(0,\ y - x) = d(x, y)$.

1.1.3 Các điều kiện $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $N(x + y) \le N(x) + N(y)$ có thể chứng minh dễ dàng.

Thay y = 0 trong (iii), ta được: $N(\lambda x) \le |\lambda|\, N(x)$. Như thế nếu $\lambda \neq 0$ thì:

$$N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)\right) \le \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda x),$$

từ đó ta cũng suy ra được $N(\lambda x) \ge |\lambda|\, N(x)$, và cuối cùng là: $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

1.1.4 Ta kiểm chứng được một cách dễ dàng:

- $N(\lambda x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k N_k(\lambda x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k |\lambda| N_k(x) = |\lambda|\, N(x)$.
- $N(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{1,\dots,p\},\ \alpha_k N_k(x) \Rightarrow \left(\exists k \in \{1,\dots,p\},\ N_k(x) = 0\right)$

  $\Rightarrow x = 0)$, vì rằng $(\alpha_1,\dots, \alpha_p) \neq (0,\dots,0)$
- $N(x+ y) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k N_k(x+y) \le \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left(N_k(x) + N_k(y)\right) = N(x) + N(y)$.

1.1.5 Các điều kiện $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ và $N(x + y) \le N(x) + N(y)$ có thể chứng minh dễ dàng.

Và: $N(x_1,\dots, x_p) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} x_k f_k = 0$, vì lẽ $\left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k\right|$ liên tục và ≥ 0. Cuối cùng:

$$\left(\forall (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p,\ \left(\sum_{k=1}^{p} x_k f_k = 0 \Rightarrow (x_1,\dots,x_p) = (0,\dots,0)\right)\right)$$

$\Leftrightarrow$ $(f_1,\dots,f_p)$ độc lập tuyến tính, theo định nghĩa.

◇ **Trả lời:** N là một chuẩn khi và chỉ khi $(f_1,\dots,f_p)$ độc lập tuyến tính trong E.

1.1.6 Các điều kiện $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ và $N(x+y) \le N(x) + N(y)$ có thể chứng minh dễ dàng.

Và: $N(x) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|_F = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

Cuối cùng: $(\forall x \in E,\ (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

◇ **Trả lời:** N là một chuẩn khi và chỉ khi f là đơn ánh.

1.1.7 1) Giả thiết N là một chuẩn.

- Cho $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ thỏa mãn $AX = 0$; khi đó ta có: $N(X) = 0$ và do vậy $X = 0$. Kết quả này chứng tỏ $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, từ đó theo định lý về hạng: $\mathrm{rank}(A) = n$.

Nhưng $\mathrm{rank}(A) \le \mathrm{Inf}(n, p) = p \le n$, suy ra $\mathrm{rank}(A) = n$, $p = n$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

- Ký hiệu $C_1,\dots,C_n$ là các cột của A^{-1}, $(E_1,\dots,E_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; khi đó ta có:

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\quad C_j = A^{-1}E_j.$$

Với mọi $X = (x_1,\dots,x_n)$ thuộc $\mathbb{K}^n$ và mọi i thuộc $\{1,\dots,p\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ là số hạng thứ i của AX. Vậy ta có:

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\quad N({}^tC_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

(trong đó δ_{ij} là ký hiệu Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \ne j \end{cases}$).

Ta kết luận: $\forall j \in \{1,\dots,n\},\quad \alpha_j > 0.$

2) Hãy kiểm chứng phần đảo.

1.1.8 a) Xem Tập 1.

Bất đẳng thức phải chứng minh là tầm thường khi $a = 0$ hay $b = 0$.

Với $a > 0$ cố định, cho $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall b > 0,\quad \varphi(b) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab\ ;$$

φ khả vi và: $\forall b > 0,\quad \varphi'(b) = b^{q-1} - a$, từ đó suy ra bảng biến thiên hình bên.

b	0		a^{p-1}		$+\infty$
$\varphi'(b)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Do $\varphi(a^{p-1}) = 0$, ta kết luận rằng: $\varphi \ge 0$.

b) α) Trường hợp $x = (x_1,\dots,x_n) = 0$ hay $y = (y_1,\dots,y_n) = 0$ có thể chứng minh dễ dàng.

Áp dụng kết quả của a) cho $a = \dfrac{|x_k|}{\|x\|_p}$ và $b = \dfrac{|y_k|}{\|y\|_q}$ rồi cộng lại:

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}y_k\right|}{\|x\|_p\|y\|_q} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k|}{\|x\|_p}\cdot\frac{|y_k|}{\|y\|_q} \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}\right)$$

$$= \frac{1}{p\|x\|_p^p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

β) $$\|x+y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \le \sum_{k=1}^{n}\left(|x_k||x_k+y_k|^{p-1}+|y_k||x_k+y_k|^{p-1}\right)$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

suy ra: $$\|x\|_p + \|y\|_p \ge \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|x+y\|_p.$$

c) Các điều kiện ($\|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0$) và $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$ có thể chứng minh dễ dàng; bất đẳng thức tam giác chính là hệ quả của b).

d) Với mọi p thuộc $]1;+\infty[$ ta có: $\|x\|_\infty^p \le \|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^p \le n\|x\|_\infty^p$,

suy ra: $$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty.$$

Do $n^{\frac{1}{p}} \underset{p\to+\infty}{\to} 1$, ta kết luận: $\|x\|_p \underset{p\to+\infty}{\to} \|x\|_\infty$.

1.1.9 a) Xem trong bài tập 1.1.8, a).

b) và c): Tương tự như trong bài tập 1.1.8, b) và c), thay x, y bằng f, g và $\sum_{k=1}^{n}$ bằng $\int_a^b$.

d) Do trường hợp $f = 0$ là hiển nhiên, ta có thể giả thiết $\|f\|_\infty > 0$.

Do $|f|$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, nên tồn tại $x_0 \in [a;b]$ sao cho $|f|(x_0) = \|f\|_\infty$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục tại x_0, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$\eta < \dfrac{b-a}{2}$ và: $\forall x \in [a;b] \cap [x_0-\eta; x_0+\eta]$, $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Như thế khi ký hiệu α, β là các số thực thoả mãn $[a;b]\cap[x_0-\eta;x_0+\eta] = [\alpha;\beta]$, ta có:

$$\forall x \in [\alpha;\beta], \quad |f(x)| \ge |f(x_0)| - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}.$$

từ đó suy ra rằng với mọi p thuộc $]1;+\infty[$ ta có:

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(t)|^p \, dt \ge \int_\alpha^\beta |f(t)|^p \, dt \ge (\beta - \alpha)\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p \ge \eta \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

và do vậy: $$\|f\|_p \ge \eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Do $\eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\rightarrow} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$, nên tồn tại $p_0 \in]1; +\infty[$ thỏa mãn:

$$\forall p \in]1; +\infty[\,, \ (p \ge p_0 \Rightarrow \eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right) \ge \|f\|_\infty - \varepsilon).$$

Như thế chúng ta đã chứng tỏ rằng:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in]1; +\infty[\,, \forall p \in]1; +\infty[\,, \ (p \ge p_0 \Rightarrow \|f\|_\infty - \varepsilon \le \|f\|_p \le \|f\|_\infty),$$

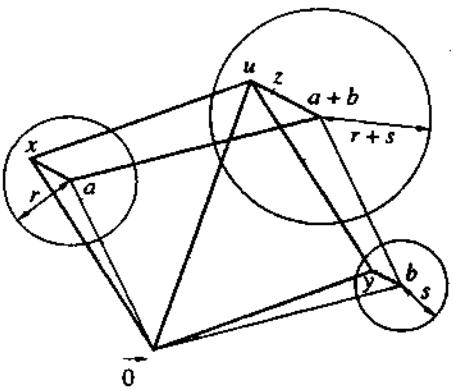
chứng tỏ rằng: $$\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\rightarrow} \|f\|_\infty.$$

1.1.10 • $$f(\lambda u + (1-\lambda)v) = \|(\lambda u + (1-\lambda)v)a + b\| = \|\lambda(ua+b) + (1-\lambda)(va+b)\|$$
$$\le \lambda\|ua+b\| + (1-\lambda)\|va+b\| = \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v).$$

• $\forall t \in \mathbb{R}^*, \ f(t) = |t| \left\| a + \frac{1}{t} b \right\| \underset{t\to\mp\infty}{\rightarrow} +\infty$, vì lẽ $\frac{1}{t} b \underset{t\to\mp\infty}{\rightarrow} 0$, và $a \ne 0$.

1.1.11 1) • Nếu $(x, y) \in B'(a; r) \times B'(b; s)$ thì $\|(x+y) - (a+b)\| \le \|x-a\| + \|y-b\| \le r + s$, và do đó $x + y \in B'(a+b; r+s)$. Điều này chứng tỏ $B'(a; r) + B'(b; s) \subset B'(a+b; r+s)$.

• Đảo lại, cho $u \in B'(a+b; r+s)$.



Xét $$z = \frac{1}{r+s}(ru + s(a+b)),$$
$$x = z - b, \qquad y = u - z + b.$$

Khi đó ta có: $x + y = u$, và như thế:

$$\|x-a\| = \|z-(a+b)\| = \frac{1}{r+s}\|ru + s(a+b) - (r+s)(a+b)\|$$
$$= \frac{r}{r+s}\|u-(a+b)\| \le \frac{r}{r+s} r \le r,$$

và tương tự: $\|y-b\| \le s$.

Suy ra $u \in B'(a; r) + B'(b; s)$ và bao hàm thức cần chứng minh.

2) Trường hợp $\lambda = 0$ là hiển nhiên. Nếu $\lambda \ne 0$ thì với mọi x thuộc E ta có:

$$x \in B'(\lambda a; |\lambda| r) \Leftrightarrow \|x - \lambda a\| \le |\lambda| r \Leftrightarrow \left\|\frac{1}{\lambda}x - a\right\| \le r \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}x \in B'(a; r),$$

từ đó suy ra đẳng thức mong muốn.

3) • Giả thiết tồn tại $x \in B'(a;r) \cap B'(b; s)$. Khi đó: $\|a-b\| \le \|a-x\| + \|x-b\| \le r + s$.

- Đảo lại giả thiết $\|a-b\| \le r+s$. Trường hợp $a=b$ là tầm thường; giả thiết $a \ne b$.

Tồn tại $\lambda \in [0;1]$ sao cho: $1 - \dfrac{s}{\|a-b\|} \le \lambda \le \dfrac{r}{\|a-b\|}$. Ký hiệu $c = a + \lambda\,(b-a)$. Ta có:

$$\|a-c\| = |\lambda|\,\|a-b\| \le r,$$

do đó $c \in B'(a;r)$ và $\|b-c\| = |1-\lambda|\,\|b-a\| \le s$, do đó $c \in B'(b;s)$. Điều này chứng tỏ:

$$B'(a;r) \cap B'(b;s) \ne \varnothing.$$

4) • Giả thiết $B'(a;r) \subset B'(b;s)$.

Nếu $a \ne b$, xét $c = a + \dfrac{r}{\|a-b\|}(a-b)$. Vì $c \in B'(a;r) \subset B'(b;s)$, nên ta suy ra $\|c-b\| \le s$,

do đó $\|a-b\| + r \le s$.

- Đảo lại giả thiết $\|a-b\| \le s-r$. Với mọi x thuộc E ta có:

$$x \in B'(a;r) \Leftrightarrow \|x-a\| \le r \Rightarrow \|x-b\| \le \|x-a\| + \|a-b\| \le s \Rightarrow x \in B'(b;s),$$

và do đó: $\qquad B'(a;r) \subset B'(b;s)$.

5) Suy ra từ 4).

1.1.12 Với mọi x thuộc $E - \{a\}$ ta có:

$$a + \frac{r}{N_1(x-a)}(x-a) \in B'_{N_1}(a;r) = B'_{N_2}(a;r) \Rightarrow N_2\left(\frac{r}{N_1(x-a)}(x-a)\right) \le r$$

$$\Rightarrow N_2(x-a) \le N_1(x-a),$$

và cũng tương tự: $\qquad N_1(x-a) \le N_2(x-a)$,

suy ra: $\qquad N_1(x-a) = N_2(x-a)$.

Do $x \mapsto x-a$ là một song ánh từ E lên E, ta kết luận $N_1 = N_2$.

1.1.13 • Nếu $(x,y) \in (B'(a;r))^2$ và $t \in [0;1]$ thì:

$$\|tx+(1-t)y-a\| = \|t(x-a)+(1-t)(y-a)\| \le t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| \le tr + (1-t)r = r,$$

và do đó: $\qquad tx + (1-t)y \in B'(a;r)$.

Kết quả đó chứng tỏ $B'(a;r)$ lồi.

- Nếu $(x,y) \in (B(a;r))^2$ và $t \in [0;1]$ thì ta đã thấy rằng (xem đoạn trên):

$$\|tx+(1-t)y-a\| \le t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| \le r.$$

Nếu $\|tx+(1-t)y-a\| = r$ thì: $\begin{cases} t\|x-a\| = tr \\ (1-t)\|y-a\| = (1-t)r \end{cases}$,

và do đó: $t=0$ và $1-t=0$, mâu thuẫn.

Vậy $tx + (1-t)y \in B(a;r)$.

1.1.14 a) • Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho $|f|$ và 1:

$$\|f\|_1^2 = \left(\int_a^b |f(t)|\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b 1^2\,dt\right)\left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right) = (b-a)\,\|f\|_2^2.$$

- $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \le (b-a)\,\|f\|_\infty^2$.

b) Xét $f_n : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n\end{array}$, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ánh xạ này rõ ràng thuộc E. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \quad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \|f_n\|_\infty = 1 \right),$$

vậy :
$$\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \underset{n\infty}{\to} +\infty, \quad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \underset{n\infty}{\to} +\infty, \quad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} \underset{n\infty}{\to} +\infty,$$

chứng tỏ các chuẩn $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ đôi một không tương đương với nhau.

1.1.15 a) Cải biên các phép chứng minh ở 1.1.1, 1), Thí dụ *4)*.

b) • Xét $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (|t|+1)^{-n}\end{array}$, với $n \ge 2$, rồi chứng minh $\|f_n\|_1 = \dfrac{2}{n-1}$ và $\|f_n\|_2 = \left(\dfrac{2}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

• Xét $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, với $n \ge 1$, chẵn, cho bởi:

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu } 0 \le x \le n \\ n + \dfrac{1}{n} - x & \text{nếu } n \le x \le n + \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{nếu } n + \dfrac{1}{n} \le x. \end{cases},$$

rồi chứng minh: $\qquad \|g_n\|_1 = 2 + \dfrac{1}{n^2}$ và $\|g_n\|_2 \le \dfrac{2(n^2+1)}{n^3}$.

1.1.16 a) Các điều kiện $N_\varphi(\lambda f) = |\lambda| N_\varphi(f)$ và $N_\varphi(f+g) \le N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$ có thể chứng minh dễ dàng.

Ký hiệu $Z_\varphi = \varphi^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0;1];\ \varphi(x) = 0\}$.

Giả thiết $\overset{\circ}{Z}_\varphi = \varnothing$ (về miền trong của một bộ phận, xem 1.1.7, Định nghĩa 1), và cho $f \in E$ sao cho $N_\varphi(f) = 0$. Vì f và φ đều liên tục, ta suy ra $f\varphi = 0$ và do đó: $\forall x \in \complement_{[0;1]}(Z_\varphi)$, $\varphi(x) = 0$. Như thế f liên tục trên $[0;1]$ và triệt tiêu trên bộ phận $\complement_{[0;1]}(Z_\varphi)$, vốn trù mật trong $[0;1]$. Suy ra $f = 0$, và như vậy N_φ là một chuẩn.

Giả thiết $\overset{\circ}{Z}_\varphi \neq \varnothing$; tồn tại $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0 \le a < b \le 1 \\ \forall x \in [a;b], \quad \varphi(x) = 0 \end{cases}.$$

Xét $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x)=\begin{cases} x-a & \text{nếu } a\le x\le \dfrac{a+b}{2} \\ b-x & \text{nếu } \dfrac{a+b}{2}\le x\le b \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases}.$$

Hãy chứng minh: $f\in E$, $N_\varphi(f)=0$, $f\neq 0$.

Như thế N_φ không phải là một chuẩn.

◊ **Trả lời:** N là một chuẩn trên E khi và chỉ khi $\overset{\circ}{\overline{\varphi^{-1}(\{0\})}}=\varnothing$.

b) Rõ ràng là chúng ta đã giả thiết $\overset{\circ}{Z}_\varphi=\varnothing$ (cách ký hiệu trong a)).

- Giả thiết $Z_\varphi=0$. Vì $|\varphi|$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và không triệt tiêu, nên tồn tại $(m,M)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho: $\forall x\in[0;1],\ m\le|\varphi(x)|\le M$.

Khi ấy: $\quad\forall f\in E,\quad m\,N_1(f)\le N_\varphi(f)\le M\,N_1(f)$,

chứng tỏ: $\quad N_\varphi\sim N_1$.

- Giả thiết $Z_\varphi\neq\varnothing$; vậy tồn tại $x_0\in[0;1]$ sao cho $\varphi(x_0)=0$. Cho $\alpha>0$ cố định.

Vì φ liên tục tại x_0 nên tồn tại $\eta\in]0;1]$ sao cho:

$$\forall x\in[x_0-\eta;x_0+\eta]\cap[0;1],\quad|\varphi(x)|\le\frac{1}{2\alpha}.$$

Xét $f:[0;1]\to\mathbb{E}$ xác định bởi:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\eta}(x-x_0+\eta) & \text{nếu } x_0-\eta\le x\le x_0 \\ \dfrac{1}{\eta}(x_0+\eta-x) & \text{nếu } x_0\le x\le x_0+\eta \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases}.$$

Ta có: $\quad N_1(f)=\eta$ và $N_\varphi(f)\le\dfrac{1}{2\alpha}2\eta$,

suy ra $\dfrac{N_1(f)}{N_\varphi(f)}\ge\alpha$, chứng tỏ: $\quad N_\varphi\nsim N_1$.

◊ **Trả lời:** N_φ là một chuẩn tương đương với N_1 khi và chỉ khi $\varphi^{-1}(\{0\})=\varnothing$.

c) Phương pháp chứng minh tương tự như ở b).

◊ **Trả lời:** N_φ và N_ψ là những chuẩn tương đương khi và chỉ khi: $Z_\varphi=Z_\psi$ và $\overset{\circ}{Z}_\varphi=\varnothing$ (trong đó $Z_\varphi=\varphi^{-1}(\{0\})$).

1.1.17 • Các tính chất : $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$,
$N(f+g) \le N(f) + N(g)$,

và $N_\varphi(\lambda f) = |\lambda| N_\varphi(f)$, $N_\varphi(f+g) \le N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$

có thể chứng minh dễ dàng.

- Cho $f \in E$ sao cho $N(f) = 0$; khi đó $f(0) = 0$ và $f' = 0$, vậy f là hằng, và cuối cùng $f = 0$.
- Cho $f \in E$ sao cho $N_\varphi(f) = 0$; khi đó $\int_0^1 f\varphi = 0$ và $f' = 0$ vậy f là hằng. Như thế ta có

$$f.\int_0^1 \varphi = 0,$$

suy ra $f = 0$ vì rằng $\int_0^1 \varphi \neq 0$.

- Ánh xạ φ, liên tục trên [0; 1], có ít nhất một nguyên hàm $\phi : \begin{array}{ccc}[0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x \varphi\end{array}$. Với mọi f

thuộc E, một phép tích phân từng phần cho ta:

$$\int_0^1 f\varphi = [f\phi]_0^1 - \int_0^1 f'\phi = -f(0)\phi(0) - \int_0^1 f'\phi .$$

1) $$\left|\int_0^1 f\varphi\right| \le |f(0)||\phi(0)| + \int_0^1 |f'\phi| \le |\phi(0)||f(0)| + \|\phi\|_\infty \int_0^1 |f'|,$$

suy ra $N_\varphi(f) \le \alpha N(f)$, do đó $\alpha = 1 + \|\phi\|_\infty$.

2) $$|f(0)| = \left|-\frac{1}{\phi(0)}\left(\int_0^1 f\varphi + \int_0^1 f'\phi\right)\right| \le \frac{1}{|\phi(0)|}\left(\left|\int_0^1 f\varphi\right| + \|\phi\|_\infty \int_0^1 |f'|\right),$$

suy ra: $N(f) \le \beta N_\varphi(f)$, trong đó $\beta = \dfrac{1 + 2\|\phi\|_\infty}{|\phi(0)|}$.

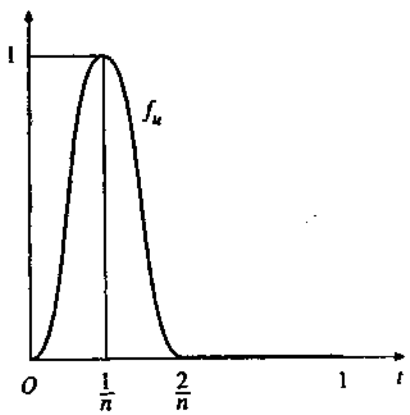
1.1.18 • Các tính chất

$N'_\infty(\lambda f) = |\lambda| N'_\infty(f)$,

và $N'_\infty(f+g) \le N'_\infty(f) + N'_\infty(g)$

có thể chứng minh dễ dàng.

Cho $f \in E$ sao cho $N'_\infty(f) = 0$; khi đó $f' = 0$, do đó f là hằng, rồi $f = 0$ vì rằng $f(0) = 0$.



- Với $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge 2$, xét ánh xạ $f_n : [0; 1] \to \mathbb{R}$ cho bởi:

$$f_n(x)=\begin{cases}\sin^2\left(\dfrac{\pi nt}{2}\right) & \text{nếu } 0\le t\le \dfrac{2}{n}\\[2ex] 0 & \text{nếu } \dfrac{2}{n}<t\le 1\end{cases}.$$

Hãy kiểm chứng rằng $f_n \in E$ và chứng minh:

$$N_\infty(f_n)=1,\ \ N'_\infty(f_n)=\frac{\pi n}{2},$$

suy ra:

$$\frac{N'_\infty(f_n)}{N_\infty(f_n)} \underset{n\infty}{\to} +\infty .$$

1.1.19 • Các tính chất

$$v_k(\lambda f)=|\lambda|\ v_k(f), \qquad \text{và} \qquad v_k(f+g)\le v_k(f)+v_k(g)$$

có thể chứng minh dễ dàng.

Cho $f \in E$ sao cho $v_k(f)=0$; khi đó $f(0)=f^{(k-1)}(0)=0$, và $f^{(k-1)}$ là hằng. Từ đó suy từng bước ra rằng $f^{(k-1)}=0,\dots,f'=0,\ f=0$.

• 1) Bằng cách áp dụng bất đẳng thức số gia giới nội cho $f^{(k)}$ trên $[0;x]$, ta được:

$$\left|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)\right| \le |x| \sup_{t\in[0;x]} \left|f^{(k+1)}(t)\right| \le \sup_{u\in[0;1]} \left|f^{(k+1)}(u)\right|,$$

suy ra

$$\sup_{x\in[0;1]} \left|f^{(k)}(x)\right| \le \sup_{x\in[0;1]} \left|f^{(k+1)}(x)\right|,$$

rồi có:

$$v_k(f)\le v_{k+1}(f).$$

2) Với mọi n thuộc ℕ, xét ánh xạ thuộc E $f_n : \begin{array}{ccc}[0;1] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & t^{n+p}\end{array}$. Hãy chứng minh:

$$\forall(n,k)\in \mathbb{N}\times\{0,\dots,p-1\}, \qquad v_k(f_n)=\frac{(n+p)!}{(n+p-k)!},$$

từ đó suy ra rằng: $\dfrac{v_{k+1}(f_n)}{v_k(f_n)}=n+p-k \underset{n\infty}{\to} +\infty$.

◊ **Trả lời:** $v_0,\dots,v_p$ đôi một không tương đương.

1.1.20 $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ khả tích trên $]0;1]$ vì $\left(\forall t\in]0;1],\ \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\le\dfrac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t}}\right)$, và do $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ khả tích trên $]0;1]$.

a) Các tính chất $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$, và $\|f+g\| \le \|f\|+\|g\|$ có thể chứng minh dễ dàng.

Nếu $\|f\|=0$, thì vì f liên tục trên $[0;1]$ ta suy ra $(\forall t\in]0;1],\ f(t)=0)$, rồi $f=0$.

b) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, xét ánh xạ $f_n : [0;1]\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f_n(t)=\begin{cases} n-n^2t & \text{nếu } 0\le t\le\dfrac{1}{n}\\[2ex] 0 & \text{nếu } \dfrac{1}{n}<t\le 1\end{cases}.$$

Hãy chứng minh rằng:

$$\|f_n\|_1=\frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \|f_n\|=\frac{4}{3}\sqrt{n},$$

từ đó có:

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_1} \underset{n\infty}{\to} +\infty .$$

◊ **Trả lời:** $\|\cdot\|$ và $\|\cdot\|_1$ không tương đương.

1.1.21 a) Các tính chất:

$$N_L(\lambda P) = |\lambda|\ N_L(P), \quad \text{và} \quad N_L(P+Q) \le N_L(P) + N_L(Q)$$

có thể chứng minh dễ dàng.

Nếu ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \neq 0$) và nếu $N_L(P) = 0$, thì ($\forall k \in \{0,\dots, N\}$, $a_k = 0$), và do đó $P = 0$.

Nếu ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n_0} = 0$) thì $N_L(X^{n_0}) = 0$ và $X^{n_0} \neq 0$.

◊ **Trả lời:** N_L là một chuẩn khi và chỉ khi: ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \neq 0$), trong đó $L = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Đảo lại, giả thiết tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha|\lambda_n| \le |\mu_n| \le \beta|\lambda_n|$.

Với mọi $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ thuộc $\mathbb{C}[X]$ ta có:

$$N_M(P) = \sum_{k=0}^{N} |\mu_k a_k| \le \sum_{k=0}^{N} \beta|\lambda_k a_k| = \beta N_L(P),$$

và cũng tương tự: $\alpha N_L(P) \le N_M(P)$.

◊ **Trả lời:** N_L và N_M là những chuẩn tương đương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n \neq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n \neq 0 \\ \exists(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha|\lambda_n| \le |\mu_n| \le \beta|\lambda_n| \end{cases}$$

1.1.22 Cho $x \in \lambda\Omega$; tồn tại $a \in \Omega$ sao cho $x = \lambda a$. Vì Ω mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a; r) \subset \Omega$. Khi đó $B(x; |\lambda| r) = \lambda B(a; r) \subset \lambda\Omega$ (xem bài tập 1.1.11, 2)), và như thế $\lambda\Omega$ là một tập mở.

1.1.23 $\overline{A \cup \complement_E(\overline{A})} = \overline{A} \cup \overline{\complement_E(\overline{A})} \supset \overline{A} \cup \complement_E(\overline{A}) = E.$

1.1.24 $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset \complement_E(B) \Rightarrow \mathring{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E(B)}} = \complement_E(\overline{B}) = \varnothing.$

1.1.25 Cho $x \in E$ và $V \in \mathcal{V}_E(x)$; tồn tại một bộ phận mở Ω của E sao cho: $x \in \Omega \subset V$. Vì A trù mật trong E, nên ta có: $\Omega \cap A \neq \varnothing$, và do đó tồn tại $y \in \Omega \cap A$. Do Ω và A là những bộ phận mở của E nên: $\Omega \cap A \in \mathcal{V}_E(y)$, rồi vì B trù mật trong E nên: $(\Omega \cap A) \cap B \neq \varnothing$. Như thế:

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap (A \cap B) \neq \varnothing,$$

và cuối cùng: $A \cap B$ trù mật trong E.

1.1.26 ◊ **Trả lời:** $A = [0; 1]$, $B =]1; 2] \cap \{3\}$.

1.1.27 ◊ **Trả lời:** $A = [0; 1[\cup]1; 2] \cup ([3; 4] \cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}$.

1.1.28 Ký hiệu $A_n = \left\{\frac{1}{x+n} + \frac{1}{2^n};\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, và chú ý rằng

$A_n = \left]\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right[$ và $\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$, từ đó suy ra $A = \left]0; \frac{3}{2}\right[$.

◊ **Trả lời:** $A = \left]0; \frac{3}{2}\right[$, $\mathring{A} = \left]0; \frac{3}{2}\right[$, $\overline{A} = \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

1.1.29 a) α) • $\begin{cases} U \cap V \subset U \\ U \cap V \subset V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\mathring{\overline{U \cap V}}} \subset \mathring{\overline{U}} \\ \overline{\mathring{\overline{U \cap V}}} \subset \mathring{\overline{V}} \end{cases} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{U \cap V}}} \subset \mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}}$.

• Cho $x \in \mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}} = \widehat{\overline{U} \cap \overline{V}}^{\circ}$ và W là một lân cận mở của x trong E. Ký hiệu $\Omega = \widehat{\overline{U} \cap \overline{V}}^{\circ}$, thì Ω là một tập mở và $x \in \Omega \subset \overline{U} \cap \overline{V}$.

Vì $x \in \overline{U}$ và $W \cap \Omega \in \mathcal{V}_E(x)$, nên ta có: $(W \cap \Omega) \cap U \neq \varnothing$, và do vậy tồn tại $y \in W \cap \Omega \cap U$.

Vì $W \cap \Omega \cap U$ là tập mở và $y \in \Omega \subset \overline{V}$ nên ta có $(W \cap \Omega \cap U) \cap V \neq \varnothing$, từ đó suy ra:

$$W \cap (U \cap V) \neq \varnothing.$$

Kết quả này chứng tỏ $x \in \overline{U \cap V}$ và do đó $\widehat{\overline{U} \cap \overline{V}}^{\circ} \subset \overline{U \cap V}$. Chuyển qua các miền trong, ta suy ra: $\mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}} \subset \mathring{\overline{U \cap V}}$.

β) Chuyển qua các phần bù và áp dụng α).

b) $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A} \cap \mathring{B}}}} = \overline{\mathring{\overline{A}}} \cap \overline{\mathring{\overline{B}}}$ ... $\overline{\mathring{A \cap B}}^{\circ} = \mathring{\overline{\mathring{A}}} \cap \mathring{\overline{\mathring{B}}}$ (xem a), α)) và cũng tương tự cho công thức kia.

1.1.30 Thực ra ta sẽ chứng minh tổng quát hơn rằng với mọi kgvc F của E sao cho $F \neq E$ ta có: $\mathring{F} = \varnothing$.

Rõ ràng là F là một kgvc của E. Ta lập luận phản chứng: giả thiết $\mathring{F} \neq \varnothing$. Khi đó tồn tại $f \in F$ và $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B(f; r) \subset F$. Khi đó với mọi g thuộc E ta có:

$$g = f + \frac{2}{r}\left(\frac{r}{2}(g - f)\right) \in F,$$

vì $f \in F$, $\frac{r}{2}(g - f) \in F$ và F là một kgvc. Nhưng như thế $F = E$, mâu thuẫn vì ánh xạ $\begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ liên tục nhưng không liên tục đều.

1.1.31 $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{\complement_E(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{\complement_E(A) \cup \complement_E(B)} = F \cup G$, nếu ta ký hiệu:

$$F = \overline{A} \cap \overline{\complement_E(A) \cap \complement_E(B)}, \quad G = \overline{B} \cap \overline{\complement_E(A) \cap \complement_E(B)}.$$

Chúng ta chứng minh: $F = \overline{A} \cap \overline{\complement_E(A)} \cap \overline{\complement_E(B)}$.

Một bao hàm thức chứng minh dễ dàng.

Cho $x \in \overline{A} \cap \overline{\complement_E(A)} \cap \overline{\complement_E(B)}$ và V là một lân cận mở của x trong E. Ta có:

$$x \in \overline{A} \subset \complement_E(\overline{B}) = \overset{\circ}{\overline{\complement_E(B)}},$$

vậy $V \cap \complement_E(B)$ là một lân cận của x trong e. Vì $x \in \overline{\complement_E(A)}$, nên khi đó ta có $V \cap \complement_E(B) \cap \complement_E(A) \neq \varnothing$.

Ta kết luận rằng: $x \in \overline{A} \cap \overline{\complement_E(A) \cap \complement_E(B)}$.

Tương tự ta được: $G = \overline{B} \cap \overline{\complement_E(A)} \cap \overline{\complement_E(B)}$,

từ đó suy ra:

$$\partial(A \cup B) = \left(\overline{A} \cap \overline{\complement_E(A)} \cap \overline{\complement_E(B)}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{\complement_E(B)} \cap \overline{\complement_E(A)}\right)$$

$$= \left(\partial(A) \cap \overline{\complement_E(B)}\right) \cup \left(\partial(B) \cap \overline{\complement_E(A)}\right).$$

Cuối cùng ta có: $\partial(A) \subset \overline{A} \subset \complement_E(\overline{B}) = \overset{\circ}{\overline{\complement_E(B)}} \subset \overline{\complement_E(B)}$,

từ đó ta kết luận: $\partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B)$.

1.1.32 • Cho $f \in A$. Vì f liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào, nên tồn tại $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $f \geq \varepsilon$ hoặc $f \leq -\varepsilon$. Giả thiết chẳng hạn $f \geq \varepsilon$. Khi đó $B(f; \frac{\varepsilon}{2}) \subset A$.

Bao hàm thức này chứng tỏ rằng A mở.

• Ta ký hiệu $B = \{g \in E;\ \ g \geq 0$ hoặc $g \leq 0\}$, và chứng minh rằng: $\overline{A} = B$.

1) Cho $\varphi \in \overline{A}$ và giả thiết $\varphi \notin B$. Khi đó tồn tại $(x_1, x_2) \in [0; 1]^2$ sao cho $\varphi(x_1) < 0$ và $\varphi(x_2) > 0$. Ký hiệu $\varepsilon = \mathrm{Min}(-\varphi(x_1), \varphi(x_2)) > 0$; vì $\varphi \in \overline{A}$ nên tồn tại $f \in A$ sao cho $\|\varphi - f\|_\infty < \varepsilon$. Khi đó ta có $f(x_1) < \varphi(x_1) + \varepsilon \leq 0$ và $f(x_2) > \varphi(x_2) - \varepsilon \geq 0$, do đó (định lý các giá trị trung gian), f triệt tiêu tại ít nhất một điểm thuộc $[0; 1]$, mâu thuẫn. Điều đó chứng tỏ $\varphi \in B$.

2) Đảo lại, cho $g \in B$, chẳng hạn $g \geq 0$. Với mỗi $\varepsilon > 0$, xét $f_\varepsilon = \mathrm{Sup}(g, \varepsilon)$. Ta có:

- $f_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$, vậy $f_\varepsilon \in A$.
- $0 \leq f_\varepsilon \leq g$, vậy $0 \leq g - f_\varepsilon$
- với mọi x thuộc $[0; 1]$, $\begin{cases} g(x) \geq \varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon(x) - g(x) = 0 \\ 0 \leq g(x) \leq \varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon(x) - g(x) \leq \varepsilon \end{cases}$.

Như thế: $f_\varepsilon \in A$ và $\|g - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

Điều đó chứng tỏ $g \in \overline{A}$.

◊ **Trả lời:** $\mathring{A} = A$ và $\overline{A} = \{g \in E;;\ \ g \geq 0$ hoặc $g \leq 0\}$.

1.1.33 1) A là một kgvc của c_0 và $A \neq c_0$, vậy $\mathring{A} = \varnothing$ (tương tự như ở bài tập 1.1.30).

2) Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ và $\varepsilon > 0$. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon)$.

Xét $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được xác định là: $v_n = \begin{cases} u_n & \text{nếu } n \leq N \\ 0 & \text{nếu } n > N \end{cases}$.

Ta có: $v \in A$ và $\|v - u\|_\infty = \sup\limits_{n > N} |u_n| \leq \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ: $\forall u \in c_0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists v \in A$, $\|v - u\|_\infty \leq \varepsilon$,

và suy ra: $\overline{A} = c_0$.

3) $\partial(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

Trả lời: $\mathring{A} = \varnothing$, $\overline{A} = c_0$, $\partial(A) = c_0$.

1.1.34 **(i) $\Rightarrow$ (ii):**
Với mỗi a thuộc A tồn tại $V_a \in \mathcal{V}_E(a)$ và F_a là bộ phận đóng của E sao cho $V_a \cap A = V_a \cap F_a$, và tồn tại một bộ phận mở Ω_a của E sao cho: $a \in \Omega_a \subset V_a$. Ta có:

$$\Omega_a \cap A = V_a \cap A = V_a \cap F_a = \Omega_a \cap F_a.$$

Ký hiệu $U = \bigcup_{a \in A} \Omega_a$, tập này là một bộ phận mở của E.

Với mỗi a thuộc A ta ký hiệu $F'_a = F_a \cap \complement_E(\Omega_a)$, là một bộ phận đóng của E, và $F = \bigcap_{a \in A} F'_a$, cũng là một bộ phận đóng của E. Bây giờ chúng ta chứng minh rằng $U \cap F = A$.

- $A \subset U$ vì : $\forall a \in A, a \in \Omega_a \subset U$. Cho $a \in A, x \in A$.

Nếu $a \notin \complement_E(\Omega_x)$ thì $a \in \Omega_x$, vậy $a \in \Omega_x \cap A = \Omega_x \cap F_x \subset F_x$.

Kết quả này chứng tỏ rằng $\forall x \in A, a \in F'_x$, do đó $a \in F$, và cuối cùng là $A \subset F$.

- Cho $z \in U \cap F$. Vì $z \in U$ nên tồn tại $a \in A$ sao cho $z \in \Omega_a$. Hơn nữa:

$$z \in F \subset F'_a = F_a \cap \complement_E(\Omega_a),$$

do đó $z \in F_a$, và cuối cùng ta có $z \in \Omega_a \cap F_a = \Omega_a \cap A \subset A$. Điều này chứng tỏ: $U \cap F \subset A$

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Cho $a \in A$; Ω là một lân cận của a và $\Omega \cap A = \Omega \cap (\Omega \cap F)$, vậy $\Omega \cap A$ là một bộ phận đóng trong Ω.

1.1.35 1) Trước tiên ta chứng minh: $d_A = d_{\overline{A}}$.

- $A \subset \overline{A}$, vậy: $\qquad \forall x \in A, \quad d(x, \overline{A}) \le d(x, A)$.
- Cho $\varepsilon > 0$. Với mọi t thuộc $\overline{A}$ tồn tại $a \in A$ sao cho $d(t, a) < \varepsilon$, suy ra:

$$d(x, A) \le d(x, a) \le d(x, t) + d(t, a) \le d(x, t) + \varepsilon.$$

Như thế: $\qquad \forall \varepsilon > 0, \quad d(x, A) \le d(x, \overline{A}) + \varepsilon$,

suy ra: $\qquad d(x, A) \le d(x, \overline{A})$.

2) $\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} \Leftrightarrow d_A = d_B$.

3) Đảo lại, giả thiết $d_A = d_B$; với mọi t thuộc E ta có:

$$t \in \overline{A} \Leftrightarrow d(t, \overline{A}) = 0 \Leftrightarrow d(t, \overline{B}) = 0 \Leftrightarrow t \in \overline{B},$$

suy ra $\overline{A} = \overline{B}$.

1.1.36 Cho $(a, b) \in A \times B$; với mọi (x, y) thuộc $A \times B$ ta có:

$$d(x, y) \le d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \le \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B),$$

chứng tỏ rằng $A \cup B$ giới nội và:

$$\text{diam}(A \cup B) \le \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B).$$

Ta suy ra hệ thức cần chứng minh bằng cách chuyển qua các biên dưới khi (a, b) chạy khắp $A \times B$.

1.1.37 1) $A \times B \subset C \times D$, vậy:

$$d(C, D) = \inf_{(x,y) \in C\times D} d(x, y) \le \inf_{(x,y) \in A\times B} d(x, y) = d(A, B).$$

2) Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $(c, d) \in C \times D$ sao cho: $d(c, d) \le d(C, D) + \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Do $(c, d) \in \overline{A} \times \overline{B}$ nên tồn tại $(a, b) \in A \times B$ sao cho: $d(c, a) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ và $d(d, b) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Khi đó:

$$d(A, B) \le d(a, b) \le d(a, c) + d(c, d) + d(d, b) < d(C, D) + \varepsilon,$$

Như thế:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad d(A, B) < d(C, D) + \varepsilon,$$

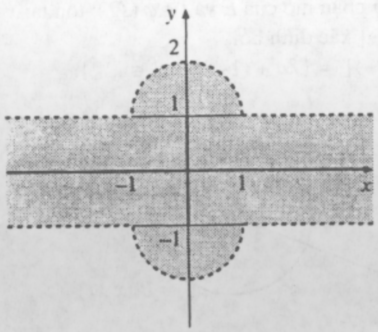
suy ra:

$$d(A, B) \le d(C, D).$$

1.2.1 a) • Ánh xạ $d_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,A) \end{array}$ liên tục, $V_\alpha(A) = d_A^{-1}(]\alpha; +\infty[)$ và $]\alpha; +\infty[$ là một bộ phận mở của $\mathbb{R}$, vậy $V_\alpha(A)$ là một bộ phận mở của E.

- $\overline{A} = \{x \in E; d(x, a) = 0\} \subset V_\alpha(A)$
- $\displaystyle\bigcap_{\alpha>0} V_\alpha(A) = \{x \in E;\ \ \forall \alpha > 0, d(x, A) < \alpha\} = \{x \in E;\ \ d(x, A) = 0\} = \overline{A}$.

b)



1.2.2 Ta có thể giả thiết $A \neq \emptyset$ và $B \neq \emptyset$. Ký hiệu $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,A)-d(x,B) \end{array}$, hãy chứng minh rằng

$$U = \{ x \in E;\ \ f(x) < 0\} \text{ và } V = \{ x \in E;\ \ f(x) > 0\}$$

thích hợp.

1.2.3 • Nếu f và g liên tục thì ánh xạ hợp φ: $(x, y) \mapsto (f(x), g(y)) \mapsto f(x) + g(y)$ cũng liên tục.

- Nếu φ liên tục thì khi cố định b trong B, ánh xạ hợp $f : (x, b) \mapsto \varphi(x, b) - g(b)$ liên tục.

1.2.4 Với mọi bộ phận mở Ω của F:

$$f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\Omega) \cap \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}\left(f^{-1}(\Omega) \cap U_i\right) = \bigcup_{i\in I}\left(f_{|U_i}\right)^{-1}(\Omega),$$

là một hợp những bộ phận mở của E.

1.2.5 1) Rõ ràng là E_-, E_+, C là những kgvc của E.
2) Cho $(f, g, h) \in E_- \times E_+ \times C$ sao cho $f + g + h = 0$.
Nói riêng $f(0) + g(0) + h(0) = 0$, suy ra $h(0) = 0$, và do đó $h = 0$.
Rồi ta lại có: $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $0 = f(x) + g(x) = g(x)$, suy ra $g = 0, f = 0$.
3) Với mọi $\varphi \in E$, xét $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi:

$$h = \varphi(0)\mathbf{1}, \qquad f(x) = \begin{cases}\varphi(x) - \varphi(0) & \text{nếu } x \le 0 \\ 0 & \text{nếu } x > 0\end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ \varphi(x) - \varphi(0) & \text{nếu } x > 0\end{cases}$$

và kiểm chứng: $(f, g, h) \in E_- \times E_+ \times C$ và $f + g + h = \varphi$.
4) Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ký hiệu $A_x : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(x)\end{array}$.

Ánh xạ A_x liên tục vì:

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad |A_x(f) - A_x(g)| = |f(x) - g(x)| \le \|f - g\|_\infty.$$

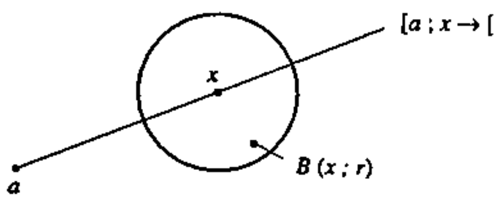
Vậy với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $A_x^{-1}(\{0\})$ đóng; cuối cùng

$$E_- = \bigcap_{x \in \mathbb{R}_-} A_x^{-1}(\{0\}) \text{ và } E_+ = \bigcap_{x \in \mathbb{R}_+} A_x^{-1}(\{0\}) \text{ đều đóng.}$$

5) C đóng vì mọi kgvc 1 chiều đều đóng.

1.2.6 a) Cho Ω là một bộ phận mở của E và $t \in \varphi(\Omega)$; tồn tại $x \in E$ sao cho $t = d(a, x)$.
Xét nửa đường thẳng $[a; x \to[$ xác định bởi:

$$[a; x \to[\; = \{\lambda a + (1 - \lambda)x;\ \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$



Vì Ω mở nên tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B(x; r) \subset \Omega$ và $r < d(a, x)$. ta có:

$$\varphi(\Omega) \supset \varphi(B(x; r)) \supset \varphi([a; x \to[\cap B(x; r))$$
$$=]d(a, x) - r; d(a, x) + r[\cap \mathbb{R}_+.$$

Vậy $\varphi(\Omega)$ là một lân cận của mọi điểm của nó trong $\mathbb{R}_+$, do đó mở.
b) Xem bài tập 1.1.22.
c) Cho Ω là một bộ phận mở của $\mathbf{Z}$. Vì gof liên tục nên $f^{-1}(g^{-1}(\Omega)) = (gof)^{-1}(\Omega)$ là một bộ phận mở của X. Do f là toàn ánh và mở nên $g^{-1}(\Omega) = f(f^{-1}(g^{-1}(\Omega)))$ là một bộ phận mở của Y.
Kết quả trên chứng tỏ g liên tục.

1.2.7 a) • Các tính chất:

$$\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|, \quad \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

chứng minh dễ dàng.

• Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, xét $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} - nx & \text{nếu } 0 \le x \le \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{nếu } \frac{1}{n^2} < x \le 1 \end{cases}$$

hãy chứng minh rằng $\dfrac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} \underset{n\infty}{\to} +\infty$, trong đó $\|\cdot\|$ $\|\cdot\|_\infty$.

b) • N là một chuẩn trên E_1 (xem bài tập 1.1.19).

• 1) Với mọi (x, y) thuộc $[0; 1]^2$ sao cho $x \ne y$, tồn tại $c \in]x; y[$ (hay $]y; x[$) sao cho:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$$

(định lý số gia hữu hạn), suy ra: $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{\substack{(x,y)\in[0;1]^2 \\ x\ne y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le \operatorname*{Sup}_{t\in[0;1]} |f'(t)|$.

2) Với mọi t thuộc $[0; 1]$:

$$|f'(t)| = \lim_{\substack{u\to t \\ u\ne t}} \left|\frac{f(u)-f(t)}{u-t}\right| \le \operatorname*{Sup}_{\substack{(x,y)\in[0;1]^2 \\ x\ne y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|,$$

do đó: $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{t\in[0;1]} |f'(t)| \le \operatorname*{Sup}_{\substack{(x,y)\in[0;1]^2 \\ x\ne y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$.

Cuối cùng ta có: $\forall f \in E_1, \quad \|f\| = N(f)$.

1.2.8 Xét ánh xạ $\varphi : \begin{array}{ccc} B(X,F) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \omega(f,a) \end{array}$; như thế ta có $\{f \in B(X,F);\ \omega(f, a) \le \varepsilon\} = \varphi^{-1}([0;\varepsilon])$, và $[0; \varepsilon]$ là tập đóng trong $\mathbb{R}$. Vậy ta chỉ cần chứng minh rằng φ liên tục; chúng ta sẽ chứng tỏ rằng φ là ánh xạ Lipschitz.

Cho $V \in \mathcal{V}_X(a)$, $f, g \in B(X,F)$. Với mọi (x, y) thuộc V^2 ta có:

$$\|f(x)-f(y)\| \le \|f(x)-g(x)\| + \|g(x)-g(y)\| + \|g(y)-f(y)\|$$
$$\le 2\|f-g\|_\infty + \operatorname{diam}(g(V)),$$

từ đó bằng cách chuyển qua biên trên khi (x, y) chạy khắp V^2 ta được:

$$\operatorname{diam}(f(V)) \le 2\|f-g\|_\infty + \operatorname{diam}(g(V)).$$

Chuyển qua các biên dưới khi V chạy khắp $\mathcal{V}_X(a)$, ta suy ra:

$$\omega(f, a) \le 2\|f-g\|_\infty + \omega(g, a).$$

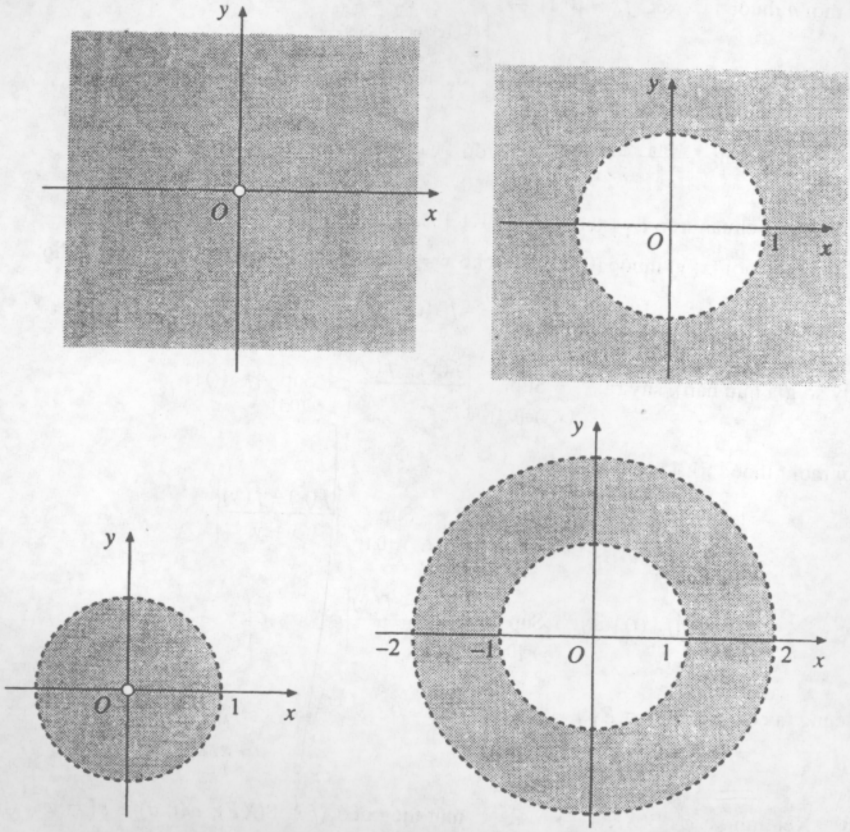
Do các vai trò đối xứng của f, g ta có thể kết luận rằng:

$$|\omega(f, a) - \omega(g, a)| \le 2\|f-g\|_\infty.$$

Như vậy φ là ánh xạ 2-Lipschitz, vậy liên tục.

1.2.9 ◊ **Trả lời:** $E = \mathbb{R}, A =]0; +\infty[, B = \mathbb{R}$.

1.2.10



Hãy kiểm chứng rằng các ánh xạ sau đây:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \to E_2 & E_2 \to E_3 & E_3 \to E_4 \\ z \mapsto \left(1+\frac{1}{|z|}\right)z, & z \mapsto \frac{1}{z}, & z \mapsto \left(1+\frac{1}{|z|}\right)z \end{array}$$

là những song ánh, có ánh xạ ngược theo thứ tự là:

$$\begin{array}{ccc} E_2 \to E_1 & E_3 \to E_2 & E_4 \to E_3 \\ u \mapsto \left(1-\frac{1}{|u|}\right)u, & u \mapsto \frac{1}{u}, & u \mapsto \left(1-\frac{1}{|u|}\right)u \end{array},$$

và rằng sáu ánh xạ đó đều liên tục.

1.2.11 • Cho $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một tự đồng cấu thể liên tục.

1) Ta chứng minh rằng: $\forall(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad f(\lambda z) = \lambda f(z)$.

- Bằng quy nạp theo n: $\forall z \in \mathbb{C}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nz) = nf(z)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_-, \quad f(nz) = f(-(-n)z) = -f((-n)z) = -(-n) f(z) = nf(z)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \ \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad qf(\frac{p}{q} z) = f(q\frac{p}{q} z) = f(pz) = pf(z)$,

từ đó suy ra: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(rz) = rf(z)$.

- Cho $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, tồn tại một dãy $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ những số hữu tỷ sao cho: $r_n \underset{n\infty}{\to} x$.

Do f liên tục, ta suy ra $f(r_n z) \underset{n\infty}{\to} f(xz)$.

Nhưng ta lại có: $$f(r_n z) = r_n f(z) \underset{n\infty}{\to} xf(z),$$

do đó: $$f(xz) = xf(z).$$

2) $(f(\mathrm{i}))^2 = f(\mathrm{i})^2 = f(-1) = -f(1) = -1$, suy ra $f(\mathrm{i}) \in \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

Ký hiệu $f(\mathrm{i}) = \varepsilon\mathrm{i}$, $\varepsilon = -1$ hay 1, cố định.

3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad f(x + \mathrm{i}y) = f(x) + f(\mathrm{i})f(y) = x + \varepsilon\mathrm{i}\, y$.

- Hãy kiểm chứng rằng các ánh xạ tìm được trên đây đều thích hợp.

1.2.12 1) Cho $\varphi \in E$ sao cho $\varphi \geq 0$; ta có: $\sqrt{\varphi} \in E$ và $F(\varphi) = F((\sqrt{\varphi})^2) = (F(\sqrt{\varphi}))^2 \geq 0$.

Kết quả đó chứng tỏ: $\forall \varphi \in E, (\varphi \geq 0 \Rightarrow F(\varphi) \geq 0)$.

2) Cho $(\varphi, \psi) \in E^2$ sao cho $\varphi \leq \psi$; ta có: $F(\psi) - F(\varphi) = F(\psi - \varphi) \geq 0$, vì $\psi - \varphi \geq 0$ (xem 1)).

Kết quả này chứng tỏ rằng F là ánh xạ tăng, tức là:

$$\forall (\varphi, \psi) \in E^2, \quad (\varphi \leq \psi \Rightarrow F(\varphi) \leq F(\psi)).$$

3) Cho $f \in E$; vì $-|f| \leq f \leq |f|$, nên ta có $-F(|f|) \leq F(f) \leq F(|f|)$, do đó:

$$|F(f)| \leq F(|f|).$$

Sau đó, do $|f| \leq \|f\|_\infty 1$, ta được $F(|f|) \leq F(\|f\|_\infty 1) = \|f\|_\infty F(1) = \|f\|_\infty$. Điều này chứng tỏ: $$\|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

4) Do F^{-1} tồn tại và là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$-đại số E, nên ta cũng có:

$$\forall g \in E, \quad \|F^{-1}(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty ,$$

từ đó suy ra: $$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \|F(f)\|_\infty .$$

Cuối cùng ta được: $$\forall f \in E, \quad \|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

1.2.13 $\|f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_{2n}\| \leq \|f_1\| \, \|f_2 \circ f_3\| \, ... \, \|f_{2n-2} \circ f_{2n-1}\| \, \|f_{2n}\|$

và $\quad \|f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_{2n}\| \leq \|f_1 \circ f_2\| \, \|f_3 \circ f_4\| \text{ o... o } \|f_{2n-1} \circ f_{2n}\|$.

Hãy kết luận bằng cách nhân.

1.2.14 a) 1) Giả thiết φ liên tục; khi đó $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ đóng vì $\{0\}$ đóng.

2) Giả thiết $\mathrm{Ker}(\varphi)$ đóng và $\varphi \neq 0$. Tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $\varphi(x_0) = 1$; vì $\mathrm{Ker}(\varphi)$ đóng và $x_0 \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$, nên ta có: $\quad d(x_0, \mathrm{Ker}(\varphi)) > 0$.

Ký hiệu $r = d(x_0, \mathrm{Ker}(\varphi))$.

Cho $x \in B'(0; \frac{r}{2})$; ta chứng minh $|\varphi(x)| \leq 1$.

Nhằm mục tiêu đó ta lập luận phản chứng: giả thiết $|\varphi(x)| > 1$. Ký hiệu $\alpha = |\varphi(x)|$.

Ta có: $\left\|\frac{1}{\alpha}x\right\| = \frac{1}{|\alpha|}\|x\| \le \|x\| \le \frac{r}{2}$ và $\frac{1}{\alpha}x - x_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$,

từ đó suy ra: $d(x_0, \mathrm{Ker}(\varphi)) \le \left\|\frac{1}{\alpha}x\right\| \le \frac{r}{2}$, mâu thuẫn. Như vậy thì: $|\varphi(x)| \le 1$.

Cuối cùng, với mọi x thuộc E - $\{0\}$ ta có: $|\varphi(x)| = \frac{\|x\|}{r}\left|\varphi\left(\frac{r}{\|x\|}x\right)\right| \le \frac{\|x\|}{r}$,

chứng tỏ rằng φ liên tục.

b) Hãy chú ý rằng $\overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}$, tập này vốn là một kgvc của E, chứa siêu phẳng $\mathrm{Ker}(\varphi)$, vậy $\overline{\mathrm{Ker}(\varphi)} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ hay $\overline{\mathrm{Ker}(\varphi)} = E$.

1.2.15 1) Rõ ràng rằng θ tuyến tính. Hơn nữa:

$$\forall (x, y) \in H \times D,\quad \|\theta(x,y)\|_E = \|x+y\|_E \le \|x\|_E + \|y\|_I = \|x\|_H + \|y\|_D = \|(x,y)\|_{H\times D},$$

khi lấy chuẩn trong $H \times D$ là chuẩn xác định bởi đẳng thức cuối cùng trên đây.

2) Vì H là một siêu phẳng nên tồn tại $\varphi \in E^*$ -$\{0\}$ sao cho $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Hơn nữa, theo bài tập 1.2.14, φ liên tục.

Tồn tại $d \in D$ sao cho $\varphi(d) \ne 0$ (ở đây mọi phần tử d của D - $\{0\}$ đều thích hợp), và ta có thể biểu thị ánh xạ ngược của θ (θ là song ánh):

$$\theta^{-1}: \begin{array}{ccc} E & \to & H\times D \\ z & \mapsto & \left(z-\frac{\varphi(z)}{\varphi(d)}d, \frac{\varphi(z)}{\varphi(d)}d\right)\end{array},$$

ánh xạ này cũng liên tục vì φ liên tục.

1.2.16 a) α) $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ là nghịch ảnh của bộ phận đóng $\{0\}$ của F qua ánh xạ liên tục f.

β) • Có thể xảy ra trường hợp $\mathrm{Im}(f)$ đóng, chẳng hạn: $f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0\end{array}$.

• Có thể xảy ra trường hợp $\mathrm{Im}(f)$ không đóng, chẳng hạn: $A = (C([0;1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$, $E = \{f \in A;\ f(0) = 0\}$, đây là một siêu phẳng không đóng của A (hãy chứng minh rằng: $\varphi: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0)\end{array}$ không liên tục trên A), $F = A$,

$f: E \underset{u\mapsto u}{\to} F$

b) • Theo a), α), $\mathrm{Ker}(p)$ đóng.

• $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$ đóng theo a), α) áp dụng cho $\mathrm{Id}_E - p$.

1.2.17 **(i) ⇒ (ii):**

Giả thiết tồn tại $a \in E$ thỏa mãn: $\|a\| = 1$ và $\|\varphi\| = |\varphi(a)|$.

Vì H là một siêu phẳng và do $a \notin H$ (nếu như $a \in H$ thì $\|\varphi\| = |\varphi(a)| = 0$, $\varphi = 0$, mâu thuẫn), nên tồn tại $(\lambda, h) \in \mathbb{K} \times H$ sao cho: $x = \lambda a + h$.

Ta có: $$\forall k \in H,\quad \begin{cases} |\varphi(x-k)| \le \|\varphi\|\|x-k\| \\ |\varphi(x-k)| = |\varphi(x)| = |\lambda||\varphi(a)| = |\lambda|\|\varphi\| \end{cases},$$

từ đó suy ra: $\forall k \in H$, $\|x-k\| \ge |\lambda|$. Nhưng $\|x-h\| = \|\lambda a\| = |\lambda|\|a\| = |\lambda|$.

Như thế: $\forall k \in H, \quad \|x-k\| \geq \|x-h\|,$

tức là: $d(x, H) \geq \|x-h\|,$

và cuối cùng ta có: $d(x, H) = \|x-h\|$, vì $h \in H$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Hiển nhiên vì $E - H \neq \varnothing$.

(iii) $\Rightarrow$ (i):
Giả thiết tồn tại $x \in E - H$ và $h \in H$ sao cho $d(x, H) = \|x-h\|$. Ký hiệu $b = x - h$.

Cho $u \in E - H$. Ta có: $\dfrac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u - x \in H$, vì $\varphi\left(\dfrac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u - x\right) = \varphi(b) - \varphi(x) = -\varphi(h) = 0$, từ đó suy ra:

$$\|b\| = \|x-h\| = d(x, H) \leq \left\|\frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u\right\| = \frac{|\varphi(b)|}{|\varphi(u)|}\|u\|.$$

Kết quả này chứng tỏ: $\forall u \in E, \quad |\varphi(u)| \leq \dfrac{|\varphi(b)|}{\|b\|}\|u\|,$ và do đó: $\|\varphi\| \leq \dfrac{|\varphi(b)|}{\|b\|}$,

rồi $\|\varphi\| = \dfrac{|\varphi(b)|}{\|b\|}$.

Ký hiệu $a = \dfrac{b}{\|b\|}$, ta kết luận: $\|a\| = 1$ và $\|\varphi\| = |\varphi(a)|$.

1.2.18 $Z_P = F^{-1}(\{0\})$, trong đó: $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{LC}(E) & \to & \mathcal{LC}(E) \\ f & \mapsto & P(f) \end{array}$, vốn là một ánh xạ liên tục.

1.2.19 • Trước hết ta chú ý rằng: $\forall f \in E, \ f\varphi \in E$.

- Ta chứng minh dễ dàng rằng T_φ tuyến tính.
- $\forall f \in E, \quad \|T_\varphi(f)\|_\infty = \|f\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty,$

  chứng tỏ rằng T_φ liên tục và $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.
- $\|T_\varphi(1)\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$ và $\|1\|_\infty = 1$.

◊ **Trả lời:** $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

1.2.20 • Trước tiên chú ý rằng với mọi f thuộc E, ánh xạ $\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f \end{array}$ liên tục, do đó thuộc E.

- Ta chứng minh dễ dàng rằng T tuyến tính.
- $\forall f \in E, \forall x \in [0; 1], \quad |T(f)(x)| = \left|\int_0^x f\right| \leq \int_0^x |f| \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$

từ đó suy ra: $\forall f \in E, \quad \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Kết quả này chứng tỏ rằng T liên tục, và: $\|T\| \leq 1$.

- $\|T(1)\|_\infty = \underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}} \left|\int_0^x 1\right| = 1$, và $\|1\|_\infty = 1$.

◊ **Trả lời:** $\|T\| = 1$.

1.2.21 a) Các tính chất:

$$N(\lambda P) = |\lambda|\, N(P), \qquad N(P+Q) \leq N(P) + N(Q), \qquad N(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

có thể chứng minh dễ dàng.

b) $N(X^k) = 1$ và $N(T(X^k)) = N(k\,X^{k-1}) = k$, từ đó suy ra $\dfrac{N(T(X^k))}{N(X^k)} \xrightarrow[k\infty]{} +\infty$.

◊ **Trả lời:** T không liên tục.

1.2.22 • $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})$; $\mathbb{K} - \{0\}$ là một bộ phận mở của $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ và det là ánh xạ liên tục, suy ra $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ mở trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

• Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ và $\varepsilon > 0$. Ánh xạ đa thức $\chi_A : t \mapsto \det(A - t\,\mathbf{I}_n)$ chỉ có một số hữu hạn ($\leq n$) không điểm trong $\mathbb{K}$.

Như vậy tồn tại $t \in]0; \varepsilon[$ sao cho $\chi_A(t) \neq 0$, tức là $A - t\,\mathbf{I}_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

Kết quả trên chứng tỏ: $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \|A - B\| < \varepsilon,$

trong đó $B = A - t\,\mathbf{I}_n$ và chuẩn $\|\,.\,\|$ chẳng hạn là $\frac{1}{n}\|\cdot\|_\infty$.

Cuối cùng ta kết luận: $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ trù mật trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2.23 • $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$ đóng vì $\{1\}$ đóng, và $\det : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ liên tục.

• Cho $A \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$ và $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Ánh xạ $\begin{array}{ccc}\mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det(A + t\mathbf{I}_n)\end{array}$ là ánh xạ đa thức bậc n, do đó trong một số hữu hạn lần có giá trị bằng 1. Vậy tồn tại $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} 0 < \alpha < \varepsilon \\ \forall t \in]0;\alpha[, \ \det(A + t\mathbf{I}_n) \neq 1 \end{cases}$.

Kết quả trên chứng tỏ: $B(A;\alpha) \not\subset \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$,

và cuối cùng thì: $(\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}))^{\mathrm{o}} = \varnothing$.

◊ **Trả lời:** $\overline{\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$, $(\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}))^{\mathrm{o}} = \varnothing$, $\partial(\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})) = \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$.

1.2.24 Trong bài tập này ta trang bị cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ chuẩn $\|\,.\,\|$ xác định bởi:

$$\|(a_{ij})_{ij}\| = \sqrt{n} \underset{1\leq i,j\leq n}{\text{Max}} |a_{ij}|,$$

vốn là một chuẩn nhân, tức là: $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Trước tiên ta chú ý rằng $F \subset E$.

a) • Cho $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$. Ta biết là M có thể tam giác hóa được, tức là tồn tại

$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ sao cho $M = PTP^{-1}$.

Ký hiệu $\lambda_1,..., \lambda_n$ là các phần tử đường chéo của T. Rõ ràng là tồn tại $(\mu_1,..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,...,n\}, \quad |\lambda_i - \mu_i| < \dfrac{\varepsilon}{\|P\|\|P^{-1}\|} \\ \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \quad (i \neq j \;\Rightarrow\; \mu_i \neq \mu_j) \end{cases}.$$

Ký hiệu T_1 là ma trận tam giác trên mà các phần tử đường chéo là $\mu_1,..., \mu_n$ và các phần tử khác như các phần tử tương ứng của T, và ký hiệu $M_1 = PT_1P^{-1}$. Khi đó:

$$\|M - M_1\| = \|P(T - T_1)P^{-1}\| \leq \|P\| \, \|T - T_1\| \, \|P^{-1}\|$$

và $\|T - T_1\| = \operatorname*{Sup}_{i \in \{1,...,n\}} |\lambda_i - \mu_i| < \dfrac{\varepsilon}{\|P\|\|P^{-1}\|}$. Từ đó suy ra: $\|M - M_1\| < \varepsilon$.

Cuối cùng thì $M_1 \in F$, vì đa thức đặc trưng χ_{M_1} của M_1 là một đa thức tách có tất cả các không điểm là không điểm đơn:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_{M_1}(\lambda) = \chi_{T_1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda).$$

Điều đó chứng tỏ: $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \forall \varepsilon > 0, \exists M_1 \in F, \quad \|M - M_1\| < \varepsilon$.

và như vậy: $\overline{F} = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

- Vì $F \subset E \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, nên khi đó ta có: $\overline{E} = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Xét $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$; chúng ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\forall A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \quad (\|A - M\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; A \notin E).$$

Thực vậy, ký hiệu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A - M$, ta có:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 1+b \\ -1+c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (ad+(1+b)(1-c)),$$

với biệt thức là $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad + (1+b)(1-c)) = (a - d)^2 - 4(1+b)(1-c)$.

Nếu $\|A - M\| < \dfrac{1}{2}$ thì $|a|, |b|, |c|$ đều $\leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, do đó $\Delta \leq \dfrac{1}{2} - 4(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2 < 0$, và như thế A không chéo hóa được trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

◊ **Trả lời:** $\overline{E} \neq \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2.25 Trong bài tập này ta trang bị cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ chuẩn xác định bởi:

$$\|(a_{ij})_{ij}\| = \operatorname*{Max}_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|.$$

a) 1) Cho $A \in \Omega_p$; tồn tại một ma trận vuông A_1 trích ra từ A, cấp p, khả nghịch.

Vì $\mathbf{GL}_p(\mathbb{K})$ mở trong $\mathbf{M}_p(\mathbb{K})$ (xem bài tập 1.2. 22), nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho:

$$\forall B_1 \in \mathbf{M}_p(\mathbb{K}), \quad (\|A_1 - B_1\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; B_1 \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K}))$$

(trong đó ta ký hiệu chuẩn $\|\cdot\|$ trên $\mathbf{M}_p(\mathbb{K})$ xác định tương tự như chuẩn $\|\cdot\|$ trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$).

Cho $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho $\|A - B\| < \varepsilon$; ký hiệu B_1 là ma trận vuông cấp p trích ra từ B cũng tại các vị trí như ở A_1, ta có:

$$\|A_1 - B_1\| \le \|A - B\| < \varepsilon,$$

do đó $B_1 \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K})$, và suy ra rank(B) $\ge p$, $B \in \Omega_p$.
Kết quả trên chứng tỏ:

$$\forall A \in \Omega_p,\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})\quad (\|A - B\| < \varepsilon \Rightarrow B \in \Omega_p),$$

tức là Ω_p là một bộ phận mở của $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

2) $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \Omega_p \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ và $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ trù mật trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, từ đó suy ra $\overline{\Omega_p} = \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

b) • $V_0 = \{0\}$ là một bộ phận đóng không mở.
- $V_n = \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ là một bộ phận mở không đóng.
- Cho $p \in \{1,\dots, n\text{-}1\}$ (do đó $n \ge 2$).

Nếu V_p mở, thì do $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ trù mật trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, nên ta sẽ phải có $V_p \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \ne \varnothing$, mâu thuẫn (vì $p \ne n$).

Mặt khác thì dãy $(A_k)_{k\in \mathbb{N}^*}$ xác định bởi $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tạo nên bởi các phần tử của V_p và hội tụ đến 0 vốn không thuộc V_p, chứng tỏ rằng V_p không đóng.

- Với mọi p thuộc $\{0,\dots, n\}$ ta ký hiệu $F_p = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K});\ \ \mathrm{rank}(A) \le p\}$.

Vì hạng của một ma trận M bằng cấp cực đại của các ma trận vuông con và khả nghịch trích ra từ M, nên F_p là nghịch ảnh của $\{(0,\dots, 0)\}$ qua ánh xạ liên tục cho ứng mỗi ma trận M thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ với danh sách các định thức của các ma trận vuông con cấp $\ge p + 1$ trích ra từ M.

Điều đó chứng tỏ rằng F_p là đóng.

Cuối cùng thì: $\qquad V_p = \Omega_p \cap F_p.$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} V_p \text{ mở} \Leftrightarrow p = n \\ V_p \text{ đóng} \Leftrightarrow p = 0 \end{cases}$.

1.3.1 Ánh xạ $f:\ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,B) \end{array}$ liên tục trên tập compac A, do đó bị chặn và đạt tới các biên.

Vậy tồn tại $a \in A$ sao cho $d(A, B) = d(a, B)$. Vì $A \cap \overline{B} = \varnothing$, nên $a \notin \overline{B}$, từ đó suy ra $d(a, B) > 0$ (xem 1.1.8, Mệnh đề).

1.3.2 Vì $A \times B$ compac, $\complement_{E\times F}(W)$ đóng và $(A \times B) \cap \complement_{E\times F}(W) = \varnothing$, nên theo bài tập 1.3.1 ta có:

$$d_1(A \times B,\ \complement_{E\times F}(W)) > 0$$

(trong đó d_1 là khoảng cách trên $E \times F$ xác định bởi $d_1((x, y), (x', y')) = d_E(x, x') + d_F(y, y')$.
Ký hiệu:

$$\alpha = d_1(A \times B,\ \complement_{E\times F}(W)),\quad U = \{x \in E;\, d(x, A) < \frac{\alpha}{2}\},\quad V = \{y \in F;\, d(y, B) < \frac{\alpha}{2}\};$$

rõ ràng là U, V mở (xem bài tập 1.2.1) và $A \subset U,\ B \subset V$.
Cho $(x, y) \in U \times V$; giả thiết $(x, y) \notin W$. Khi đó:

$$\forall (a, b) \in A \times B,\ \ d_E(a, x) + d_F(b, y) = d_1((a, b)\,,\,(x, y)) \geq \alpha,$$

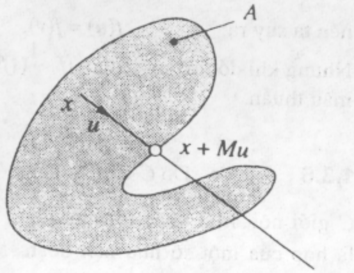
từ đó bằng cách chuyển qua giới hạn khi a chạy khắp A và b chạy khắp B:

$$d(x, A) + d(y, B) \geq \alpha,$$

mâu thuẫn với: $\quad d(x, A) < \dfrac{\alpha}{2}\quad$ và $\quad d(y, B) < \dfrac{\alpha}{2}$.

1.3.3 Cho $x \in A$; do $E \neq \{0\}$ nên tồn tại $u \in E$ sao cho $u \neq 0$. Xét:

$$K = \{t \in \mathbb{R}_+;\ [x; x+tu] \subset A\}.$$



- $K \in \mathbb{R}_+$ và $0 \in K$
- K bị chặn vì A bị chặn và $u \neq 0$
- K đóng. Thực vậy, cho $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong K hội tụ đến một phần tử t của $\mathbb{R}$. Dãy $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn; ta ký hiệu $T = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} t_n$. Do

$$(\forall n \in \mathbb{N},\quad [x;\ x+ t_n u] \subset A),$$

nên ta thu được:

$$[x;\ x+ Tu] \subset A,\ \text{rồi}\ [x;\ x+ tu] \subset A\ \ \text{vì}\ t \in [0; T].$$

- Như thế K là một bộ phận đóng giới nội của $\mathbb{R}_+$, do đó có biên trên M, và $M \in K$. Ký hiệu $y = x + Mu$; rõ ràng ta có $y \in A = \overline{A}$.

Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\alpha \in\ ]0; \varepsilon[$ sao cho $\ x + (M + \alpha)u \notin A\ $ (định nghĩa M), chứng tỏ rằng $y \in \overline{\complement_E(A)}$.

Cuối cùng ta có: $\quad y \in \partial (A)$.

1.3.4 Ta lập luận phản chứng: giả thiết tồn tại một dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong A sao cho:

$$a_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a\ \text{ và } (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ không hội tụ đến } f(a).$$

Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ và một hàm trích σ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad d\,(f\,(a_{\sigma(n)}),\, f\,(a)) \geq \varepsilon\,.$$

Do $\overline{f(A)}$ compac nên dãy $(f(a_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong $\overline{f(A)}$; vậy tồn tại một hàm trích τ và $y \in \overline{f(A)}$ sao cho:

$$f\,(a_{\sigma(\tau(n))}) \underset{n\infty}{\rightarrow} y.$$

Khi đó thì $\ (a_{\sigma(\tau(n))}, f\,(a_{\sigma(\tau(n))}))\ \underset{n\infty}{\rightarrow}\ (a, y)$; vì G_f đóng nên ta suy ra $(a, y) \in G_f$ và do đó $y = f(a)$.

Như vậy thì $\ f\,(a_{\sigma(\tau(n))}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(a)$, mâu thuẫn.

1.3.5 Ta lập luận phản chứng: giả thiết rằng với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một hình cầu mở B có bán kính $\leq \varepsilon$ sao cho: $\quad \operatorname{diam}(f^{-1}(B)) \geq \alpha.$

Khi đó sẽ tồn tại một dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ trong F sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \operatorname{diam}\left(f^{-1}\left(B(y_n; \frac{1}{n})\right)\right) \geq \alpha.$$

Theo định nghĩa đường kính, với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$ tồn tại $(u_n, v_n) \in (f^{-1}(B(y_n; \frac{1}{n})))^2$ sao

cho: $$d(u_n, v_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$$

Vì $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ có phần tử thuộc tập compac X^2 nên tồn tại một hàm trích σ và $(u, v) \in X^2$

sao cho: $$u_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} u \text{ và } v_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} v;$$

khi đó ta có $d(u, v) \geq \alpha$.

Do f liên tục nên $f(u_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(u)$ và $f(v_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(v)$, rồi vì:

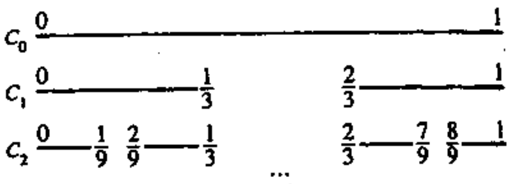
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d(f(u_{\sigma(n)}), f(v_{\sigma(n)})) \leq \frac{1}{\sigma(n)},$$

nên ta suy ra: $\quad f(u) = f(v)$.

Nhưng khi đó thì: $\quad \operatorname{diam}(f^{-1}(\{f(u)\})) \geq d(u, v) \geq \alpha$,

mâu thuẫn.

1.3.6 • Do $C \subset C_0$ nên C giới nội. Mặt khác thì mỗi C_n là hợp của một số hữu hạn đoạn thuộc $\mathbb{R}$, nên mọi C_n đều đóng trong $\mathbb{R}$; suy ra C, tức là $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, đóng trong $\mathbb{R}$.



Như thế C là một bộ phận đóng giới nội của $\mathbb{R}$, do đó compac.

• Rõ ràng là với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, C_n là hợp của 2^n đoạn thuộc $\mathbb{R}$ từng đôi rời nhau và có cùng độ dài là $\frac{1}{3^n}$.

Cho $x \in C$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{1}{3^n} < r$.

Đoạn $[x-r; x+r] \cap [0; 1]$, do có độ dài $> \frac{1}{3^n}$, nên không bao hàm trong C_n và do đó:

$$[x-r; x+r] \not\subset C.$$

Kết quả trên chứng tỏ: $\quad \mathring{C} = \varnothing$.

1.3.7 Vì K compac nên K giới nội; vậy tồn tại $r \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $K \subset B'(0; r)$. Ta có thể lấy $U = B(0; 2r)$; tập $\overline{U}$ compac vì là một bộ phận đóng giới nội của một kgvđc hữu hạn chiều.

1.3.8 Áp dụng bài tập 1.3.4 với chú ý rằng $f(\mathbb{R})$ là một bộ phận giới nội của $\mathbb{R}$.

1.3.9 a) Cho $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $f(G)$, hội tụ đến một phần tử z của F. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ tồn tại $x_n \in G$ sao cho $y_n = f(x_n)$.

Do $(y_n)_n$ hội tụ nên $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn, và do đó theo giả thiết, $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn. Vì E là một kgvdc hữu hạn chiều nên khi đó tồn tại một hàm trích σ và $x \in E$ sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} x$;

hơn nữa $x \in G$ do G đóng. Vì f liên tục tại x nên $f(x_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(x)$, suy ra $z = f(x) \in f(G)$.

Kết quả trên chứng tỏ rằng $f(G)$ đóng.

b) Vì $|P(z)| \underset{|z| \to +\infty}{\rightarrow} +\infty$, nên với mọi bộ phận giới nội B của $\mathbb{C}$, $P^{-1}(B)$ giới nội; hơn nữa P liên tục.

1.3.10 1) • Cho $x \in A' + B$; tồn tại $(a', b) \in A' \times B$ sao cho $x = a' + b$, và tồn tại một dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong A thỏa mãn:
$$\begin{cases} a_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a' \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq a' \end{cases}.$$

Ký hiệu $c_n = a_n + b$, khi đó ta có:
$$\begin{cases} c_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a' + b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_n \neq a' + b \end{cases}$$

chứng tỏ rằng $a' + b \in (A + B)'$.

Như thế chúng ta đã chứng minh rằng: $A' + B \subset (A + B)'$.

- Hoán vị các vị trí của A và B, ta cũng được: $A + B' \subset (A + B)'$.
- Cho $x \in A' + B'$; tồn tại $(a', b') \in A' \times B'$ sao cho $x = a' + b'$, và tồn tại hai dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong A và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong B thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a', \quad b_n \underset{n\infty}{\rightarrow} b' \\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \left(p \neq q \Rightarrow \begin{cases} a_p \neq a_q \\ b_p \neq b_q \end{cases}\right) \end{cases}.$$

Ký hiệu
$$c_n = \begin{cases} a_n + b_n & \text{nếu } a_n + b_n \neq a' + b' \\ a_n + b_{n+1} & \text{nếu } a_n + b_n = a' + b' \end{cases},$$

ta được:
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} c_n \in A + B \\ c_n \neq a' + b' \end{cases}, \\ c_n \underset{n\infty}{\rightarrow} a' + b' \end{cases}$$

chứng tỏ rằng $a' + b' \in (A + B)'$.

Như thế chúng ta đã chứng minh rằng: $A' + B' \subset (A + B)'$.

2) Cho $x \in (A + B)'$; tồn tại một dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong $A + B$ thỏa mãn: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq x \\ x_n \underset{n\infty}{\rightarrow} x \end{cases}$.

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $(a_n, b_n) \in A + B$ sao cho $x_n = a_n + b_n$. Vì $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lấy giá trị trong bộ phận đóng $A + B$ của kgvdc hữu hạn chiều E^2, nên tồn tại một hàm trích σ và (α, β) trong $\overline{A} \times \overline{B}$ sao cho:
$$(a_{\sigma(n)}, b_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\rightarrow} (\alpha, \beta).$$

Khi đó thì $x_{\sigma(n)} = a_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\rightarrow} \alpha + \beta$, suy ra $x = \alpha + \beta$.

- Nếu α là một điểm cô lập của A thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Rightarrow \in a_{\sigma(n)} = \alpha).$$

Khi đó $(b_{\sigma(n)})_{n \geq n_0}$ được trích ra từ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ với tất cả các số hạng $\neq \beta$, và không hội tụ đến β, từ đó suy ra $\beta \in B'$. Như vậy $x \in A + B'$.

- Tương tự, nếu β là một điểm cô lập của B thì $x \in A' + B$.
- Cuối cùng, nếu α không phải là điểm cô lập trong A và β không phải là điểm cô lập trong B thì $(\alpha, \beta) \in A' + B'$ (vì $(\alpha, \beta) \in \overline{A} \times \overline{B}$), từ đó suy ra $x \in A' + B'$.

1.3.11 a) • Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong L_V, hội tụ đến một phần tử f của $\mathcal{L}(E)$. Cho $x \in V$. Do: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\| \; \|x\|$,

nên ta có: $f_n(x) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(x)$,

và do $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \subset f(V) \subset V)$, nên ta suy ra được rằng $f(x) \in \overline{V} = V$, từ đó cuối cùng ta được $f \in L_V$. Kết quả này chứng tỏ L_V đóng trong $\mathcal{L}(E)$.

- Vì V là một lân cận compac của 0, nên tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho:

$$B'(0; \alpha) \subset V \subset B'(0; \beta).$$

Cho $f \in L_V$; ta có:

$$f(B'(0; \alpha)) \subset f(V) \subset B'(0; \beta),$$

từ đó suy ra: $\forall x \in E - \{0\}, \quad \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{1}{\alpha}\left\|f\left(\dfrac{\alpha}{\|x\|}x\right)\right\| \leq \dfrac{\beta}{\alpha}$,

do đó: $\|f\| \leq \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Kết quả trên chứng tỏ rằng L_V giới nội.

- Vì L_V là một bộ phận đóng giới nội trong một kgvdc hữu hạn chiều ($\mathcal{L}(E)$), nên L_V compac.

b) Cho $f \in L_V$; một phép quy nạp đơn giản chứng tỏ rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(V) \subset V$, và do đó:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n \in L_V.$$

Mặt khác thì do L_V là một bộ phận compac của $\mathcal{L}(E)$ và vì det liên tục, nên $\{\det(g);\; g \in L_V\}$ là một bộ phận compac, do đó giới nội của $\mathbb{K}$. Vậy tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall g \in L_V, \qquad |\det(g)| \leq M.$$

Như thế ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\det(f)|^n = |\det(f^n)| \leq M$,

suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; |\det(f)| \leq M^{\frac{1}{n}}$,

và cuối cùng, khi cho n dần đến $+\infty$: $|\det(f)| \leq 1$.

Nhận xét : Sự tồn tại một lân cận compac của 0 trong E kéo theo tính hữu hạn chiều của E (định lý Riesz, C 1.1).

1.4.1 Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ sao cho ta có với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{cases} (p \ge N_1 \text{ và } q \ge N_1) \Rightarrow d(u_{2p}, u_{2q}) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \\ (p \ge N_2 \text{ và } q \ge N_2) \Rightarrow d(u_{2p+1}, u_{2q+1}) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \\ (p \ge N_3 \text{ và } q \ge N_3) \Rightarrow d(u_{3p}, u_{3q}) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}.$$

Ký hiệu $N = \text{Max}(2N_1, 2N_2+1, 3N_3)$, và cho $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $r \ge N$ và $s \ge N$. Ta phân biệt các trường hợp:

- Nếu r và s đều chẵn, thì tồn tại $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $r = 2p$ và $s = 2q$, từ đó vì $p \ge N_1$ và $q \ge N_1$, suy ra: $d(u_r, u_s) \le \dfrac{\varepsilon}{3}$.
- Lập luận tương tự khi r và s đều lẻ.
- Giả thiết r chẵn và s lẻ (trường hợp r lẻ và s chẵn cũng tương tự); tồn tại $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $r = 2p$ và $s = 2q + 1$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} d(u_{2p}, u_{6p}) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{vì } p \ge N_1 \text{ và } 3p \ge N_1 \\ d(u_{6p}, u_{6q+3}) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{vì } 2p \ge N_3 \text{ và } 2q+1 \ge N_3 \\ d(u_{6q+3}, u_{2q+1}) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{vì } 3q+1 \ge N_2 \text{ và } q \ge N_2 \end{cases},$$

từ đó suy ra: $d(u_{2p}, u_{2q+1}) \le \varepsilon$.

1.4.2 Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong X hội tụ đến một phần tử x của X. Xét dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cho bởi:

$$u_n = \begin{cases} x_n & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ x & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}.$$

Rõ ràng là $u_n \underset{n\infty}{\to} x$; vậy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong X. Theo giả thiết $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong F.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \ge N \\ q \ge N \end{cases} \Rightarrow d(f(u_p), f(u_q)) \le \varepsilon \right)$$

Nói riêng, vì $u_{2N+1} = x$ nên ta có:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left(p \ge N \Rightarrow d(f(u_p), f(x)) \le \varepsilon \right).$$

Điều này chứng tỏ $f(u_p) \underset{p\infty}{\to} f(x)$; khi đó rõ ràng ta có $f(x_n) \underset{n\infty}{\to} f(x)$, và cuối cùng ta có f liên tục.

1.4.3 Do F hữu hạn chiều nên F đủ (xem 1.4.2, Định lý 2), do đó đóng (xem 1.4.2, Mệnh đề 2).

1.4.4 Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{C}_{E^2}(L)$ đóng. Cho $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathcal{C}_{E^2}(L)$,

$\mathcal{C}_{E^2}(L)$, hội tụ đến một phần tử (u, v) của E^2. Nếu $u = 0$ thì (u, v) phụ thuộc. Vậy ta giả thiết

$u \neq 0$. Do $\|u_n\| \underset{n\infty}{\rightarrow} \|u\| > 0$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ và $\alpha > 0$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow \quad \|u_n\| \geq \alpha).$$

Và với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$ (sao cho $n \geq N$) tồn tại λ_n trong $\mathbb{K}$ sao cho: $v_n = \lambda_n u_n$.
Với mọi $n \geq N$ ta có:

$$|\lambda_n| = \frac{\|v_n\|}{\|u_n\|} \leq \frac{\|v_n\|}{\alpha},$$

chứng tỏ rằng $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ giới nội, suy ra:

$$\|v_n - \lambda_n u\| = \|\lambda_n(u_n - u)\| = |\lambda_n|\|u_n - u\| \underset{n\infty}{\rightarrow} 0.$$

Do $v_n \underset{n\infty}{\rightarrow} v$, ta cũng suy ra được: $\qquad \lambda_n u \underset{n\infty}{\rightarrow} v$.

Dãy $(\lambda_n)_n$ là dãy Cauchy vì:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad |\lambda_p - \lambda_q| = \frac{1}{\|u\|}\|(v - \lambda_p u) - (v - \lambda_q u)\|;$$

cuối cùng vì $\mathbb{K}$ đủ nên $(\lambda_n)_n$ hội tụ đến một phần tử λ của $\mathbb{K}$, và ta có:

$$v = \lambda u, \quad (u, v) \in \mathcal{C}_{E^2}(L).$$

1.4.5 a) Việc kiểm chứng dễ dàng.

b) Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong (E, N).

- Cho $x \in [a; b]$ cố định. Vì:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq N(f_p - f_q),$$

nên dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, do đó hội tụ đến một số thực, mà ta ký hiệu là $f(x)$, sự kiện này xác định một ánh xạ $f: [a; b] \to \mathbb{R}$.

- Ta hãy chứng minh rằng $f \in E$.

Cho $(x, y) \in [a; b]^2$. Do $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong (E, N), nên $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ giới nội; vậy tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad N(f_n) \leq M$.

Khi đó ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n(x) - f_n(y)| \leq N(f_n)|x - y| \leq M|x - y|,$$

chứng tỏ rằng f là ánh xạ Lipschitz, do đó $f \in E$.

- Cuối cùng ta hãy chứng minh rằng: $f_n \underset{n\infty}{\rightarrow} f$ trong (E, N). Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow N(f_p - f_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Cho $p \in \mathbb{N}$ sao cho $p > n_0$; ta có:

$$\forall q \in \mathbb{N}, \qquad \left(q \geq n_0 \Rightarrow N(f_p - f_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

do đó:

$$\begin{cases}\forall x \in [a;b],\ \forall q \in \mathbb{N}, & \left(q \geq n_0 \ \Rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\\ \forall (x,y) \in [a;b]^2, \forall q \in \mathbb{N}, & \left(q \geq n_0 \Rightarrow \left|(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(y) - f_q(y))\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}|x-y|\right)\end{cases}$$

Cho q dần đến $+\infty$ ta được:

$$\begin{cases}\forall x \in [a;b], & \left|f_p(x) - f(x)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\\ \forall (x,y) \in [a;b]^2, & \left|(f_p(x) - f(x)) - (f_p(y) - f(y))\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}|x-y|\end{cases}$$

từ đó suy ra: $N(f_p - f) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$

Kết quả trên chứng tỏ: $N(f_p - f) \underset{p\infty}{\to} 0$, tức là $f_p \underset{p\infty}{\to} f$ trong (E, N).

◊ **Trả lời:** (E, N) đủ.

1.4.6 a) • Với mọi P thuộc $\mathbb{C}[X]$, $N(P)$ tồn tại vì P liên tục trên tập compac U, do đó bị chặn trên U.

• Các tính chất: $N(\lambda P) = |\lambda|\ N(P)$, $\quad N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$, có thể chứng minh dễ dàng.

• Nếu $N(P) = 0$ thì đa thức P triệt tiêu trên U, do đó triệt tiêu tại vô hạn điểm, suy ra $P = 0$.

b) Bây giờ chúng ta chứng minh rằng $(\mathbb{C}[X], N)$ không đủ. Xét dãy $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} X^k .$$

• Cho $z \in$ U, với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$ sao cho chẳng hạn ta có $p < q$, ta có:

$$\begin{aligned}|P_p(z) - P_q(z)| &= \left|\sum_{k=p+1}^{q} 2^{-k} z^k\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} 2^{-k}\\ &= 2^{-(p+1)} \sum_{l=0}^{q-p-1} 2^{-l} = 2^{-(p+1)} \frac{1-2^{-(q-p)}}{1-2^{-1}}\\ &\leq 2^{-p},\end{aligned}$$

từ đó suy ra $N(P_p - P_q) \leq 2^{-p}$, chứng tỏ rằng $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $(\mathbb{C}[X], N)$.

• Giả thiết tồn tại $P \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $P_n \underset{n\infty}{\to} P$ trong $(\mathbb{C}[X], N)$.

Cho $z \in$ U. Ta có: $|P_n(z) - P(z)| \leq N(P_n - P) \underset{n\infty}{\to} 0$, vậy $P_n(z) \underset{n\infty}{\to} P(z)$. Nhưng:

$$P_n(z) = \frac{1 - 2^{-(n+1)} z^{n+1}}{1 - 2^{-1} z} \underset{n\infty}{\to} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Kết quả trên đây chứng tỏ đa thức $\left(1 - \dfrac{X}{2}\right) P_n - 1$ triệt tiêu trên bộ phận vô hạn U, do đó phải là đa thức không, mâu thuẫn về bậc.

Như vậy $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy và không hội tụ trong $(\mathbb{C}[X], N)$.

◊ **Trả lời:** Không.

1.4.7 1) Cho $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong ℓ^∞; mỗi U_k là một dãy mà chúng ta sẽ ký hiệu là: $U_k = (u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$

- Cho $n \in \mathbb{N}$; vì:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{p,n} - u_{q,n}| \le \|U_p - U_q\|_\infty,$$

nên dãy $(u_{p,n})_{p\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trên $\mathbb{C}$, do đó hội tụ đến một phần tử của $\mathbb{C}$ ký hiệu là v_n.

- Ta hãy chứng minh rằng $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. Vì $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy nên $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bị chặn; vậy tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|U_k\|_\infty \le M.$

Như thế ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad |u_{k,n}| \le \|U_k\|_\infty \le M.$

Với n cố định, chuyển qua giới hạn với k dần đến $+\infty$, ta được: $|v_n| \le M.$

- Cho $\varepsilon > 0$; vì $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \ge N \\ q \ge N \end{cases} \Rightarrow \|U_p - U_q\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Cho $p \in \mathbb{N}$ sao cho $p \ge N$, và $n \in \mathbb{N}$; ta có:

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \left(q \ge N \Rightarrow |u_{p,n} - u_{q,n}| \le \|U_p - U_q\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

từ đó khi chuyển qua giới hạn với q dần đến $+\infty$, ta được:

$$|u_{p,n} - v_n| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kết quả trên đây chứng tỏ:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left(p \ge N \Rightarrow \|U_p - V\| \le \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \text{(trong đó } V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}),$$

và do đó $U_p \underset{p\infty}{\to} V$ trong $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Cuối cùng ta kết luận $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ đủ.

2) Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, ký hiệu E_k là dãy xác định bởi: $E_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$,

(trong đó $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = n \\ 0 & \text{nếu } k \ne n \end{cases}$ là ký hiệu Kronecker); họ $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ độc lập tuyến tính trong ℓ^∞ và vô hạn.

1.4.8 • Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, xét ánh xạ $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$, là một ánh xạ từ X đến X.

Mọi f_n đều là ánh xạ co$\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\text{-Lipschitz}\right)$, và X là một bộ phận đủ, vì X đóng trong một kgvdc hữu hạn chiều. Theo định lý điểm bất động, f_n có một điểm bất động (duy nhất) x_n.

- Vì X đóng giới nội trong một kgvdc hữu hạn chiều nên X compac. Vậy dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ có ít nhất một giới hạn riêng trong X: tồn tại một hàm trích σ và $l \in X$ sao cho $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\to} l$. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right) f(x_{\sigma(n)}) = f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)},$$

từ đó bằng cách chuyển qua giới hạn với n dần đến vô hạn (f liên tục vì là ánh xạ 1-Lipschitz), ta có:

$$f(l) = l.$$

- Khi $E = \mathbb{R}^2$ và $X = S(0;1)$, thì phép quay tâm $(0; 0)$ và góc $\frac{\pi}{2}$, $f : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & (y,-x) \end{array}$, là ánh xạ 1- Lipschitz, nhưng không có điểm bất động.

◊ **Trả lời:** Không.

1.5.1 Mọi điểm x thuộc $B(a; r)$ (hay $B'(a; r)$) đều có thể nối với a bằng một đoạn bao hàm trong $B(a; r)$ (hay $B'(a; r)$): $\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & E \\ t & \mapsto & tx+(1-t)a \end{array}$.

Điều đó chứng tỏ rằng $B(a; r)$ và $B'(a; r)$ liên thông cung.

1.5.2 ◊ **Trả lời:** $A =]0; +\infty[$, $B =]0; 1[$.

1.5.3 a) Giả thiết A và B liên thông cung. Cho $(a, b) \in A \times B$ và $(a', b') \in A' \times B'$. Tồn tại những cung $\gamma : [0; 1] \to A$ và $\delta : (0; 1) \to B$ sao cho:

$$\gamma(0) = a,\ \gamma(1) = a', \qquad \delta(0) = b,\ \delta(1) = b'.$$

Ánh xạ: $\Gamma : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & A\times B \\ t & \mapsto & (\gamma(t), \delta(t)) \end{array}$ liên tục và: $\Gamma(0) = (a, b)$, $\Gamma(1) = (a', b')$.

Kết quả trên chứng tỏ rằng có thể nối (a, b) và (a', b') bằng một cung trong $A \times B$, vậy $A \times B$ liên thông cung.

b) Giả thiết $A \times B$ liên thông cung và A, B không rỗng.

Cho $(a, a') \in A^2$. Tồn tại $b_0 \in B$; vì $A \times B$ liên thông cung nên tồn tại một cung Γ nối (a, b_0) và (a', b_0) trong $A \times B$. Khi đó thì $pr_1 \circ \Gamma$ liên tục và $(pr_1 \circ \Gamma)(0) = a$, $(pr_1 \circ \Gamma)(1) = a'$.

Kết quả trên đây chứng tỏ rằng có thể nối a và a' bằng một cung trong A, vậy A liên thông cung.

Tương tự đối với B.

1.5.4 Ta ký hiệu: $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

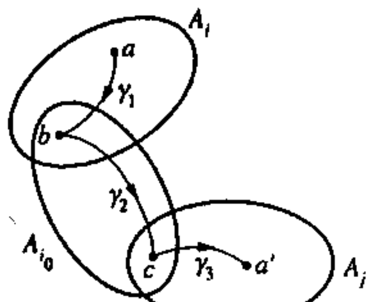
Cho $(a, a') \in A^2$; tồn tại $(i, j) \in I^2$ sao cho:

$$a \in A_i \text{ và } a' \in A_j.$$

Vì $A_{i_0} \cap A_i \neq \varnothing$ và $A_{i_0} \cap A_j \neq \varnothing$,

nên tồn tại $b \in A_{i_0} \cap A_i$ và $c \in A_{i_0} \cap A_j$.

Vì A_i, A_j và A_{i_0} đều liên thông cung, nên tồn tại một cung γ_1 nối a và b trong A_i, một cung γ_2 nối b và c trong A_{i_0}, một cung γ_3 nối c và a' trong A_j.



Xét ánh xạ $\gamma : [0; 1] \to A$, thu được bằng cách thực hiện liên tiếp γ_1, γ_2, γ_3, định nghĩa là:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(3t) & \text{nếu } t \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \\ \gamma_2(3t-1) & \text{nếu } t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \\ \gamma_3(3t-2) & \text{nếu } t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right] \end{cases}.$$

Rõ ràng là γ liên tục và nối a và a' trong A. Cuối cùng thì A liên thông cung.

Thí dụ: Ta có thể áp dụng kết quả trên đây cho thí dụ này, vì rằng bộ phận $\{0\} \times \mathbb{R}$ của $\mathbb{R}^2$ là một bộ phận liên thông cung và giao với mọi bộ phận $\mathbb{R} \times \{r\}$ $(r \in \mathbb{Q})$ tại $(0, r)$, và các bộ phận $\mathbb{R} \times \{r\}$ đó đều liên thông cung.

1.5.5 Cho $(a, b) \in A^2$. Vì A liên thông cung nên tồn tại một cung $\gamma : [0; 1] \to A$ nối a và b trong A. Ánh xạ $f \circ \gamma$ liên tục trên $[0; 1]$ và lấy giá trị thực, do đó $(f \circ \gamma)([0; 1])$ là một khoảng của $\mathbb{R}$ (định lý giá trị trung gian). Do $(f \circ \gamma)([0; 1]) \subset \{0, 1\}$, nên ta suy ra rằng $f \circ \gamma$ là ánh xạ hằng, và do đó:

$$f(a) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(b).$$

Cuối cùng thì f là hằng.

1.5.6 $\{x\}$ không rỗng, đóng trong X, mở trong X (vì x là điểm cô lập trong X).

1.5.7 Nếu $C \cap \partial(A) = \varnothing$ thì $C \cap \mathring{A}$ và $C \cap \widehat{\complement_E(A)}^{\circ}$ là hai bộ phận mở của C, bù nhau trong C và không rỗng, mâu thuẫn với tính liên thông của C.

1.5.8 • $\partial(A) = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{\complement_X(A)} = \varnothing \Leftrightarrow \overline{\complement_X(A)} \subset \complement_X(\overline{A})$

$$\Leftrightarrow \mathring{A} \supset \overline{A} \Leftrightarrow \mathring{A} = \overline{A} = A.$$

Vậy nếu $\partial(A) = \varnothing$ thì A là một bộ phận mở và đóng của X, không rỗng và khác với X, điều này mâu thuẫn với tính liên thông của X.

• Vậy tồn tại $x \in \partial(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X(A)}$.

Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $(a, b) \in A \times \complement_X(A)$ sao cho $d(x, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ và $d(x, b) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, từ đó suy ra:

$$d(a, b) \le d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon.$$

Như thế: $\forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times \complement_X(A), \quad d(a, b) < \varepsilon,$

và do đó: $d(A, \complement_X(A)) = 0.$

1.5.9 Giả thiết tồn tại hai bộ phận đóng của X là F, G sao cho:

$$F \cup G = X, \qquad F \cap G = \varnothing, \qquad F \ne \varnothing, \qquad G \ne \varnothing.$$

Tồn tại $x \in F$ và $y \in G$, và tồn tại một bộ phận liên thông C của X sao cho: $x \in C$ và $y \in C$. Khi đó thì $C \cap F$, $C \cap G$ là hai bộ phận đóng của C bù nhau trong C và không rỗng, mâu thuẫn với tính liên thông của C.

1.5.10 Ký hiệu: $A = \{x \in X;\ d(a, x) < r\}$,

$$S = \{ x \in X;\ d(a, x) = r \},$$
$$B = \{ x \in X;\ d(a, x) > r \}.$$

Nếu $S = \varnothing$ thì A và B là những bộ phận mở của X, bù nhau trong X, không rỗng (vì $A \neq \varnothing$ do $a \in A$; $B \neq \varnothing$ vì X không giới nội); điều này mâu thuẫn với tính liên thông của X.

1.5.11 Tồn tại một đồng phôi $\varphi : X \to Y$.

- Cho $x \in X$ và $C_X(x)$ là thành phần liên thông của x trong X; khi đó $\varphi(C_X(x))$ là một bộ phận liên thông của Y chứa $\varphi(x)$, do đó $\varphi(C_X(x)) \subset C_Y(\varphi(x))$. Áp dụng kết quả này cho $(\varphi(x), \varphi^{-1})$ thay vì (x, φ), ta được $\varphi^{-1}(C_Y(\varphi(x))) \subset C_X(\varphi^{-1}(\varphi(x)))$, từ đó khi hợp với song ánh φ ta có:

$$C_Y(\varphi(x)) \subset \varphi(C_X(x)).$$

Ta kết luận: $$C_Y(\varphi(x)) = \varphi(C_X(x)).$$

- Kết quả trên chứng tỏ rằng nếu ta ký hiệu $C_1, \dots, C_n$ là các thành phần liên thông của X, thì $\varphi(C_1), \dots, \varphi(C_n)$ là các thành phần liên thông của Y, khác nhau từng đôi một vì φ là song ánh, và do đó Y có ít nhất n thành phần liên thông.

Ta kết luận được do tính đối xứng của các vai trò của X và Y.

1.5.12 a) • $[0; 1]$ compac và $]0; 1[$ không compac. Nếu tồn tại một đồng phôi:
$$\varphi : [0; 1] \to [0; 1[,$$
thì $[0; 1[$ sẽ phải compac vì là ảnh của tập compac $[0; 1]$ qua ánh xạ liên tục φ.

- Cũng lập luận đó chứng tỏ rằng $[0; 1]$ và $]0; 1[$ không đồng phôi với nhau.
- Giả thiết tồn tại một đồng phôi $\varphi : [0; 1[\to]0; 1[$; khi đó ánh xạ thu hẹp
$$\psi : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to &]0;1[-\{\varphi(0)\} \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$
sẽ là một đồng phôi. Nhưng $]0; 1[$ chỉ có một thành phần liên thông, trong khi đó thì $]0; 1[- \{\varphi(0)\} =]0; \varphi(0)[\cup]\varphi(0); 1[$ rõ ràng có hai thành phần liên thông, mâu thuẫn (xem bài tập 1.5.11).

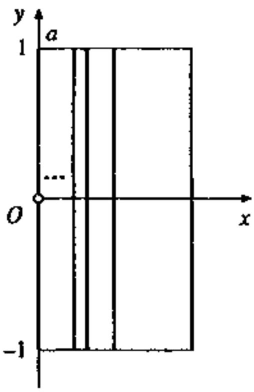
b) • Giả thiết tồn tại một đồng phôi $\varphi : S \to C$ từ đoạn S đến đường tròn C. Khi ký hiệu trung điểm của S là m, ánh xạ thu hẹp
$$\psi : \begin{array}{ccc} S-\{m\} & \to & C-\{\varphi(m)\} \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$
sẽ là một đồng phôi từ $S - \{m\}$, tập hợp này có đúng hai thành phần liên thông,lên $C - \{\varphi(m)\}$, tập hợp này có đúng một thành phần liên thông, mâu thuẫn với kết quả bài tập 1.5.11.

- Tương tự, hình chữ thập Γ bỏ đi tâm của nó có bốn thành phần liên thông, trong khi đó thì S hay C, bớt đi một điểm bất kỳ của chúng, lại chỉ có nhiều nhất hai thành phần liên thông, từ đó suy ra rằng $\Gamma \not\approx S$ và $\Gamma \not\approx C$.
- Lập luận tương tự như trên, bằng cách bỏ đi tâm của hình chữ thập, để có sáu thành phần liên thông.

1.5.13 1) Cho C là một bộ phận liên thông của X sao cho $a \in C$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu:

$$A_n = X \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right\},$$

$$B_n = X \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right\},$$



Rõ ràng là $C \cap A_n$, $C \cap B_n$ là những bộ phận đóng của C, bù nhau trong C, và $C \cap A_n \neq \varnothing$ (vì rằng $a \in C \cap A_n$). Do C liên thông nên ta có: $C \cap B_n = \varnothing$ và $C \cap A_n = C$, vậy $C \subset A_n$.

Như vậy: $\quad C \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{0\} \times ([-1; 0[\cup]0; 1])$.

Bây giờ, vì thành phần liên thông của 1 trong $[-1; 0[\cup]0; 1]$ là $]0; 1]$, nên ta được:

$$C \subset \{0\} \times]0; 1].$$

Mặt khác thì $\{0\} \times]0; 1]$ chính là một bộ phận liên thông của X có chứa a.

Cuối cùng thì: $C_X(a) = \{0\} \times]0; 1]$.

2) Cho F là một bộ phận vừa mở vừa đóng trong X và chứa a. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $F \supset Y$, trong đó

$$Y = \{0\} \times ([-1; 0[\cup]0; 1]).$$

Cho $y \in [-1; 0[\cup]0; 1]$ và $\varepsilon \in]0; 1[$. Vì F đóng nên tồn tại $\alpha \in]0; 1[$ sao cho $B_X(a; \alpha) \subset F$. Hơn nữa tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{n} < \alpha$, khi đó ta có $\left(\frac{1}{n}, 1\right) \in F$. Ta ký hiệu

$$S_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [-1; 1].$$

Các tập hợp $F \cap S_n$, $\complement_X(F) \cap S_n$ là hai bộ phận của S_n bù nhau trong S_n, mở và đóng trong S_n, và $F \cap S_n \neq \varnothing$. Do S_n liên thông, ta suy ra $F \cap S_n = S_n$, tức là $S_n \subset F$.

Khi đó thì $\left(\frac{1}{n}, y\right) \in S_n \subset F$ và $d\left((0, y), \left(\frac{1}{n}, y\right)\right) = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

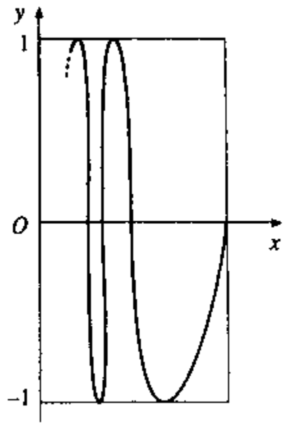
Kết quả trên chứng tỏ:

$\forall y \in [-1; 0[\cup]0; 1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\quad F \cap B((0, y); \varepsilon) \neq \varnothing$,

và do đó $Y \subset \overline{F} = F$.

Cuối cùng, giao của những bộ phận của X mở và đóng trong X và chứa a có bao hàm Y, do đó khác $C_X(a)$.

1.5.14



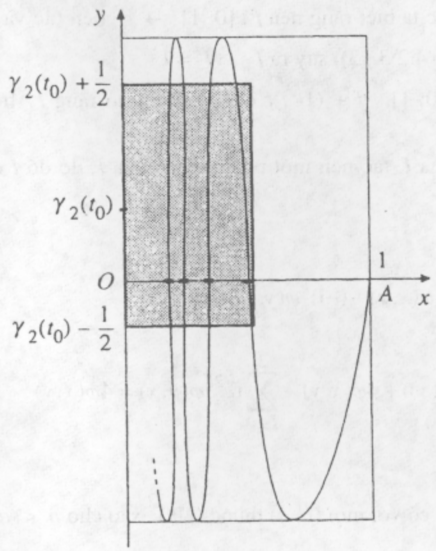
a) Ký hiệu $\quad Y = \{(x, \sin\frac{\pi}{x});\ x \in]0; 1]\}$.

1) Rõ ràng rằng Y liên thông cung, do đó liên thông, và rằng $\overline{Y} = X$; suy ra (xem 1.5.2, Hệ quả) X liên thông.

2) • Để chứng minh rằng X không liên thông cung, ta lập luận phản chứng; giả thiết tồn tại một cung liên tục:

$$\gamma: [0; 1] \to X$$

sao cho $\gamma(0) = 0$ và $\gamma(1) = A$, trong đó $0 = (0, 0)$ và



$A = (1, 0)$. Với mọi t thuộc $[0; 1]$, ký hiệu:

$$(\gamma_1(t),\ \gamma_2(t)) = \gamma(t),$$

và xét $E = \{t \in\ ]0; 1];\ \gamma_1(t) > 0\}$, đây là một bộ phận của $\mathbb{R}$, không rỗng $(1 \in E)$, bị chặn dưới bởi 0.

Suy ra E có biên dưới trong $\mathbb{R}$ là t_0 và $t_0 \in [0; 1]$. Rõ ràng ta có: $t_0 \neq 1$.

- Bây giờ chúng ta chứng minh: $\gamma_1(t_0) = 0$.

Nếu $t_0 = 0$ thì $\gamma_1(t_0) = \gamma_1(0) = 0$.

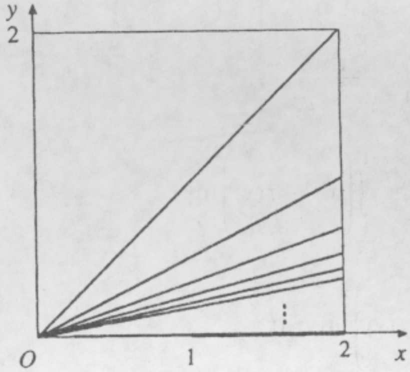
Nếu $t_0 \in\ ]0; 1]$ và $\gamma_1(t_0) > 0$, thì do γ_1 liên tục tại t_0 nên tồn tại $t_1 \in\ ]0; t_0[$ sao cho $\gamma_1(t_1) > 0$, mâu thuẫn với định nghĩa của t_0.

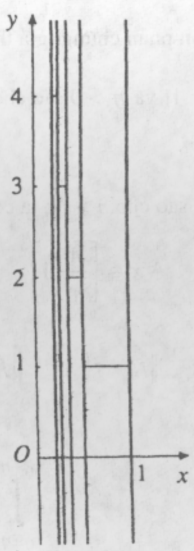
- Vì γ liên tục tại t_0 nên tồn tại $\eta \in]0; 1 - t_0]$ sao cho:

$\forall t \in [0; 1]$,

$$\left(|t - t_0| < \eta \ \Rightarrow\ \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|_\infty < \frac{1}{2}\right).$$

Ký hiệu : $$Z = \mathrm{pr}_1\left(\left(\left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[\gamma_2(t_0) - \frac{1}{2};\ \gamma_2(t_0) + \frac{1}{2}\right]\right) \cap X\right);$$





rõ ràng thành phần liên thông của 0 trong Z là $\{0\}$.

Tập hợp $\gamma_1([t_0 - \eta; t_0 + \eta] \cap [0; 1])$ liên thông, bao hàm trong Z, và chứa 0, do đó bằng $\{0\}$.

Nhưng khi đó thì: $(\forall t \in [t_0; t_0 + \eta];\ \gamma_1(t) = 0)$,

mâu thuẫn với định nghĩa của t_0.

b), c) Khảo sát tương tự như ở a).

1.5.15 1) Rõ ràng là $I_+ \cap I_- = \varnothing$; mặt khác ta biết rằng nếu $f : [0; 1] \to \mathbb{E}$ liên tục và là song ánh, thì f đơn điệu ngặt (xem tập 1, bài tập 4.2\3.13), suy ra $I_+ \cap I_- = I$.

2) Nếu $(f, g) \in (I_+)^2$, thì với mọi t thuộc $[0; 1]$, $tf + (1-t)f \in I_+$, chứng tỏ rằng I_+ liên thông cung, do đó liên thông.

Như vậy I_+ và I_- là hai bộ phận liên thông của I, tạo nên một phân hoạch của I, do đó I có đúng hai thành phần liên thông, đó là I_+ và I_-.

1.6.1 $$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k}\phi(x+\mathrm{i}^k y) = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k}(\phi(x) + +\mathrm{i}^k\varphi(x,y) + (-\mathrm{i})^k\varphi(y,x) + \phi(y))$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k}\right)(\phi(x)+\phi(y)) + 4\varphi(x,y) + \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-2k}\varphi(y,x) = 4\varphi(x,y).$$

1.6.2 a) Vì $x \mapsto x^{-\frac{2}{3}}$ khả tích trên $]0; 1]$, ta có với mọi (p, q) thuộc $(\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $p < q$:

$$\|f_p - f_q\|^2 = \int_0^1 |f_p - f_q|^2 \leq \int_0^{\frac{1}{p^3}} \frac{1}{x^{2/3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{p}.$$

Do $\frac{3}{p} \underset{p\infty}{\to} 0$, ta kết luận rằng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy Cauchy.

b) Ta lập luận phản chứng: giả thiết tồn tại $f \in E$ sao cho $f_n \underset{n\infty}{\to} f$ (trong $(E, <.,.>)$).

Cho $x_0 \in]0; 1[$ và $\eta > 0$ sao cho $0 < x_0 - \eta < x_0 + \eta < 1$. Tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{N^3} < x_0 - \eta$.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n > N$; ta có:

$$\forall x \in \left[\frac{1}{n^3}; 1\right], \qquad f_n(x) = x^{-\frac{1}{3}},$$

từ đó suy ra: $$\|f_n - f\|^2 = \int_0^1 |f_n - f|^2 \geq \int_{\frac{1}{n^3}}^{1} \left(x^{-\frac{1}{3}} - f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \left(x^{-\frac{1}{3}} - f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 0.$$

Do $\|f_n - f\| \underset{n\infty}{\to} 0$, ta suy ra : $$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \left(x^{-\frac{1}{3}} - f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 0,$$

rồi sau đó: $\forall x \in [x_0 - \eta;\ x_0 + \eta],\quad x^{-\frac{1}{3}} - f(x) = 0$

(vì $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}} - f(x)$ liên tục trên $[x_0 - \eta\,;\ x_0 + \eta]$), và nói riêng $f(x_0) = x_0^{-1/3}$.

Như vậy: $(\forall x \in\ ]0; 1[,\quad f(x_0) = x_0^{-1/3}$),
mâu thuẫn với tính liên tục của f tại 0.
Cuối cùng thì: $(f_n)_{n\in N^*}$ phân kỳ (trong $(E, <.,.>)$).

1.6.3 • $F \subset \overline{F}$, do đó $F^{\perp} \supset (\overline{F})^{\perp}$.
• Cho $x \in F^{\perp}$, $y \in \overline{F}$.

Tồn tại một dãy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong F sao cho $y_n \underset{n\infty}{\to} y$. Vì ánh xạ $\begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ z \mapsto <x,z> \end{array}$ liên tục (xem Mệnh đề 3), nên ta có: $<x, y_n> \underset{n\infty}{\to} <x, y>$.

Nhưng: $(\forall n \in \mathbb{N}, <x, y_n> = 0)$, nên suy ra $<x, y> = 0$. Điều này chứng tỏ:
$x \in (\overline{F})^{\perp}$, và do đó $F^{\perp} \subset (\overline{F})^{\perp}$.

1.6.4 a) • φ hiển nhiên tuyến tính.

• $$\forall f \in E,\ |\varphi(f)| = \left|\int_0^c f\right| \le \left(\int_0^c 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^c f^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c}\,\|f\|_2,$$

chứng tỏ: $\varphi \in \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$.

b) • $H = \varphi^{-1}(\{0\})$, φ liên tục, $\{0\}$ đóng trong $\mathbb{R}$; vậy H đóng trong E.
• Cho $g \in H^{\perp}$.

1) Với mọi f thuộc E, rõ ràng $f - \frac{1}{c}\int_0^c f \in H$, suy ra $<g, f - \frac{1}{c}\int_0^c f> = 0$,

tức là: $$c\int_0^1 gf = \left(\int_0^C f\right)\left(\int_0^1 g\right).$$

2) Cho $d \in\ ]c; 1[$; giả thiết $g(d) \neq 0$, chẳng hạn $g(d) > 0$. Do g liên tục tại d, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\begin{cases} c < d - \eta < d + \eta < 1 \\ \forall x \in [d-\eta; d+\eta],\quad g(x) > 0 \end{cases}$$

Tồn tại một ánh xạ $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall x \in [0; c],\ f(x) = 0 \\ \forall x \in]d-\eta; d+\eta[,\ f(x) > 0 \end{cases}.$$

(hãy xây dựng f afin từng khúc).

Khi đó ta có: $$\begin{cases} c\int_0^1 gf = c\int_{d-\eta}^{d+\eta} gf > 0 \\ \left(\int_0^c f\right)\left(\int_0^1 g\right) = 0 \end{cases},$$

mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ: $(\forall d \in\ ]c; 1[,\quad g(d) = 0)$,
sau đó do tính liên tục của g trên $[0; 1]$ suy ra:

$(\forall d \in [c; 1],\quad g(d) = 0)$.

3) Áp dụng kết quả ở *1)* cho $f = g$, và tính đến kết quả ở *2)*, ta được:

$$c\int_0^C g^2 = \left(\int_0^C g\right)^2, \quad \text{hoặc là:} \quad \left(\int_0^C 1^2\right)\left(\int_0^C g^2\right) = \left(\int_0^C g\right)^2.$$

Theo kết quả khảo sát trường hợp đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (xem 1.6.2, Mệnh đề 1), tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in [0; c], \qquad g(x) = \alpha,$$

sau đó suy ra $g = 0$.

c) $H^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = E \neq H$ vì $1 \notin H$.

1.6.5 a) • Cho $g \in G$. Với mọi f thuộc F, ta có: $\int_0^{\frac{1}{2}} fg = 0$ và $\int_{\frac{1}{2}}^1 fg = 0$,

suy ra $<f, g> = 0$, và do đó $g \in F^{\perp}$.

• Đảo lại cho $g \in F^{\perp}$.

Giả thiết tồn tại $x_0 \in]\frac{1}{2}; 1[$ sao cho $g(x_0) \neq 0$, chẳng hạn $g(x_0) > 0$. Vì g liên tục tại x_0 nên tồn tại $\eta \in]0; 1[$ sao cho:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < x_0 - \eta < x_0 + \eta < 1 \\ \forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta], \quad g(x) > 0 \end{cases}.$$

Tồn tại $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall x \in [0;1] -]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, & f(x) = 0 \\ \forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, & f(x) > 0 \end{cases}$$

(hãy xây dựng f afin từng khúc).

Do $f \in F$ và $g \in F^{\perp}$, ta có: $<f, g> = 0$.

Nhưng $<f, g> = \int_0^1 fg \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} fg > 0$, suy ra mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ: $\quad \forall x \in]\frac{1}{2}; 1[, \quad g(x) = 0,$

rồi theo tính liên tục của g: $\quad \forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad g(x) = 0,$

tức là $g \in G$.

Cuối cùng ta có $F^{\perp} = G$. Ta chứng minh tương tự quan hệ $G^{\perp} = F$.

b) • $F^{\perp\perp} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = G^{\perp} = F$

• Cho $\varphi \in F \oplus F^{\perp} = F \oplus G$. Tồn tại $(f, g) \in F \times G$ sao cho $\varphi = f + g$, suy ra:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Vậy ta có: $\quad F \oplus F^{\perp} \neq E.$

Chính xác hơn: $\quad F \oplus F^{\perp} = F \oplus G = \left\{\varphi \in E; \ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right\}.$

c) $\begin{cases} (F \cap G)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E \\ F^{\perp} + G^{\perp} = G + F \neq E (\text{xem } b)) \end{cases}$

1.6.6 *1)* Cho $x \in (\mathrm{Im}(e\text{-}f))^{\perp}$; ta chứng minh $x \in \mathrm{Ker}(e\text{-}f)$.

Khi đó: $\|x\|^2 = |<x, f(x)>| \le \|x\| \, \|f(x)\| \le \|f\| \, \|x\|^2 \le \|x\|^2$.

từ đó suy ra: $\|x\|^2 = |<x, f(x)>| = \|x\| \, \|f(x)\|$.

Việc khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (xem 1.6.2, Mệnh đề 1), chứng tỏ rằng tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}$ sao cho $f(x) = \alpha x$.

Ta được: $\|x\|^2 = <x, f(x)> = \alpha\|x\|^2$,

từ đó suy ra (nếu $x \neq 0$): $\alpha = 1,\ f(x) = x,\ x \in \operatorname{Ker}(e-f)$.

2) Đảo lại cho $(x, y) \in (\operatorname{Ker}(e-f)) \times (\operatorname{Im}(e-f))$.

Tồn tại $z \in E$ sao cho: $y = (e-f)(z) = z - f(z)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $< x, z - f(z) > = 0$.

Ta có: $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|f(\lambda x + z)\|^2 \le \|\lambda x + z\|^2$.

Khai triển và áp dụng hệ thức $f(x) = x$, ta được:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda} <x,\ z - f(z)>) + (\|z\|^2 - \|f(z)\|^2) \ge 0.$$

và nếu chọn $\lambda = \dfrac{t}{2} <x,\ z - f(z)>$, thì ta được:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t}{2} |<x,\ z - f(z)>|^2 + (\|z\|^2 - \|f(z)\|^2) \ge 0.$$

Cho t tiến đến $+\infty$, rồi đến $-\infty$, ta suy ra: $|<x,\ z - f(z)>|^2 = 0$.

Kết quả này chứng tỏ: $\operatorname{Ker}(e - f) \subset (\operatorname{Im}(e - f))^{\perp}$.

1.6.7 Xét cơ sở (E_1, E_2, E_3) của $\mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R})$ xác định bởi:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Với mọi $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R})$, ta có:

$$A - T = (\mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R}))^{\perp}$$

$$\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, 2, 3\}, \quad < E_k, A - T > = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \alpha = 0 \\ b - \beta = 0 \\ d - \gamma = 0 \end{cases}.$$

◊ **Trả lời:** Hình chiếu trực giao của A lên $\mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R})$ là $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

1.6.8 Xét cơ sở (A_1, A_2, A_3) của F xác định bởi:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hãy kiểm chứng rằng (A_1, A_2, A_3) là một họ trực giao, và rằng: $\|A_1\|^2 = \|A_2\|^2 = \|A_3\|^2 = 2$.

Như thế ta có: $p_F(M) = \sum_{k=1}^{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} A_k,\ M > \frac{1}{\sqrt{2}} A_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} < A_k,\ M > A_k.$

Hãy tính các $< A_k,\ M >$.

◊ **Trả lời:** $p_F(M) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $d(M, F) = 1$.

1.6.9 Với mọi (A, B) thuộc $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}({}^t(f(A))\,B) = < f(A), B > = < A, f^*(B) > = \mathrm{tr}({}^tA\, f^*(B)) = \mathrm{tr}(f^*(B)\,{}^tA) \\ &= \mathrm{tr}({}^t(f^*(B)\,{}^tA)) = \mathrm{tr}(A\,{}^t(f^*(B))).\end{aligned}$$

Vì ánh xạ $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}({}^tXY)$ là một tích vô hướng trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (tích vô hướng chính tắc trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$), nên ta suy ra rằng $B = {}^t(f^*(B))$ với mọi B thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, và do đó:

$$\forall B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), f^*(B) = {}^tB = f(B).$$

◊ **Trả lời:** $f^* = f$.

1.6.10 a) •

$$\begin{aligned}&\forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad < f_A(M), N > = < M, f_A^*(N) > \\ &\Leftrightarrow \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \mathrm{tr}({}^tM\,{}^tAN) = \mathrm{tr}({}^tM\ f^*(N)) \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A^*(N) = {}^tAN.\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}&\forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad < g_B(M), N > = < M, g_B^*(N) > \\ &\Leftrightarrow \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tMN) = \mathrm{tr}({}^tM\ g_B^*(N) \\ &\Leftrightarrow \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \mathrm{tr}({}^tMN\,{}^tB) = \mathrm{tr}({}^tM\ g_B^*(N)) \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad g_B^*(N) = N\,{}^tB.\end{aligned}$$

◊ **Trả lời:** $f_A^* = f_{{}^tA}$ và $g_B^* = g_{{}^tB}$.

b)

$$\begin{aligned}&\forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad < h_A(M), N > = < M, h_A^*(N) > \\ &\Leftrightarrow \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \mathrm{tr}({}^t(\mathrm{tr}(M)A)N) = \mathrm{tr}({}^tM\ h_A^*(N)) \\ &\Leftrightarrow \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}({}^tAN) = \mathrm{tr}({}^tM\ h_A^*(N)) \\ &\Leftrightarrow \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \mathrm{tr}({}^tM\mathrm{tr}({}^tAN)\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}({}^tM\, h_A^*(N)) \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad h_A^*(N) = \mathrm{tr}({}^tAN)\mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

◊ **Trả lời:** $h_A^*: \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

$$N \mapsto \mathrm{tr}({}^tAN)\mathrm{I}_n$$

1.6.11 $\Rightarrow$:
Giả thiết $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Cho $x \in E$ thỏa mãn $(f + f^*)(x) = 0$.
Khi đó ta có $f^*(x) = -f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ (do $f^2 = 0$), vậy $f(f^*(x)) = 0$, rồi suy ra $\|f^*(x)\|^2 = \langle x, f(f^*(x))\rangle = 0$, do đó $f^*(x) = 0, f(x) = -f^*(x) = 0$.
Vậy ta có $x \in \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$; do đó tồn tại $y \in E$ thỏa mãn $x = f(y)$, suy ra $f^*(f(y)) = f^*(x) = 0$, rồi $\|f(y)\|^2 = \langle y, f^*(f(y))\rangle = 0$, do đó $x = f(y) = 0$.
Điều này chứng tỏ $f + f^*$ là đơn ánh, và do E hữu hạn chiều nên $f + f^* \in \mathcal{GL}(E)$.
$\Leftarrow$:
Giả thiết $f + f^* \in \mathcal{GL}(E)$.
Cho $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Tồn tại $z \in E$ sao cho $x = (f+f^*)(z)$, và ta có:

$$0 = f(x) = f((f + f^*)(z)) = f^2(z) + f(f^*(z)) = f(f^*(z)),$$

do đó: $\|f^*(z)\|^2 = \langle z, f(f^*(z))\rangle = 0$,
suy ra: $f^*(z) = 0$, $x = f(z) + f^*(z) = f(z) \in \mathrm{Im}(f)$.
Ta kết luận: $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

C1. 1 I *1)* Theo Định lý Borel-Lebesgue, vì B compac và vì $\left(\mathrm{B}(a;\frac{1}{2})\right)_{a\in B}$ là một phủ mở của B, nên tồn tại $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in B$ sao cho $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}\left(a_i;\frac{1}{2}\right)$.
2) Do V là một kgvc hữu hạn chiều, nên V đóng trong E (xem bài tập 1.4.3).
Vì $x \notin V$ nên ta suy ra: $d(x, V) > 0$.
3) Theo định nghĩa $d(x, V) = \inf_{y\in V}\|x - y\| = \varepsilon$, do đó tồn tại $y \in V$ sao cho:

$$\varepsilon \le \|x - y\| \le \frac{3\varepsilon}{2}.$$

4) Vì $\|z\| = 1$, $z \in B$, do đó (xem *1)*), tồn tại $i \in \{1,\dots, n\}$ sao cho $x \in B\left(a_i;\frac{1}{2}\right)$, suy ra $\|x - a_i\| \le \frac{1}{2}$.

5) Ta có: $$\|x - y\|(z - a_i) = \|x - y\|\left(\frac{x - y}{\|x - y\|} - a_i\right) = x - (y + \|x - y\|a_i).$$

Vì $y + \|x - y\|a_i \in V$, nên ta có: $\|x - (y + \|x - y\|a_i)\| \ge d(x, V) = \varepsilon$,
và do đó: $\|x - y\|\,\|z - a_i\| = \big\|\,\|x - y\|(z - a_i)\,\big\| \ge \varepsilon$.
Nhưng $\|z - a_i\| \le \frac{1}{2}$, từ đó suy ra $\|x - y\| \ge 2\varepsilon$, mâu thuẫn với $\|x - y\| \le \frac{3\varepsilon}{2}$.

II *1)* Giả thiết một hình cầu $S(a; r)$, thuộc kgvdc vô hạn chiều E là tập compac; khi đó $B'(a; r)$ là ảnh của bộ phận compac $S(a; r) \times [0; 1]$ qua ánh xạ liên tục $(x, t) \mapsto a + t(x - a)$, vậy $B'(a, r)$ compac, mâu thuẫn với Định lý Riesz.

2) Cho E là một kgvdc vô hạn chiều và K là một bộ phận compac của E. Nếu $\mathring{K} \neq \varnothing$ thì tồn tại $x \in \mathring{K}$, rồi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $B'(x; \varepsilon) \subset K$. Khi đó $B'(x; \varepsilon)$ là một bộ phận compac của E (do là tập đóng bao hàm trong một bộ phận compac), suy ra mâu thuẫn với Định lý Riesz.

3) Giả thiết tồn tại $g \in \mathcal{LC}(E)$ sao cho $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, và ký hiệu $B = B'(0; 1)$, tập hợp này là một bộ phận giới nội của E. Ta có: $B = \mathrm{Id}_E(B) = g(f(B)) \subset \overline{g(\overline{f(B)})}$. Vì $\overline{f(B)}$ compac và g liên tục nên $g(\overline{f(B)})$ compac, và do đó B compac (vì là tập đóng trong một bộ phận compac), suy ra mâu thuẫn với Định lý Riesz.

C1.2 Ký hiệu $P = \prod_{k=1}^{n} E_k$, được trang bị chuẩn ν xác định bởi:

$$\nu(x_1, \dots, x_n) = \operatorname*{Max}_{1 \le k \le n} \|x_k\|_{E_k}$$

(xem 1.1.1 , *3), b)*), trong đó $\|\cdot\|_{E_k}$ là chuẩn cho trên E_k.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Giả thiết φ liên tục. Nói riêng, φ liên tục tại 0; tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall u \in P, \quad (\nu(u) \le \eta \;\Rightarrow\; \|\varphi(u)\|_F \le 1).$$

Cho $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$.

- Giả thiết: $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \neq 0$.

Ký hiệu $u = \eta\left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \dots, \dfrac{x_n}{\|x_n\|_{En}}\right)$. Ta có $\nu(u) = \eta$, vậy $\|\varphi(u)\|_F \le 1$, tức là :

$$\|\varphi(u)\|_F < \left(\frac{1}{\eta}\right)^n \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$$

do φ là ánh xạ n-tuyến tính.

- Nếu $(\exists k \in \{1, \dots, n\}, x_k = 0)$, thì $\varphi(x) = 0$ vì φ là ánh xạ n-tuyến tính.

Điều này chứng tỏ: $\forall x \in P, \quad \|\varphi(x)\|_F \le \left(\dfrac{1}{\eta}\right)^n \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Giả thiết tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall x \in P, \quad \|\varphi(x)\|_F \le M\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$.

Cho $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in P$; với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$ ta ký hiệu $h_k = x'_k - x_k$, và $h = (h_1, \dots, h_n) = x' - x$. Ta có:

$$\begin{aligned}\|\varphi(x') - \varphi(x)\|_F &= \|\varphi(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n)\|_F \\ &= \|(\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - \varphi(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)) \\ &\quad + (\varphi(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) - \varphi(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n))\end{aligned}$$

$$+\ldots+(\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n+h_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n))\|_F$$

$$=\|\varphi(h_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)+\varphi(x_1,h_2,x_3+h_3,\ldots,x_n+h_n)+\ldots+\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},h_n)\|_F$$

$$\leq\|\varphi(h_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)\|_F+\|\varphi(x_1,h_2,x_3+h_3,\ldots,x_n+h_n)\|_F+\ldots+\|\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},h_n)\|_F$$

$$\leq M\|h_1\|_{E_1}\|x_2+h_2\|_{E_2}\ldots\|x_n+h_n\|_{E_n}+M\|x_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2}\|x_1+h_3\|_{E_3}\ldots\|x_n+h_n\|_{E_n}+\ldots$$
$$+M\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}\|x_3\|_{E_3}\ldots\|x_{n-1}\|_{E_{n-1}}\|h_n\|_{E_n}$$

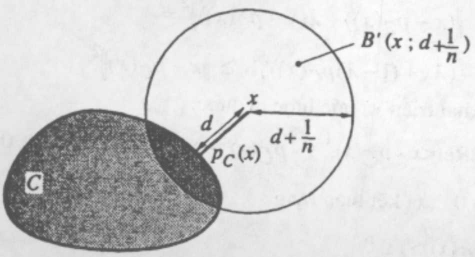
$$\leq nM\nu(h)(\nu(x)+\nu(h))^{n-1},$$

khi ta làm trội mỗi $\|h_k\|_{E_k}$ bằng $\nu(h)$ và mỗi $\|x_k\|_{E_k}$ bằng $\nu(x)$, hoặc mỗi $\|x_k+h_k\|_{E_k}$ bằng $\nu(x)+\nu(h)$.

Từ đó suy ra $\varphi(x') \underset{x'\to x}{\to} \varphi(x)$ với x cố định, và do đó φ liên tục.

C1. 3 I- A) Tồn tại

Vì C đóng (do là một bộ phận đủ, xem 1.4.2, Mệnh đề 2), và vì $x \notin C$, nên ta có:



$$d=d(x,C)=\operatorname*{Inf}_{y\in C}\|x-y\|>0$$

(xem 1.1.8, Mệnh đề).

Dãy $\left(B'(x;d+\frac{1}{n})\cap C\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy giảm những bộ phận đóng không rỗng của một bộ phận đủ (C).Bây giờ ta chứng minh:

$$\operatorname{diam}\left(B'(x;d+\frac{1}{n})\cap C\right)\underset{n\infty}{\to}0.$$

Cho $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1, x_2 \in B'(x;d+\frac{1}{n})\cap C$.

Theo đẳng thức hình bình hành (1.6.2, Nhận xét) áp dụng cho x_1-x, x_2-x, ta có:

$$\|(x_1-x)+(x_2-x)\|^2+\|(x_1-x)-(x_2-x)\|^2=2(\|x_1-x\|^2+\|x_2-x\|^2).$$

Nhưng: $\|x_1-x\|\leq d+\frac{1}{n}$, $\|x_2-x\|\leq d+\frac{1}{n}$, và $\|(x_1-x)+(x_2-x)\|=2\left\|\frac{x_1+x_2}{2}-x\right\|\geq 2d$ vì $\frac{x_1+x_2}{2}\in C$.

Từ đó suy ra:
$$\|x_1-x_2\|^2\leq 4\left(d+\frac{1}{n}\right)^2-4d^2.$$

Như vậy:
$$\operatorname{diam}\left(B'(x;d+\frac{1}{n})\cap C\right)\leq\frac{8d}{n}+\frac{4}{n^2}\underset{n\infty}{\to}0.$$

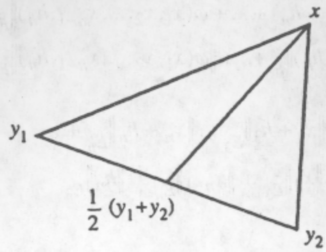
Theo 1.4.2, Mệnh đề 4, tồn tại $y_0\in E$ sao cho:

$$\{y_0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left(B'(x;d+\frac{1}{n})\cap C\right)=\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}B'(x;d+\frac{1}{n})\right)\cap C=B'(x;d)\cap C.$$

Như thế ta được $\|x-y_0\|\leq d$. Mặt khác thì theo định nghĩa d, $\|x-y_0\|\geq d$, do đó cuối cùng ta có:

$$\|x-y_0\|=d.$$

Duy nhất



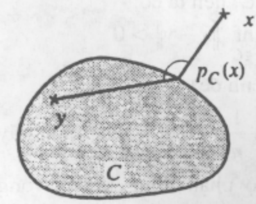
Cho $y_1, y_2 \in C$ sao cho:
$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d.$$

Theo đẳng thức hình bình hành (1.6.2, Nhận xét) ta có:
$$2(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) = 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2.$$

Vì $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C$ nên ta có: $\quad \left\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right\| \geq d,$

suy ra: $\quad \|y_1 - y_2\|^2 \leq 0, \; y_1 = y_2.$

2) Cho $x \in E, \; y \in C$. Vì C lồi nên ta có: $\quad \forall \lambda \in [0; 1], \quad \lambda y + (1 - \lambda)p_C(x) \in C,$



từ đó suy ra:
$$\forall \lambda \in [0;1], \; \|(x - p_C(x)) - \lambda(y - p_C(x))\|^2 =$$
$$\|x - (\lambda y + (1 - \lambda)p_C(x))\|^2 \;\geq \|x - p_C(x)\|^2,$$

do đó sau khi khai triển và ước lược ta được:

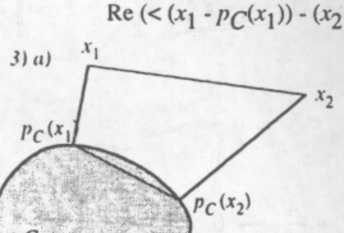
$\forall \lambda \in [0; 1], -2\mathrm{Re}(< x - p_C(x), \; y - p_C(x) >) + \lambda \|y - p_C(x)\|^2 \geq 0.$

Cho λ tiến đến 0^+, ta kết luận rằng :
$$\mathrm{Re}(< x - p_C(x), \; y - p_C(x) >) \leq 0.$$

Như vậy góc $\measuredangle \; (x - p_C(x), \; y - p_C(x))$ là góc tù.

3) a) Cho $(x_1, x_2) \in E^2$. Theo *2)* ta có:
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(< x_1 - p_C(x_1), \; p_C(x_2) - p_C(x_1) >) \leq 0 \\ \mathrm{Re}(< x_2 - p_C(x_2), \; p_C(x_1) - p_C(x_2) >) \leq 0 \end{cases},$$

từ đó kết hợp lại ta được:
$$\mathrm{Re}\,(< (x_1 - p_C(x_1)) - (x_2 - p_C(x_2)), p_C(x_2) - p_C(x_1) >) \leq 0.$$



Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta suy ra:
$$\|p_C(x_2) - p_C(x_1)\|^2 \leq$$
$$\leq \mathrm{Re}\,(< x_2 - x_1, p_C(x_2) - p_C(x_1) >)$$
$$\leq |< x_2 - x_1, p_C(x_2) - p_C(x_1) >|$$
$$\leq \|x_2 - x_1\| . \|p_C(x_2) - p_C(x_1)\|.$$

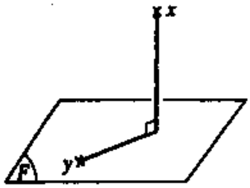
Nhưng do trường hợp $p_C(x_2) - p_C(x_1) = 0$ là tầm thường, nên ta kết luận:
$$\|p_C(x_2) - p_C(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|.$$

b) Theo định nghĩa của p_C ta có: $\quad \forall x \in C, \quad p_C(x) = x.$

c) $\begin{cases} \forall x \in E, \; p_C(x) \in C \\ \forall x \in C, \; x = p_C(x) \end{cases}$, $\quad$ từ đó suy ra: $\quad p_C(E) = C.$

B) *1)* Cho $x \in E$. Theo A) *2)* :

$$\forall y \in F, \quad \mathrm{Re}\,(<x - p_F(x)\ , y - p_F(x)>) \leq 0.$$



Vì F là một kgvc của E, nên suy ra:

$$\forall z \in F, \quad \mathrm{Re}\,(<x - p_F(x), z>) \leq 0.$$

Sử dụng $z \mapsto -z$, ta suy ra:

$$\forall z \in F, \quad \mathrm{Re}\,(<(x - p_F(x)), z>) = 0,$$

rồi áp dụng $z \mapsto iz$, ta kết luận:

$$\forall z \in F, \quad <(x - p_F(x)), z> = 0.$$

2) Cho $\alpha \in \mathbb{C}$, $\quad x\,,\ x' \in E$. Ta có:

$$\forall z \in F, \quad \begin{cases} <x - p_F(x),\ z> = 0 \\ <x' - p_F(x'),\ z> = 0 \\ <\alpha x + x' - p_F(\alpha x + x'),\ z> = 0 \end{cases},$$

từ đó bằng cách kết hợp lại ta được:

$$\forall z \in F, \ <\alpha p_F(x) + p_F(x') - p_F(\alpha x + x'), z> = 0.$$

Vì F là một kgvc nên: $\alpha p_F(x) + p_F(x') - p_F(\alpha x + x') \in F$, và cuối cùng ta được:

$$p_F(\alpha x + x') = \alpha p_F(x) + p_F(x').$$

3) a) • p_F là ánh xạ tuyến tính (xem *2)*).

• p_F là ánh xạ 1-Lipschitz (xem A) *3) a)*).

Ta kết luận: $\quad p_F \in \mathcal{LC}(E)$ và $\|p_F\| \leq 1$.

b) Nếu $F \neq \{0\}$ thì tồn tại $x_0 \in F$, sao cho $x_0 \neq 0$, và ta có $p_F(x_0) = x_0$, suy ra $\|p_F\| \geq 1$.

c) α) $\mathrm{Im}(p_F) = p_F(E) = F$, xem A) , *3) c)*.

β) • Cho $x \in F^{\perp}$. Theo B), *1)*, $x - p_F(x) \in F^{\perp}$, từ đó suy ra:

$$p_F(x) = x - (x - p_F(x)) \in F^{\perp} \cap F = \{0\}.$$

• Đảo lại, cho $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Khi đó theo B), *1)*, ta có:

$$\forall y \in F, \quad <x, y> = <x - p_F(x), y> = 0,$$

từ đó suy ra $x \in F^{\perp}$.

γ) $F \oplus F^{\perp} = \mathrm{Im}(p_F) \oplus \mathrm{Ker}(p_F) = E$, vì p_F là một phép chiếu của E (xem A), *3) b)* và B), *2)*).

4) Cho $x \in E$.

• Theo B), *1)* và *3)*, ta có: $\quad p_F(x) - x \in F^{\perp} \subset G^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_G)$, từ đó suy ra :

$$p_G \circ p_F(x) = p_G(x).$$

• Vì $p_G(x) \in G \subset F$, nên ta có: $\quad p_F \circ p_G(x) = p_F(p_G(x)) = p_G(x).$

II *1) a)* Vì F đóng trong bộ phận đủ H, nên F đủ (xem 1.4.2, Mệnh đề 2); áp dụng **I** B), *3) c)*.

b) Chứng minh rằng $\overline{F}$ là một kgvc đóng của H. Theo 1.4.2, Mệnh đề 2, $\overline{F}$ đủ, do đó (xem I B) *3) c)*): $\overline{F} + (\overline{F})^{\perp} = H$.

Nhưng mặt khác thì $F^{\perp}$ là một kgvc đóng của H (xem 1.6.3, Mệnh đề 2), nên từ đó suy ra:

$$F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp} = H.$$

Cuối cùng ta được: $(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}$ (xem bài tập 1.6.3).

Do tính duy nhất của trực giao của một kgvc (nếu tồn tại), ta kết luận: $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Nói riêng, với mọi kgvc đóng F của một không gian Hilbert H, ta có: $F^{\perp\perp} = F$.

c) Áp dụng *b)* cho $F = \mathrm{Vect}(A)$, và chú ý rằng $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$ (xem 1.6.3, Mệnh đề 1, *3)*).

2) • Với $x \in H$ cố định, tính chất tuyến tính của φ_x suy ra từ tính chất tuyến tính rưỡi của tích vô hướng.

• Cho $x \in H$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được:

$$\forall y \in H, \quad |\varphi_x(y)| = |< x, y >| \le \|x\|\,\|y\|$$

Điều này chứng tỏ rằng: $\varphi_x \in H'$ và $\|\varphi_x\| \le \|x\|$.

Hơn nữa $|\varphi_x(x)| = |< x, x >| = \|x\|^2$, từ đó suy ra $\|\varphi_x\| \ge \|x\|$ nếu $x \neq 0$.
Trường hợp $x = 0$ là tầm thường.
Như thế ta được: $\|\varphi_x\| = \|x\|$.

• **ϕ bán-tuyến tính vì $<.,.>$ tuyến tính rưỡi.**

• **ϕ là đơn ánh**

Nếu $x \in H$ thỏa mãn $\phi(x) = 0$ thì: $\|x\| = \|\phi(x)\| = 0$, do đó $x = 0$.

• **ϕ là toàn ánh**

Cho $l \in H'$.

Do $\phi(0) = 0$ nên ta có thể giả thiết $l \neq 0$. Ký hiệu $F = \mathrm{Ker}(l) = l^{-1}(\{0\})$, đây là một siêu phẳng đóng của H (vì l là một dạng tuyến tính liên tục). Vì H đủ nên ta có: $F \oplus F^{\perp} = H$ (xem *1) a)*).

Vì $F^{\perp}$ là bù của một siêu phẳng nên tồn tại $x_1 \in F^{\perp}$ sao cho $x_1 \neq 0$ và $F^{\perp} = \mathbb{C}x_1$.

Cho $y \in H$; tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in F$ sao cho $y = z + \alpha x_1$. Ta có:

$$\begin{cases} l(y) = l(z) + \alpha l(x_1) = \alpha l(x_1) & \text{vì } z \in \mathrm{Ker}(l) \\ < x_1, y > \; = \; < x_1, z + \alpha x_1 > = \alpha \|x_1\|^2 & \text{vì } z \in F \text{ và } x_1 \in F^{\perp} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra: $l(y) = < x_2, y >$ trong đó $x_2 = \dfrac{\overline{l(x_1)}}{\|x_1\|^2} x_1$.

Như vậy: $l = \phi(x_2)$, suy ra ϕ là toàn ánh.

C 1.4 *1)* Cho $g, h \in \mathcal{L}(E)$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \begin{cases} < f(x), y > \; = \; < x, g(y) > \\ < f(x), y > \; = \; < x, h(y) > \end{cases}.$$

Khi đó: $\forall (x, y) \in E^2, \quad < x, (g - h)(y) > = 0,$

suy ra: $\forall y \in E$, $(g-h)(y)=0$,
và như thế: $g=h$.

2) Với mọi (x, y) thuộc E^2 ta có:

a) $<x, (f^*+g^*)(y)> = <x, f^*(y)> + <x, g^*(y)> = <f(x), y> + <g(x), y>$
$= <(f+g)(x), y>$

b) $<x, \overline{\lambda} f^*(y)> = \overline{\lambda} <x, f^*(y)> = \overline{\lambda} <f(x), y> = <(\lambda f)(x), y>$

c) $<x, (f^* \circ g^*)(y)> = <x, f^*(g^*(y))> = <f(x), g^*(y)>$
$= <g(f(x)), y> = <(g \circ f)(x), y>$

d) $<x, f(y)> = \overline{<f(y), x>} = \overline{<y, f^*(x)>} = <f^*(x), y>$.

3) Cho $x \in F^{\perp}$. Ta có: $\forall y \in F$, $<f^*(x), y> = <x, f^{**}(y)> = <x, f(y)> = 0$,
vì $x \in F^{\perp}$ và $f(y) \in f(F) \subset F$.
Từ đó suy ra: $f^*(x) \in F^{\perp}$.

4) (i) • Cho $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ta có: : $\forall y \in E$, $<x, f^*(y)> = <f(x), y> = <0, y> = 0$,
từ đó suy ra: $x \in (\mathrm{Im}(f^*))^{\perp}$.

• Cho $x \in (\mathrm{Im}(f^*))^{\perp}$. Ta có: $\forall y \in E$, $<f(x), y> = <x, f^*(y)> = 0$, do đó $f(x)=0$, $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

(ii) Áp dụng (i) cho f^* thay vì f: $\mathrm{Ker}(f^*) = (\mathrm{Im}(f^{**}))^{\perp} = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

(iii) Cho $x \in E$. Ta có: $\forall y \in \mathrm{Ker}(f^*)$, $<f(x), y> = <x, f^*(y)> = <x, 0> = 0$,
do đó: $f(x) \in (\mathrm{Ker}(f^*))^{\perp}$.

(iv) Áp dụng (iii) cho f^* thay vì f: $\mathrm{Im}(f^*) \subset (\mathrm{Ker}(f^{**}))^{\perp} = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

5) • $\forall x \in E$, $(x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow f(x)=g(x)=0 \Rightarrow (f+g)(x)=0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f+g))$.

• Đảo lại, cho $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. Ta có:
$$(f^* \circ f)(x) = f^*(f+g)(x) - (f^* \circ g)(x) = 0,$$
từ đó suy ra: $\|f(x)\|^2 = <f(x), f(x)> = <x, f^*(f(x))> = 0$,
do đó $f(x)=0$, rồi $g(x) = (f+g)(x) - f(x) = 0$.
Cuối cùng ta được: $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

6) *a)* Cho $y \in E$. Với mọi x thuộc E ta có:
$$|<x, f^*(y)>| = |<f(x), y>| \le \|f(x)\| \, \|y\| \le \|\!|f|\!\| \, \|x\| \, \|y\|.$$
Đặc biệt, khi thay x bằng $f^*(y)$ ta được: $\|f^*(y)\|^2 \le \|\!|f|\!\| \, \|f^*(y)\| \, \|y\|$.
Nếu $\|f^*(y)\| \ne 0$ thì ta suy ra $\|f^*(y)\| \le \|\!|f|\!\| \, \|y\|$; bất đẳng thức này là tầm thường nếu $\|f^*(y)\| = 0$.
Như thế chúng ta đã chứng minh: $\forall y \in E$, $\|f^*(y)\| \le \|\!|f|\!\| \, \|y\|$,
do đó: $f^* \in \mathcal{LC}(E)$ và $\|\!|f^*|\!\| \le \|\!|f|\!\|$.

b) Áp dụng *a)* cho f và f^*: $\|\!|f^*|\!\| \le \|\!|f|\!\|$ và $\|\!|f|\!\| = \|\!|f^{**}|\!\| \le \|\!|f^*|\!\|$

c) • $\|\!|f^* \circ f|\!\| \le \|\!|f^*|\!\| \, \|\!|f|\!\| = \|\!|f|\!\|^2$

- $\forall x \in E, \quad \|f(x)\|^2 = <f(x), f(x)> = <x, (f^* \circ f)(x)>$
$$\leq \|x\| \|(f^* \circ f)(x)\| \leq \|f^* \circ f\| \|x\|^2,$$

từ đó suy ra: $\|f\|^2 \leq \|f^* \circ f\|$.

7) • Với $y \in H$, xét ánh xạ $\psi_y : \begin{matrix} H & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & <y, f(x)> \end{matrix}$. Rõ ràng là ψ_y tuyến tính. Hơn nữa:

$$\forall x \in H, \quad |\psi_y(x)| \leq |<y, f(x)>| \leq \|y\| \|f(x)\| \leq (\|y\| \|f\|) \|x\|,$$

và do đó $\psi_y \in H'$, trong đó H' là đối ngẫu tôpô của H, xem 1.2.6.

- Xét ánh xạ $\psi : \begin{matrix} H & \to & H' \\ y & \mapsto & \Psi_y \end{matrix}$ xác định như trên. Rõ ràng ψ bán tuyến tính, tức là:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall x, x' \in H, \quad \psi(\alpha x + x') = \overline{\alpha}\, \psi(x) + \psi(x').$$

- Ký hiệu $\Phi : H \to H'$ là ánh xạ tương tự như ánh xạ Ψ trên đây, xuất phát từ Id_E

thay vì f, tức là: $\forall y \in H, \quad \Phi(y) = \varphi_y$,

trong đó $\varphi_y : \begin{matrix} H & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & <y, x> \end{matrix}$. $\overline{(\psi(y))(x)} =$

Ta đã thấy (xem **C 1. 3, II**, *2*)) rằng Φ là một phép đẳng cự bán tuyến tính. Ký hiệu $g = \Phi^{-1} \circ \Psi$.

- g tuyến tính vì Ψ và Φ^{-1} đều bán tuyến tính.
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad <x, g(y)> = \overline{<g(y), x>} = \overline{\varphi_{g(y)}(x)} = \overline{(\Phi(g(y)))(x)} = \overline{\psi_y(x)}$
$$= \overline{<y, f(x)>} = <f(x), y>.$$

Cuối cùng ta được: f có một phụ hợp, đó là g.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 2

2.1.1 Thay t bằng $1-t$ trong hệ thức thứ nhất rồi kết hợp với hệ thức thứ hai, ta được:

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, \qquad f_2(t) = t.$$

Hãy khảo sát trường hợp $t = \dfrac{1}{2}$.

◊ **Trả lời:** $\left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \text{ định nghĩa bởi: } \forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} (t,t) & \text{nếu } t \neq \frac{1}{2} \\ (\lambda, 1-\lambda) & \text{nếu } t = \frac{1}{2} \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2.1.2 Chú ý rằng M tăng.

Cho $x \in \mathbb{R}_+$; ta có: $\qquad \forall t \in [0; x], \quad \|f(t)\| \le A + \dfrac{1}{2}M(t) \le A + \dfrac{1}{2}M(x),$

từ đó suy ra: $\qquad M(x) \le A + \dfrac{1}{2}M(x),$

rồi: $\qquad M(x) \le 2A.$

Cuối cùng ta được : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \|f(t)\| \le M(x) \le 2A.$

2.1.3 Chú ý rằng: $\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \left(\dfrac{t}{2}, -\dfrac{3t^2}{(t^2+1)(t^4+1)}\right) = \left(t, \dfrac{1}{(t^2+1)}\right) - \left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\right).$

Ký hiệu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ là ánh xạ cho bởi: $\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(t) - \left(t, \dfrac{1}{(t^2+1)}\right),$

ta suy ra: $\qquad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = g\left(\frac{t}{2}\right) \\ g(0) = (0,0) \end{cases}.$

Với $t \in \mathbb{R}$ cố định ta có: $g(t) = g\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dots = g\left(\dfrac{t}{2^n}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} g(0)$, vì g liên tục tại 0, từ đó suy ra $g = 0$, rồi f. Hãy khảo sát phần đảo.

◊ **Trả lời:** $\left\{ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(t, \frac{1}{t^2+1}\right) \end{array} \right\}$.

2.1.4 Với mọi t thuộc $\mathbb{R}^*$, ta có: $\dfrac{f(t)}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{\operatorname{ch}\frac{t}{2} f\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)}$.

từ đó suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{2^n}\,\dfrac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2^n}\right)}$.

Từ đó ta suy ra giá trị của $f(t)$ bằng cách cho n dần đến $+\infty$ và sử dụng tính liên tục của f tại 0 và công thức $\dfrac{\operatorname{sh} u}{u} \underset{u\to 0}{\to} 1$.

Hãy khảo sát phần đảo.

◊ **Trả lời:** $\left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;\ \ \forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \left(-\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}, \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}\right) & \text{nếu } t\neq 0 \\ (-1, 1) & \text{nếu } t = 0 \end{cases} \right\}$.

2.1.5 Ánh xạ $t \mapsto |f(t)|^2 = (\operatorname{Re}(f(t)))^2 + (\operatorname{Im}(f(t)))^2$ liên tục trên bộ phận compac $[a; b]$ và lấy giá trị > 0. Hãy áp dụng 1.3.1, Hệ quả.

2.1.6 *a)* • Với mọi (x, t) thuộc $\mathbb{R}^2$ ta có:

$$g(x+t) - 2g(x) + g(x-t) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(f(-x+t)) - 2f(-x) + f(-x-t)\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Nói riêng: $g(t) - 2g(0) + g(-t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$; do g chẵn nên ta suy ra:

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\to} g(0).$$

• Nhưng khi đó thì với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ cố định ta sẽ có :

$$g(x+t) - 2g(x) + g(x-t) = g(t+x) - 2g(x) + g(t-x) \underset{t\to+\infty}{\to} g(0) - 2g(x) + g(0).$$

Ta kết luận được rằng: $\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = g(0)$.

b) α) Trước hết ta thấy:

$$h(t+x) - 2h(x) - h(t-x) = h(x+t) - 2h(x) + h(x-t)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\right) - \frac{1}{2}\left(f(-x-t) - 2f(-x) + f(-x+t)\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0,$$

với mọi (x, t) thuộc $\mathbb{R}^2$.

Cho $x \in \mathbb{R}_+^*$, và $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Bigg(n \geq N \Rightarrow \left\| h\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x + \frac{x}{2}\right) - 2h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \frac{x}{2}\right)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \left\| h(nx) - 2h\left(\frac{x}{2}\right) - h\left((n-1)x\right)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg).$$

Áp dụng bất đẳng thức thu được cho $N+1, \ldots, n$, rồi cộng lại và sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta được:

$$\left\| h(nx) - 2(n-N)h\left(\frac{x}{2}\right) - h(Nx) \right\| \le (n-N)\,\frac{\varepsilon}{2},$$

với mọi n thỏa mãn $n \ge N$, từ đó ta suy ra:

$$\left\| \frac{h(nx)}{n-N} - 2h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{h(Nx)}{n-N} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

rồi:
$$\left\| \frac{h(nx)}{n-N} - 2h\left(\frac{x}{2}\right) \right\| \le \frac{\|h(Nx)\|}{n-N} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vì $\dfrac{\|h(Nx)\|}{n-N} \underset{n\infty}{\to} 0$, nên tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $\begin{cases} N_1 \ge N \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \ge N_1 \Rightarrow \dfrac{\|h(Nx)\|}{n-N} \le \dfrac{\varepsilon}{2}) \end{cases}$

Khi đó ta có: $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \ge N_1 \ \Rightarrow\ \left\| \dfrac{h(nx)}{n-N} - 2h\left(\dfrac{x}{2}\right) \right\| \le \varepsilon\right)$.

Điều này chứng tỏ rằng $\dfrac{h(nx)}{n-N} \underset{n\infty}{\to} 2h\left(\dfrac{x}{2}\right)$, và do đó $\dfrac{h(nx)}{n} \underset{n\infty}{\to} 2h\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Vì h là hàm lẻ, nên ta cũng có tính chất này khi $x < 0$; trường hợp $x = 0$ thì hiển nhiên.

β) Cho $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$; tồn tại $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sao cho $r = \dfrac{p}{q}$. Khi đó với $m \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{mq} h\left(mq\left(\dfrac{2px}{q}\right)\right) \underset{m\infty}{\to} 2h\left(\dfrac{2px}{2q}\right) = 2h(rx) \\ \dfrac{1}{mq} h\left(mq\left(\dfrac{2px}{q}\right)\right) = \dfrac{p}{q}\dfrac{1}{mp} h\big(mp(2x)\big) \underset{m\infty}{\to} \dfrac{p}{q} 2h\left(\dfrac{2x}{2}\right) = 2rh(x) \end{cases},$$

bằng cách sử dụng tính lẻ của h cho trường hợp $p < 0$.

γ) Ánh xạ $r \mapsto h(r) - rh(1)$ liên tục và triệt tiêu trên bộ phận $\mathbb{Q}$ của $\mathbb{R}$, bộ phận này trù mật trong $\mathbb{R}$, do đó ánh xạ đang xét bằng không.

c) Theo *a)*, g là ánh xạ hằng; theo *b)*, h có dạng $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xA \end{array}$, $A \in E$. Và $f = g + h$.

2.2.1 Ký hiệu $g = \mathrm{Re}(f)$, $h = \mathrm{Im}(f)$; g và h khả vi trên I và $f = g + ih$. Ta có:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{gg' + hh'}{g^2 + h^2} = \frac{1}{2}(\ln \circ (g^2 + h^2))' = (\ln|f|)'.$$

Rồi ta có: $|f| \nearrow \ \Leftrightarrow\ \ln \circ |f| \nearrow \ \Leftrightarrow\ (\ln|f|)' \ge 0.$

2.2.2 Ta lập luận phản chứng; giả thiết f có vô hạn không điểm. Vì $[a; b]$ compac nên khi đó tồn tại một dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ những không điểm của f và c thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \ne c \\ x_n \underset{n\infty}{\to} c \end{cases}$$

Do tính liên tục của f, ta suy ra $f(c) = 0$; rồi theo giả thiết: $f'(c) \ne 0$.

Vì $\dfrac{f(x)}{x - c} \underset{x \to c}{\to} f'(c) \ne 0$, nên trong lân cận của c (trừ ra tại c) f không triệt tiêu, mâu thuẫn với cách cho c.

2.2.3 Ký hiệu cơ sở chính tắc $(e_1, \dots, e_n)$ của $\mathbb{F}^n$ là $\mathcal{B}$; do tính chất đa tuyến tính và tính đan dấu, ta được:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(e_1 + tf(e_1), \dots, e_n + tf(e_n)) = 1 + t\sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n) + \underset{t\to 0}{o}(t),$$

từ đó suy ra: $$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \underset{t\to 0}{\to} \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n).$$

Ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}$ là ma trận của f đối với $\mathcal{B}$, ta được:

$$\sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & & 0 & a_{1i} & & & \\ & \ddots & & \vdots & 0 & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & a_{ii} & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & 0 & \vdots & & \ddots & \\ & & & a_{ni} & 0 & & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(f).$$

◊ **Trả lời:** $\varphi'(0) = \operatorname{tr}(f)$.

2.2.4 *1)* Các định lý tổng quát chứng tỏ rằng f khả vi tại mọi điểm thuộc $]-1; 1[- \{0\}$.

Mặt khác ta có: $$\frac{1}{t}(f(t) - f(0)) = \begin{cases} \left(t\sin\frac{1}{t}, t\cos\frac{1}{t}\right) & \underset{t\to 0^+}{\to} (0,0) \\ (0,0) & \underset{t\to 0^-}{\to} (0,0) \end{cases},$$

do đó f khả vi tại 0, và $f'(0) = (0, 0)$.

2) $\forall t \in]0; 1[,\quad \|f'(t)\|_2^2 = \left(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right)^2 + \left(2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\right)^2 = 4t^2 + 1 \geq 1.$

Như vậy $f'(]-1; 1[)$ là hợp của $\{(0, 0)\}$ và một bộ phận không rỗng của $\mathbb{F}^2$ nằm ngoài hình cầu B(0; 1). điều này chứng tỏ rằng $f'(]-1; 1[)$ không liên thông cung.

2.2.5 Ánh xạ $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad D_n(t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t} & \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \dots & \alpha_1^{n-1} e^{\alpha_1 t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{\alpha_n t} & \alpha_n e^{\alpha_n t} & \dots & \alpha_n^{n-1} e^{\alpha_n t} \end{vmatrix}$$

khả vi trên $\mathbb{R}$ và (xem 2.2.3, Mệnh đề) ta có:

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad D_n'(t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t} & \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \dots & \alpha_1^{n-2} e^{\alpha_1 t} & \alpha_1^{n} e^{\alpha_1 t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ e^{\alpha_n t} & \alpha_n e^{\alpha_n t} & \dots & \alpha_n^{n-2} e^{\alpha_n t} & \alpha_n^{n} e^{\alpha_n t} \end{vmatrix}$$

(các định thức khác đều có hai cột bằng nhau).

Vậy định thức phải tìm là $D_n'(0)$. Nhưng mặt khác ta có:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad D_n(t) = e^{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)t}\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1}\end{vmatrix} = e^{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)t}\prod_{n\ge i>j\ge 1}(\alpha_i-\alpha_j)$$

(định thức Vandermonde).

◊ **Trả lời:** $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\prod_{n\ge i>j\ge 1}(\alpha_i-\alpha_j)$.

2.3.1 *a) 1)* **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}$ cố định và $n \ge 2$ ta có:

$$f_n(x) = n\text{Arctan}\frac{\left(x+\frac{1}{n}\right)-\left(x-\frac{1}{n}\right)}{1+\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)} = n\text{Arctan}\left(\frac{\frac{2}{n}}{1+x^2-\frac{1}{n^2}}\right)\underset{n\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{1+x^2}.$$

2) **Hội tụ đều**

Hãy chứng tỏ (bằng cách khảo sát sự biến thiên của các hàm số) rằng:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \le t - \text{Arctan}\, t \le \frac{t^3}{3}.$$

Từ đó suy ra, với mọi $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ và $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \frac{2}{1+x^2-\frac{1}{n^2}} - f_n(x) \le \frac{8}{3n}.$$

Mặt khác ta có:

$$0 \le \frac{2}{1+x^2-\frac{1}{n^2}} - \frac{2}{1+x^2} \le \frac{2}{n^2}.$$

Từ đó suy ra: $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, trong đó $f : x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$.

◊ **Trả lời:** $(f_n)_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ đến $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{1+x^2}\end{array}$.

b) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \text{Arctan}\frac{1}{x}$. Và $f_n(0) = \text{Arctan}\, n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

2) **Hội tụ đều**

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, ta có:

$$\left|f_n(x) - \text{Arctan}\frac{1}{x}\right| = \left|\text{Arctan}\frac{\frac{n+x}{1+nx}-\frac{1}{x}}{1+\frac{n+x}{1+nx}\frac{1}{x}}\right| = \left|\text{Arctan}\left(\frac{x^2-1}{nx^2+n+2x}\right)\right|$$

$$\le \frac{\left|x^2-1\right|}{nx^2+n+2x} \le \frac{x^2+1}{n\left(x^2+1\right)+2x} \le \frac{1}{n}.$$

◊ **Trả lời:** $(f_n)_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$ đến $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, x\end{array}$.

c) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in]0;1[$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ vì hàm mũ chiếm ưu thế so với hàm lũy thừa; và $f_n(0) = f_n(1) = 0$.

2) **Hội tụ đều**

Trước hết chú ý rằng:

$$f_n(1-\frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{e}n^{\alpha-1}.$$

- Nếu $\alpha \geq 1$, thì $(f_n)_n$ không hội tụ đều đến 0 trên $[0;1]$ vì $f_n(\frac{1}{n}) \underset{n\infty}{\not\to} 0$.

Nhưng với mọi c thuộc $]0; \frac{1}{2}]$ thì $(f_n)_n$ hội tụ đều đến 0 trên $[c; 1-c]$ vì:

$$\forall x \in [c; 1-c], \quad 0 \leq f_n(x) \leq 2n^{\alpha}(1-c)^{n+1}.$$

- Nếu $\alpha < 1$, hãy chứng minh rằng tồn tại $C \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ x^n(1-x) \leq \frac{C}{n},$$

từ đó suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], 0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{2C}{n^{1-\alpha}}$.

◊ **Trả lời:**
- Nếu $\alpha < 1$, $(f_n)_n$ hội tụ đều đến 0 trên $[0;1]$
- Nếu $\alpha \geq 1$, $(f_n)_n$ không hội tụ đều đến 0 trên $[0; \frac{1}{2}]$, cũng như trên $[\frac{1}{2}; 1]$, nhưng hội tụ đều đến 0 trên mọi đoạn $[a;b]$ thỏa mãn $0 < a \leq b < 1$.

2.3.2 *a)* Bằng các phép đổi biến $t = x - n$, $u = x - \frac{n}{2}$, hãy chứng minh:

$$f_n(x) \underset{x\to n}{\longrightarrow} 0 \quad \text{và} \quad f_n(x) \underset{x\to\frac{n}{2}}{\longrightarrow} 0.$$

b) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}$ cố định, ta có với $n \geq 2E(|x|)+1$: $\quad |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n-x)\left(\frac{n}{2}-x\right)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

2) **Hội tụ đều**

Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định là $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{2\sin \pi t}{t} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 2\pi & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có giới hạn bằng 0 tại $+\infty$ và $-\infty$.

Từ đó suy ra rằng tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad |\varphi(t)| \leq M$.

Hơn nữa: $\quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |\varphi(t)| \leq \dfrac{1}{|t|}$.

Chú ý rằng: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \varphi(x-n)\varphi\left(x-\frac{n}{2}\right)$.

Cho $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $x \le \frac{3n}{4}$, thì $|\varphi(x-n)| \le \frac{1}{n-x} \le \frac{4}{n}$, và $\left|\varphi\left(x-\frac{n}{2}\right)\right| \le M$, từ đó suy ra

$$|f_n(x)| \le \frac{4M}{n}.$$

- Nếu $x \ge \frac{3n}{4}$, thì $|\varphi(x-n)| \le M$, và $\left|\varphi\left(x-\frac{n}{2}\right)\right| \le \frac{1}{x-\frac{n}{2}} \le \frac{4}{n}$, từ đó suy ra

$$|f_n(x)| \le \frac{4M}{n}.$$

Điều này chứng tỏ: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \le \frac{4M}{n}$.

◊ **Trả lời:** $(f_n)_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ đến 0.

2.3.3 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f_n(x) - f(x)| = \frac{|f(x)|}{1+n(f(x))^2}$.

Hãy khảo sát sự biến thiên của $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{1+nt^2}$ và suy ra rằng: $\|\varphi_n\|_\infty \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2.3.4 Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in Y, \quad (n > N \Rightarrow \|g_n(y) - g(y)\| < \varepsilon).$$

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > N$; ta có:

$$\forall x \in X, \quad \|g_n \circ f(x) - g \circ f(x)\| < \varepsilon.$$

2.3.5 Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in X$ sao cho $f_n(x_n) = 0$. Do X compac nên tồn tại một hàm trích σ và $l \in X$ thỏa mãn $x_{\sigma(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$. Như vậy ta có:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f(l) - f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\| \le \|f(l) - f(x_{\sigma(n)})\| + \|f(x_{\sigma(n)}) - f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\|$
- $f(x_{\sigma(n)}) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(l)$ (vì f liên tục tại l)
- $\|f(x_{\sigma(n)}) - f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ (vì $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f).

Như vậy: $f(l) = 0$.

2.3.6 $m \le f \le M \Rightarrow (M-f)(f-m) \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 (M-f)(f-m) \ge 0$

$$\Rightarrow -\int_0^1 f^2 + (m+M)\int_0^1 f - mM \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2 \le -mM.$$

2.3.7 $\int_0^1 (f(1-g))^2 + (g(1-f))^2 = \int_0^1 ((f^2+g^2+2f^2g^2) - 2fg(f+g)) = 0.$

Vì $(f(1-g))^2+(g(1-f))^2$ liên tục và ≥ 0, nên ta suy ra $(f(1-g))^2+(g(1-f))^2 = 0$, sau đó ta lại có $f(1-g) = g(1-f) = 0$, chứng tỏ rằng f và g lấy giá trị trong $\{0, 1\}$. Hãy sử dụng định lý giá trị trung gian.

2.3.8 Đặt $f = \sum_{k=1}^{n}|f_k|^2$; f liên tục, $f \geq 0, f \neq 0$, do đó $\int_a^b f > 0$.

Chọn $u_k = \dfrac{1}{\int_a^b f} f_k$.

2.3.9 Cho $\varepsilon > 0$; tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in \mathbb{R}^2,\ (|x'-x''| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')| \leq \varepsilon).$$

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq E\left(\frac{1}{\eta}\right) + 1$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [x; x+\frac{1}{n}],\quad |f(t)-f(x)| \leq \varepsilon,$

từ đó suy ra: $\forall x \in \mathbb{R},\quad |f_n(x)-f(x)| = n\left|\int_x^{x+\frac{1}{n}}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right|$

$$\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

2.3.10 Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta ký hiệu:

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{1<i<j\leq n}\frac{1}{\sqrt{ij}} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{2\leq i,j\leq n}\frac{1}{\sqrt{ij}} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2n}\left(\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

- Ánh xạ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ giảm trên $[1; +\infty[$, suy ra $\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \leq \int_1^{n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, tức là:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}) \leq \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2(\sqrt{n}-1),$$

và do đó: $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

- Tương tự: $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \underset{n}{\sim} \ln n$.

◊ **Trả lời:** 2.

2.3.11

Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, ta ký hiệu: $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$.

Phép đổi biến $y = t - k\pi$ cho: $I_k = (-1)^k J_k$, trong đó $J_k = \int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y+k\pi+1}\mathrm{d}y$

Hãy chứng minh rằng dãy $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ giảm, từ đó suy ra :

$$\forall p \in \mathbb{N},\qquad I_{2p}+I_{2p+1} = J_{2p} - J_{2p+1} \geq 0.$$

Cho $x \in [0; +\infty[$; tồn tại $n \in \mathbb{N}$, sao cho $2n\pi \leq x < (2n+1)\pi$ (chính xác hơn: $n = \mathrm{E}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$).

Khi đó ta có: $$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} I_k + \int_{2n\pi}^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t.$$

Một mặt ta có: $$\sum_{k=0}^{2n-1} I_k = \sum_{p=0}^{n-1}(I_{2p}+I_{2p+1}) \geq 0.$$

Mặt khác thì:

- nếu $2n\pi \leq x < (2n+1)\pi$, thì $\displaystyle\int_{2n\pi}^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t \geq 0$, do : $\forall t \in [2n\pi; x]$, $\dfrac{\sin t}{t+1} \geq 0$
- nếu $(2n+1)\pi \leq x < 2(n+1)\pi$, thì $\displaystyle\int_{2n\pi}^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t \geq I_{2n}+I_{2n+1} \geq 0$, vì:

  $[x; 2(n+1)\pi] \subset [(2n+1)\pi; 2(n+1)\pi]$ và $\forall t \in [(2n+1)\pi; 2(n+1)\pi]$, $\dfrac{\sin t}{t+1} \leq 0$.

2.3.12 $\dfrac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t(1+t+o(t))-(t+o(t^2))}{t^2+o(t^2)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, do đó ánh xạ

$t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \dfrac{1}{t}$ bị chặn trong lân cận 0; như thế tồn tại $\alpha > 0$, $M \geq 0$ sao cho:

$$\forall t \in\,]0; \alpha[,\qquad \left|\frac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \frac{1}{t}\right| \leq M.$$

Từ đó ta suy ra: $\forall x \in\,]0; \dfrac{\alpha}{2}[$, $\quad \left|\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin} t}\mathrm{d}t - \ln 2\right| = \left|\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\right| \leq Mx.$

◊ **Trả lời:** ln2.

2.3.13 Cho $\varepsilon \in\,]0; \dfrac{\pi}{2}[$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad 0 \leq \displaystyle\int_0^{\varepsilon}(\sin t)^x \mathrm{d}t \leq \varepsilon.$

Mặt khác, với mọi $x > 0$ ta có: $$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x \leq \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x \mathrm{d}t \leq \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

Do $\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall x \in\,]0; \eta[,\qquad \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x \geq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon.$$

Ta được: $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in\,]0; \eta[,\qquad \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\varepsilon}\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi}{2}$.

2.3.14 Cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại $\eta > 0$ sao cho: $\forall t \in [0; \eta[, \quad \|f(t) - f(0)\| \le \varepsilon$.

Vì $a^n \underset{n\infty}{\to} 0$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N \Rightarrow 0 \le a^n < \eta)$.

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > N$; ta có: $\forall x \in [0; 1], \quad 0 \le a^n x < \eta$,

từ đó suy ra: $\forall x \in [0; 1], \quad \|f(a^n x) - f(0)\| \le \varepsilon$,

và do đó: $$\int_0^1 \|f(a^n x) - f(0)\| \mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

◊ **Trả lời:** $f(0)$.

2.3.15 Cho $\varepsilon > 0$. Vì f liên tục tại 0 nên tồn tại $\eta \in]0; 1]$ sao cho:
$$\forall t \in [0; \eta], \quad |f(t) - f(0)| \le \varepsilon.$$

- Với mọi x thuộc $]0; \eta]$ ta có:

$$\left| x^{\alpha-1}\int_x^\eta \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t - x^{\alpha-1}\int_x^\eta \frac{f(0)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \right| \le x^{\alpha-1}\int_x^\eta \frac{|f(t)-f(0)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$
$$\le x^{\alpha-1}\varepsilon\int_x^\eta \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha-1}\left(1 - \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\alpha-1}\right) \le \frac{\varepsilon}{\alpha-1}.$$

Ta lại có: $$x^{\alpha-1}\int_x^\eta \frac{f(0)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{\alpha-1}\left(1 - \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\alpha-1}\right) \underset{x\to 0^+}{\to} \frac{f(0)}{\alpha-1}.$$

Kết quả này chứng tỏ rằng tồn tại $\eta_1 \in]0; \eta]$ sao cho:

$$\forall x \in]0; \eta_1], \quad \left| x^{\alpha-1}\int_x^\eta \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t - \frac{f(0)}{\alpha-1} \right| \le \frac{\varepsilon}{\alpha-1} + \varepsilon.$$

- $x^{\alpha-1}\int_\eta^1 \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ (vì η cố định).

Như thế tồn tại $\eta_2 \in]0; \eta]$ sao cho:

$$\forall x \in]0; \eta_2], \quad \left| x^{\alpha-1}\int_\eta^1 \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \right| \le \varepsilon.$$

Cuối cùng, với ký hiệu $\eta_3 = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, ta có:

$$\forall x \in]0; \eta_3], \quad \left| x^{\alpha-1}\int_x^1 \frac{f(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t - \frac{f(0)}{\alpha-1} \right| \le \frac{\varepsilon}{\alpha-1} + 2\varepsilon.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{f(0)}{\alpha-1}$.

2.3.16 Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1-t^2}{n}\right)^n dt$; bằng phép đổi biến $y = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ ta được:

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{1-ny^2}{n}\right)^n \sqrt{n}\,dy = n^{-n+\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-ny^2)^n dy .$$

Ký hiệu: $J_n = n^{-n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^{1-n^{-2/3}} (1-ny^2)^n dy$ và $K_n = n^{-n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_{1-n^{-2/3}}^1 (1-ny^2)^n dy$.

- Với n đủ lớn ta có:

$$|J_n| \le n^{-n+\frac{1}{2}} \int_0^{1-n^{-2/3}} \left|1-ny^2\right|^n dy \le n^{-n+\frac{1}{2}} \left(n\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2 - 1\right)^n$$

$$= n^{-n+\frac{1}{2}} \left(n - 2n^{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^n \le n^{-n+\frac{1}{2}} \left(n - n^{\frac{1}{3}}\right)^n = \sqrt{n}e^{n\ln(1-\frac{1}{n^{2/3}})}$$

$$= \sqrt{n}e^{-n^{1/3+o(n^{1/3})}} \underset{n\infty}{\to} 0.$$

- $|K_n| \le n^{-n+1/2} \dfrac{(n-1)^n}{n^{2/3}} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n \dfrac{1}{n^{1/6}} \le \dfrac{1}{n^{1/6}} \underset{n\infty}{\to} 0.$

◊ **Trả lời:** 0.

2.3.17 Cho $\varepsilon > 0$ cố định.

1) Vì f liên tục từng khúc trên $[a; b]$ nên tồn tại ánh xạ bậc thang $e : [a; b] \to E$ sao cho:

$$\|f-e\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad \text{(xem 2.3.3, Định lý).}$$

Khi đó với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ ta có:

$$\left\| \int_a^b f(t)\left|\sin(xt)\right| dt - \int_a^b e(t)\left|\sin(xt)\right| dt \right\| \le \int_a^b \|f(t) - e(t)\| \left|\sin(xt)\right| dt \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

2) Tồn tại một phân hoạch $a_0, \ldots a_N$ của $[a; b]$ tương thích với e; với mỗi i thuộc $\{0, \ldots, N-1\}$, ta ký hiệu giá trị của e trên $]a_i ; a_{i+1}[$ là Λ_i.

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ ta có:

$$\int_a^b e(t)\left|\sin(xt)\right| dt = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left|\sin(xt)\right| dt \right) \Lambda_i.$$

Cho $i \in \{0, \ldots, N-1\}$; bằng phép đổi biến $u = xt$, ta có với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left|\sin(xt)\right| dt = \frac{1}{x} \int_{xa_i}^{xa_{i+1}} \left|\sin u\right| du .$$

Với $i \in \{0, ..., N-1\}$ và x đủ lớn, tồn tại $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho:

$$(k-1)\pi < xa_i \le k\pi < ... < l\pi \le xa_{i+1} \le (l+1)\pi.$$

Khi đó ta có:

$$\frac{1}{x}\int_{xa_i}^{xa_{i+1}} |\sin u| \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_{xa_i}^{k\pi} |\sin u| \mathrm{d}u + \frac{l-k}{x}\int_0^{\pi} |\sin u| \mathrm{d}u + \frac{1}{x}\int_{l\pi}^{xa_{i+1}} |\sin u| \mathrm{d}u .$$

- $0 \le \frac{1}{x}\int_{xa_i}^{k\pi} |\sin u| \mathrm{d}u + \frac{1}{x}\int_{l\pi}^{xa_{i+1}} |\sin u| \mathrm{d}u \le \frac{2}{x}\int_0^{\pi} |\sin u| \mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$

- $\frac{l-k}{x}\int_0^{\pi} |\sin u| \mathrm{d}u = \frac{2(l-k)}{x}.$

Vì $(l-k)\pi \le x(a_{i+1}-a_i) < ((l+1)-(k-1))\pi$, nên ta có:

$$\frac{2(a_{i+1}-a_i)}{\pi} - \frac{4}{x} < 2\frac{l-k}{x} \le \frac{2(a_{i+1}-a_i)}{\pi}.$$

Như thế ta được: $$\frac{1}{x}\int_{xa_i}^{xa_{i+1}} |\sin u| \mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{2}{\pi}(a_{i+1}-a_i),$$

từ đó suy ra: $$\int_a^b e(t)|\sin(xt)| \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{N-1}(a_{i+1}-a_i)\,\Lambda_i = \frac{2}{\pi}\int_a^b e .$$

Như vậy tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x \ge x_0 \Rightarrow \left\|\int_a^b e(t)|\sin(xt)| \mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b e\right\| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Mặt khác thì:

$$\left\|\frac{2}{\pi}\int_a^b e - \frac{2}{\pi}\int_a^b f\right\| \le \frac{2}{\pi}\int_a^b \|e-f\| \le \frac{2\varepsilon}{3\pi} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Như vậy với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $x \ge x_0$ ta có:

$$\left\|\int_a^b f(t)|\sin(xt)| \mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt\right\| \le \varepsilon.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{2}{\pi}\int_a^b f$.

2.3.18 *1)* Vì $\dfrac{\cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^4} \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{24}$, nên tồn tại $(\alpha, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho:

$$\forall x \in [-\alpha; \alpha], \qquad \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \le Ax^4.$$

2) Ký hiệu $u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}-1\right)$ và $v_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{-1}{2(n+k)}$, ta có:

$$|u_n - v_n| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}-\left(1-\frac{1}{2(n+k)}\right)\right)\right| \le A\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \le \frac{A(n+1)}{n^2} \underset{n\infty}{\rightarrow} 0,$$

với mọi n $x \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge \frac{1}{\alpha^2}$.

3) $$v_n = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\infty}{\rightarrow} -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

◊ **Trả lời:** $-\frac{1}{2}\ln 2.$

2.3.19 Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ký hiệu:

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}, \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

1) Hãy chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x.$

2) Do: $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - v_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)},$$

ta suy ra:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le u_n - v_n \le \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k^3\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} \le \frac{n+1}{2n^3\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \underset{n\infty}{\rightarrow} \frac{1}{n} \underset{n\infty}{\rightarrow} 0.$$

3) $$v_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n+p} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{p}{n}} \underset{n\infty}{\rightarrow} \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

◊ **Trả lời:** $\ln 2.$

2.3.20 Do: $z\int_a^b e^{-zt}\mathrm{d}t = \left[-e^{-zt}\right]_a^b = e^{-az} - e^{-bz}$,

ta suy ra: $$\left|e^{-az}-e^{-bz}\right| = |z|\left|\int_a^b e^{-zt}\mathrm{d}t\right|$$
$$\le |z|\int_a^b\left|e^{-zt}\right|\mathrm{d}t = |z|\int_a^b e^{-xt}\mathrm{d}t = |z|\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_a^b = \frac{|z|}{x}\left(e^{-ax}-e^{-bx}\right).$$

2.3.21 Do $t \mapsto \|f(t)\|$ liên tục trên tập compac $[0; 1]$, nên tồn tại $(t_1, t_2) \in ([0; 1])^2$ sao cho:

$$\|f(t_1)\| = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Sup}} \|f(t)\|, \qquad \|f(t_2)\| = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Inf}} \|f(t)\|.$$

Khi đó ta có:

$$\|f(t_1)\| \le \|f(t_1) - f(t_2)\| + \|f(t_2)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\mathrm{d}t\right\| + \|f(t_2)\|$$

$$\le \left|\int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\|\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 \|f(t)\|\mathrm{d}t \le \int_0^1 \|f'(t)\|\mathrm{d}t + \int_0^1 \|f(t)\|\mathrm{d}t.$$

2.3.22 *a)* $\left((f(b))^2 - (f(a))^2\right)^2 = \left(\int_a^b (f^2)'(t)\mathrm{d}t\right)^2 = 4\left(\int_a^b f(t)f'(t)\mathrm{d}t\right)^2$, và áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho $f'\sqrt{g}$ và $\dfrac{f}{\sqrt{g}}$.

b) Áp dụng kết quả ở *a)* cho trường hợp: $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, $f(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cos(2k-1)t$, $g = 1$.

Khi đó ta có:

- $f(b) = 0, \quad f(a) = \sum_{k=1}^{n} x_k$

- $$\int_a^b f'^2 g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)x_k \sin(2k-1)t\right)^2 \mathrm{d}t = \sum_{1\le p,q\le n} (2p-1)(2q-1)x_p x_q I_{p,q},$$

trong đó: $$I_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2p-1)t\sin(2q-1)t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2(p-q)t - \cos 2(p+q-1)t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p \ne q \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{nếu } p = q \end{cases}.$$

Từ đó suy ra: $$\int_a^b f'^2 g = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 x_k^2.$$

- Hãy chứng minh tương tự rằng: $$\int_a^b \frac{f^2}{g} = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

2.3.23 *a)* MXĐ$(f) = \mathbb{R}_+^*$; f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}_+^*$ và:

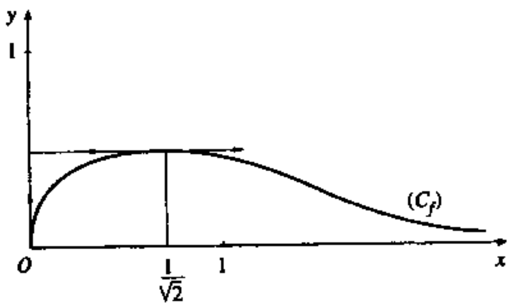
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{8x^3+2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$$

$$= \frac{-2(2x^2-1)}{\sqrt{x}\sqrt{8x^2+2}\sqrt{x^2+1}\left(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{8x^2+2}\right)}.$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗		↘	

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,485.$

Khảo sát tại 0^+ :



$$\begin{cases} 0 < f(x) \le \dfrac{x}{\sqrt{x^3+x}} \le \sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$$

Khảo sát tại $+\infty$:

$$0 < f(x) \le \frac{x}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) • MXĐ$(f) = \mathbb{R}^*$.

• $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\text{ch}t}{t}\,dt = \int_{x}^{2x} \frac{\text{ch}u}{u}\,du = f(x)$, vậy f chẵn.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	↗	

• f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}_+^*$ và: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) = 2\dfrac{\text{ch}2x}{2x} - \dfrac{\text{ch}x}{x} = \dfrac{\text{ch}2x - \text{ch}x}{x} > 0.$

Khảo sát tại 0^+

Do $\dfrac{\text{ch}t - 1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{t}{2}$, nên tồn tại $(\alpha, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho:

$$\forall x \in \,]0;\alpha[,\qquad \left|\frac{\text{ch}t-1}{t}\right| \le At.$$

Từ đó suy ra: $$\left|f(x)-\int_x^{2x}\frac{dt}{t}\right| = \int_x^{2x}\frac{\text{ch}t-1}{t}dt \le \int_x^{2x}At\,dt = \frac{3}{2}Ax^2$$

với mọi x thuộc $]0;\frac{\alpha}{2}[$.

Vì $\int_x^{2x}\frac{dt}{t} = \ln 2$, nên điều này chứng tỏ $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ln 2$. Vậy ta thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = \ln 2$, và khi đó ta có:

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \le \frac{3}{2}Ax \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

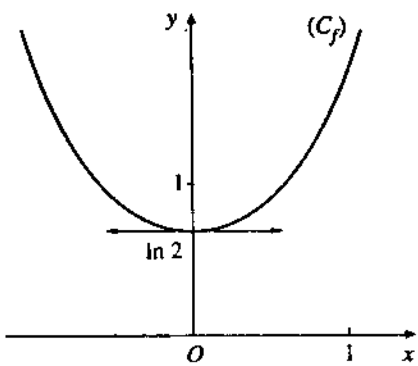
chứng tỏ rằng f khả vi tại 0 và $f'(0) = 0$.

Nhận xét: Dưới đây (Tập 4, chương 5), ta sẽ thấy là ánh xạ $t \mapsto \begin{cases}\frac{\text{ch}t-1}{t} & \text{nếu } t\neq 0\\ 0 & \text{nếu } t=0\end{cases}$ có một khai triển thành chuỗi nguyên có tâm tại 0 và bán kính ∞, điều này cho phép ta suy ra cùng một tính chất cho f, và do đó f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

Khảo sát tại $+\infty$

Hãy chứng minh: $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \text{ch}t \ge \frac{t^2}{2}$,

từ đó suy ra: $f(x) \ge \int_x^{2x}\frac{t}{2}dt = \frac{3}{4}x^2$.



Như thế (C_f) nhận một nhánh parabôlic với phương tiệm cận (Oy).

c) • Nếu $x \le 0$ thì $\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ không xác định.

Nếu $x > 0$ và $x \neq 1$, thì ánh xạ $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ liên tục trên $[x; x^2]$, và do đó $f(x)$ tồn tại.

Cuối cùng, $f(1)$ không xác định.

Như vậy MXĐ$(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

- f thuộc lớp C^1 trên MXĐ(f) và: $\forall x \in$ MXĐ(f), $f'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$		↗	‖	↗	

Khảo sát tại 0^+

Với $x \in]0; 1[$: $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{-\ln t}$, từ đó suy ra: $0 \le f(x) \le \dfrac{x-x^2}{-\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, chứng tỏ rằng

$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Vậy ta thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = 0$.

Sau đó ta lại có: $0 \le \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \le -\dfrac{1-x}{\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, vậy f khả vi tại 0 và $f'(0) = 0$.

- **Khảo sát tại 1**

Phép đổi biến $u = \ln t$ cho ta: $$f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u}{u} du,$$

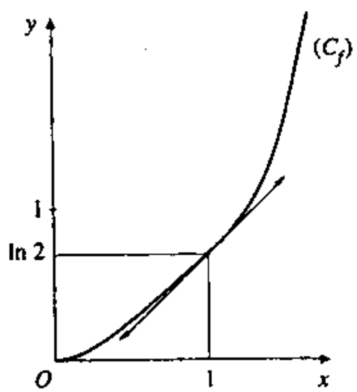
từ đó ta suy ra: $$\left| f(x) - \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1}{u} du \right| = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u - 1}{u} du \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0,$$

vì ánh xạ $u \mapsto \dfrac{e^u - 1}{u}$ bị chặn trong lân cận của 0.

Như vậy: $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln 2$. Ta thác triển liên tục f bằng cách đặt $f(1) = \ln 2$.

Sau nữa: $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$, vậy f khả vi tại 1 và $f'(1) = 1$.

- **Khảo sát tại $+\infty$**



$$f(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t^2)}\mathrm{d}t = \frac{x^2 - x}{2\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \text{ và } \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x-1}{2\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Như thế (C_f) nhận một nhánh parabôlic với phương tiệm cận (Oy).

2.3.24 Với $x \in \mathbb{R}$, cố định, ánh xạ $\psi : y \mapsto \displaystyle\int_{x-2y}^{x+2y} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t + \mathrm{ch}x}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \psi'(y) = \frac{2}{\mathrm{ch}(x+2y)+\mathrm{ch}x} - \frac{-2}{\mathrm{ch}(x-2y)+\mathrm{ch}x} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}y} + \frac{1}{\mathrm{ch}(x-y)\mathrm{ch}y}$$

$$= \frac{\mathrm{ch}(x-y)+\mathrm{ch}(x+y)}{\mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}(x-y)\mathrm{ch}y} = \frac{2\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}(x-y)}.$$

Nếu $x \neq 0$: $$\psi'(y) = \frac{\mathrm{sh}2x}{2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}(x+y)\mathrm{ch}(x-y)} = \frac{1}{\mathrm{sh}x}\left(\frac{\mathrm{sh}(x+y)}{\mathrm{ch}(x+y)} + \frac{\mathrm{sh}(x-y)}{\mathrm{ch}(x-y)}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\ln\frac{\mathrm{ch}(x+y)}{\mathrm{ch}(x-y)}\right).$$

Nếu $x = 0$: $$\psi'(y) = \frac{2}{\mathrm{ch}^2 y}.$$

◊ **Trả lời:** $$\int_{x-2y}^{x+2y} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t\,\mathrm{ch}x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{sh}x}\ln\dfrac{\mathrm{ch}(x+y)}{\mathrm{ch}(x-y)} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2\mathrm{th}y & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

2.3.25 *a)* Do các vai trò của x và của y đối xứng, nên ta có thể giả thiết, chẳng hạn, $x \leq y$. Khi đó ta có:

$$\left|(y-a)\int_a^x f - (x-a)\int_a^y f\right| = \left|(y-x)\int_a^x f - (x-a)\int_x^y f\right|$$

$$\leq (y-x)\int_a^x |f| + (x-a)\int_x^y |f| \leq (y-x)\int_a^b |f| + (x-a)\int_a^b |f|$$

$$\leq (y-a)\int_a^b |f| \leq (b-a)\int_a^b |f|.$$

b) Giả thiết có đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức ở *a)*. Theo sự khảo sát ở *a)*, khi đó ta sẽ có:

$$\begin{cases} (y-x)\displaystyle\int_a^x |f| = (y-x)\int_a^b |f| \\ (x-a)\displaystyle\int_x^y |f| = (x-a)\int_a^b |f| \end{cases}.$$

Nếu $x = y$ hay $x = a$, ta có ngay $\int_a^b |f| = 0$, từ đó suy ra $f = 0$ (theo giả thiết f liên tục).

Nếu $x \neq y$ và $x \neq a$, thì ta suy ra $\int_x^b |f| = 0$, $\int_a^x |f| = 0$, $\int_y^b |f| = 0$, sau đó $f = 0$.

2.3.26 Bằng cách áp dụng bài tập 2.3.25, *a)* cho $f - \lambda$ và b thay vì f và y theo thứ tự, ta được:

$$\left|(b-a)\int_a^x (f-\lambda) - (x-a)\int_a^b (f-\lambda)\right| \leq (b-a)\int_a^b |f-\lambda|,$$

từ đó suy ra: $$\left|\int_a^x f - \mu(x-a)\right| \leq \int_a^b |f-\lambda|.$$

2.3.27 Với mọi (k, x) thuộc $\{1, \ldots, n\}\times\{0, 1\}$, ta ký hiệu $M_{k,x} = \sup\limits_{t\in[0;x]} |f_k(t)|$ ($M_{k,x}$ tồn tại vì f_k liên tục trên đoạn $[0; 1]$).

Với mọi (k, x) thuộc $\{1, \ldots, n\}\times\{0, 1\}$, ta có:

$$\forall u \in [0; x],\quad |f_{k+1}(u)| = \left|\int_0^u f_k(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^u |f_k(t)|\mathrm{d}t \leq uM_{k,x} \leq xM_{k,x},$$

trong đó ta ký hiệu $f_{n+1} = f_1$.

Ta suy ra:

$$\forall x \in [0; 1],\quad M_{1,x} \leq xM_{n,x} \leq x^2 M_{n-1,x} \leq \ldots \leq x^n M_{1,x},$$

vậy: $$\forall x \in [0;1],\ (1 - x^n)M_{1,x} \leq 0.$$

Từ đó có: $(\forall x \in [0; 1[,\quad M_{1,x} = 0)$, rồi $(\forall x \in [0; 1[,\quad f_1(x) = 0)$, sau đó theo tính liên tục của f_1 ta được $f_1 = 0$.

Khi đó thì: $f_2 = \ldots = f_n = 0$.

2.3.28 Với $y \in \mathbb{R}$ cố định ta có: $$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq |x-y|^{\alpha-1} \underset{x\to y}{\longrightarrow} 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng f khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f' = 0$, do đó f là ánh xạ hằng.

Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & C\end{matrix};\ C \in \mathbb{C}\right\}$.

2.3.29 *a)* $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2}\mathrm{d}x \underset{\theta=\operatorname{Arccos} x}{=} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)+2}\mathrm{d}\theta$$

$$\underset{\varphi=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}}{=}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi+1}\mathrm{d}\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2\varphi-1}{\cos\varphi+1}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos\varphi-4+\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right)\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}-\pi+2(\sqrt{2}-1).$$

◊ **Trả lời:** $4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0{,}515\,262.$

b) Phép đổi biến $u=\dfrac{\pi}{2}-x$ chứng tỏ rằng $I=J$. Mặt khác thì:

$$I+J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}\mathrm{d}x \underset{t=x-\frac{\pi}{4}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)}}\mathrm{d}t$$

$$\underset{u=\sin t}{=} 2\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{3}{2}-u^2}} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

◊ **Trả lời:** $I=J=\sqrt{2}\,\mathrm{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}870\,420.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2\theta}\frac{x}{\cos(x-\theta)}\mathrm{d}x \underset{u=x-\theta}{=} \int_{-\theta}^{\theta}\frac{u+\theta}{\cos u}\mathrm{d}u = 2\theta\int_{0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$ (do tính chẵn) $=2\theta\left[\ln\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{u}{2}\right)\right|\right]_0^{\theta}.$

◊ **Trả lời:** $2\theta\ln\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)\right|.$

2.3.30 *a)* $\displaystyle I=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\mathrm{d}t \underset{u=a-t}{=} \int_{0}^{a}\frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\mathrm{d}u,$

từ đó suy ra: $\displaystyle 2I=\int_{0}^{a}\frac{f(t)+f(a-t)}{f(t)+f(a-t)}\mathrm{d}t = a.$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{a}{2}.$

b) ◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{4}.$

2.3.31 *a)* Ánh xạ F thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và: $\forall x\in]0;+\infty[,\quad F'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}.$

Ánh xạ $G:\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và với mọi x thuộc $]0;+\infty[$ ta có:

$$G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x} = 0,$$

vậy G là ánh xạ hằng trên $]0; +\infty[$.
Hơn nữa, $F(1) = 0$, do đó $G(1) = 0$.
Cuối cùng thì: $\forall x \in \,]0; +\infty[\,, \quad G(x) = 0.$

b) Với mọi x thuộc $]0; +\infty[$, ta có:

$$\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{t}\mathrm{d}t = \ln x\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^x \frac{\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{t}\mathrm{d}t$$

$$\underset{\left[u=\frac{t}{x}\right]}{=} (\ln x)^2 + \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u = (\ln x)^2 - F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + F(x).$$

2.3.32 Chỉ cần áp dụng công thức: $<f, g>' = <f', g> + <f, g'>$ (xem 2.2.3, Hệ quả).

2.3.33 Vì $({}^{\mathrm{t}}XY)' = {}^{\mathrm{t}}X'Y + {}^{\mathrm{t}}XY'$, nên ta có:

$$\int_a^b {}^{\mathrm{t}}X(t)Y'(t)\mathrm{d}t = \left[{}^{\mathrm{t}}X(t)Y(t)\right]_a^b - \int_a^b {}^{\mathrm{t}}X'(t)Y(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b {}^{\mathrm{t}}X(t)AY(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2.3.34
$$\int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}(\operatorname{Arctan} x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \left(\left[x\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} x)^2\right]_0^1.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}178\,026.$

2.3.35 *a)* Bằng cách tích phân từng phần, ta có:

$$\int_a^x (t-a)f'(t)\mathrm{d}t = \left[(t-a)f(t)\right]_a^x - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = (x-a)f(x) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_x^b (t-b)f'(t)\mathrm{d}t = \left[(t-b)f(t)\right]_x^b - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = -(x-b)f(x) - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t,$$

từ đó bằng cách cộng từng vế ta suy ra kết luận mong muốn.

b) α) $$(b-a)\|f(x)\| \le \left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| + \int_a^x (t-a)\|f'(t)\|\mathrm{d}t \quad \int_a^x (t-a)\|f'(t)\|\mathrm{d}t + \int_x^b (b-t)\|f'(t)\|\mathrm{d}t$$

$$\leq \left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| + (b-a)\left(\int_a^x \|f'(t)\|\mathrm{d}t + \int_x^b \|f'(t)\|\mathrm{d}t \right).$$

β) $$(b-a)\left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| \leq \left\| \int_a^b f \right\| + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\|f'(t)\|\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)\|f'(t)\|\mathrm{d}t .$$

$$\leq \left\| \int_a^b f \right\| + \frac{b-a}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f'(t)\|\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f'(t)\|\mathrm{d}t \right)$$

2.3.36 Vì $\lambda > 0$, nên f'' không triệt tiêu trong $[a; b]$; do f'' liên tục trên đoạn $[a; b]$, nên khi đó định lý giá trị trung gian chứng tỏ rằng f'' có dấu không đổi trên $[a; b]$.

Nếu $f'' \leq 0$, thì khi ký hiệu $g = -f$, ta thấy g thuộc lớp C^2 trên $[a; b]$, $g'' = -f'' \geq \lambda > 0$, và:

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{if(t)}\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ig(t)}\mathrm{d}t \right| = \left| \overline{\int_a^b \mathrm{e}^{ig(t)}\mathrm{d}t} \right| = \left| \int_a^b \mathrm{e}^{ig(t)}\mathrm{d}t \right| .$$

Vậy ta có thể giả thiết $f'' \geq \lambda > 0$.

Nếu $b - a \leq \dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}$ thì:

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{if(t)}\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b \left| \mathrm{e}^{if(t)} \right| \mathrm{d}t = b - a \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{8}{\sqrt{\lambda}} .$$

Như thế ta có thể giả thiết $b - a > \dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}$.

1) Một trường hợp đặc biệt: Giả thiết $\forall t \in [a; b], f'(t) \geq 0$.
Khi đó ta có:

$$\forall t \in [a + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} ; b], \quad f'(t) = f'(a) + \int_a^t f''(u)\mathrm{d}u \geq \lambda(t-a) \geq 2\sqrt{\lambda} .$$

Một phép tích phân từng phần cho ta:

$$\int_{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^b \mathrm{e}^{if(t)}\mathrm{d}t = \int_{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^b \frac{1}{if'(t)}\left(\mathrm{e}^{if(t)} if'(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{if(t)}}{if'(t)} \right]_{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^b + \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^b \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}\mathrm{e}^{if(t)}\mathrm{d}t ,$$

Từ đó suy ra:

$$\left|\int_{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^{b} e^{if(t)}dt\right| \le 2\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \int_{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^{b} \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \left(\frac{1}{f'\left(a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \frac{1}{f'(b)}\right) \le \frac{2}{\sqrt{\lambda}}.$$

Mặt khác thì: $$\left|\int_{a}^{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} e^{if(t)}dt\right| \le \int_{a}^{a+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} dt = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}.$$

Như thế ta được: $$\left|\int_a^b e^{if(t)}dt\right| \le \frac{4}{\sqrt{\lambda}}.$$

2) Trường hợp tổng quát

Vì $f'' \ge \lambda > 0$, nên f' tăng nghiêm ngặt, do đó chỉ triệt tiêu tại nhiều nhất một điểm thuộc $[a; b]$.

Trường hợp $f' \ge 0$ đã được khảo sát trên đây ở *1)*. Trường hợp $f' \le 0$ có thể quy về trường hợp đó bằng cách xét ánh xạ $\begin{array}{ccc} [-b;-a] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & f(-u) \end{array}$ thay vì f.

Bây giờ ta giả thiết f' triệt tiêu tại một (và chỉ một) điểm c thuộc $[a; b]$. Bằng cách áp dụng kết quả ở *1)* cho thu hẹp của f trên $[c; b]$, ta được:

$$\left|\int_c^b e^{if(t)}dt\right| \le \frac{4}{\sqrt{\lambda}}.$$

Ta cũng có thể áp dụng kết quả ở *1)* cho ánh xạ $\begin{array}{ccc} [-c;-a] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & f(-u) \end{array}$, từ đó suy ra:

$$\left|\int_a^c e^{if(t)}dt\right| \le \frac{4}{\sqrt{\lambda}}.$$

Cuối cùng ta được: $$\left|\int_a^b e^{if(t)}dt\right| \le \frac{8}{\sqrt{\lambda}}.$$

2.3.37 Bằng cách áp dụng hai lần công thức Taylor với phần dư tích phân, ta được với mọi t thuộc $[-a; a]$:

$$\begin{cases} f(a) = f(t) + (a-t)f'(t) + \displaystyle\int_t^a (a-u)f''(u)du \\ f(-a) = f(t) + (-a-t)f'(t) + \displaystyle\int_t^{-a} (-a-u)f''(u)du \end{cases}$$

từ đó bằng cách trừ từng vế: $f'(t) = \frac{1}{2a}(f(a) - f(-a)) - \frac{1}{2a}A(a, t)$

trong đó $$A(a, t) = \int_t^a (a-u)f''(u)\mathrm{d}u + \int_t^{-a}(a+u)f''(u)\mathrm{d}u.$$

Ta có: $$\|A(a,t)\| \le \int_t^a (a-u)\|f''(u)\|\mathrm{d}u + \int_{-a}^t (a+u)\|f''(u)\|\mathrm{d}u$$

$$\le M_2\left(\int_t^a (a-u)\mathrm{d}u + \int_{-a}^t (a+u)\mathrm{d}u\right) = M_2\left(a^2 + t^2\right),$$

trong đó ta ký hiệu $M_2 = \sup\limits_{u\in[-a;a]} \|f''(u)\|$.

2.3.38 *1)* Trước hết chú ý rằng ánh xạ $\begin{array}{ccc}[0;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1-2x\cos t+x^2\end{array}$ lấy giá trị > 0 với mọi x thuộc $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, và do đó $I(x)$ tồn tại.

2) Với mọi x thuộc $]-1; 1[- \{0\}$, ta có:

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi\left(\ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right) - 2\ln|x|\right)\mathrm{d}t$$
$$= I(x) - 2\pi\ln|x|.$$

Như vậy ta có thể giới hạn vào việc tính $I(x)$ khi $x \in\,]-1; 1[$.

3) Ánh xạ $F : (x, t) \mapsto \ln(1-2x\cos t + x^2)$ liên tục trên $]-1; 1[\times [0; \pi]$, vậy (do có thể áp dụng định lý đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$), ánh xạ I thuộc lớp C^1 trên $]-1; 1[$ và:

$$I'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{2x - 2\cos t}{1 - 2x\cos t + x^2}\mathrm{d}t \underset{u=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2x - 2\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 - 2x\frac{1-u^2}{1+u^2} + x^2}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$= 4\int_0^{+\infty} \frac{(x-1) + (x+1)u^2}{((x-1)^2 + (x+1)^2u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2 + (x+1)^2u^2}\right)\mathrm{d}u \qquad \text{nếu } x \neq 0$$

$$= \frac{2}{x}\left[\operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x-1}u\right)\right]_0^{+\infty} = 0 \text{ vì } \frac{x+1}{x-1} < 0.$$

Mặt khác thì: $I'(0) = 0$.

Như thế I là ánh xạ hằng trên $]-1; 1[$; hơn nữa: $I(0) = 0$.

◇ **Trả lời:** $I(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in]-1;1[\\ 2\pi\ln|x| & \text{nếu } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$

2.3.39 *a)* • $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + x\sin^2 t} \underset{u=\pi-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u + x\sin^2 u}$,

từ đó suy ra: $\displaystyle I(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + x\sin^2 t}$.

• $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + x\sin^2 t} \underset{y=\tan t}{=} 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = \frac{2}{\sqrt{x}}\left[\mathrm{Arc}\tan\left(\sqrt{x}y\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$.

◊ **Trả lời:** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$.

b) Ánh xạ $F :]0; +\infty[\times [0; \pi] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x, t) = \dfrac{1}{\cos^2 t + x\sin^2 t}$ liên tục trên $]0; +\infty[\times [0; \pi]$, và $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $]0; +\infty[\times [0; \pi]$, vậy (do có thể áp dụng định lý đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$), ánh xạ I thuộc lớp C^1 trên $]0; +\infty[$ và:

$$\forall x \in]0; +\infty[,\quad I'(x) = \int_0^{\pi}\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\frac{-\sin^2 t}{(\cos^2 t + x\sin^2 t)^2}\mathrm{d}t.$$

Như vậy: $\displaystyle J(x) = -I'(x) = \frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$.

◊ **Trả lời:** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $J(x) = \dfrac{\pi}{2x\sqrt{x}}$.

2.3.40 *a)* Ánh xạ $F : (x, t) \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ liên tục trên $]-1; +\infty[\times [0; 1]$, và $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $]-1; +\infty[\times [0; 1]$, vậy (theo định lý đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$), ánh xạ

$f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ thuộc lớp C^1 trên $]-1; +\infty[$ và:

$$\forall x \in]-1; +\infty[,\quad f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\int_0^1\left(\frac{t+x}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + x\mathrm{Arc}\tan t - \ln(1+xt)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi x}{4} - \ln(1+x)\right),$$

Ta suy ra:

$$\forall x \in]-1;+\infty[,\quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\operatorname{Arc}\tan x + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

b) Thay $x = 1$ trong hệ thức ở *a)*.

2.3.41 Theo 2.3.12, *3)*, Định lý, ta có:

$$\int_0^\pi \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int_a^b\left(\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x-\cos t}\right)\mathrm{d}x.$$

Ta lại có: $$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x-\cos t} \underset{u=\tan\frac{t}{2}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}u}{x(1+u^2)-(1-u^2)} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(x-1)+(x+1)u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\left[\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,u\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

◊ **Trả lời:** $\pi\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$.

2.3.42 • MXĐ$(f) = [1;+\infty[$.

• Ánh xạ $F:(x,t) \mapsto \sqrt{x+\cos t}$ liên tục trên $[1;+\infty[\times [0;\pi]$, và $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $]1;+\infty[\times [0;\pi]$, vậy (theo các định lý về tính liên tục và đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$), ánh xạ f liên tục trên $[1;+\infty[$, thuộc lớp C^1 trên $]1;+\infty[$ và:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	↗

$$\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{2\sqrt{x+\cos t}}\mathrm{d}t > 0.$$

Khảo sát tại 1

1) $$f(1) = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}.$$

2) Với mọi $h > 0$ ta có:

$$f'(1+h) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1+h+\cos t}} \geq \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{h+2\cos^2\frac{t}{2}}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{h+2\cos^2\frac{t}{2}}}\mathrm{d}t$$

$$\underset{u=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{h+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{u}{\sqrt{h}}+\sqrt{1+\frac{u^2}{h}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{h}}+\sqrt{1+\frac{1}{h}}\right),$$

từ đó suy ra: $f'(1+h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Khảo sát tại $+\infty$

$$f(x) \geq \int_0^{\pi}\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \int_0^{\pi}\frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}t = \frac{\pi\sqrt{x+1}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

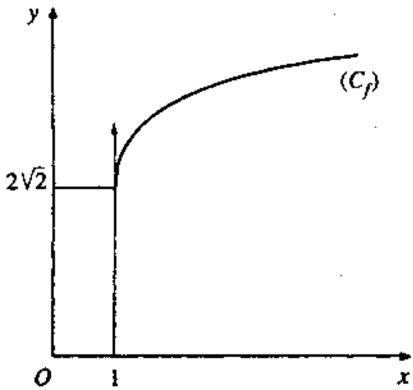
Như vậy (C_f) có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $(x'x)$.

Tính lõm

Lại áp dụng 2.3.12, *2)*, Đinh lý, ta thấy f thuộc lớp lớp C^2 trên $]1; +\infty[$ và:

$\forall x \in]1; +\infty[$,

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{(x+\cos t)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$



2.3.43 *1)* Ánh xạ $F : (x, t) \mapsto \cos(x \sin t)$ liên tục trên $\mathbb{R} \times [0; \pi]$, và $\frac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R} \times [0; \pi]$, vậy (theo định lý đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$), ánh xạ J_0 thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$

và: $\forall x \in \mathbb{R}$, $J'_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-\sin(x\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t$

Nói riêng: $\forall x \in]0; \pi[$, $J'_0(x) < 0$, vậy J_0 giảm nghiêm ngặt trên $[0; \pi]$.

2) J_0 liên tục trên $[0; \pi]$ và $J_0(0) = 1$ vậy ta chỉ còn phải chứng minh $J_0(\pi) < 0$.

Ta có: $J_0(\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t \underset{y=\sin t}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos\pi y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y,$$

đây là tích phân của một hàm khả tích trên $[0; 1[$.

Vậy ta có:

$$J_0(\pi) = \frac{2}{\pi}(A - B)\text{, trong đó } A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy > 0\text{, và } B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{-\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy > 0.$$

Vì $$B \underset{z=1-y}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi z}{\sqrt{1-(1-z)^2}}\, dz,$$

nên ta được: $$A - B = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi y \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}} \right) dy.$$

Cuối cùng, với mọi y thuộc $]0; \frac{1}{2}[$: $\cos\pi y > 0$ và $2y - y^2 < 1 - y^2$, từ đó suy ra $A - B < 0$, $J_0(\pi) < 0$.

2.3.44 *a)* Ta chú ý rằng:

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \int_0^1 (x - x_0) f'(x_0 + (x - x_0)u)du.$$

Vậy ta xét $g : I \to E$ xác định bởi:

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \int_0^1 f'(x_0 + (x - x_0)u)du.$$

Với ký hiệu $F : (x, u) \mapsto f'(x_0 + (x - x_0)u)$, rõ ràng là $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}$ tồn tại và liên tục trên $I \times [0; 1]$, do đó (xem 2.3.12, *2)*, Hệ quả), g thuộc lớp C^{n-1} trên I và:

$$\forall p \in \{0, \dots, n\text{-}1\}, \forall x \in I, \quad g^{(p)}(x) = \int_0^1 u^p f^{(p+1)}(x_0 + (x - x_0)u)du.$$

b) $$\forall p \in \{0, \dots, n\text{-}1\}, \forall x \in I, \quad \left\| g^{(p)}(x) \right\| = \left\| \int_0^1 u^p f^{(p+1)}(x_0 + (x - x_0)u)du \right\|$$

$$\leq \int_0^1 u^p \left\| f^{(p+1)}(x_0 + (x - x_0)u) \right\| du \leq \left\| f^{(p+1)} \right\|_\infty \int_0^1 u^p du = \frac{1}{p+1} \left\| f^{(p+1)} \right\|_\infty.$$

2.3.45 *a)* Giả sử f là một nghiệm của (E_p).

Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ánh xạ $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và $F' = f$.

Ta suy ra rằng với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$\int_0^y f(t + x)dt = \int_0^y (f(t) + f(x) + P(t, x))dt = F(y) + yf(x) + \int_0^y P(t, x)dt.$$

Nhưng: $\displaystyle\int_0^y f(t+x)\mathrm{d}t \underset{u=t+x}{=} \int_x^{x+y} f(u)\mathrm{d}u = F(x+y)-F(x).$

Từ đó suy ra:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad F(x+y)=F(x)+F(y)+yf(x)+\int_0^y P(t,x)\mathrm{d}t\,.$$

Đặc biệt, khi thay y bởi 1 ta được:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=F(x+1)-F(x)-F(1)-\int_0^1 P(t,x)\mathrm{d}t\,.$$

Do P thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$, đặc biệt P, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ tồn tại và liên tục trên $[0;1]\times\mathbb{R}$, do đó (xem 2.3.12, *2)*, Hệ quả), $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t,x)\mathrm{d}t$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$.

Trở lại (E_P), đạo hàm đối với x rồi đối với y, ta suy ra:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad f''(x+y)=\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(x,y).$$

b) Cho f là một nghiệm của (E_P).

Theo *a)*, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$ và: $\forall (x.y)\in\mathbb{R}^2,\ f''(x+y)=\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(x.y)=4xy\,.$

Nói riêng, khi thay y bằng 0 hay bằng 1, ta được: $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} f''(x)=0 \\ f''(x+1)=4x \end{cases},$

và đặc biệt là: $\begin{cases} f''(2)=0 \\ f''(2)=4 \end{cases}$, mâu thuẫn.

◊ **Trả lời:** $S=\varnothing$.

c) • Giả sử f là một nghiệm của (E_P).

Theo *a)*, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f''(x+y)=\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(x,y)=(2x+2y),$$

do đó: $\qquad \forall t\in\mathbb{R},\qquad f''(t)=2t.$

Khi đó tồn tại $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ sao cho: $\quad\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\dfrac{t^3}{3}+\lambda t+\mu\,.$

• Đảo lại, với $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, ánh xạ $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3}+\lambda t+\mu\end{array}$ nghiệm đúng (E_P) khi và chỉ khi:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{(x+y)^3}{3}+\lambda(x+y)+\mu=\frac{x^3}{3}+\lambda x+\mu+\frac{y^3}{3}+\lambda y+\mu+x^2y+xy^2,$$

điều kiện này quy về: $\qquad \mu=0.$

◊ **Trả lời:** $S = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R};\ \lambda \in \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{3} + \lambda x \end{array} \right\}$.

2.4.1 *Xét chuẩn* $\| . \|_\infty$ liên kết với B, được xác định với mọi $x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j$ bởi:

$$\|x\|_\infty = \underset{1 \le j \le N}{\text{Max}} |x_j|.$$

Do E hữu hạn chiều, nên $\| . \|$ của E tương đương với $\| . \|_\infty$, tức là tồn tại $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ sao cho: $\forall x \in E, \quad \alpha \|x\|_\infty \le \|x\| \le \beta \|x\|_\infty$.

a) 1) • Giả thiết $f = \underset{a}{o}(\varphi)$.

Tồn tại $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ sao cho: $\begin{cases} \forall t \in V, & \|f(t)\| = \varepsilon(t)\varphi(t) \\ \varepsilon(t) \xrightarrow[t \to a]{} 0. \end{cases}$

Với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, ký hiệu $\varepsilon_j : V \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\varepsilon_j(t) = \begin{cases} \dfrac{f_j(t)}{\varphi(t)} & \text{nếu } \varphi(t) \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } \varphi(t) = 0 \end{cases}.$$

Khi đó ta có $\forall j \in \{1, ..., N\}, \quad f_j(t) = \varepsilon_j(t)\varphi(t)$, vì nếu như $\varphi(t) = 0$ thì $f(t) = 0$, do đó $f_j(t) = 0$ với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$.

Hơn nữa: $\forall t \in V, \quad |\varepsilon_j(t)|\,|\varphi(t)| = |f_j(t)| \le \|f(t)\|_\infty \le \dfrac{1}{\alpha}\|f(t)\| = \left|\dfrac{\varepsilon(t)}{\alpha}\right| |\varphi(t)|$,

từ đó ta suy ra: $\forall t \in V, \quad |\varepsilon_j(t)| \le \dfrac{1}{\alpha}|\varepsilon(t)|$,

bất đẳng thức này rõ ràng là hiển nhiên tại mỗi t thỏa mãn: $\varphi(t) = 0$.
Do $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$, nên ta suy ra được: $(\forall j,\ \varepsilon_j \underset{a}{\to} 0)$, và do đó:

$$\forall j \in \{1, ..., N\}, \quad f_j = \underset{a}{o}(\varphi).$$

• Đảo lại giả thiết: $\forall j \in \{1, ..., N\}, \quad f_j = \underset{a}{o}(\varphi)$.

Tồn tại $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N : V \to \mathbb{R}$ sao cho: $\forall j \in \{1, ..., N\}, \begin{cases} \forall t \in V, f_j(t) = \varepsilon_j(t)\varphi(t) \\ \varepsilon_j(t) \underset{t \to a}{\to} 0 \end{cases}$

Ta ký hiệu $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi: $\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\|f(t)\|}{\varphi(t)} & \text{nếu } \varphi(t) \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } \varphi(t) = 0 \end{cases}$.

Khi đó ta có: $\forall t \in V, \quad \|f(t)\| = \varepsilon(t)\varphi(t)$, vì nếu $\varphi(t) = 0$ thì $(\forall j \in \{1, ..., N\},\ f_j(t) = 0)$, và do đó $f(t) = 0$.
Hơn nữa ta có:

$$\forall t \in V, \quad |\varepsilon(t)|\,|\varphi(t)| = \|f(t)\| \le \beta \|f(t)\|_\infty = \left(\beta \underset{1 \le j \le N}{\text{Max}} |\varepsilon_j(t)|\right) |\varphi(t)|,$$

từ đó suy ra: $\forall t \in V,\ \ |\varepsilon(t)| \leq \beta \underset{1\leq j\leq N}{\mathrm{Max}}|\varepsilon_j(t)|,$

mà bất đẳng thức này thì hiển nhiên với mọi t thỏa mãn thỏa mãn $\varphi(t) = 0$.

Do ($\forall j,\ \varepsilon_j \underset{a}{\to} 0$), nên ta suy ra: $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$, và do đó: $f = \underset{a}{o}(\varphi)$.

2) Cùng một phương pháp như ở *1)*.

b) • Giả sử : $\forall j \in \{1, \dots, N\},\quad f_j \underset{a}{\sim} g_j,$

tức là: $\forall j \in \{1, \dots, N\},\quad f_j - g_j = \underset{a}{o}(g_j).$

Cho $j \in \{1, \dots, N\}$. Vì : $\forall t \in V,\ |g_j(t)| \leq \|g(t)\|_\infty \leq \beta\|g(t)\|$, nên ta có: $\underset{a}{o}(g_j) = \underset{a}{o}(\|g\|)$, từ đó suy ra: $f_j - g_j = o(\|g\|)$.

Từ đây ta có: $f - g = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}(f_j - g_j)e_j = o(\|g\|)$, tức là: $f \underset{a}{\sim} g$.

• Phần đảo sai, như trong thí dụ sau: $E = \mathbb{R}^2,\ a = 0,\ f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t,1)\end{array},\ g : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t^2,1)\end{array}$, trong đó ta có:

$$\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g, & \text{vì } (f-g)(t) = (t - t^2, 0) = o(\|g(t)\|) \\ f_1 \underset{a}{\not\sim} g_1 & \text{vì } t \underset{0}{\not\sim} t^2 \end{cases}$$

2.5.1 Trước hết hãy kiểm chứng rằng f liên tục (từng khúc) và ≥ 0 trên khoảng đang xét.

a) $0 \leq f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời:** f khả tích trên $]0; 1]$.

b) $0 \leq f(x) = x\left(\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4x^3}$ và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời:** f khả tích trên $[0; +\infty[$.

c) $0 \leq f(x) = e^{-\ln x \ln(1+\ln x)} = x^{-\ln(1+\ln x)} \leq x^{-2}$ với x khá lớn, vì $\ln(1+\ln x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, và thí dụ Riemann.

◊ **Trả lời:** f khả tích trên $[1; +\infty[$.

d) $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_1^n \frac{dx}{x^{2(x-E(x))}} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{2(x-E(x))}} = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{2(x-k)}}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_1^n\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln n \underset{n\infty}{\to} +\infty.$$

◊ **Trả lời:** f không khả tích trên $[1; +\infty[$.

e) • Nếu $a \le 1$, thì $f(x) \ge e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x} \ge 0$ và thí dụ Riemann.

• Nếu $a < 1$, thì $x^2 f(x) = e^{2\ln x - (\ln x)^a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, và quy tắc "$x^{\alpha} f(x)$".

◊ **Trả lời:** f khả tích khi và chỉ khi $a > 1$.

2.5.2 Ký hiệu $\lambda = \dfrac{l+1}{2} \in \,]0; 1[$; tồn tại $x_0 \in [1; +\infty[$ sao cho:

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \quad 0 < f(x+1) \le \lambda f(x).$$

Cho $x \in [x_0; +\infty[$; tồn tại $n_x \in \mathbb{N}$ sao cho: $x - n_x < x_0 \le x - n_x + 1$.

Ta có: $$f(x) \le \lambda f(x-1) \le \lambda^2 f(x-2) \le \ldots \le \lambda^{n_x} f(x - n_x).$$

Vì f liên tục trên tập compac $[1; x_0]$, nên ta suy ra rằng tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:
$$\forall t \in [1; x_0]; \quad 0 \le f(t) \le M.$$

Vậy ta có: $$0 \le f(x) \le \lambda^{n_x} M \le \lambda^{x - x_0} M.$$

Do ánh xạ $x \mapsto \lambda^x$ khả tích trên $[x_0; +\infty[$ (vì $\lambda \in \,]0; 1[$), nên ta suy ra rằng f khả tích trên $[1; +\infty[$.
Hãy so sánh với quy tắc d'Alembert đối với các chuỗi (3.2.4, *3)*, Định lý).

2.5.3 *a)* • Với mọi f thuộc C, $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ khả tích trên $[0; 1[$ vì $|f|$ liên tục tại 1 và do $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ khả tích trên $[0; 1[$.

Tương tự ta thấy $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1+t}}$ khả tích trên $]-1; 0]$.
Như thế $N(f)$ và $N'(f)$ tồn tại.
• Các tính chất: $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ và $N(f+g) = N(f) + N(g)$ có thể chứng minh dễ dàng.
• Nếu $N(f) = 0$, thì do $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ liên tục và ≥ 0 trên $[-1; 1[$, ta suy ra:

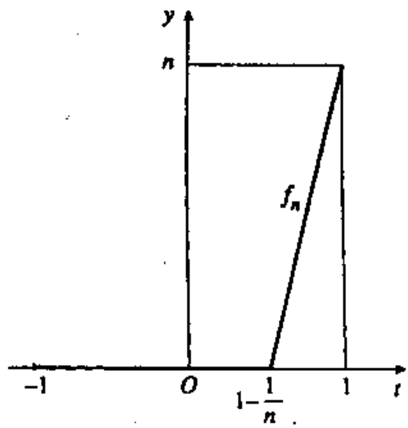
$$\forall t \in [-1; 1[, \quad f(t) = 0,$$

rồi từ đó $f = 0$.
Kết quả đó chứng tỏ rằng N là một chuẩn trên C. Phép chứng minh tương tự đối với N'; hoặc chú ý rằng $N'(f) = N(\check{f})$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, xét $f_n : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ cho

bởi: $$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \in \left[-1; 1 - \dfrac{1}{n}\right] \\ n^2\left(t - 1 + \dfrac{1}{n}\right) & \text{nếu } t \in \left[1 - \dfrac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$$

• $$N(f_n) = \int_{-1}^{1} \frac{|f_n(t)|}{\sqrt{1-t}} dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t}} dt$$



$$\geq \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \left[-n\sqrt{1-t}\right]_{1-\frac{1}{2n}}^{1} = \sqrt{\frac{n}{2}} \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

- $$N'(f_n) = \int_{-1}^{1}\frac{|f_n(t)|}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{f_n(t)}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t \leq n\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}} \leq 1.$$

◊ **Trả lời:** N và N' không tương đương.

c) Về cơ bản đây vẫn là câu *b)* do T tuyến tính và:

$$\forall f \in C, \quad N(T(f)) = N(\check{f}) = N'(f).$$

◊ **Trả lời:** $T : (C, N) \rightarrow (C, N)$ không liên tục.

2.5.4 *a)* Vì các vai trò của α và β đối xứng, nên ta có thể giả thiết $\alpha \leq \beta$; khi đó ước lượng kẹp giữa hai cận trên và dưới có thể thấy ngay.
b) Phép chứng minh dễ dàng từ câu *a)* và định lý hàm trội.

2.5.5 Ta ký hiệu hằng đẳng thức đang xét là g^0, và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: $g^n = g \circ \ldots \circ g$ (n lần),

$$u_n = \int_{g^n(a)}^{g^{n+1}(a)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$u_n = \int_{g^n(a)}^{g^{n+1}(a)} f(t)\mathrm{d}t \underset{t=g(u)}{=} \int_{g^{n-1}(a)}^{g^n(a)} f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u.$$

a) $u_n \leq \int_{g^{n-1}(a)}^{g^n(a)} kf(u)\mathrm{d}u = ku_{n-1}$, từ đây bằng một lập luận truy hồi đơn giản ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq k^n u_0.$$

Sau nữa: $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_a^{g^n(a)} f = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right)u_0 = \frac{1-k^n}{1-k}u_0 \leq \frac{u_0}{1-k}.$$

Do $g^n(a) \geq g^{n-1}(a) + \lambda \geq \ldots$, ta suy ra $g^n(a) \geq n\lambda + a$, và do đó: $g^n(a) \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$.

Với mọi X thuộc $[a; +\infty[$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $X \leq g^n(a)$, từ đó suy ra:

$$\int_a^X f \leq \int_a^{g^n(a)} f \leq \frac{u_0}{1-k}.$$

Suy ra (xem 2.5.1, *1)*, Định nghĩa), f khả tích trên $[a; +\infty[$.
b) Cách khảo sát tương tự.

2.5.6 *a)* Ánh xạ $F : (x, t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ liên tục trên $\mathbb{R} \times [0; 1]$, và $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R} \times [0; 1]$, do đó (định lý đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$, 2.3.12, *2)*, Định lý), f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t \underset{u=xt}{=} -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

b) Ánh xạ $A : x \mapsto f(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x) = f'(x) + 2\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x^2} = 0,$$

do đó A là ánh xạ hằng.

c) • $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = A(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{Arc}\tan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \le f(x) \le \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x^2}$, do đó $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

• Kết quả là $\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$, từ đó suy ra rằng $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, vì $\mathrm{e}^{-t^2} \ge 0$.

Theo 2.5.1, *3)*, Mệnh đề, ta kết luận $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ khả tích trên $[0; +\infty[$ và:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.5.7 *a)* Ánh xạ $F : [0; +\infty[\;\to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\forall X \in [0; +\infty[, \quad F(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_X^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

liên tục (do thuộc lớp C^1), giảm nghiêm ngặt và:

$$F(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 1, \qquad \lim_{+\infty} F = 0.$$

Như thế F thực hiện một song ánh từ $[0; +\infty[$ lên $]0; 1]$.

Cuối cùng ta chú ý rằng: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2^n} \in \,]0; 1]$.

b) • Ánh xạ $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}_+^*$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} g(x).$$

trong đó $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ánh xạ g thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}_+^*$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0.$$

Từ đó suy ra rằng f giảm nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}_+^*$.

- $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow F^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) > F^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) < f(a_n)$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}a_{n+1}^2} \frac{1}{2^{n+1}} < e^{\frac{1}{2}a_n^2} \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a_{n+1}^2 - a_n^2\right) < \ln 2.$$

2.5.8 Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ánh xạ $x \mapsto \frac{|\sin nx|}{x}$ khả tích trên $]0; 1]$ vì $\frac{|\sin nx|}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} n$;

ta ký hiệu $I_n = \int_0^\pi \frac{|\sin nx|}{x} dx$.

- $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad I_n \underset{u=nx}{=} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du$

$$\underset{v=u-k\pi}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin v|}{k\pi + v} dv = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin v|}{k\pi + v} dv.$$

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, ta ký hiệu: $\quad J_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin v|}{k\pi} dv$.

1) $\quad J_n = I_1 + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin v| dv\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n.$

2) $\quad |I_n - J_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi |\sin v| \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k\pi + v}\right) dv \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{v}{k\pi(k\pi + v)} dv$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n-1} \leq 2.$$

Từ *1)* và *2)*, ta suy ra: $\quad I_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n.$

2.5.9 *a)* Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Vì f giảm nên ta có:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1,\dots,n-1\}, & \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \forall k \in \{1,\dots,n\}, & \displaystyle\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f \end{cases},$$

từ đó bằng cách lấy tổng ta được: $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ và $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^1 f$.

Như thế ta có: $\displaystyle\frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^1 f$,

từ đó suy ra: $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 f$.

b) *α)* $\displaystyle\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

Ta có thể áp dụng kết quả ở *a)* cho ánh xạ $\begin{array}{ccc}]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln x \end{array}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 \ln x \, dx = \left[x\ln x - x\right]_0^1 = -1.$$

◊ **Trả lời:** e^{-1}.

β) $$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{n+k}}\right)^{\frac{1}{\ln n}}\right) = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ln(kn) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}.$$

- $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$

- Ta có thể áp dụng kết quả ở *a)* cho ánh xạ $\begin{array}{ccc}]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{\ln x}{1+x} \end{array}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx.$$

◊ **Trả lời:** 4.

2.5.10 *a) 1)* Cho $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$ và $(a, b) \in I^2$ sao cho $a \le b$. Vì f liên tục từng khúc trên I, và do $0 \le \displaystyle\int_{[a;b]} |f| \le \int_I |f| = 0$, nên f liên tục từng khúc trên $[a; b]$ và $\displaystyle\int_{[a;b]} |f| = 0$, do đó

$f\,|_{[a;b]}$ bằng không, ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm thuộc $[a; b]$.

2) Đảo lại, cho $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ sao cho với mọi (a, b) thuộc I^2 thỏa mãn $a \le b$ thì $f\,|_{[a;b]}$ bằng không, ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm. Khi đó, với mọi $[a; b]$ như thế ta có $\int_{[a;b]} |f| = 0$, do đó theo định nghĩa f khả tích trên I và $\int_I |f| = 0$.

b) • $0 \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

• Cho $\alpha \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$. Khi đó $\alpha f + g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ và :

$$0 \le \int_I |\alpha f + g| \le |\alpha| \int_I |f| + \int_I |g| = 0,$$

do đó $\int_I |\alpha f + g| = 0$, $\alpha f + g \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

• Cho $h \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$. Theo *a)*, với mọi đoạn $[a; b]$ bao hàm trong I, $f\,|_{[a;b]}$ bằng không, ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm, vậy $(hf)\,|_{[a;b]}$ cũng thế, vậy (xem *a)*), $hf \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

c) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$0 \le \int_I |f| \le \int_I |f - f_n| + \int_I |f_n| = \int_I |f - f_n|.$$

Vì $\int_I |f - f_n| \underset{n\infty}{\to} 0$, nên ta suy ra $\int_I |f| = 0$, do đó $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

2.5.11 • Cho J là một đoạn bao hàm trong I.

Vì $J \cap D$ hữu hạn và do f_1 và f_2 trùng nhau trên $J - (J \cap D)$, nên ta có: $\int_J |f_1| = \int_J |f_2|$.

Như thế với mọi đoạn J bao hàm trong I thì: $\int_J |f_2| \le \int_I |f_1|$, do đó f_2 khả tích trên I

• Vì với mọi đoạn J bao hàm trong I thì $\int_J f_2 = \int_J f_1$ và do tồn tại một dãy $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ những đoạn bao hàm trong I thỏa mãn $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I$, nên ta suy ra rằng:

$$\int_I f_2 = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f_2 = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f_1 = \int_I f_1.$$

2.5.12 Ta đã có kết quả đối với trường hợp $p = 1$ và $p = +\infty$.

Cho $p \in\,]1; +\infty[$. Theo bài tập 1.1.9, với mọi đoạn J bao hàm trong I ta có:

$$\int_J |fg| \le \left(\int_J |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_J |g|^q\right)^{1/q} \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Kết quả này chứng tỏ fg khả tích trên I và :

$$N_1(fg) = \int_I |fg| \le \|f\|_p \|g\|_q .$$

2.5.13 *a)* Tính chất đang xét là tầm thường nếu E_f rỗng hoặc là một đơn tử.
Cho $u, v \in E_f$ sao cho $u < v$, $\tau \in]0; 1[$, $w = \tau u + (1-\tau)v$. Tồn tại $p, r, s \in [1; +\infty[$ sao cho:

$$p = \frac{1}{w}, \quad r = \frac{1}{u}, \quad s = \frac{1}{v}.$$

Ký hiệu $\alpha = \frac{\tau p}{r}$, hãy chứng minh rằng ta có: $p = \alpha r + (1-\alpha)s$.

Theo giả thiết ta có $f \in \mathcal{CL}^r$ và $f \in \mathcal{CL}^s$, do đó $|f|^{\alpha r} \in \mathcal{CL}^{\frac{1}{\alpha}}$ và $|f|^{(1-\alpha)s} \in \mathcal{CL}^{\frac{1}{1-\alpha}}$, từ đó theo bài tập 2.5.12, suy ra $|f|^{\alpha r+(1-\alpha)s} \in \mathcal{CL}^1$, tức là $|f|^p \in \mathcal{CL}^1$, cũng tức là $f \in \mathcal{CL}^p$.
Kết quả trên chứng tỏ $w \in E_f$.
Như vậy E_f là một bộ phận lồi của $\mathbb{R}$, do đó là một khoảng của $\mathbb{R}$.
b) Trước tiên chú ý rằng do f liên tục và $\neq 0$ nên với mọi t thuộc $[1; +\infty[$ ta có: $\|f\|_t > 0$.
Với các ký hiệu ở *a)* thì:

$$\int_I |f|^p = \int_I |f|^{\alpha r} |f|^{(1-\alpha)s} \le \left(\int_I \left(|f|^{\alpha r}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\int_I \left(|f|^{(1-\alpha)s}\right)^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}$$

$$= \left(\int_I |f|^r\right)^{\alpha} \left(\int_I |f|^s\right)^{1-\alpha},$$

từ đó suy ra: $$\|f\|_p \le \left(\int_I |f|^r\right)^{\frac{\tau}{r}} \left(\int_I |f|^s\right)^{\frac{1-\tau}{s}} = \|f\|_r^{\tau} \|f\|_s^{1-\tau},$$

và như thế: $\varphi(\tau u + (1-\tau)v) \le \tau\varphi(u) + (1-\tau)\varphi(v)$,
tức là φ lồi.
c) • Nếu $1 \le r < p < s < +\infty$, thì theo *a)* với mọi f thuộc $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^s$, ta có $p \in E_f$, do đó $f \in \mathcal{CL}^p$, và như thế $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^s \subset \mathcal{CL}^p$.

• Nếu $1 \le r < p < s = +\infty$, thì khi đó mọi f thuộc $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^\infty$ đều bị chặn, do đó $|f|^p = |f|^r |f|^{p-r} \le |f|^r \|f\|_\infty^{p-r}$, chứng tỏ $f \in \mathcal{CL}^p$, và như thế $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^\infty \subset \mathcal{CL}^p$.

2.5.14 *1)* Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ (mà ta sẽ chọn sau), và với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ánh xạ

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{n^\alpha}{(|x|+n)^2}$$

ánh xạ này hiển nhiên liên tục.

Do $f_n \ge 0$ và $f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{x^2}$, nên với mọi p thuộc $[1; +\infty[$, thì $f_n \in \mathcal{CL}^p$.

Hơn nữa f_n bị chặn, do đó $f_n \in \mathcal{CL}^\infty$.

Với mọi p thuộc $[1;+\infty[$ và mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có:

$$\|f_n\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n^{\alpha}}{(|x|+n)^2}\right)^p \mathrm{d}x = 2n^{\alpha p}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+n)^{2p}} = \frac{2}{2p-1}n^{(\alpha-2)p+1}.$$

Mặt khác thì: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n\|_\infty = n^{\alpha-2}$.

Tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases}\text{nếu } p' \neq +\infty, & (\alpha-2)p'+1<0<(\alpha-2)p+1\\ \text{nếu } p'=+\infty, & \alpha-2<0<(\alpha-2)p+1.\end{cases}$$

Khi đó ta có: $\|f_n\|_p \underset{n\infty}{\to} +\infty$ và $\|f_n\|_{p'} \underset{n\infty}{\to} 0$.

2) Cho $\beta \in \mathbb{R}$ (mà ta sẽ chọn sau), và với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ánh xạ $g_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & n^{\beta}e^{-n|x|}\end{array}$, ánh xạ này hiển nhiên liên tục.

Vì $g_n \geq 0$ và do $x^2 g_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, nên với mọi p thuộc $[1;+\infty[$, thì $g_n \in \mathcal{CL}^p$.

Hơn nữa g_n bị chặn, do đó $g_n \in \mathcal{CL}^\infty$.

Với mọi p thuộc $[1;+\infty[$ và mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có:

$$\|g_n\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(n^{\beta}e^{-n|x|}\right)^p \mathrm{d}x = 2n^{\beta p}\int_0^{+\infty} e^{-npx}\mathrm{d}x = \frac{2}{p}n^{\beta p-1}.$$

Mặt khác thì: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|g_n\|_\infty = n^{\beta}$.

Tồn tại $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases}\text{nếu } p' \neq +\infty, & \dfrac{1}{p'}<\beta<\dfrac{1}{p}\\ \text{nếu } p'=+\infty, & 0<\beta<\dfrac{1}{p}.\end{cases}$$

Khi đó ta có: $\|g_n\|_p \underset{n\infty}{\to} 0$ và $\|g_n\|_{p'} \underset{n\infty}{\to} +\infty$.

2.5.15 *a)* Sau khi phân tích thành các phân thức đơn giản ta có:

$$\int_1^X \frac{x^4+1}{x^3(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int_1^X\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)+\operatorname{Arctan}x\right]_1^X.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,631\,972$.

b) $$\int\frac{x^4}{\left(x^5+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \underset{y=\left(x^5+1\right)^{\frac{1}{2}}}{=} \frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{2}{5\left(x^5+1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{2}{5}$.

c) • $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt[4]{x^2+1}}$ liên tục và ≥ 0 trên $[1; +\infty[$, và $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x^2+1}} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, từ đó suy ra tính khả tích của f trên $[1; +\infty[$.

• $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[4]{x^2+1}} \underset{y=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y\sqrt[4]{y+1}} \underset{z=\sqrt[4]{y+1}}{=} 2\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{z^2}{z^4-1}dz$$

$$= \int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2} - \int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{dz}{1-z^2} = \left[\operatorname{Arctan} z\right]_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\right]_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}.$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt[4]{2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1} \approx 1,923\,411.$

d) • Ký hiệu $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$, phép đổi biến $y = \pi - x$ cho ta:

$$I = \int_0^{\pi}\frac{\pi - y}{1+\sin y}dy = \pi\int_0^{\pi}\frac{dy}{1+\sin y} - I,$$

từ đó suy ra: $$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dy}{1+\sin y}.$$

• $$\int_0^{\pi}\frac{dy}{1+\sin y} \underset{t=\tan\frac{y}{2}}{=} 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{2}{t+1}\right]_0^{+\infty} = 2.$$

◊ **Trả lời:** π.

e) • Trước tiên hãy chứng minh tính khả tích.

• Ký hiệu I là giá trị, và sử dụng một phép tích phân từng phần với:

$$\left(u = (x^2+3x+3)e^{-x}\sin x, \quad v' = \frac{1}{(x+1)^3}\right),$$

ta được: $$2I = \int_0^{+\infty}\left(\left(x^2+3x+3\right)\cos x - \left(x^2+x\right)\sin x\right)\frac{e^{-x}}{(x+1)^2}dx.$$

Lại tích phân từng phần để đi tới :

$$2I = 3 - 2\int_0^{+\infty}\left(x\cos x + 2\sin x\right)e^{-x}dx.$$

Ta đã biết cách tính tích phân cuối cùng này (xem Tập 2, 9.3, *3)*).

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{2}$.

f) Đặt $u = \sqrt{x^2-1}$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{4}$.

g) Đặt $\varphi = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, rồi đặt $\psi = \dfrac{\varphi}{2}$.

◊ **Trả lời:** 1.

h) Đặt $y = x^{\frac{1}{3}}$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

i) Đặt $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$, rồi phân tích thành phân thức đơn giản.

◊ **Trả lời:** tồn tại và bằng $\pi\left(\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} - 1\right)$.

j) Đặt $y = \dfrac{1}{x}$, rồi viết tam thức dưới dạng chuẩn tắc.

◊ **Trả lời:** tồn tại và bằng $\dfrac{\pi}{\sqrt{ab}}$.

k) Hãy chứng minh tính khả tích trên]0; 1[. Một phép tích phân từng phần và phép đổi biến $y = \sqrt{1-x}$ cho ta:

$$I(x) = \int \frac{\ln x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2\ln x}{\sqrt{1-x}} + 2\ln\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}.$$

- Tại 0^+: $I(x) = 2\ln x \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} + 4\ln(1+\sqrt{1-x})$

$$= \frac{2x\ln x}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} + 4\ln(1+\sqrt{1-x}) \underset{x\to 0^+}{\to} 4\ln 2.$$

- Tại 1^-: $I(x) \underset{x\to 1^-}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** $-4\ln 2$.

l) Đổi biến $t = \sqrt{x}$, $\varphi = \text{Arcsin}t$, sau đó tích phân từng phần.

◊ **Trả lời:** -2π.

m) $\displaystyle\int\left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right)dx = x\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

◊ **Trả lời:** 1.

n) Một phép tích phân từng phần và phép đổi biến $u = \sqrt{x}$ cho ta:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\text{Arc}\tan x - \pi}{2\sqrt{x}} dx = -4\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du.$$

◊ **Trả lời:** $-\pi\sqrt{2}$.

o) Tích phân từng phần, rồi đổi biến $\theta = \text{Arccos}x$ (hay $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ và $\varphi = \text{Arctan}u$).

◊ **Trả lời:** $2 - \pi$.

p) $$\forall \varepsilon > 0,\ 4\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}dx = 3\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2}dx$$

$$\underset{u=3x}{=} 3\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx - \int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{3\sin u}{u^2}du$$

$$= 3\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2}dx = 3\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x - x}{x^2}dx + 3\ln 3,$$

và $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x - x}{x^2}dx \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, do $x \mapsto \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ khả tích trên $]0;1]$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{3}{4}\ln 3$.

q) Trước tiên hãy chứng minh tính khả tích.

- $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln \tan x \, dx \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} -I$, từ đó suy ra $I = 0$.

- $$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln \sin x \, dx = \left[\sin^2 x \ln \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}.$$

◊ **Trả lời:** 0 và $-\dfrac{1}{2}$.

r) Trước hết hãy chứng minh tính khả tích, rồi áp dụng phép đổi biến $y = \pi - x$.

◊ **Trả lời:** $-\dfrac{\pi^2}{2}\ln 2$.

2.5.16 *a)* • Theo các định lý chung, f thuộc lớp C^1 trên $]0;1]$ và:

$$\forall x \in\ ]0;1], \quad f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

• $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin\dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, vậy f khả vi tại 0 và $f'(0) = 0$.

Như thế f khả vi trên $[0;1]$ và: $$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

b) Vì $x \mapsto \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên [0; 1], nên ta chỉ cần chứng minh rằng

$$h: x \mapsto \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

không khả tích trên]0; 1].

Bằng phép đổi biến $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, ta thấy là tính khả tích của h trên]0; 1] tương đương với tính khả tích của $y \mapsto 2\sqrt{y}|\sin y|\dfrac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}$ trên [1; + ∞ [.

Vì chúng ta biết rằng $y \mapsto \dfrac{|\sin y|}{y}$ không khả tích trên[1; + ∞ [, nên kết quả là h không khả tích trên]0; 1], và cuối cùng thì f không khả tích trên]0; 1].

2.5.17 • Nếu $|\cos\alpha| \neq 1$ thì $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos\alpha\cos x}$ liên tục trên [0; π].

Nếu $\cos\alpha = -1$ thì $\dfrac{1}{1+\cos\alpha\cos x} = \dfrac{1}{1-\cos x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2}{x^2} > 0$, do đó $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos\alpha\cos x}$ không khả tích trên [0; π].

Trường hợp $\cos\alpha = 1$ cũng được kết quả tương tự.

• Vậy ta sẽ giả thiết $|\cos\alpha| \neq 1$ (tức là $\sin\alpha \neq 0$).

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x} \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2+\cos\alpha(1-t^2)}dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\cos\alpha+(1-\cos\alpha)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{|\sin\alpha|}.$$

◊ **Trả lời:** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x}$ tồn tại khi và chỉ khi $\sin\alpha \neq 0$, và khi đó bằng $\dfrac{\pi}{|\sin\alpha|}$.

2.5.18 *1)* Ánh xạ $f : x \mapsto x(\text{Arctan}x)^2 - ax - b - \dfrac{c}{x}$ liên tục trên [1; + ∞ [, và trong lân cận của + ∞ thì ta có: $f(x) = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - a\right)x + o(x)$, do đó nếu $a \neq \dfrac{\pi^2}{4}$ thì f không khả tích trên [1; + ∞ [.

Giả thiết $a = \dfrac{\pi^2}{4}$; khi đó:

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc}\tan\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}x - b - \frac{c}{x} = -\pi x\,\text{Arc}\tan\frac{1}{x} + x\left(\text{Arc}\tan\frac{1}{x}\right)^2 - b - \frac{c}{x}$$

$$= -\pi x\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+x\left(\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-b-\frac{c}{x}=(-\pi-b)+\frac{1-c}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Như vậy f khả tích trên $[1;+\infty[$ khi và chỉ khi $\left(a=\frac{\pi^2}{4},\ b=-\pi,\ c=1\right)$, và từ bây giờ chúng ta sẽ giả thiết rằng điều kiện này được thỏa mãn.

2) Bằng cách tích phân từng phần ta được:

$$I(x) = \int\left(x(\operatorname{Arctan}x)^2-\frac{\pi^2}{4}x+\pi-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\operatorname{Arctan}x)^2-\int\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{Arctan}x\,dx-\frac{\pi^2x^2}{8}+\pi x-\ln x$$

$$= \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{Arctan}x)^2-\frac{\pi^2x^2}{8}+\pi x-\ln x-x\operatorname{Arctan}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Tại $+\infty$:

$$I(x)=-\frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\left(\pi-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{\pi^2}{8}+o(1)\right)+\pi x-x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{x^2}$$

$$=-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\pi-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\frac{\pi^2}{8}+\pi x-x\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+o(1)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{3}{2}+o(1).$$

Tại 1: $I(1)=-\frac{\pi^2}{16}+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

◊ **Trả lời:** $a=\frac{\pi^2}{4}$, $b=-\pi$, $c=1$, và trong trường hợp này thì tích phân bằng

$$3\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0{,}647\,783.$$

2.5.19 Đặt $t=\tan x$, sau đó phân tích thành phân thức đơn giản.

◊ **Trả lời:** $\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\ln\frac{d}{c}+\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\frac{\pi}{2}$.

2.5.20 • Với $x\in]-1;1[$, $t\mapsto\frac{-\ln(1-t)}{t}$ khả tích trên $]0;x]$, vì $\frac{-\ln(1-t)}{t}\underset{t\to0}{\to}1$.

• Phép đổi biến $u=\frac{t}{t-1}$ cho ta:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\int_0^x\frac{\ln(1-u)}{u(1-u)}du=\int_0^x\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)\ln(1-u)du=-f(x)+\int_0^x\frac{\ln(1-u)}{1-u}du.$$

Cuối cùng ta được: $$\int_0^x\frac{\ln(1-u)}{1-u}du=\left[-\frac{1}{2}(\ln(1-u))^2\right]_0^x=-\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2.$$

2.5.21 • Trước hết ta thấy $x \mapsto \dfrac{x^k}{x^{2n}+1}$ khả tích trên $[0; +\infty[$, vì lẽ

$$0 \le \frac{x^k}{x^{2n}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{k-2n} \quad \text{và} \quad k-2n \le -2 < -1.$$

• Ký hiệu $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x$, bằng phép đổi biến $u = \dfrac{1}{x}$, hãy chứng minh rằng $I_k = I_{2n-k-2}$.

• Như thế $\quad I_k = \dfrac{1}{2}(I_k + I_{2n-k-2}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}\left(\frac{1}{2}\left(x^{k-n+1} + x^{-k+n-1}\right)\right)\mathrm{d}x.$

Chú ý rằng: $\quad \forall t \in]0; +\infty[, \quad \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \ge 1.$

Từ đó suy ra: $\quad I_k \ge I_{n-1} \underset{t=x^n}{=} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2n}.$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{2n}$.

2.5.22 *a)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t + x^4}}\mathrm{d}t \underset{y=\sin t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4+x^4}} \underset{u=\frac{y}{x}}{=} \frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+1}},$

và $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u^4+1}}$ khả tích trên $[0; +\infty[$.

b) $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^3}} \underset{u=\frac{t}{x^{2/3}}}{=} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\int_{x^{-\frac{2}{3}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^3}}$, và $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^3}}$ khả tích trên $[0; +\infty[$.

c) Bằng phép đổi biến $y = nx$, và chú ý rằng $y \mapsto \dfrac{1}{1+\sin^2 y}$ là π–tuần hoàn, ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 nx} = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}y}{1+\sin^2 y} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}y}{1+\sin^2 y} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{1+\sin^2 y}$$

$$\underset{t=\tan y}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2} = \sqrt{2}\Big[\mathrm{Arc}\tan(t\sqrt{2})\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Như thế $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 nx}$ không phụ thuộc n ($n \in \mathbb{N}^*$).

d) $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 nx}\mathrm{d}x \underset{y=nx}{=} \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{\sin\frac{y}{n}}{1+\cos^2 y}\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin\frac{y}{n}}{1+\cos^2 y}\mathrm{d}y$

$$\underset{z=y-k\pi}{=}\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin\dfrac{z+k\pi}{n}}{1+\cos^2 z}\mathrm{d}z=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 z}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{z+k\pi}{n}\right)\mathrm{d}z.$$

Vì $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{z+k\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}z}{n}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1\text{-}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}}=\frac{\mathrm{i}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}\left(\cos\frac{2z-\pi}{2n}+\mathrm{i}\sin\frac{2z-\pi}{2n}\right)$,

nên ta suy ra: $\displaystyle I_n=\frac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{2n}}\int_0^{\pi}\frac{\cos\dfrac{2z-\pi}{2n}}{1+\cos^2 z}\mathrm{d}z$.

Ký hiệu: $\displaystyle J_n=\frac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{2n}}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 z}\mathrm{d}z$.

1) $\displaystyle 0\le\int_0^{\pi}\frac{1\text{-}\cos\dfrac{2z-\pi}{2n}}{1+\cos^2 z}\mathrm{d}z\le\int_0^{\pi}\left(1-\cos\frac{2z-\pi}{2n}\right)\mathrm{d}z=\pi-2n\sin\frac{\pi}{2n}\underset{n\infty}{\to}0,$

do đó: $\displaystyle |I_n-J_n|\underset{n\infty}{\to}0.$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}z}{1+\cos^2 z}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{1+\cos^2 z}\underset{t=\tan z}{=}2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}=\sqrt{2}\left[\mathrm{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$

Vậy: $\displaystyle J_n=\sqrt{2}\frac{\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}\underset{n\infty}{\to}\sqrt{2}.$

e) **Hãy kiểm chứng rằng các hàm được xét đều khả tích trên các khoảng tương ứng.**

- Với $x\in\mathbb{R}_+^*$, phép đổi biến $u=t^x$ cho ta: $\displaystyle x\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^x}\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}u^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}u$.

Ký hiệu $\displaystyle I(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}u^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}u$ và $\displaystyle L=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ (tích phân này tồn tại).

- Ta có: $\forall u\in[1;+\infty[,\quad\forall x\in[2;+\infty[,\quad 0\le u^{\frac{1}{x}}-1\le u^{\frac{1}{2}}-1\le u^{\frac{1}{2}}.$

Do $u\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{\frac{1}{2}}}$ khả tích trên $[1;+\infty[$, nên với mọi $\varepsilon>0$ cố định tồn tại $U\in[1;+\infty[$ sao

cho: $\displaystyle\int_U^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}u\le\varepsilon.$

Khi đó ta có: $\displaystyle\forall x\in[2;+\infty[,\quad 0\le\int_U^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(x^{\frac{1}{x}}-1)\mathrm{d}u\le\varepsilon.$

Như thế (với U cố định như trên) ta được:

$$\forall x \in [2; +\infty[, \quad 0 \le \int_1^U \frac{e^{-u}}{u}\left(u^{\frac{1}{x}} - 1\right)du \le \left(U^{\frac{1}{x}} - 1\right)\int_1^U \frac{e^{-u}}{u}du.$$

Vì $U^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nên tồn tại $x_0 \in [2; +\infty[$ sao cho:

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \quad 0 \le \int_1^U \frac{e^{-u}}{u}\left(u^{\frac{1}{x}} - 1\right)du \le \varepsilon.$$

Cuối cùng ta được: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in [x_0; +\infty[, \quad |I(x) - L| \le 2\varepsilon,$

và do đó: $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L.$

2.5.23 Với mọi x thuộc $]0; 1]$, ta ký hiệu:

$$I(x) = x\int_x^1 \frac{1}{t^2} f(t)dt, \qquad J(x) = x\int_x^1 \frac{1}{t^2} f(0)dt.$$

1) $\forall x \in]0; 1], \quad |I(x) - J(x)| = \left| x\int_x^1 \frac{1}{t^2}\big(f(t) - f(0)\big)dt \right| \le x\int_x^1 \frac{1}{t^2}|f(t) - f(0)|dt.$

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục tại 0, nên tồn tại $\eta > 0$ thuộc $]0; 1[$ sao cho:

$$\forall t \in [0; \eta], \quad |f(t) - f(0)| \le \varepsilon.$$

Ký hiệu $\eta_1 = \mathrm{Min}\left(\eta, \varepsilon\left(\int_x^1 \frac{1}{t^2}|f(t) - f(0)|dt\right)^{-1}\right).$

Cho $x \in [0; \eta_1]$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x\displaystyle\int_x^\eta \frac{1}{t^2}|f(t) - f(0)|dt \le x\varepsilon\int_x^\eta \frac{dt}{t^2} = x\varepsilon\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta}\right) \le \varepsilon \\ x\displaystyle\int_\eta^1 \frac{1}{t^2}|f(t) - f(0)|dt \le \varepsilon \end{cases}$$

và suy ra: $$x\int_x^1 \frac{1}{t^2}|f(t) - f(0)|dt \le 2\varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ: $I(x) - J(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0.$

2) $J(x) = xf(0)\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1$

$= f(0) - xf(0) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} f(0).$

◊ **Trả lời:** $f(0)$.

2.5.24 a) • $\mathrm{MXĐ}(f) =]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$\nearrow$

• f thuộc lớp C^1 trên $]0; +\infty[$ và:

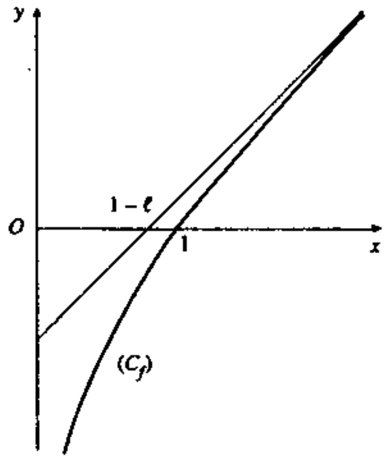
$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} > 0.$$

- **Khảo sát tại 0**

$$-f(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t \ \geq \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$= -1 + \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

từ đó suy ra: $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$



- **Khảo sát tại + ∞**

$$f(x) - \int_1^x \mathrm{d}t = \int_1^x \left(\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}-1\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = \int_1^{+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}-1\right)\mathrm{d}t \approx 0{,}153.$$

Như vậy (C_f) nhận đường thẳng $y = x - 1 + \ell$ làm tiệm cận.

b) • Nếu $x \geq 0$ thì $f(x)$ tồn tại.

Nếu $x < 0$ thì ánh xạ $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ liên tục từng khúc trên $]\,2x; x\,[$ khi và chỉ khi:

$$\forall t \in \left]\,2x; x\,\right[, \qquad t^3 + 1 > 0,$$

tức là với $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Hàm $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ khả tích trên $\left]-1; -\dfrac{1}{2}\right]$, và $\ell = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}} \approx -0{,}894.$

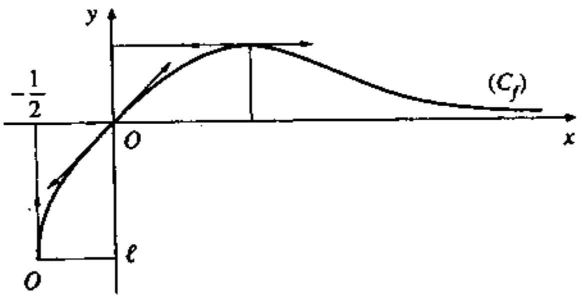
Cuối cùng ta được: $\qquad \mathrm{MXĐ}(f) = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[.$

x	$-\frac{1}{2}$		$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	ℓ	↗		↘	

- f thuộc lớp C^1 trên $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ và:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[,\quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{8x^3+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{3-4x^3}{\sqrt{8x^3+1}\,\sqrt{x^3+1}\left(2\sqrt{x^3+1}+\sqrt{8x^3+1}\right)}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}909 \ \text{ và } \ f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \approx 0{,}495.$$



- Tại $+\infty$ ta có: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, vì ánh xạ $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ khả tích trên $[0; +\infty[$.

c) • MXĐ$(f) = [0; +\infty[$, $\quad t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t}$ khả tích trên $]0; 1]$.

• Ánh xạ $\quad F:\ (x, t) \mapsto \dfrac{\ln(x+t)}{1+t}$ liên tục trên $]0; +\infty[\times[0; 1]$, và $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $]0; +\infty[\times[0; 1]$, do đó f thuộc lớp C^1 trên $]0; +\infty[$ và:

$$\forall x \in\ ]0; +\infty[,\qquad f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(x+t)(1+t)}\mathrm{d}t.$$

2.5.25 • $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\quad \left|\dfrac{f\left(\dfrac{t}{x}\right)}{1+t^2}\right| \le \dfrac{\|f\|_\infty}{1+t^2}$, và $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ khả tích trên $[0; +\infty[$,

do đó ánh xạ $t \mapsto \dfrac{f\left(\dfrac{t}{x}\right)}{1+t^2}$ khả tích trên $[0; +\infty[$.

Và: $$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\dfrac{t}{x}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{u=\frac{t}{x}}{=} x\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u.$$

- Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục tại 0, nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall u \in [0; \eta],\qquad |f(u) - f(0)| \le \varepsilon.$$

Như vậy ta có:

$$\left|x\int_0^\eta \frac{f(u)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u - x\int_0^\eta \frac{f(0)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u\right| \le x\int_0^\eta \frac{\varepsilon}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u = \varepsilon\left[\mathrm{Arc}\tan xu\right]_0^\eta = \varepsilon\mathrm{Arctan}x\eta < \varepsilon\frac{\pi}{2}.$$

Ta lại có:

$$\left| x\int_{\eta}^{+\infty}\frac{f(u)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u - x\int_{\eta}^{+\infty}\frac{f(0)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u\right| \leq 2x\|f\|_{\infty}\int_{\eta}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+x^2u^2} = 2\|f\|_{\infty}\left[\operatorname{Arc}\tan xu\right]_{\eta}^{+\infty}$$

$$= 2\|f\|_{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\tan x\eta\right).$$

Do $\eta > 0$ cố định, nên tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in [\,x_0; +\infty\,[,\qquad 2\|f\|_{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\tan x\eta\right) \leq \varepsilon.$$

Từ đó suy ra: $\quad \forall x \in [\,x_0; +\infty\,[,\qquad \left| I(x) - x\int_{0}^{+\infty}\frac{f(0)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u\right| \leq \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon.$

Cuối cùng ta được: $\quad x\int_{0}^{+\infty}\frac{f(0)}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u = f(0)\left[\operatorname{Arc}\tan xu\right]_{0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}f(0).$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi}{2}f(0)$.

2.5.26 a) Chứng minh dễ dàng bằng cách khai triển.

b) 1) Vì $f, f', f'', f+f\ +f''$ đều thuộc $C\mathcal{L}^2$, nên hệ thức α) chứng tỏ rằng $(f+f')^2$ có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$. Hãy áp dụng định lý giá trị trung gian để suy ra rằng $f+f'$ có giới hạn hữu hạn l tại $+\infty$. Bằng cách xét ánh xạ $t \mapsto f(t)\,e^t$, hãy chứng minh rằng f có giới hạn l tại $+\infty$.

Do f^2 khả tích trên $[0; +\infty[$, do đó hội tụ, nên khi đó ta có $l = 0$, từ đó suy ra:

$$\int_{0}^{+\infty}\left((f+f')^2\right)' = -\,(f+f')^2(0),$$

và do đó: $\quad \int_{0}^{+\infty}\left(f^2+f''^2-f'^2\right) = \int_{0}^{+\infty}(f+f'+f'')^2 + (f+f')^2(0) \geq 0.$

2) **Khảo sát trường hợp đẳng thức**

$$\int_{0}^{+\infty}\left(f^2+f''^2-f'^2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}(f+f'+f'')^2 = 0\\ (f+f')^2(0) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f+f'+f'' = 0\\ (f+f')(0) = 0\end{cases}.$$

Hãy giải phương trình vi phân thu được.

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall t \in [0; +\infty[,\ f(t) = \lambda e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

2.5.27 a) Đổi biến $u = \frac{\pi}{2} - t$.

b) $$I(x) - J(x) - \ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}} - \frac{1}{\sin t}\right)\mathrm{d}t.$$

Cho $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ cố định.

- $$\left|\int_0^{\varepsilon} (1-\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}} - \frac{1}{\sin t}\right)\mathrm{d}t\right| \le 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1-\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\varepsilon} \tan\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$= \left[-4\ln\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\varepsilon} = -4\ln\cos\frac{\varepsilon}{2} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0.$$

- $$\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}} - \frac{1}{\sin t}\right)\mathrm{d}t\right|$$
$$= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos t)x^2\cos^2 t}{\sin t\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}\left(\sin t + \sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}\right)}\mathrm{d}t$$
$$\le \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos^2 t)x^2}{\sin t\sin^2\varepsilon}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{\sin^2\varepsilon}\cos\varepsilon \underset{x\to 0}{\to} 0$$

(do ε cố định).

Ta kết luận: $$I(x) - J(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \ln 2.$$

c) $$J(x) \underset{u=\sin t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + x^2(1-u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Argsh}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

d) $$J(x) = (\ln 2 - \ln x + \underset{x\to 0^+}{o}(1))(1 + o(x)) = -\ln x + \ln 2 + o(1),$$

từ đó suy ra: $$I(x) = J(x) + \ln 2 + o(1) = -\ln x + 2\ln 2 + o(1).$$

2.5.28 *a)* Trước tiên chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{d}t$ tồn tại; ký hiệu $I(x)$ là giá trị của tích phân đó.

Phương pháp thứ nhất

Phép đổi biến $u = \frac{t}{x}$ cho ta: $$I(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2u^2}}{\sqrt{u(x-u)}}\mathrm{d}u.$$

Ký hiệu $L = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi$. Ta có:

$$\left|I(x)-L\right| = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2u^2}-1}{\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{x^2u^2}{\left(\sqrt{1+x^2u^2}+1\right)\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u \le$$

$$\le \frac{x^2}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{\pi x^2}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Phương pháp thứ hai

Do: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0; x]$, $1 \le \sqrt{1+t^2} \le \sqrt{1+x^2}$,

nên với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+$ ta có:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}} \le \mathrm{I}(x) \le \sqrt{1+x^2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}}.$$

Và ta lại có $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}} = \pi$, với mọi $x > 0$ (tích phân Abel).

◊ **Trả lời:** π.

2.5.29 *a)* Ký hiệu $\mathrm{F} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $F(x) = \displaystyle\int_0^x f$, ta có:

$$g(x) = \frac{1}{x}F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} F'(0) = f(0).$$

b) α) Một phép tích phân từng phần cho ta:

$$\int_a^b g^2 = \left[xg^2(x)\right]_a^b - 2\int_a^b xg(x)g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{b}\,g^2(b) - \mathrm{a}\,g^2(a) - 2\int_a^b g(f-g),$$

từ đó ta suy ra hệ thức cần phải chứng minh.

β) $$\int_a^b g^2 \le \mathrm{a}\,g^2(a) + 2\int_a^b fg \le \mathrm{a}\,g^2(a) + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$$

$$\le a\,g^2(a) + 2\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}.$$

Ta lại có:

$$\left(\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} - \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}\right)^2 = \int_a^b g^2 - 2\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2} + \int_0^{+\infty} f^2$$

$$\le a\,g^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2,$$

từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

c) g^2 liên tục trên $[0;+\infty[$, dương, và ánh xạ $b \mapsto \int_0^b g^2$ bị chặn trên trong lân cận của $+\infty$, do đó g^2 khả tích trên $[0;+\infty[$.

- Khi đó bất đẳng thức Cauchy-Schwarz chứng tỏ rằng fg khả tích trên $[0;+\infty[$.
- Khi đó kết quả ở b), α) (với a = 1) chứng tỏ rằng $g^2(b)$ có giới hạn hữu hạn λ khi b dần đến $+\infty$. Nếu $\lambda > 0$ thì $g^2(b) \underset{b\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{b}$, từ đó suy ra rằng g^2 không khả tích trên $[1;+\infty[$, mâu thuẫn.

Vậy $\lambda = 0$, rồi bằng cách chuyển qua giới hạn khi b dần đến $+\infty$ trong b), α) (với a = 0), ta được:

$$\int_0^{+\infty} g^2 = 2\int_0^{+\infty} fg \ .$$

2.5.30 Với $x \in \mathbb{R}$ cố định, các ánh xạ $t \mapsto f(x+t)$ và $t \mapsto f(x+t) - f(t)$ khả tích trên $\mathbb{R}$ Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f khả tích trên $\mathbb{R}$, nên tồn tại $A \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\mathrm{d}t \le \varepsilon \quad \text{và} \quad \int_A^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \le \varepsilon.$$

1) Với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+^*$ ta có:

$$\int_A^{+\infty} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t \le \int_{A+x}^{+\infty} |f(u)|\mathrm{d}u + \int_A^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \le 2\varepsilon.$$

2) $$\int_{-A}^{A} |f(x+t)|\mathrm{d}t = \int_{-A+x}^{A+x} |f(u)|\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\to} 0, \text{ do } f \text{ khả tích trên } \mathbb{R}.$$

Từ đó ta suy ra: $$\int_{-A}^{A} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} \int_{-A}^{A} |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Như vậy tồn tại $X_1 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in [X_1 ; +\infty[, \quad \left| \int_{-A}^{A} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t - \int_{-A}^{A} |f(t)|\mathrm{d}t \right| \le \varepsilon.$$

3) $$\left| \int_{-\infty}^{-A} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{-A} |f(x+t)|\mathrm{d}t \right| \le \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\mathrm{d}t \le \varepsilon.$$

và $$\int_{-\infty}^{-A} |f(x+t)|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-A+x} |f(u)|\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\mathrm{d}u .$$

Vậy tồn tại $X_2 \in]0;+\infty[$ sao cho:

$$\forall x \in [X_2 ; +\infty[, \quad \left| \int_{-\infty}^{-A} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \right| \le 2\varepsilon.$$

Ký hiệu $X = \text{Max}(X_1 ; X_2)$, ta được:

$$\forall x \in [X; +\infty[, \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x+t) - f(t) \right| \mathrm{d}t - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right| \mathrm{d}t \right| \le 7\varepsilon.$$

2.5.31 a) • $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{1}{1+|x-n|} \underset{n\infty}{\to} 0.$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(n) = 1.$

◊ **Trả lời:** • $(f_n)_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ đến 0.
• $(f_n)_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

b) ◊ **Trả lời:** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_n(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 2.$

c) Do g^2 và f_n^2 khả tích trên $\mathbb{R}$, nên bất đẳng thức Cauchy-Schwarz chứng tỏ rằng $f_n g$ khả tích trên $\mathbb{R}$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $A \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho: $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} g^2 \le \varepsilon$ và $\displaystyle\int_{A}^{+\infty} g^2 \le \varepsilon.$

• Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có: $\displaystyle\left(\int_A^{+\infty} f_n g\right)^2 \le \left(\int_A^{+\infty} f_n^2\right)\left(\int_A^{+\infty} g^2\right) \le 2\varepsilon,$

và cũng tương tự: $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{-A} f_n g\right)^2 \le 2\varepsilon.$

• $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \left(\int_{-A}^{A} f_n g\right)^2 \le \left(\int_{-A}^{A} f_n^2\right)\left(\int_{-A}^{A} g^2\right) \le \left(\int_{-A}^{A} f_n^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2\right).$

Với $n \ge E(A) + 1$ ta có:

$$\int_{-A}^{A} f_n^2 = \int_{-A}^{A} \frac{1}{(1+(n-x))^2} \mathrm{d}x = \frac{2A}{(n+1)^2 - A^2} \underset{n\infty}{\to} 0.$$

Vậy tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \ge N \Rightarrow \int_{-A}^{A} f_n^2 \le \varepsilon\right).$

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ thỏa mãn $n \ge N$, ta được:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n g \right| \le 2\sqrt{2\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2 \right)^{1/2},$$

chứng tỏ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n g \underset{n\infty}{\to} 0.$

2.5.32 *1)* Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc trên $[0; 1[$ và bị chặn, do đó với mọi p thuộc $[1; +\infty[$, $|f_n|^p$ khả tích trên $[0; 1[$. Hơn nữa, với mọi p thuộc $[1; +\infty[$ và mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ta có:

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p \,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^h}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{h}{p}}.$$

Do $n = 2^h + k < 2^{h+1}$, nên ta có: $2^h \geq \frac{n}{2}$, từ đó suy ra: $0 \leq \|f_n\|_p \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{p}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

Điều đó chứng tỏ rằng, với mọi p thuộc $[1; +\infty[$:

$$\|f_n\|_p \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Cho $x \in [0; 1[$.

Trước hết ta chứng tỏ rằng, với mọi h thuộc $\mathbb{N}^*$, tồn tại n_1, n_2 thuộc $\{2^h + k; 0 \leq k \leq 2^h - 1\}$ sao cho $f_{n_1}(x) = 1$ và $f_{n_2}(x) = 0$.

Vì $x \in [0; 1[$, nên tồn tại $k_1 \in \{0, \dots, 2^h - 1\}$ sao cho $\frac{k_1}{2^h} \leq x < \frac{k_1+1}{2^h}$, và do đó khi ký hiệu $n_1 = 2^h + k_1$, ta sẽ có: $f_{n_1}(x) = 1$.

Vì $h \geq 1$, nên tồn tại $k_2 \in \{0, \dots, 2^h - 1\}$ sao cho $x \notin \left[\frac{k_2}{2^h}; \frac{k_2+1}{2^h}\right[$, và do đó khi ký hiệu $n_2 = 2^h + k_2$, ta sẽ có: $f_{n_2}(x) = 0$.

Kết quả này chứng tỏ rằng dãy $(f_n(x))_{n\geq 1}$ nhận 0 và 1 làm giới hạn riêng, do đó phân kỳ.

2.5.33 $\frac{\text{th}t}{\sqrt{t(t+1)}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t} > 0$, và $t \mapsto \frac{1}{t}$ không khả tích trên $[1; +\infty[$, do đó (xem 2.5.3, *2)*, Mệnh đề 3):

$$\int_1^x \frac{\text{th}t}{\sqrt{t(t+1)}}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x.$$

2.5.34 $\frac{1}{t^2 + e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} > 0$, và $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ khả tích trên $[1; +\infty[$, do đó (xem 2.5.3, *1)*, Mệnh đề 3):

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + e^{-t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

2.5.35 Vì $f \underset{+\infty}{\to} l$, nên ta có: $f - l = \underset{+\infty}{o}(1)$.

Do $t \mapsto 1\ (>0)$ không khả tích trên $[0; +\infty[$, nên theo 2.5.3, *2)*, Mệnh đề *1*, ta có:

$$\int_0^x (f(t) - l)\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_0^x 1\,dt\right),$$

tức là: $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \ell x = \underset{x\to+\infty}{o}(x),$$

từ đó suy ra: $$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

2.5.36 *a)* • Tại 0: $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ khả tích trên $]0; 1]$.

• Tại $+\infty$: $$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sin x\cos\frac{1}{x}+\cos x\sin\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sin x + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Và $\int_1^{\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ hội tụ (chứng minh bằng một phép tích phân từng phần), $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ khả tích trên $[1; +\infty[$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

b) • Tại 0: $$\frac{\sin x\ln x}{\sqrt{x^2+1}} \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$$

• Tại $+\infty$: $$\frac{\sin x\ln x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin x\frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)$$

và $\int_1^{\to+\infty}\sin x\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ hội tụ (chứng minh bằng một phép tích phân từng phần), $O\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)$ khả tích trên $[1; +\infty[$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ

c) • Tại 0: $\frac{\sin\sqrt{x}}{\mathrm{sh}\sqrt{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 1.$

• Tại $+\infty$: $\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\mathrm{sh}\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\mathrm{sh}\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} > 0$, và $x^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, vậy $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ khả tích trên $[1; +\infty[$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ; hơn nữa, f khả tích trên $]0; +\infty[$.

d) • Tại $+\infty$: $\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\int_1^{\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x$ hội tụ và

$O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ khả tích trên $[1; +\infty[$.

• Tại 0: Phép đổi biến $y = \frac{1}{x}$ quy vấn đề về việc khảo sát tích phân $\int_1^{\to+\infty}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{y}+y\right)}\mathrm{d}y$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

e) • Hãy chứng minh rằng ánh xạ $\varphi: x \mapsto x + \ln x$ là một C^1-vi phôi từ $[1; +\infty[$ đến $[1; +\infty[$, mà chúng ta sẽ ký hiệu là φ. Bằng phép đổi biến $y = \varphi(x)$, ta chứng minh rằng tích phân suy rộng $\int_1^{\to +\infty} \sin(\varphi(x))\mathrm{d}x$ cùng loại với $\int_1^{\to +\infty} \dfrac{\sin y}{1+\dfrac{1}{\varphi^{-1}(y)}}\mathrm{d}y$.

• Sau đó lần lượt chứng minh rằng khi y dần tới $+\infty$ thì:

$$\varphi^{-1}(y) \sim y, \qquad \varphi^{-1}(y) - y \sim -\ln y,$$

từ đó suy ra:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{\varphi^{-1}(y)}} = 1 - \frac{1}{y} + O\left(\frac{\ln y}{y^2}\right).$$

• $\int_1^{\to +\infty} \sin y\mathrm{d}y$ phân kỳ,

$\int_1^{\to +\infty} \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$ hội tụ,

$\int_1^{\to +\infty} O\left(\dfrac{\ln y}{y^2}\right)\mathrm{d}y$ hội tụ tuyệt đối.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

2.5.37 Một phép tích phân từng phần cho ta:

$$\forall X \in [1; +\infty[, \qquad \int_1^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x\mathrm{d}x = \left[-\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}\right]_1^X - \frac{1}{2}\int_1^X g(x)\mathrm{d}x\,,$$

trong đó $g(x) = \dfrac{\cos x\, e^{-\sqrt{\ln x}}}{x\sqrt{\ln x}}$.

Do $\left|x(\ln x)^2 g(x)\right| \le (\ln x)^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{\ln x}} = e^{\frac{3}{2}\ln(\ln x) - \sqrt{\ln x}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$, và do $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ khả tích trên $[2; +\infty[$ (Thí dụ Bertrand, 2.5.1, *3)*), nên ta suy ra rằng g khả tích trên $[1; +\infty[$. Mặt khác thì : $\cos X\, e^{-\sqrt{\ln X}} \underset{X \to +\infty}{\to} 0$.

2.5.38 Hãy chứng minh rằng $\int_1^{\to +\infty} \dfrac{\cos t}{t+\sin t}\mathrm{d}t$ hội tụ bằng cách sử dụng một khai triển tiệm cận khi t dần đến $+\infty$:

$$\frac{\cos t}{t+\sin t} = \frac{\cos t}{t}\,\frac{1}{1+\dfrac{\sin t}{t}} = \frac{\cos t}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{\cos t}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

◊ **Trả lời:** 0.

2.5.39 Trước hết hãy chứng minh sự hội tụ của các tích phân được xét.

Phương pháp thứ 1

Cho $X \in \left]\frac{\pi}{2};+\infty\right[$.

1) $$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin t}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{x+t}\mathrm{d}t$$
$$= x\left(\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\ln x\right) \underset{x\to 0^+}{\to} 0.$$

2) $$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{x\sin t}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right| \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{x}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= x\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{X}\right) \le \frac{2x}{\pi} \underset{x\to 0^+}{\to} 0.$$

Phương pháp thứ 2

Với mọi $x>0$ ta có:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t \underset{u=x+t}{=} \int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u = \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$

Một mặt thì: $\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0^+}{\to} \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$, là một tích phân suy rộng hội tụ.

Mặt khác thì với mọi x thuộc $]0;1]$ ta có:

$$\left|\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u\right| \le \int_x^1\frac{\mathrm{d}u}{u}+\left|\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u\right| = -\ln x+\left|\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u\right|,$$

do đó: $$\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0^+}{\to} 0.$$

2.5.40 Trước hết chú ý rằng tích phân $\int_1^{\to+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ hội tụ, từ đó suy ra sự tồn tại của tích phân $\int_x^{\to+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, với mọi x thuộc $]0;+\infty[$.

Với $0<x<X$, bằng hai phép tích phân từng phần ta được:

$$\int_x^X\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^X - \int_x^X\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^X-\left(\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^X+2\int_x^X\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t\right)$$
$$= \left[-\frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^X-2\int_x^X\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t.$$

Với $x>0$, bằng cách chuyển qua giới hạn khi X dần đến $+\infty$, và vì $t \mapsto \frac{\sin t}{t^3}$ khả tích trên $[x;+\infty[$, ta được: $$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-2\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t.$$

Cuối cùng ta có: $$\frac{\sin x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

và vì $$\left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t\right| \le \int_x^{+\infty}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x^2},$$

nên $$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Cuối cùng ta được: $$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2.5.41 *a)* Ánh xạ $\phi : [0;1] \to E$ xác định bởi $\left(\forall x \in [0;1],\quad \phi(x) = -\int_x^1 \frac{1}{t} f(t)\mathrm{d}t\right)$ liên tục trên $[0;1]$, thuộc lớp C^1 trên $]0;1]$, và : $\quad \forall x \in]0;1], \phi'(x) = \frac{1}{x}f(x)$.

Từ đó suy ra:
$$\int_\varepsilon^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 t\phi'(t)\mathrm{d}t = \left[t\phi(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1\phi(t)\mathrm{d}t = -\varepsilon\phi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^1\phi(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} -\int_0^1\phi,$$
với mọi ε thuộc $]0;1]$, vì ϕ liên tục trên $[0;1]$.

b) $\quad \forall x \in]0;1],\quad \frac{1}{x}\big(g(x)-g(0)\big) = \frac{1}{x}\int_0^x f = \frac{1}{x}\int_0^x t\phi'(t)\mathrm{d}t$
$$= \frac{1}{x}\left(\left[t\phi(t)\right]_0^x - \int_0^x\phi(t)\mathrm{d}t\right) = \phi(x) - \frac{1}{x}\int_0^x\phi.$$

Vì ϕ liên tục tại 0 nên: $$\frac{1}{x}\int_0^x\phi \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \phi(0).$$

Điều này chứng tỏ: $$\frac{1}{x}\big(g(x)-g(0)\big) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0.$$

2.5.42 *1)* và *2)*: Hiển nhiên.

3) : Ta có $f(0) = 0$, và với mọi x thuộc $]0;+\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} = 1$, vậy f không liên tục tại 0.

2.5.43 *a)* Ký hiệu $F : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}2xt\end{array}$.

- F liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$
- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $[0;+\infty[$, nếu ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc}[0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}2at\end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$ và:
$$\forall (x,t) \in [-a;a]\times[0;+\infty[,\qquad \left|F(x,t)\right| \le \varphi_a(t).$$
- $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto 2t\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}2xt$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$.
- $\frac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $[0;+\infty[$, nếu ký

hiệu $\psi_a : \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto 2t\,e^{-t^2}\operatorname{sh} 2at \end{array}$, thì liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall (x,t) \in [-a;a] \times [0;+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_a(t).$$

Theo một dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, *2)*, Mệnh đề), ta suy ra:

- Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $F(x,.)$ và $\frac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $[0;+\infty[$.
- Ánh xạ $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch} 2xt\,dt \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\operatorname{sh}2xt\,dt.$$

Bằng một phép tích phân từng phần, ta được:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall T \in [0;+\infty[, \qquad \int_0^T 2te^{-t^2}\operatorname{sh}2xt\,dt = -e^{-T^2}\operatorname{sh}2xT + 2x\int_0^T e^{-t^2}\operatorname{ch}2xt\,dt,$$

từ đó bằng cách chuyển qua giới hạn khi T tiến tới $+\infty$ ta có:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2xf(x).$$

b) Bằng cách giải phương trình vi phân thu được ở *a)*, ta chứng minh rằng tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lambda e^{x^2}.$$

Và như thế: $\lambda = f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (tích phân Gauss, xem 2.5.5, *3)*, Mệnh đề 4).

Nhận xét

Cũng có thể tiến hành tính toán trực tiếp một cách đơn giản hơn.

Trước tiên, do tính chẵn lẻ ta có: $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}2xt\,dt$.

Sau đó: $$f(x) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\left(e^{2xt} + e^{-2xt}\right)dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2+x^2}dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+x)^2+x^2}dt$$

$$= \frac{1}{4}e^{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du + \frac{1}{4}e^{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}.$$

2.5.44 *1)* Rõ ràng là ánh xạ $t \mapsto e^{-t^2}e^{zt}$ liên tục và khả tích trên $\mathbb{R}$, với mọi z thuộc $\mathbb{C}$.

Cho $z \in \mathbb{C}$; ký hiệu $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. Ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{zt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+xt}e^{iyt}dt \underset{u=t-\frac{x}{2}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+\frac{x^2}{4}}e^{iy(u+\frac{x}{2})}du$$

$$= e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}e^{iyu}du.$$

Như vậy ta chỉ cần tính $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{iyt} dt$, với $y \in \mathbb{R}$.

2) Ký hiệu $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (y,t) & \mapsto & e^{-t^2+iyt} \end{array}$

- F liên tục trên $\mathbb{R}^2$
- F thỏa mãn GTHT, vì nếu ký hiệu $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t^2} \end{array}$, thì ánh xạ φ liên tục, ≥ 0, khả

tích trên $\mathbb{R}$ và: $\forall (y, t) \in \mathbb{R}^2$, $|F(y, t)| = \varphi(t)$

- $\dfrac{\partial F}{\partial y}: (y, t) \mapsto it\, e^{-t^2+iyt}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R}^2$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ thỏa mãn GTHT, vì nếu ký hiệu $\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t|e^{-t^2} \end{array}$, thì ánh xạ ψ liên tục, ≥ 0,

khả tích trên $\mathbb{R}$ và: $\forall (y, t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(y,t)\right| = \psi(t)$.

Theo định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, *2)*, Định lý), ta suy ra:

- Với mọi y thuộc $\mathbb{R}$, $F(y, .)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial y}(y, .)$ khả tích trên $\mathbb{R}$
- Ánh xạ $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+iyt} dt \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} it e^{-t^2+iyt} dt.$$

Với mọi $y \in \mathbb{R}$ và mọi $T \in [0; +\infty[$, một phép tích phân từng phần cho ta:

$$\int_{-T}^{T} it e^{-t^2+iyt} dt = \left[-\frac{i}{2} e^{-t^2+iyt}\right]_{-T}^{T} - \frac{y}{2} \int_{-T}^{T} e^{-t^2+iyt} dt,$$

từ đó bằng cách cho T dần đến $+\infty$, ta được: $\forall y \in \mathbb{R}$, $\quad f'(y) = -\dfrac{y}{2} f(y)$.

Bằng cách giải phương trình vi phân, ta chứng minh rằng tồn tại $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \lambda e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Và như thế: $\quad \lambda = f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Ta thu được: $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{zt} dt = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}+\frac{ixy}{2}-\frac{y^2}{4}} = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{z^2}{4}}$.

Nhận xét:

1) Thay x bằng 0, và lấy phần thực, thì theo tính chẵn lẻ ta có thể kết luận:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos yt\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Sau đó, bằng phép đổi biến $u = t^2$ ta có:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\cos(y\sqrt{u})}{\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

2) Thay y bằng 0, và áp dụng phép đổi biến $u = -t$, ta được:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}2xt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{2xt}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}e^{2xu}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{2xt}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{\frac{(2x)^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2},$$

đây chính là kết quả đã thu được trong bài tập 2.5.43, *b)*.

2.5.45 *a)* • Nếu $x < -1$ thì $f(x)$ không xác định.

• Nếu $x > -1$ thì $t \mapsto \ln(1+x\sin^2 t)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, do đó $f(x)$ tồn tại.

• Nếu $x = -1$, thì bằng phép đổi biến $u = \frac{\pi}{2} - t$, ta được:

$$\ln(1+x\sin^2 t) = 2\ln(\sin u) \underset{u\to 0}{\sim} 2\ln u < 0.$$

Do $u \mapsto \ln u$ khả tích trên $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, nên ta suy ra rằng $t \mapsto \ln(1+x\sin^2 t)$ khả tích trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, và do đó $f(x)$ tồn tại.

◊ **Trả lời:** MXĐ$(f) = [-1; +\infty[$.

b) Ký hiệu $F : \begin{array}{rcl} [-1;+\infty[\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \ln(1+x\sin^2 t) \end{array}$.

• F liên tục trên $[-1;+\infty[\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

• F thỏa mãn GTHT trên $[-1;+\infty[\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, vì nếu ký hiệu $\varphi : \begin{array}{rcl} \left[0;\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |\ln\cos t| \end{array}$, thì

ánh xạ φ liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ và:

$$\forall (x,t) \in [-1;+\infty[\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right[, \qquad |F(x,t)| \leq \varphi(t)$$

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}$ tồn tại và liên tục trên $[-1;+\infty[\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT trên $]-1;+\infty[\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, vì với mọi a thuộc $]-1; +\infty[$, nếu ký

hiệu $\varphi_a : \begin{array}{rcl} \left[0;\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{1+a} \end{array}$, thì ánh xạ φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ và:

$$\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times \left[0;\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \le \varphi_a(t).$$

Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, *1)*, Định lý) và dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, *2)*, Định lý), ta suy ra:

- Với mọi x thuộc $[-1;+\infty[$, $F(x,.)$ khả tích trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$
- f liên tục trên $[-1;+\infty[$
- Với mọi x thuộc $]-1;+\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$
- f thuộc lớp C^1 trên $]-1;+\infty[$ và :

$$\forall x \in \,]-1;+\infty[, \qquad f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}\mathrm{d}t.$$

Với mọi x thuộc $]-1;+\infty[-\{0\}$ ta có:

$$f'(x) \underset{u=\tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{\left(1+u^2\right)\left(1+(x+1)u^2\right)}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+(x+1)u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{x}\left[\operatorname{Arctan} u - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x+1}\,u\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}.$$

Và ta có: $\quad f'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$

Như vậy: $$\forall x \in \,]-1;+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}.$$

c) Do $f(0) = 0$ nên với mọi x thuộc $]-1;+\infty[$ ta có:

$$f(x) = \int_0^x f'(s)\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s+1}\left(1+\sqrt{s+1}\right)}$$

$$\underset{v=\sqrt{s+1}}{=} \pi \int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v} = \pi\left(\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)-\ln 2\right).$$

Vì hơn nữa f liên tục tại -1, nên ta có: $\quad f(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\pi \ln 2.$

Cuối cùng thì ta được: $\quad \forall x \in [-1;+\infty[, \quad f(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{x+1}}{2}.$

2.5.46 *a)* Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ liên tục trên $]0;1[$, ≥ 0, và $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 1}{\to} 1$, $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t}$. Ta kết luận rằng ánh xạ $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ khả tích trên $]0;1[$ khi và chỉ khi $x > -1$.

Ta ký hiệu $F: \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[\times]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{t-1}{\ln t}t^x \end{array}$.

- F liên tục trên $]-1;+\infty[\times]0;1[$
- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $]-1;+\infty[\times]0;1[$, vì nếu ký hiệu:

$$\varphi_a: \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t-1}{\ln t}t^a \end{array} \quad \text{với mọi } a \text{ thuộc }]-1;+\infty[,$$

thì ánh xạ φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;1[$ và:

$$\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[, \quad |F(x,t)| \leq \varphi_a(t)$$

- $\frac{\partial F}{\partial x}: (x,t) \mapsto (t-1)t^x$ tồn tại và liên tục trên $]-1;+\infty[\times]0;1[$
- $\frac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $]-1;+\infty[\times]0;1[$, vì với mọi a thuộc $]-1;+\infty[$, nếu ký hiệu $\psi_a: \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^a \end{array}$, thì ánh xạ ψ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;1[$ và:

$$\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \psi_a(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, *2)*, Mệnh đề), ta suy ra:

- Với mọi x thuộc $]-1;+\infty[$, $F(x,.)$ và $\frac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $]0;1[$
- f thuộc lớp C^1 trên $]-1;+\infty[$ và:

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

◊ **Trả lời:** • MXĐ(f) = $]-1;+\infty[$

• f thuộc lớp C^1 trên $]-1;+\infty[$ và:

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

b) Theo *a)*, tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho: $\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1} + C.$

Ta chú ý rằng: $\forall t \in]0;1[, \ln t \leq t-1 < 0$, từ đó:

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \ 0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1},$$

và do đó: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$

Ta suy ra rằng $C = 0$, và cuối cùng thì:

$$\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \quad f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1}.$$

2.5.47 a) Cho $(\alpha,\beta) \in \left]0;+\infty\right[^2$. Ánh xạ $t \mapsto \dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ liên tục trên $\left]0;+\infty\right[$,

$$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \underset{t\to 0}{\to} \beta - \alpha, \quad \text{và} \quad t^2\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \underset{t\to +\infty}{\to} 0.$$

Ta suy ra rằng ánh xạ $t \mapsto \dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ khả tích trên $\left]0;+\infty\right[$.

b) • Ta có: $\displaystyle\int_\varepsilon^T \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}dt = \int_\varepsilon^T \frac{e^{-\alpha t}}{t}dt - \int_\varepsilon^T \frac{e^{-\beta t}}{t}dt \underset{\substack{u=\alpha t\\ v=\beta t}}{=} \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}du - \int_{\alpha T}^{\beta T} \frac{e^{-v}}{v}dv$.

• Do $u \mapsto \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ khả tích trên]0; 1], nên: $\displaystyle\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}du \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0$, do đó :

$$\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}du \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} \ln\beta - \ln\alpha.$$

Mặt khác do $v \mapsto \dfrac{e^{-v}}{v}$ khả tích trên $\left[1;+\infty\right[$, nên $\displaystyle\int_{\alpha T}^{\beta T} \frac{e^{-v}}{v}dv \underset{T\to +\infty}{\to} 0.$

Như thế ta kết luận: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}dt = \ln\beta - \ln\alpha$..

c) Trước tiên ta chú ý rằng khi ký hiệu $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}dt$, với $(\alpha, \beta) \in \left]0;+\infty\right[^2$,

thì ta có: $\forall(\alpha,\beta) \in \left]0;+\infty\right[^2, \quad I(\beta, \alpha) = -I(\alpha, \beta).$

Như thế ta chỉ cần tính $I(\alpha, \beta)$ với $\alpha \le \beta$.

Ký hiệu $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \in \left[1;+\infty\right[$, khi đó ta có:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha x t}}{t}dt \underset{u=\alpha t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{u}du.$$

Ký hiệu $F : \left[1;+\infty\right[\times \left]0;+\infty\right[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$.

- F liên tục trên $\left[1;+\infty\right[\times \left]0;+\infty\right[$
- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $\left[1;+\infty\right[\times \left]0;+\infty\right[$, vì với mọi a thuộc $\left[1;+\infty\right[$,

khi ký hiệu: $\varphi_a : \left]0;+\infty\right[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-at}}{t}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\left]0;+\infty\right[$, và :

$$\forall(x, t) \in [1;a] \times \left]0;+\infty\right[, \quad |F(x, t)| \le \varphi_a(t).$$

- $\frac{\partial F}{\partial x}: \ (x,t) \mapsto \ e^{-xt}$ tồn tại và liên tục trên $[1;+\infty[\times]0;+\infty[$
- $\frac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT trên $[1;+\infty[\times]0;+\infty[$, vì nếu ký hiệu $\psi: \ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t} \end{array}$, thì

ψ liên tục, ≥ 0, khả tích và :

$$\forall (x,t) \in [1;+\infty[\times]0;+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \ \psi(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $[1;+\infty[$, $F(x,.)$ và $\frac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $]0;+\infty[$
- Ánh xạ $f: \ \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} F(x,t)dt \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[1;+\infty[$ và:

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Vậy tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho: $\quad \forall x \in [1;+\infty[, \quad f(x) = \ln x + C.$

Vì $f(1) = 0$, nên ta có $C = 0$, từ đó suy ra: $\forall x \in [1;+\infty[, \quad f(x) = \ln x.$

Cuối cùng ta được: $\quad I(\alpha,\beta) = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \ln\frac{\beta}{\alpha} = \ln\beta - \ln\alpha \quad$ nếu $\ 0 < \alpha \leq \beta$,

và nếu $\beta \leq \alpha$ thì : $\ I(\alpha,\beta) = -I(\beta,\alpha) = -(\ln\alpha - \ln\beta) = \ln\beta - \ln\alpha.$

d) Với mọi x thuộc $]-1;+\infty[$ ta có:

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x dt \underset{u=-\ln t}{=} -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-1}{u}\left(e^{-u}\right)^x e^{-u}du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)u} - e^{-(x+2)u}}{u}du = \ln(x+2) - \ln(x+1).$$

2.5.48 a) • Nếu $x > 1$, thì ánh xạ $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$ không xác định trong $[x;\,1]$, do đó $f(x)$ không tồn tại.

• Nếu $x < 1$, thì khi đó $\quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$ liên tục trên $]0;\,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{t}} > 0,$$

và

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{t-1}} > 0,$$

vậy $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$ khả tích trên $]0;\,1[$.

- Nếu $x = 1$, thì $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$ không khả tích trên $]0;1[$.

◊ **Trả lời:** MXĐ$(f) =]1;+\infty[$.

b) Ký hiệu $F : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[\times]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} \end{array}$.

- F liên tục trên $]1;+\infty[\times]0;1[$
- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $]1;+\infty[\times]0;1[$, vì với mọi a thuộc $]1;+\infty[$, khi

ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)(a-t)}} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;1[$, và :

$$\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[, \quad |F(x,t)| \leq \varphi_a(t).$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}: \ (x,t) \mapsto -\dfrac{1}{2\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{3/2}} = -\dfrac{F(x,t)}{2(x-t)}$ tồn tại và liên tục trên $]1;+\infty[\times]0;1[$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $]1;+\infty[\times]0;1[$, vì với mọi a thuộc $]1;+\infty[$,

nếu ký hiệu $\psi_a : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{t(1-t)}(a-t)^{3/2}} \end{array}$, thì ψ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;1[$ và :

$$\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_a(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $]1;+\infty[$, $F(x,.)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $]0;1[$
- Ánh xạ f thuộc lớp C^1 trên $]1;+\infty[$ và:

$$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{3/2}}.$$

Lập luận trên cũng áp dụng cho f', và ta suy ra rằng f thuộc lớp C^2 trên $]1;+\infty[$ và :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad f''(x) = \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{5/2}}.$$

◊ **Trả lời:** $\forall x \in]1;+\infty[, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{3/2}}$

$$\text{và} \quad f''(x) = \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{5/2}}.$$

c) • $\forall x \in]1;+\infty[, \quad f(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(x-t)}} \geq \int_0^1 \frac{dt}{(x-t)} = \left[-\ln(x-t)\right]_{t=0}^{t=1}$

$$= -\ln(x-1) + \ln x \underset{x\to 1}{\to} +\infty .$$

- $\forall x \in \left]1;+\infty\right[, \quad 0 \le f(x) \le \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)x}} = \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$

- Tại b) ta đã thấy rằng f thuộc lớp C^1 trên $\left]1;+\infty\right[$ và:

$$\forall x \in \left]1;+\infty\right[, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{3/2}} < 0,$$

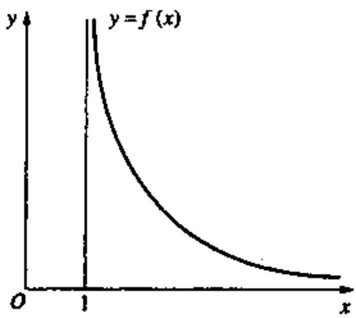
vậy f giảm nghiêm ngặt trên $\left]1;+\infty\right[$.

- Tương tự, ta thấy f thuộc lớp C^2 trên $\left]1;+\infty\right[$ và :

$$\forall x \in \left]1;+\infty\right[, \quad f''(x) = \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}(x-t)^{5/2}} > 0,$$

vậy f lồi (chặt) trên $\left]1;+\infty\right[$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	0



d) α) Ta tính: $\left(U_x(t)\right)^2 = t(1-t)(x-t) = xt - (x+1)t^2 + t^3$,

từ đó suy ra: $2\,U_x(t)\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_x(t)\right) = x - 2(x+1)t + 3t^2$,

rồi lại có: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U_x(t)}{(x-t)^2}\right) = \frac{2U_x(t)}{(x-t)^3} + \frac{x-2(x+1)t+3t^2}{2U_x(t)(x-t)^2} = \frac{4t(1-t)+\left(x-2(x+1)t+3t^2\right)}{2(x-t)^2U_x(t)}$$

$$= \frac{-t^2+2(1-x)t+x}{2(x-t)^2U_x(t)} = \frac{-(t-x)^2+(2-4x)(t-x)+3x-3x^2}{2(x-t)^2U_x(t)}.$$

Bằng cách tích phân, ta suy ra:

$$\left[\frac{U_x(t)}{(x-t)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{U_x(t)} + (2x-1)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x-t)U_x(t)} + \frac{3x(1-x)}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x-t)^2U_x(t)}.$$

Nhưng $\left[\dfrac{U_x(t)}{(x-t)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = 0$, từ đó bằng cách sử dụng giá trị của $f'(x)$ và $f''(x)$ đã tìm được ở

b), ta được: $$2x(1-x)f''(x) - 2(2x-1)f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = 0.$$

Cuối cùng thì f là nghiệm trên $\left]1;+\infty\right[$ của phương trình vi phân:

$$4x(1-x)\,y'' + 4(1-2x)\,y' - y = 0.$$

2.5.49 a) Rõ ràng là: $\quad \text{MXĐ}(f) = [0;+\infty[$.

Ta ký hiệu $\quad F : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[\times]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \end{array}$.

- F liên tục trên $[0;+\infty[\times]0;+\infty[$

- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $[0;+\infty[\times]0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $[0;+\infty[$, khi ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1-e^{-at^2}}{t^2} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$, và :

$$\forall (x,t) \in [0;a]\times]0;+\infty[, \qquad |F(x,t)| \leq \varphi_a(t).$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x} : \ (x,t) \mapsto e^{-xt^2}$ tồn tại và liên tục trên $[0;+\infty[\times]0;+\infty[$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, vì với mọi b thuộc $]0;+\infty[$,

nếu ký hiệu $\psi_b : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-bt^2} \end{array}$, thì ψ_b liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$ và :

$$\forall (x,t) \in [b;+\infty[\times]0;+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_b(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý về tính liên tục dưới dấu $\int\limits_I$ (xem 2.5.5, 1), Mệnh đề), và dạng suy rộng của định lý về đạo hàm dưới dấu $\int\limits_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $[0;+\infty[$, $F(x,.)$ khả tích trên $]0;+\infty[$
- f liên tục trên $[0;+\infty[$

- Với mọi x thuộc $]0;+\infty[$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $]0;+\infty[$

- f thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in\,]0;+\infty[, \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt \underset{u=xt^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

b) Vì f liên tục trên $[0;+\infty[$, thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$, và do $f(0)=0$, nên theo a), ta được:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)du = \sqrt{\pi x}.$$

c) Cho $x>0$. Ta có: $f(x) \underset{u=\sqrt{x}t}{=} \sqrt{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2}}{u^2}du$.

Nhưng, với mọi (ε, U) sao cho $0 \leq \varepsilon < U$, bằng một phép tích phân từng phần ta có:

$$\int_{\varepsilon}^{U}\frac{1-e^{-u^2}}{u^2}du = \left[-\frac{1-e^{-u^2}}{u}\right]_{\varepsilon}^{U} + 2\int_{\varepsilon}^{U}e^{-u^2}du ,$$

từ đó bằng cách cho ε dần đến 0 và U dần đến $+\infty$, ta được:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2}}{u^2}du = 2\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}\,.$$

Ta kết luận được rằng:

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f(x) = \sqrt{\pi x} \quad \text{(do trường hợp } x = 0 \text{ là tầm thường).}$$

2.5.50 a) • Với mọi x thuộc $\mathbb{R}^*$, ánh xạ $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t(x-t)}}$ liên tục trên]0; x[hay trên]x; 0[, dương, và $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t(x-t)}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{xt}}$, $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t(x-t)}} \underset{t\to x}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x(x-t)}}$, do đó $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t(x-t)}}$ khả tích trên]0; x[hay trên]x; 0[. Như vậy : MXĐ(f) = $\mathbb{R}^*$.

• Với mọi x thuộc $\mathbb{R}^*$, ta có: $f(x) \underset{u=\frac{1}{x}}{=} \dfrac{x}{|x|}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}du$.

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ $u \mapsto \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}$ khả tích trên]0; 1[.

Ta ký hiệu $G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\left]0;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ (x,u) & \mapsto & \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}} \end{array}$.

1) G liên tục trên $\mathbb{R}\times\left]0;1\right[$

2) G thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times\left]0;1\right[$, vì với mọi a thuộc $\mathbb{R}$, khi ký hiệu $\varphi_a: \begin{array}{ccc} \left]0;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{e^{-au}}{\sqrt{u(1-u)}} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\left]0;1\right[$, và :

$$\forall (x, u) \in \left[a;+\infty\right[\times\left]0;1\right[, \quad |G(x,u)| \leq \varphi_a(u).$$

3) $\dfrac{\partial G}{\partial x}: (x,u) \mapsto \dfrac{-ue^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R}\times\left]0;1\right[$

4) $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times\left]0;1\right[$, vì với mọi a thuộc $\mathbb{R}$, ta có:

$$\forall (x, u) \in \left[a;+\infty\right[\times\left]0;1\right[, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,u)\right| \leq \varphi_a(u).$$

Theo dạng suy rộng của định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $G(x,.)$ và $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $\left]0;1\right[$

- g thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \int_0^1 \frac{-u\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u < 0.$$

Kết quả này chứng tỏ g giảm nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$.

Cùng một lập luận như trên chứng tỏ rằng g thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g''(x) = \int_0^1 \frac{u^2\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u > 0,$$

do đó g hiển nhiên lồi (chặt) trên $\mathbb{R}$.

- **Khảo sát tại 0:**

Ta có: $$g(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} \underset{v=2u-1}{=} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} = \left[\mathrm{Arcsin}v\right]_{-1}^1 = \pi,$$

và: $$g'(0) = \int_0^1 \frac{-u}{\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{v+1}{\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v = -\frac{\pi}{2}.$$

- **Khảo sát tại $-\infty$:**

Với mọi x thuộc $]-\infty; 0]$, ta có:

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u \geq \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x},$$

do đó: $$g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{và} \quad \frac{g(x)}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Kết quả này chứng tỏ rằng đường cong biểu thị C_g nhận một nhánh parabôlic, với phương tiệm cận là $y'y$.

- **Khảo sát tại $+\infty$:**

Phương pháp thứ nhất:

Cho $x \in]0; +\infty[$. Ta có:

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}}\mathrm{d}u \underset{v=2u-1}{=} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^{-x\frac{1+v}{2}}}{\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v$$

$$\underset{\theta=\mathrm{Arcsin}v}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\frac{1+\sin\theta}{2}}\mathrm{d}\theta \underset{\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

Vì: $$\forall \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \quad \sin\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi} \geq 0,$$

nên ta suy ra:

$$0 \leq g(x) \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi \underset{\psi=\frac{2\varphi}{\pi}\sqrt{x}}{=} \frac{\pi}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\psi^2}\mathrm{d}\psi \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\psi^2}\mathrm{d}\psi,$$

và do đó: $$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Phương pháp thứ 2:

Cho $x \in]1; +\infty]$. Cho $\varepsilon \in]0; 1[$ mà ta sẽ chọn sau.

Ta có: $$0 \le \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}} du \le e^{-x\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \le e^{-x\varepsilon} \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi e^{-x\varepsilon}$$

và: $$0 \le \int_{0}^{\varepsilon} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}} du \le \int_{0}^{\varepsilon} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \le \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \int_{0}^{\varepsilon} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Bằng cách chọn $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, ta vẫn có $\varepsilon \in]0; 1[$ và:

$$0 \le g(x) \le \pi e^{-x\varepsilon} + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} = \pi e^{-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}},$$

chứng tỏ rằng: $$g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

***Phương pháp thứ 3*:**

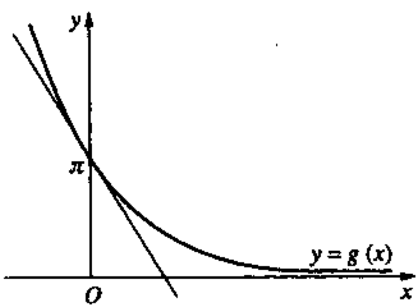
Áp dụng định lý hội tụ có hàm trội (hoặc: hội tụ bị chặn) (xem Tập 4):

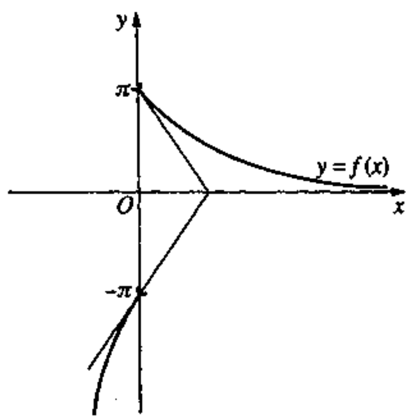
- Với mọi u thuộc $]0; 1[$: $\dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- Ta có: $\forall (x, u) \in [0; +\infty[\times]0; 1[, \quad 0 \le \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{u(1-u)}}$

và $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u(1-u)}}$ khả tích trên $]0; 1[$.

Ta suy ra (định lý hội tụ bị chặn):

$$\int_{0}^{1} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-u)}} du \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{0}^{1} 0 du = 0.$$





b) Rõ ràng là: MXĐ(f) $= [0; +\infty[$.

• Ta ký hiệu $F: \begin{array}{ccc} [0;+\infty[\times[0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \sqrt{1+xt}\,e^{-t^2} \end{array}$.

1) F liên tục trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$

2) F thỏa mãn GTHT địa phương trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $[0;+\infty[$, khi ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{1+at}\,e^{-t^2} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$, và :

$$\forall (x,t) \in [0;a]\times[0;+\infty[, \quad |F(x,t)| \leq \varphi_a(t).$$

3) $\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto \dfrac{t}{2\sqrt{1+xt}}e^{-t^2}$ tồn tại và liên tục trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$

4) $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$, vì nếu ký hiệu $\psi : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t}{2}e^{-t^2} \end{array}$,

thì ψ liên tục, ≥ 0, khả tích và :

$$\forall (x,t) \in [0;+\infty[\times[0;+\infty[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

1) Với mọi x thuộc $[0;+\infty[$, $F(x,.)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $[0;+\infty[$

2) f thuộc lớp C^1 trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \; f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\sqrt{1+xt}}e^{-t^2}dt > 0.$$

Kết quả này chứng tỏ f tăng nghiêm ngặt trên $[0;+\infty[$.

Cũng lập luận trên đây chứng tỏ rằng f thuộc lớp C^2 trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{1+xt}}e^{-t^2}dt < 0,$$

do đó f lõm (chặt) trên $[0;+\infty[$.

• **Khảo sát tại 0:**

Ta có: $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ và $f'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2}e^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{4}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$.

• **Khảo sát tại $+\infty$:**

Với mọi x thuộc $]0; +\infty[$, ta có:

$$0 \leq f(x) - \int_0^{+\infty} \sqrt{xt}\,e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+xt} - \sqrt{xt}\right)e^{-t^2}dt$$

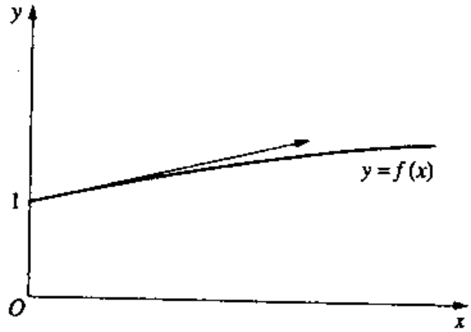
$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}+\sqrt{xt}}dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{xt}}dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}dt.$$

Hơn nữa: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{xt}\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{x}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{u=t^2}{=} \frac{\sqrt{x}}{2}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{x}}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$

Như vậy ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

vậy C_f nhận một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $x'x$.



c) Rõ ràng là: MXĐ(f) $= \mathbb{R}$.

• Ta ký hiệu

$$F:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[0;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \mathrm{e}^{-t^3-xt^2}\end{array}.$$

1) F liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$

2) F thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $\mathbb{R}$, khi ký hiệu $\varphi_a:\ \begin{array}{ccc}[0;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t^3-at^2}\end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$, và :

$$\forall (x,t)\in [a;+\infty[\times[0;+\infty[,\qquad |F(x,t)| \leq \varphi_a(t).$$

3) $\dfrac{\partial F}{\partial x}:\ (x,t)\mapsto -t^2\mathrm{e}^{-t^3-xt^2}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$

4) $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $\mathbb{R}$, khi ký hiệu $\psi_a:\ \begin{array}{ccc}[0;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & t^2e^{-t^3-at^2}\end{array}$, thì ψ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$ và :

$$\forall (x,t)\in [a;+\infty[\times[0;+\infty[,\qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_a(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

1) Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $F(x,.)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $[0;+\infty[$

2) f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = -\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^3-xt^2}\mathrm{d}t < 0.$$

Kết quả này chứng tỏ f giảm nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$.

Cũng lập luận trên đây chứng tỏ rằng f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x) = \int_0^{+\infty}t^4\mathrm{e}^{-t^3-xt^2}\mathrm{d}t > 0,$$

do đó f lồi (chặt) trên $\mathbb{R}$.

• **Khảo sát tại 0:**

Ta có: $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt \underset{u=t^3}{=} \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{2}{3}} e^{-u} du = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}89.$

và $f'(0) = -\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3} dt = \left[\frac{1}{3}e^{-t^3}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{3}.$

- **Khảo sát tại** $-\infty$ **:**

Với mọi $x \le -2$, ta ký hiệu $X = -x \ge 2$, và như vậy:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^3+Xt^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{(X-t)t^2} dt \ge \int_1^{X-1} e^{(X-t)t^2} dt$$

$$\ge \int_1^{X-1} e^{t^2} dt \ge \int_1^{X-1} e^t dt = e^{X-1} - 1,$$

từ đó suy ra: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty$ và $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty.$

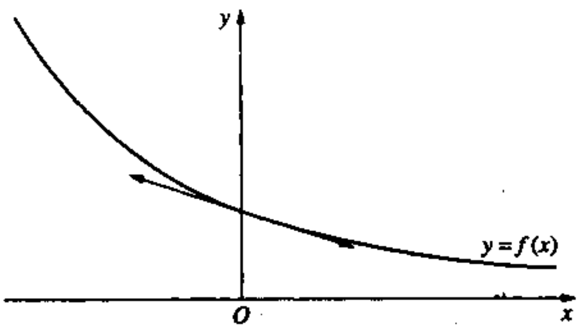
Vậy C_f nhận một nhánh parabôlic với phương tiệm cận y'y.

- **Khảo sát tại** $+\infty$ **:**

Với mọi x thuộc $]0; +\infty[$ ta có:

$$0 \le f(x) \le \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \underset{u=\sqrt{x}t}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

và do đó: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$



2.5.51 a) Cho $x \in \mathbb{R}$. Ánh xạ $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ liên tục trên $]0; +\infty[$, có dấu không đổi trong lân cận 0, $\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \underset{t\to 0}{\to} x$, và trong lân cận $+\infty$ thì $\left|\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\right| \le \frac{\pi}{2t^3}$, do đó $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ khả tích trên $]0; +\infty[$.

b) Ta ký hiệu $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\,]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \end{array}$.

- F liên tục trên $\mathbb{R}\times\,]0;+\infty[$

- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times\,]0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $[0;+\infty[$, khi ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{a}{1+t^2} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$, và :

$$\forall (x,t) \in [-a;a]\times\,]0;+\infty[, \quad |F(x,t)| \leq \frac{|xt|}{t(1+t^2)} \leq \varphi_a(t).$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3t^2)(1+t^2)}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R}\times\,]0;+\infty[$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT trên $\mathbb{R}\times\,]0;+\infty[$, vì khi ký hiệu $\psi : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{1+t^2} \end{array}$, thì ψ

liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$ và :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\,]0;+\infty[, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Mệnh đề), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $F(x,.)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $]0;+\infty[$

- f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Với mọi x thuộc $[0;1[\cup]1;+\infty[$, bằng một phép phân tích thành phân thức đơn giản ta được:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\operatorname{Arctan} t - x\operatorname{Arctan}(xt)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+x)}.$$

Do f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, nên vì tính liên tục của f' tại 1, ta có:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}.$$

◊ **Trả lời:** $\forall x \in [0;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$.

c) • Vì $f(0) = 0$, nên ta suy ra từ kết quả trên đây:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).$$

- Vì f lẻ nên ta có: $\quad \forall x \in\,]-\infty;0], \quad f(x) = -f(-x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x).$

◊ **Trả lời:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{nếu } x \ge 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$

d) Trước hết ta chú ý rằng $t \mapsto \left(\dfrac{\operatorname{Arc}\tan t}{t}\right)^2$ khả tích trên $]0;+\infty[$.

Với mọi (ε, X) sao cho $0 < \varepsilon < X$, bằng một phép tích phân từng phần ta được:

$$\int_\varepsilon^X \left(\frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = -\frac{(\operatorname{Arc}\tan X)^2}{X} + \frac{(\operatorname{Arc}\tan \varepsilon)^2}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^X \frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t,$$

từ đó bằng cách cho ε dần đến 0 và X dần đến $+\infty$, ta được:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t = 2f(1) = \pi \ln 2.$$

2.5.52 Ta ký hiệu $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} \end{array}$.

- F liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$

- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$, vì với mọi a thuộc $[0;+\infty[$, khi ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$, và :

$$\forall (x,t) \in [-a;a]\times[0;+\infty[, \qquad |F(x,t)| \le \varphi_a(t).$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto \dfrac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;+\infty[$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $]0;+\infty[\times[0;+\infty[$, vì với mọi b thuộc $]0;+\infty[$, khi ký hiệu $\psi_b : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{2}{b(1+t^2)} \end{array}$, thì ψ_b liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$ và :

$$\forall (x,t) \in [b;+\infty[\times[0;+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2xt^2}{1+x^2t^2}\frac{1}{1+t^2} \le \frac{2}{x}\frac{1}{1+t^2} \le \psi_b(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 1), Mệnh đề) và dạng suy rộng của định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $F(x,.)$ khả tích trên $[0;+\infty[$

- Với mọi x thuộc $]0;+\infty[$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $[0;+\infty[$

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

• f thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ (và do đó cả trên $]-\infty;0[$ theo tính chất chẵn lẻ hiển nhiên), và:

$$\forall x \in\ ]0;+\infty[\ ,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t\ .$$

Với mọi x thuộc $]0;1[\cup]1;+\infty[$, bằng một phép phân tích thành phân thức đơn giản ta được:

$$f'(x) = \frac{2x}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{1-x^2}\left[\mathrm{Arc}\tan(xt) - x\mathrm{Arc}\tan t\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{1+x}.$$

Do f thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$, nên vì tính liên tục của f' tại 1, ta có:

$$\forall x \in\ ]0;+\infty[,\qquad f'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

Vì f liên tục tại 0, và do $f(0) = 0$, nên ta suy ra:

$$\forall x \in [0;+\infty[,\qquad f(x) = \pi\ln(1+x).$$

Cuối cùng, do f chẵn nên:

$$\forall x \in\ ]-\infty;0],\qquad f(x) = f(-x) = \pi\ln(1-x).$$

Cuối cùng ta có:

$$\forall x \in \mathbb{R},\qquad f(x) = \pi\ln(1+|x|).$$

2.5.53 a) Cho $x \in \mathbb{R}$.

• Các ánh xạ $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \dfrac{t\sin(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}$, $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$

liên tục trên $[0;+\infty[$.

• Với mọi t thuộc $[0;+\infty[$ ta có:

$$\left|\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \le \frac{1}{1+t^2},\qquad \left|\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \le \frac{t}{(1+t^2)^2},\qquad \left|\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \le \frac{1}{(1+t^2)^2},$$

do đó $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}$ khả tích trên $[0;+\infty[$.

• Bằng một phép khai triển tiệm cận (với x cố định, và t dần đến $+\infty$), ta được:

$$\frac{t\sin(xt)}{1+t^2} = \frac{\sin(xt)}{t}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sin(xt)}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Vì $\displaystyle\int_1^{\to+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ hội tụ và do $O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ khả tích trên $[1;+\infty[$, nên ta suy ra rằng $\displaystyle\int_0^{\to+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ hội tụ.

Kết quả trên chứng tỏ rằng $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ tồn tại; $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$ được xác định bằng những tích phân của những hàm khả tích, còn $g(x)$ được xác định bởi một tích phân suy rộng.
b) Cho $x \in \mathbb{R}$. Bằng một phép tích phân từng phần, ta được với mọi T thuộc $[0;+\infty[$:

$$x\int_0^T \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt = \frac{\sin xT}{1+T^2} + 2\int_0^T \frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}dt,$$

từ đó bằng cách cho T dần đến $+\infty$ ta được: $xf(x) = 2h(x)$.
c) Ta ký hiệu $H: \begin{array}{ccc} [0;+\infty[\times[0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2} \end{array}$.

- H liên tục trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$
- H thỏa mãn GTHT trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$, vì ký hiệu $\varphi : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} \end{array}$, thì φ

liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$, và :

$$\forall (x, t) \in [0;+\infty[\times[0;+\infty[, \quad |H(x, t)| \leq \varphi(t).$$

- $\frac{\partial H}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{t^2\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}$ tồn tại và liên tục trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$
- $\frac{\partial H}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT trên $[0;+\infty[\times[0;+\infty[$, vì khi ký hiệu $\psi : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \end{array}$,

thì ψ liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$ và :

$$\forall (x, t) \in [0;+\infty[\times[0;+\infty[, \quad \left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $[0;+\infty[$, $H(x,.)$ và $\frac{\partial H}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $[0;+\infty[$

- h thuộc lớp C^1 trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}dt = f(x) - k(x)$$

Cũng lập luận đó áp dụng được cho $k : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}dt$, và chứng tỏ rằng k thuộc lớp C^1

trên $[0;+\infty[$ và: $\quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad k'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}dt = -h(x).$

d) Từ b) và c) ta suy ra rằng f thuộc lớp C^2 trên $]0;+\infty[$ và ta có liên tiếp:

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad xf'(x) + f(x) = 2h'(x) = 2f(x) - 2k(x),$$
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad xf'(x) = f(x) - 2k(x),$$
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad xf''(x) = -2k'(x) = 2h(x) = xf(x),$$

từ đó cuối cùng ta được:

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad f''(x) = f(x).$$

e) 1) Việc giải phương trình vi phân xuất hiện trên đây chứng tỏ rằng tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho:

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad f(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}.$$

Định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_0^{+\infty}$ lại cho phép ta chứng tỏ rằng f liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục tại 0, từ đó suy ra:

$$\forall x \in \left[0;+\infty\right[, \quad f(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}.$$

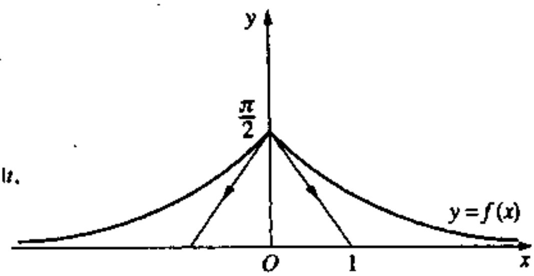
Vì: $$\forall x \in \left[0;+\infty\right[, \quad |f(x)| \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

nên f bị chặn, do đó $\lambda = 0$.

Và vì: $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, nên ta được $\mu = \dfrac{\pi}{2}$.

Như thế: $$\forall x \in \left[0;+\infty\right[, \ f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

Cuối cùng, vì f chẵn, nên ta kết luận: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{\pi}{2} e^{-|x|}$.



2) Một phép tích phân từng phần, với $x \in \left]0;+\infty\right[$ và $T \in \left[0;+\infty\right[$, cho ta:

$$\int_0^T \frac{t\sin(xt)}{1+t^2} dt =$$

$$-\frac{T\cos(xT)}{x\left(1+T^2\right)} + \int_0^T \frac{\left(1-t^2\right)\cos(xt)}{x\left(1+t^2\right)^2} dt,$$

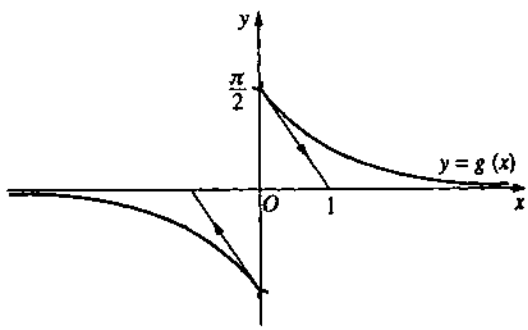
từ đó bằng cách cho T dần đến $+\infty$ ta được:

$$xg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\left(1-t^2\right)\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\left(2-\left(1+t^2\right)\right)\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2} dt$$

$$= 2k(x) - f(x) = f(x) - 2h'(x)$$

$$= -xf'(x),$$



và như thế:

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ g(x) = -f'(x) = \frac{\pi}{2}\,e^{-x}.$$

Do $g(0) = 0$ và g lẻ, nên ta kết luận:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-x} & \text{nếu} \quad x > 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{x} & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}, \quad \text{hay:} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x)\,e^{-|x|}.$$

2.5.54 *a)* Cho $x \in \left[0;+\infty\right[$. Ánh xạ $t \mapsto \dfrac{1-e^{-xt}}{t}\sin t$ liên tục trên $\left]0;+\infty\right[$, $\dfrac{1-e^{-xt}}{t}\sin t \underset{t\to 0}{\to} 0$; vì $\dfrac{1-e^{-xt}}{t}\sin t = \dfrac{\sin t}{t} - \dfrac{\sin t}{t}e^{-xt}$, và do tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{\to+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ hội tụ, và rằng (nếu $x > 0$) $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}e^{-xt}$ khả tích trên $\left[1;+\infty\right[$, nên tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{\to+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{t}\sin t\,dt$ hội tụ.

b) α) Ta chú ý rằng: $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}dt$, và ký hiệu:

$$G : \begin{array}{ccc} \left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-xt}\sin t}{t} \end{array}.$$

- G liên tục trên $\left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[$
- G thỏa mãn GTHT địa phương trên $\left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[$, vì với mọi a thuộc $\left]0;+\infty\right[$,

khi ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc} \left]0;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-at} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\left]0;+\infty\right[$, và :

$$\forall (x,t) \in \left[a;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[, \qquad |G(x,t)| \leq \varphi_a(t) \quad \text{vì } \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leq |t|.$$

- $\dfrac{\partial G}{\partial x} : (x,t) \mapsto -e^{-xt}\sin t$ tồn tại và liên tục trên $\left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[$
- $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT địa phương trên $\left]0;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[$, vì với mọi a thuộc $\left]0;+\infty\right[$,

khi ký hiệu $\varphi_a : \begin{array}{ccc} \left]0;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-at} \end{array}$, thì φ_a liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\left]0;+\infty\right[$, và :

$$\forall (x,t) \in \left[a;+\infty\right[\times\left]0;+\infty\right[, \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_a(t).$$

Theo dạng suy rộng của định lý đạo hàm dưới dấu $\displaystyle\int_I$ (xem 2.5.5, 2), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $\left]0;+\infty\right[$, $G(x,.)$ và $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $\left]0;+\infty\right[$

- $g : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} G(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in]0;+\infty[,\quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\mathrm{d}t.$$

Và với mọi x thuộc $]0;+\infty[$ ta có:

$$g'(x) = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\right]_0^{+\infty} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{1+x^2},$$

sau đó là: $\quad f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

β) Bằng cách tích phân kết quả ở α), ta chứng tỏ rằng tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in]0;+\infty[,\quad f(x) = \mathrm{Arctan}x + C.$$

c) α) Theo các định lý tổng quát, A thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$.

Và vì $\quad A(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1 = A(0)$, nên A liên tục tại 0.

Với mọi t thuộc $]0;+\infty[$ ta có: $A'(t) = \dfrac{B(t)}{t^2}$, trong đó $B(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} - 1$.

Việc khảo sát sự biến thiên của B (ta có: $B'(t) = -t\mathrm{e}^{-t} < 0$) chứng tỏ rằng B giảm nghiêm ngặt; vì $B(0^+) = 0$, nên ta suy ra $\forall t \in]0;+\infty[, B(t) < 0$, do đó: $\forall t \in]0;+\infty[,\quad A'(t) < 0$.

β) Cho $x \in]0;+\infty[$. Bằng phép đổi biến $u = xt$, ta được:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\sin\frac{u}{x}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} A(u)\sin\frac{u}{x}\mathrm{d}u.$$

Bằng một phép tích phân từng phần, ta được với mọi U thuộc $[0;+\infty[$:

$$\int_0^U A(u)\cos\frac{u}{x}\mathrm{d}u = x - xA(U)\cos\frac{U}{x} + x\int_0^U A'(u)\cos\frac{u}{x}\mathrm{d}u.$$

Một mặt thì: $\quad xA(U)\cos\dfrac{U}{x} \underset{U\to+\infty}{\to} 0,\quad$ vì $A(U) \underset{U\to+\infty}{\to} 0$.

Mặt khác thì do $A' \le 0$ nên:

$$\left|\int_0^U A'(u)\cos\frac{u}{x}\mathrm{d}u\right| \le \int_0^U (-A'(u))\left|\cos\frac{u}{x}\right|\mathrm{d}u \le \int_0^U -A'(u)\mathrm{d}u = 1 - A(U).$$

Từ đó ta suy ra rằng khi cho U dần đến $+\infty$ ta sẽ được:

$$0 \le f(x) - f(0) = f(x) = \int_0^{+\infty} A(u)\cos\frac{u}{x}\mathrm{d}u \le 2x.$$

γ) Theo β), $\quad f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\to} 0$, do đó f liên tục tại 0.

Theo b), β), khi đó ta có $C = 0$.

δ) Với mọi x thuộc $]0;+\infty[$ ta có:

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin t}{t}dt\right| \le \int_0^{+\infty}e^{-xt}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \le \int_0^{+\infty}e^{-xt}dt = \frac{1}{x},$$

do đó: $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Mặt khác thì: $$f(x) = \text{Arctan}x \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

Vậy ta kết luận: $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

d) *1)* Đổi biến $u = \alpha t$ khi $\alpha > 0$.

◊ **Trả lời:** $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt = \frac{\pi}{2}\text{sgn}(\alpha), \text{ trong đó } \text{sgn}(\alpha) = \begin{cases}-1 & \text{nếu } \alpha<0\\ 0 & \text{nếu } \alpha=0\\ 1 & \text{nếu } \alpha>0\end{cases}.$$

2) Với $\alpha > 0$, hãy thực hiện một phép tích phân từng phần thích hợp:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt = \left[\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha t}{t^2}dt.$$

◊ **Trả lời:** $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha t}{t^2}dt = \frac{\pi\alpha}{2}\text{sgn}(\alpha) = \frac{\pi|\alpha|}{2}.$$

3) Tích phân từng phần: $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \left[\frac{t-\sin t}{t^2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^3}dt.$$

◊ **Trả lời:** $$\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^3}dt = \frac{\pi}{4}.$$

4) $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 = \dfrac{1-\cos 2t}{2t^2}$ và 2) với $\alpha = 2$.

◊ **Trả lời:** $$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt = \frac{\pi}{2}.$$

5) Tuyến tính hóa: $$\frac{\sin at\ \sin bt}{t^2} = \frac{1-\cos(a+b)t}{2t^2} - \frac{1-\cos(a-b)t}{2t^2}$$

◊ **Trả lời:** $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at\ \sin bt}{t^2}dt = \frac{\pi}{4}(|a+b|-|a-b|).$$

6) Tuyến tính hóa: $$\frac{1-\cos at\ \cos bt}{t^2} = \frac{1-\cos(a+b)t}{2t^2} + \frac{1-\cos(a-b)t}{2t^2}$$

◊ **Trả lời:** $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos at\ \cos bt}{t^2}dt = \frac{\pi}{4}(|a+b|+|a+b|).$$

2.5.55 a) Cho $x \in \mathbb{R}$. Ánh xạ $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}$ liên tục trên $[0;+\infty[$, và với mọi t thuộc $[0;+\infty[$, $\left|t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}\right| = t^{\alpha-1}e^{-t}$, do đó $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ (xem thêm định nghĩa hàm Γ, 2.5.5, *3)*).

b) Ta ký hiệu: $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt} \end{array}$.

- F liên tục trên $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$
- F thỏa mãn GTHT địa phương trên $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$, vì khi ký hiệu:

$$\varphi: \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^{\alpha-1}e^{-t} \end{array},$$

thì φ liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$, và:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[, \qquad |F(x,t)| = \varphi(t).$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}: (x,t) \mapsto it^{\alpha}e^{-t}e^{ixt}$ liên tục trên $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$
- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn GTHT trên $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$, vì khi ký hiệu $\psi: \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^{\alpha}e^{-t} \end{array}$, thì ψ liên tục, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$, và:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t).$$

Theo định lý đạo hàm dưới dấu $\int_I$ (xem 2.5.5, 2), Định lý), ta suy ra rằng:

- Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $F(x,.)$ và $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ khả tích trên $]0;+\infty[$
- f_α thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và: $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_\alpha{}'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}e^{ixt}dt$.

c) Cho $x \in \mathbb{R}$. Bằng một phép tích phân từng phần, ta được:

$$\int_\varepsilon^T t^{\alpha}e^{(-1+ix)t}dt = \left[\frac{t^{\alpha}e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_\varepsilon^T + \frac{1}{1-ix}\int_\varepsilon^T \alpha t^{\alpha-1}e^{(-1+ix)t}dt,$$

với mọi (ε, T) thỏa mãn $0<\varepsilon<T$, từ đó bằng cách cho ε dần đến 0 và T dần đến $+\infty$, ta được:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}e^{ixt}dt = \frac{\alpha}{1-ix}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{(-1+ix)t}dt,$$

rồi bằng cách sử dụng b), ta được: $-(i+x)\, f_\alpha{}'(x) = \alpha f_\alpha(x)$.

- Bằng phép giải phương trình vi phân thu được, ta có với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(0)\exp\left(-\alpha\int_0^x \frac{ds}{s+i}\right) = \Gamma(\alpha)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\ln(x^2+1) + \alpha i \operatorname{Arc}\tan x\right)$$

$$= \Gamma(\alpha)\left(x^2+1\right)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\alpha i \operatorname{Arc}\tan x}.$$

d) Thay α bằng $\frac{1}{2}$, ta có: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}e^{ixt}}{\sqrt{t}}dt = f_{\frac{1}{2}}(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan}x}$.

Nếu ký hiệu $\theta = \operatorname{Arctan}x$ thì ta có: $\begin{cases}\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}=1\\ \cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. từ đó suy ra:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{\left(1+x^2\right)^{1/4}} \quad \text{và} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\left(1+x^2\right)^{1/4}},$$

và cuối cùng là: $\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}dt = \operatorname{Re}\left(f_{1/2}(x)\right)=\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}dt = \operatorname{Im}\left(f_{1/2}(x)\right)=\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$.

2.5.56 • Do $(t, u) \mapsto e^{it\sin u}$ liên tục trên $\mathbb{R}\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, nên theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_a^b$ (xem 2.3.12, *1*), Định lý), J liên tục trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa J bị chặn:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |J(t)| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}du = \frac{\pi}{2}.$$

Ta suy ra rằng ánh xạ $t \mapsto J(t)e^{-xt}$ khả tích trên $[0; +\infty[$, với mọi x thuộc $]0; +\infty[$ cố định.

• Với mọi $x \in\,]0; +\infty[$ và mọi $T \in [0; +\infty[$, ta có:

$$\int_0^T J(t)e^{-xt}dt = \int_0^T\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{it\sin u}e^{-xt}du\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^T e^{(i\sin u-x)t}dt\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{-(x-i\sin u)T}}{x\text{-i}\sin u}du,$$

bằng cách áp dụng đinh lý Fubini.

Với $x \in\,]0; +\infty[$, ta ký hiệu: $\displaystyle A(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{x\text{-i}\sin u}$.

Với mọi x thuộc $]0; +\infty[$ và mọi T thuộc $[0; +\infty[$, ta có:

$$\left|\int_0^T J(t)e^{-xt}dt - A(x)\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-(x-i\sin u)T}}{x\text{-}i\sin u}du\right|$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-xT}}{\sqrt{x^2+\sin^2u}}du \le \frac{\pi}{2}\frac{e^{-xT}}{x} \underset{T\to+\infty}{\to} 0.$$

Kết quả trên đây chứng tỏ:

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad \int_0^{+\infty} J(t)e^{-xt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x - i\sin u}.$$

- Ta tính $A(x)$ với $x \in \left]0; +\infty\right[$. Ta có:

$$A(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x^2+\sin^2 u}du + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2+\sin^2 u}du.$$

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x^2+\sin^2 u}du \underset{t=\tan u}{=} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)t^2+x^2}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}t\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}t\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2+\sin^2 u}du \underset{v=\cos u}{=} \int_0^1 \frac{dv}{\left(1+x^2\right)-v^2} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[\ln\frac{1+\frac{v}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{v}{\sqrt{1+x^2}}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}+1\right) - \ln x\right).$$

Cuối cùng, với mọi x thuộc $\left]0; +\infty\right[$ ta có:

$$\int_0^{+\infty} J(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(\pi + i\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right).$$

2.5.57 a) Theo 2.5.5, 3), Mệnh đề 3, Γ thuộc lớp C^2 trên $]0; +\infty[$ và:

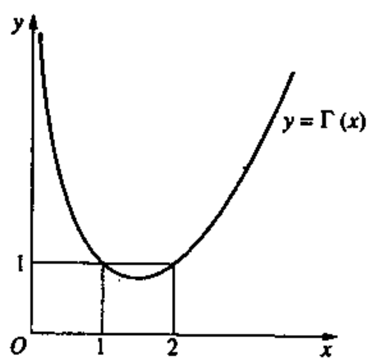
$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt > 0,$$

vậy Γ lồi trên $]0; +\infty[$.

b) Ta có (xem 2.5.5, *3*), Mệnh đề 2): $\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$.

Do Γ liên tục trên $]0; +\infty[$, nên $\Gamma(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 0! = 1$, từ đó ta suy ra $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

c)



2.5.58 Do Γ thuộc lớp C^2 trên $]0;+\infty[$ và lấy giá trị >0, nên $\varphi = \ln \circ \Gamma$ thuộc lớp C^2 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in\,]0;+\infty[, \qquad \varphi''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho $t \mapsto (\ln t)\, t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$ và cho $t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$, ta được: $\Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\right) = \Gamma''(x)\ \Gamma(x),$$

từ đó suy ra: $\forall x \in\,]0;+\infty[, \qquad \varphi''(x) \geq 0,$

và cuối cùng thì φ lồi trên $]0;+\infty[$.

2.5.59 Ba hàm số được xét ở đây đều khả tích trên $]0;+\infty[$, và với mọi x thuộc $]0;+\infty[$ ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1}\ln t\, dt = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^x e^{-t}\, dt - x\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= \Gamma'(x+1) - x\Gamma'(x).$$

Do: $\forall x \in\,]0;+\infty[, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$

nên ta suy ra: $\forall x \in\,]0;+\infty[, \qquad \Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x),$

từ đó ta có: $\forall x \in\,]0;+\infty[, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1}\ln t\, dt = \Gamma(x).$

2.5.60 $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt - e^t} dt \underset{u=e^t}{=} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} \frac{1}{u} du = \Gamma(x).$$

2.5.61 $$\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^2} dx \underset{y=ax^2}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{ay}} dy$$
$$= \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{m-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}}\, \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

2.5.62 $$\int_0^1 x^\alpha (-\ln x)^\beta dx \underset{t=-\ln x}{=} \int_0^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^\alpha t^\beta e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt$$
$$\underset{u=(\alpha+1)t}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha+1}\right)^\beta e^{-u} \frac{1}{\alpha+1} du = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\beta+1} \int_0^{+\infty} u^\beta e^{-u} du$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$$

2.5.63 a) Với mọi (p,q) thuộc $\mathbb{R}^2$, ánh xạ $t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ liên tục trên $]0;1[$, $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{p-1} > 0$ và $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^{q-1} > 0$, vậy $t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$

khả tích trên $]0;1[$ khi và chỉ khi: $p > 0$ và $q > 0$.

◊ **Trả lời:** $]0;+\infty[^2$.

b) • $\mathrm{B}(q,p) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t \underset{u=1-t}{=} \int_0^1 (1-u)^{q-1}u^{p-1}\mathrm{d}u = \mathrm{B}(p,q).$

• $$\mathrm{B}(p,q) \underset{\theta=\mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{p-1}(\cos^2\theta)^{q-1} 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

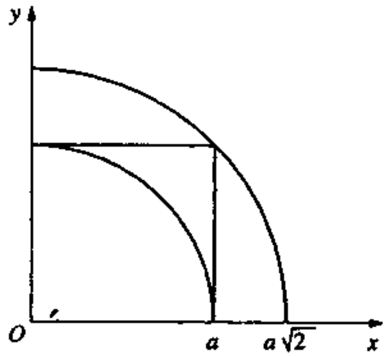
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

c) α) 1) Cho $a \in [0;+\infty[$.

Rõ ràng là: $D_a \subset \Delta_a \subset D_{a\sqrt{2}}$.

Vì $(x,y) \mapsto \varphi_p(x)\varphi_q(y) \geq 0$,

nên ta suy ra: $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.



2) • Ta chuyển qua tọa độ cực để biểu thị I_a:

$$I_a = \iint_{D_a} x^{2p-1}\mathrm{e}^{-x^2}y^{2q-1}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times[0;a]} (\rho\cos\theta)^{2p-1}(\rho\sin\theta)^{2q-1}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\int_0^a \rho^{2p+2q-1}\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\underset{u=\rho^2}{=} \frac{1}{4}\left(\int_0^{a^2} u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{B}(p,q).$$

• Mặt khác ta có:

$$J_a = \left(\int_0^a x^{2p-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a y^{2q-1}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$\underset{X=x^2,\,Y=y^2}{=} \frac{1}{4}\left(\int_0^{a^2} X^{p-1}\mathrm{e}^{-X}\mathrm{d}X\right)\left(\int_0^{a^2} Y^{q-1}\mathrm{e}^{-Y}\mathrm{d}Y\right).$$

β) Cho a dần tới $+\infty$ và áp dụng α), 1) và 2), ta được:

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q) = \Gamma(p)\,\Gamma(q).$$

γ) Với mọi (p,q) thuộc $(\mathbb{N}^*)^2$ ta có:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{1}{(p+q-1)\mathrm{C}_{p+q-2}^{p-1}} = \frac{p+q}{pq\mathrm{C}_{p+q}^{q}}.$$

◊ **Trả lời:** $\forall\,(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{p+q}{pq\mathrm{C}_{p+q}^{q}}$.

2.5.64 a) $$\mathrm{B}(x,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t(1-t)\right)^{x-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^1\left(1-(2t-1)^2\right)^{x-1}\mathrm{d}t = 2^{-2x+3}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-(2t-1)^2\right)^{x-1}\mathrm{d}t$$

$$\underset{u=(2t-1)^2}{=} 2^{-2x+3}\int_0^1(1-u)^{x-1}\frac{1}{4\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

$$= 2^{-2x+1}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{x-1}\mathrm{d}u = 2^{-2x+1}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right).$$

b) Ta có: $$\mathrm{B}(x,x) = \frac{(\Gamma(x))^2}{\Gamma(2x)} \text{ và } 2^{-2x+1}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right) = 2^{-2x+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)},$$

từ đó suy ra: $$2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x).$$

c) Theo b) ta có: $$2^{2n-1}(n-1)!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2n-1)!,$$

từ đó suy ra: $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(2n)!}{2^{2n}n!},$$

công thức này vẫn đúng cho $n = 0$.

Cuối cùng ta được: $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}.$$

2.5.65 $$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{2p-1}(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}}\mathrm{d}x \underset{\theta=\mathrm{Arctan}\,x}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan\theta)^{2p-1}(1-\tan\theta)^{2q-1}}{(1+\tan^2\theta)^{p+q-1}}\mathrm{d}\theta$$

$$\underset{\varphi=\theta+\frac{\pi}{4}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+\frac{\tan\varphi-1}{\tan\varphi+1}\right)^{2p-1}\left(1-\frac{\tan\varphi-1}{\tan\varphi+1}\right)^{2q-1}}{\left(1+\left(\frac{\tan\varphi-1}{\tan\varphi+1}\right)^2\right)^{p+q-1}}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\tan\varphi)^{2p-1}\,2^{2q-1}}{\left(2+2\tan^2\varphi\right)^{p+q-1}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2^{p+q-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2^{p+q-2}\,\mathrm{B}(p,q).$$

C2 1 *1)* Ta biết rằng $\left(\mathrm{B}(X,F),\|\cdot\|_\infty\right)$ là một kgvđc (xem 2.1.4, Mệnh đề 3).

Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong B(*X*,*F*).

a) Với mỗi *x* thuộc *X*, vì $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\quad \|f_p(x)-f_q(x)\|\le\|f_p-f_q\|_\infty$,

nên $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong *F*.

Vì *F* đủ nên tồn tại $\ell_x\in F$ sao cho: $f_n(x)\underset{n\infty}{\to}\ell_x$. Ta ký hiệu $f:\begin{array}{ccc}X&\to&F\\x&\mapsto&\ell_x\end{array}$.

b) Cho $\varepsilon>0$; tồn tại $N\in\mathbb{N}$ sao cho: $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \left(\begin{cases}p\ge N\\q\ge N\end{cases}\Rightarrow\ \|f_p-f_q\|_\infty\le\varepsilon\right)$.

- Cho $p\in\mathbb{N}$ sao cho $p\ge N$; với mọi *x* thuộc *X* ta có:
  $\forall q\in\mathbb{N},\quad (q\ge N\ \Rightarrow\ \|f_p(x)-f_q(x)\|\le\|f_p-f_q\|_\infty\le\varepsilon)$;

vì $f_q(x)\underset{q\infty}{\to}f(x)$, nên ta suy ra $\|f_p(x)-f(x)\|\le\varepsilon$.

Như thế ta đã chứng minh:

$$\forall x\in X,\qquad \|f(x)\|\le\|f(x)-f_{N+1}(x)\|+\|f_{N+1}(x)\|\le\varepsilon+\|f_{N+1}\|_\infty,$$

chứng tỏ rằng: $f\in\mathrm{B}(X,F)$.

- Vì $\forall x\in X,\forall p\in\mathbb{N},\quad (p\ge N\ \Rightarrow\ \|f(x)-f_p(x)\|\le\varepsilon)$,

nên ta có: $\forall p\in\mathbb{N},\quad (p\ge N\ \Rightarrow\ \|f-f_p\|_\infty\le\varepsilon)$,

và do đó: $f_p\underset{p\infty}{\to}f$ trong $\left(\mathrm{B}(X,F),\|\cdot\|_\infty\right)$.

2) a) • Rõ ràng là *CB*(*X*, *F*) là một kgvc của B(*X*, *F*).

• Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong *CB*(*X*, *F*), hội tụ đến một phần tử *f* của B(*X*, *F*).

Cho $(a,\varepsilon)\in X\times\mathbb{R}_+^*$; ta có:

$$\begin{aligned}\forall x\in X,\forall n\in\mathbb{N},\quad \|f(x)-f(a)\|&\le\|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)-f_n(a)\|+\|f_n(a)-f(a)\|\\&\le 2\,\|f-f_n\|_\infty+\|f_n(x)-f_n(a)\|.\end{aligned}$$

Vì $f_n\underset{n\infty}{\to}f$ nên tồn tại $N\in\mathbb{N}$ sao cho $\|f-f_N\|_\infty\le\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Sau nữa, do f_N liên tục tại *a*, nên tồn tại $\eta>0$ sao cho:

$$\forall x\in X,\qquad \left(\|x-a\|\le\eta\ \Rightarrow\ \|f_N(x)-f_N(a)\|\le\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Khi đó ta có $\forall x\in X,\quad \left(\|x-a\|\le\eta\ \Rightarrow\ \|f(x)-f(a)\|\le\varepsilon\right)$, và do đó *f* liên tục trên *X*.

Kết quả đó chứng tỏ rằng *CB*(*X*, *F*) là một bộ phận đóng của B(*X*, *F*).

b) *CB*(*X*, *F*) là tập đóng trong một kgvđc đủ (xem *1)*), do đó đủ (xem 1.4.2, Mệnh đề 2).

3) Do trường hợp $E=\{0\}$ là tầm thường, nên ta có thể giả thiết $E\ne\{0\}$; ký hiệu:

$$X=\{x\in E;\ \|x\|=1\}=S(0;1),$$

là một tập không rỗng.

Cho $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $\left(\mathcal{LC}(E,F),\|\!|\cdot|\!\|\right)$. Với mỗi *n* thuộc $\mathbb{N}$, xét ánh xạ:

$$f_n:\begin{array}{ccc}X&\to&F\\x&\mapsto&\varphi_n(x)\end{array}.$$

Với mỗi *n* thuộc $\mathbb{N}$, vì $\varphi_n\in\mathcal{LC}(E,F)$, nên ta có $f_n\in\mathrm{B}(X,F)$ và $\|f_n\|_\infty=\|\!|\varphi_n|\!\|$ (xem 1.2.6, Ký hiệu). Vì *F* đủ, nên theo *1*, tồn tại $f\in\mathrm{B}(X,F)$ sao cho $f_n\underset{n\infty}{\to}f$.

Xét $\varphi: E \to F$ xác định bởi: $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \in E - \{0\}, \quad \varphi(t) = \|t\| f\left(\dfrac{t}{\|t\|}\right) \end{cases}$.

- Cho $t \in E - \{0\}$; ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| = \|t\| \left\| f_n\left(\frac{t}{\|t\|}\right) - f\left(\frac{t}{\|t\|}\right) \right\| \le \|t\| \, \|f_n - f\|_\infty .$$

Vậy $\varphi_n(t) \underset{n\infty}{\to} \varphi(t)$ trong F.

Và hiển nhiên là: $\varphi_n(0) \underset{n\infty}{\to} \varphi(0)$.

Nói cách khác thì $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đơn về φ trên E (xem 2.3.2, Định nghĩa 1).

- Cho $\lambda \in \mathbb{K}$, $(t, u) \in E^2$. Vì $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(\lambda t + u) = \lambda\varphi_n(t) + \varphi_n(u)$, nên bằng cách cho n dần tới $+\infty$, ta suy ra: $\varphi(\lambda t + u) = \lambda\varphi(t) + \varphi(u)$,

do đó: $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Vì $f \in \mathrm{B}(X, F)$ nên ta có:

$$\forall x \in E, \qquad \|\varphi(x)\| \le \|f\|_\infty \|x\|,$$

và do đó (xem 1.2.6, Định lý): $\varphi \in \mathcal{LC}(E,F)$.

- Cuối cùng thì: $\|\!|\varphi_n - \varphi|\!\| = \|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0$, vậy $\varphi_n \underset{n\infty}{\to} \varphi$.

C 2. 2 *1)* *a)* X là một bộ phận không rỗng của $\mathbb{R}$ (vì $a \in X$), bị chặn trên bởi b (vì $X \subset [a; b]$), do đó X có biên trên c trên $\mathbb{R}$, và $c \in [a; b]$.

b) 1) Ta chứng minh: $c \neq a$.

Vì φ liên tục tại a và $\varphi(a) = 0$, nên tồn tại $\eta \in]0; b - a[$ sao cho:

$$\forall t \in]a; a + \eta[, \qquad \varphi(t) \le \varepsilon.$$

Khi đó ta có: $[a; a + \eta[\subset X$, từ đó suy ra $c \ge a + \eta$, và do đó $c \neq a$.

2) Giả thiết $c \neq b$ (do đó $c \in]a; b[$). Vì f và g khả vi bên phải tại c, nên tồn tại

$\gamma \in]c; b]$ sao cho: $\begin{cases} \left\| \dfrac{f(\gamma) - f(c)}{\gamma - c} \right\| \le \|f'_{\mathrm{p}}(c)\| + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ g'_{\mathrm{p}}(c) \le \dfrac{g(\gamma) - g(c)}{\gamma - c} + \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$.

Từ đó ta suy ra:

$$\|f(\gamma) - f(c)\| \le (\gamma - c)\left(\|f'_{\mathrm{p}}(c)\| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \le (\gamma - c)\left(g'_{\mathrm{p}}(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \le (\gamma - c)\left(\frac{g(\gamma) - g(c)}{\gamma - c} + \varepsilon\right)$$

$$= g(\gamma) - g(c) + (\gamma - c)\varepsilon.$$

Mặt khác, do $X = \varphi^{-1}(]-\infty; \varepsilon])$, và vì φ liên tục trên tập đóng $]-\infty; \varepsilon]$, nên X đóng trên $[a; b]$. Vì $[a; b]$ đóng trong $\mathbb{R}$, nên do đó X đóng trong $\mathbb{R}$, và đặc biệt là $c \in X$. Từ đó suy ra:

$$\|f(c) - f(a)\| \le g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon.$$

Kết hợp hai kết quả trên đây, ta được:

$$\|f(\gamma) - f(a)\| \le \|f(\gamma) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \le g(\gamma) - g(a) + \varepsilon(\gamma - a) + \varepsilon,$$

và do đó $\gamma \in X$, mâu thuẫn với định nghĩa của c, là $c = \operatorname{Sup}_{\mathbf{R}}(X)$, và $\gamma \in]c; b]$.

Lập luận phản chứng trên đã chứng tỏ: $c = b$.

c) Theo *b)* ta có:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon,$$

và do đó: $\quad \|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$

2) Với $(a, b) \in I^2$ sao cho $a < b$, hãy áp dụng kết quả ở *1)* với $g : t \mapsto Mt$.

C 2. 3 *1)* • Rõ ràng là $\mathcal{K} \neq \varnothing$, vì $0 \in \mathcal{K}$.

• Cho $\varphi, \psi \in \mathcal{K}$. Tồn tại $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho:

$$\begin{cases} a \leq b \quad \text{và} \quad c \leq d \\ \forall x \in \mathbb{R} - [a;b], \quad \varphi(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - [c;d], \quad \psi(x) = 0 \end{cases}.$$

Ký hiệu $\alpha = \text{Min}(a, c)$ và $\beta = \text{Max}(b, d)$, ta có: $\quad \forall x \in \mathbb{R} - [\alpha;\beta], \quad \varphi(x) + \psi(x) = 0$,
chứng tỏ rằng $\quad \varphi + \psi \in \mathcal{K}$.

• Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{K}$ Tồn tại $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho: $\begin{cases} a \leq b \\ \forall x \in \mathbb{R} - [a;b], \quad \varphi(x) = 0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $\quad \forall x \in \mathbb{R} - [a;b], \quad \alpha\varphi(x) = 0,$

và do đó: $\quad \alpha\varphi \in \mathcal{K}$.

• Cho $f \in \mathcal{C}$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \leq b$ và $\forall x \in \mathbb{R} - [a;b], \quad \varphi(x) = 0$.
Khi đó ta có $\forall x \in \mathbb{R} - [a;b], \quad f(x)\varphi(x) = 0$, và do đó $f\varphi \in \mathcal{K}$.

2) a) Cho $(f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$. Tồn tại $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \leq b$ và :

$$\forall u \in \mathbb{R} - [a;b], \quad \varphi(u) = 0.$$

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ $t \mapsto f(t)\varphi(x-t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và triệt tiêu bên ngoài $[x-b; x-a]$, do đó $(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$ tồn tại.

b) *α)* Cho $(f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $[a; b]$ có chứa giá của φ và $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\quad \forall x \in [x_0 - 1;\ x_0 + 1], \quad (f * \varphi)(x) = \int_{x_0-b-1}^{x_0-a+1} f(t)\varphi(x-t)dt$.

Vì $(x, t) \mapsto f(t)\varphi(x-t)$ liên tục trên $[x_0 - 1;\ x_0 + 1] \times [x_0 - b - 1;\ x_0 - a + 1]$, nên định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_a^b$ (2.3.12, *1)*, Định lý) chứng tỏ rằng $f * \varphi$ liên tục trên $[x_0 - 1;\ x_0 + 1]$, và như thế $f * \varphi$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f * \varphi \in \mathcal{C}$.

β) Cho $(\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2$. Theo a), $\varphi * \psi \in \mathcal{C}$. Tồn tại $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho:

$$\begin{cases} a \leq b \quad \text{và} \quad c \leq d \\ \forall u \in \mathbb{R} - [a;b], \quad \varphi(u) = 0 \\ \forall v \in \mathbb{R} - [c;d], \quad \psi(v) = 0 \end{cases}.$$

Như vậy ta có:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\varphi * \psi)(x) = \int_a^b \varphi(t)\psi(x-t)dt.$$

Do: $\quad \forall x \in \mathbb{R} - [a + c; b + d],\ \forall t \in [a;b], \quad x - t \notin [c; d],$

nên ta có: $\quad \forall x \in \mathbb{R} - [a + c; b + d], \quad (\varphi * \psi)(x) = 0,$

và do đó: $\varphi * \psi \in \mathcal{K}$.

3) Cho $(\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2$. Ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi * \psi)(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-t)\mathrm{d}x\right)\varphi(t)\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u)\mathrm{d}u\right),$$

trong đó thực chất là tích phân những hàm liên tục trên những đoạn.

4) • $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{K},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (\psi * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t$

$$\underset{u=x-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u = (\varphi * \psi)(x).$$

• $\forall \varphi, \psi, \chi \in \mathcal{K},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad ((\varphi * \psi) * \chi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\psi(t-u)\mathrm{d}u\right)\chi(x-t)\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t-u)\chi(x-t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \underset{v=t-u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(v)\chi(x-u-v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)(\psi * \chi)(x-u)\mathrm{d}u = (\varphi * (\psi * \chi))(x).$$

5) a) Bằng phương pháp truy hồi theo $n \in \mathbb{N}$, hãy chứng minh rằng θ thuộc lớp C^n trên $\mathbb{R}$, và rằng tồn tại $(\alpha_n, P_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}[X]$ sao cho, với mọi x thuộc $]-1; 1[$, ta có:

$$\theta^n(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\alpha_n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}}.$$

Áp dụng định lý về giới hạn của đạo hàm tại -1 và 1, ta suy ra rằng θ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$, và:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \theta^n(-1) = \theta^n(1) = 0.$$

b) Rõ ràng là, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(nx)\mathrm{d}x > 0$, do đó $\gamma_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(nx)\mathrm{d}x\right)^{-1}$ tồn tại và > 0.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, và mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có:

$$\left|(\varphi * \varphi_n)(x) - \varphi(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\,\varphi(x-t)\mathrm{d}t - \varphi(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\,\big(\varphi(x-t) - \varphi(x)\big)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\left|\varphi(x-t) - \varphi(x)\right|\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\varphi_n(t)\left|\varphi(x-t) - \varphi(x)\right|\mathrm{d}t.$$

Khi ký hiệu $[a; b]$ là một đoạn của $\mathbb{R}$, mà bên ngoài đoạn đó thì φ bằng không, định lý Heine chứng tỏ rằng φ liên tục đều trên $[a-1; b+1]$. Do φ bằng không trên $]-\infty; a]$ và trên $[b; +\infty[$, nên ta suy ra dễ dàng rằng φ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Cho $\varepsilon > 0$. Tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \left(|u - v| \le \eta \Rightarrow |\varphi(u) - \varphi(v)| \le \varepsilon\right).$$

Ký hiệu $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\eta}\right) + 1$, và cho $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \ge N$.

Khi đó ta có: $\forall t \in \left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right], \quad |(x-t)-x| = |t| \le \frac{1}{n} \le \eta,$

vậy: $\forall t \in \left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right], \quad |\varphi(x-t)-\varphi(x)| \le \varepsilon$

do đó: $\left|(\varphi * \varphi_n)(x) - \varphi(x)\right| \le \varepsilon . \int_{-\frac{1}{n}}^{+\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\mathrm{d}t = \varepsilon.$

Ta kết luận được rằng:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (n \ge N \Rightarrow \left|(\varphi * \varphi_n)(x) - \varphi(x)\right| \le \varepsilon),$

tức là: $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đều đến φ trên $\mathbb{R}$.

c) Cho $\varphi \in \mathcal{K}$, $[a;b]$ là một đoạn của $\mathbb{R}$ mà bên ngoài đoạn đó thì φ triệt tiêu, $n \in \mathbb{N}^*$, $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[a;b] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(t)\varphi_n(x-t) \end{array}$.

Vì $F, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}, \dots$ tồn tại và liên tục, nên theo một Hệ quả của định lý đạo hàm dưới dấu $\int_a^b$ (2.3.12, *2)*, Hệ quả), $\varphi * \varphi_n$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác (xem *2), b)*), với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $\varphi * \varphi_n \in \mathcal{K}$. Cuối cùng (xem *b)*), $(\varphi * \varphi_n)_n$ hội tụ đều đến φ, do đó hội tụ đến φ trên $\left(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\infty\right)$.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 3

3.1.1 Ta có: $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2p+1} u_k = \sum_{i=0}^{p} u_{2i} + \sum_{i=0}^{p} u_{2i+1}$.

Do dãy $\left(\sum_{i=0}^{p} u_{2i}\right)_{p\geq 0}$ hội tụ và dãy $\left(\sum_{i=0}^{p} u_{2i+1}\right)_{p\geq 0}$ phân kỳ, nên dãy $\left(\sum_{k=0}^{2p+1} u_k\right)_{p\geq 0}$ phân kỳ.

Suy ra rằng dãy $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ phân kỳ, tức là chuỗi $\sum_{k\geq 0} u_k$ phân kỳ.

3.1.2 Ta biết rằng, với mọi α thuộc $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, các dãy $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ và $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ phân kỳ (xem Tập 1, bài tập 3.1.10). Vì $\sin n \underset{n\infty}{\not\to} 0$, nên chuỗi $\sum_n \sin n$ phân kỳ.

3.2.1 *a)* $\ln\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

b) $\operatorname{th}\dfrac{1}{n} + \ln\dfrac{n^2-n}{n^2+1} \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{3}{2n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

c) $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

d) $n^2(\ln n)^{-\sqrt{n}} = e^{2\ln n - \sqrt{n}\ln(\ln n)} \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

e) $n^2 n^{-\ln(\ln n)} = e^{(2-\ln(\ln n))\ln n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

f) $n^{-\operatorname{ch}\frac{1}{n}} = n^{-\left(1+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)} = \dfrac{1}{n}\, e^{\left(-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\ln n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

g) $n^{-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n}\, e^{-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

h) $-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right) = -\left(\cos\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{1}{n}\right) = -1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n}\, e^{\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ln n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

i) $\dfrac{1}{n}(\ln n)^{-\mathrm{ch}\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\, e^{-\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln\ln n} = \dfrac{1}{n\ln n}\, e^{-\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln\ln n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

j) $\ln(\mathrm{ch}n) = \ln\dfrac{e^n+e^{-n}}{2} \underset{n\infty}{\sim} n$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

k) $n^2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{2\ln n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{2\ln n-n+o(n)} \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

l) $$n^2\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2} = \exp\left(2\ln n-n^2\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(2\ln n-n^2\left(\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(2\ln n-\frac{n}{\ln n}+o\left(\frac{n}{\ln n}\right)\right) \underset{n\infty}{\to} 0.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

m) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} \ge \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\ln n} = n^{-\ln 2}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

n) $n^2\left(\dfrac{n+3}{3n+1}\right)^{(\ln n)^2} = \exp\left(2\ln n-(\ln n)^2\ln\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right) \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

o) $n^2\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^n = \exp\left(2\ln n+n\ln\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)\right) = \exp\left(2\ln n-\dfrac{n}{\ln n}+o\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)\right) \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

p) $n^2\dfrac{n^n}{2^{n^2}} = \exp\left((2+n)\ln n-n^2\ln 2\right) \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

q) $n^2\dfrac{2^{n^2}}{n^{2n}}=\exp\left(2\ln n+n^2\ln 2-2^n\ln n\right)\underset{n\infty}{\to}0.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

r) $-n^3\ln\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}=-\dfrac{n}{2}+O\left(\dfrac{1}{n}\right).$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

s) $n\left(\operatorname{sh}\sqrt[3]{\ln n}\right)^{-3}\underset{n\infty}{\sim}n\left(\dfrac{1}{2}e^{\sqrt[3]{\ln n}}\right)^{-3}=8\,e^{\ln n-3\sqrt[3]{\ln n}}\underset{n\infty}{\to}+\infty.$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

t) $0\le n^2\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}\right)^{-\sqrt{n}}\le n^2 2^{-\sqrt{n}}=e^{2\ln n-\sqrt{n}\ln 2}\underset{n\infty}{\to}0.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

u)
$$\ln\left(n^2u_n\right)=2\ln n+\sqrt{n}\ln\left(\sqrt[3]{n}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\right)$$
$$=2\ln n+\sqrt{n}\ln\left(\frac{2}{3n^{2/3}}+o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)\underset{n\infty}{\to}-\infty.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

v) $\dfrac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{1}{3n^{\frac{5}{3}}}.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

w) $u_n\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

x) $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{e}{2n}.$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

y) Sau khi thực hiện các phép tính với các KTHH, ta có:

$$u_n\underset{n\infty}{\sim}\left(\frac{2-\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}(6-\pi)}{36}\right)\frac{1}{n}.$$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

z)
$$(n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n+1}}=e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-e^{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\ln n\right)}\right)$$
$$=e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}-e^{-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right)\underset{n\infty}{\sim}\frac{\ln n}{n^2}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

a') Sau khi thực hiện các phép tính với các KTHH, ta có:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^{1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \quad \text{và} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e^{1-\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)},$$

từ đó suy ra: $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{2e}{n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

b') $n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

c') $$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)},$$

từ đó suy ra: $u_n \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{12\sqrt{e}n}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

d') $\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

e') Ta đã biết (xem Tập 2, 8.2.3, *3)*) rằng Arccos$x \underset{x\to 1^+}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$, từ đó

Arccos $\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

f') $\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} \underset{n\infty}{\sim} n^{-\frac{1}{2}}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

g') ch ln$n \underset{n\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ và ln ch $n \underset{n\infty}{\sim} n$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

h') Theo định lý số gia hữu hạn, tồn tại $c_n \in \left]\frac{n-1}{2n-1};\frac{n+1}{2n+1}\right[$ sao cho:

$$u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}-\frac{n-1}{2n-1}\right)\frac{1}{\sqrt{1-c_n^2}},$$

từ đó suy ra $\quad u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{3}}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

i') Ta đã biết (xem Tập 2, 8.2.3, *3)*), rằng Arccos$x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$, từ đó suy ra:

$$u_n \underset{n\infty}{=\sim} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

j') Sử dụng hệ thức $\text{Arccos}x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ (xem Tập 2, 8.2.3, *3)*), và

$$\text{Arctan}u = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{u} \qquad \text{với } u > 0$$

(xem Tập 2, 7.9.3, Mệnh đề). Ta được: $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi n}}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

k') $\ln\left(\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(n^2\right)\right)^{n^3}\right) = \pi^3\ln\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\text{-Arctan}\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{2n}{\pi}$, từ đó suy ra:

$$n^2u_n \underset{n\infty}{\to} 0.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

l') $\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\frac{n^2+1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi n}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

m') Theo định lý Taylor–Young: $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h\right) = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{2} + \underset{h\to 0}{o}(h)$.

Thay h bởi $\sqrt{\frac{n}{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, tức là một biểu thức tương đương với $-\frac{1}{4n\sqrt{2}}$, ta được:

$$\frac{4}{\pi}\text{Arcsin}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = 1 - \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

từ đó (xem Tập 2, 8.2.3, *3)*), ta có: $u_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

n') $n\,u_n \underset{n\infty}{\sim} \tan\left(\text{Arctan}\,n - 2\text{Arctan}\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{2n^3-2n^2+2n-1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

o') Ký hiệu $\alpha_n = \sqrt{\text{Arctan}(n^2+1)}$ và $\beta_n = \sqrt{\text{Arctan}(n^2)}$, ta có:

$$u_n = 2\sin\frac{\alpha_n-\beta_n}{2}\cos\frac{\alpha_n+\beta_n}{2},\quad \frac{\alpha_n+\beta_n}{2} \underset{n\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{\alpha_n-\beta_n}{2} = \frac{\alpha_n^2-\beta_n^2}{2(\alpha_n+\beta_n)} = \frac{\text{Arctan}\frac{1}{n^4+n^2+1}}{2(\alpha_n+\beta_n)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}n^4},$$

từ đó suy ra: $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}n^4}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$p')$ $0 \leq \dfrac{(n!)^3}{n^{n^2}} \leq n^{3n-n^2} \leq n^{-2}$ khi $n \to \infty$ (với $n \geq 4$).

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$q')$ $0 \leq \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{2}{n+2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n}{2n} \leq \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

Ta cũng có thể áp dụng quy tắc d'Alembert.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$r')$ Với $n \geq 9$, $\sqrt{(n-1)!} \geq (n-8)^4$, từ đó suy ra:

$$0 \leq u_n \leq \frac{n^2}{(n-8)^4} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Ta cũng có thể áp dụng quy tắc d'Alembert.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$s')$ $n^2 u_n = e^{2\ln n + n^2 \ln n - n! \ln 2} \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$t')$ $0 \leq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \leq \frac{\pi}{2n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$u')$ $0 \leq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1 + \mathrm{ch}^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$v')$ Vì $\mathrm{sh}x \underset{x \to 0}{\sim} x$, nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:

$$\forall x \in [0; \alpha], \quad 0 \leq \mathrm{sh}x \leq 2x,$$

từ đó với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $n > \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, ta có:

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} (\mathrm{sh}x)^{3/2} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} (2x)^{3/2} dx = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{5n^{\frac{5}{2}}}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$w')$ $0 \leq \displaystyle\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x + 1}} \leq \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

$x')$ $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{1 + x^{3/2}} \geq \int_n^{2n} \frac{dx}{1 + (2n)^{3/2}} = \frac{n}{1 + (2n)^{3/2}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{n}}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

$y')$ Với $n \geq 2$, ta có: $0 \leq \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{x^{5/2} - \sin x} \leq \frac{n}{n^{5/2} - 1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

Trong các thí dụ từ z') đến e''), cần chú ý kiểm tra lại tính khả tích của các hàm cần xem xét.

z') $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} \underset{t=\ln\left(x+\sqrt{+x^2}\right)}{=} \int_0^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{ch}^{2n-1}t} \geq \int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^{(2n-1)t}} = \frac{1}{2n-1}.$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

a'') Với mọi $n \geq 2$, hàm $x \mapsto \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}$ khả tích trên $[0; +\infty[$, và bằng phép đổi biến $\varphi = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ta được:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n} = \int_0^{+\infty} e^{-n\varphi}\mathrm{ch}\varphi\, d\varphi \geq \int_0^{+\infty} e^{-n\varphi}d\varphi = \frac{1}{n}.$$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

b'') $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx \underset{t=x^n}{=} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt \geq \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt \geq \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-t}dt = \frac{1-e^{-1}}{n}.$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

c'') Vì $x^3 - x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$, nên tồn tại $A \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in [A; +\infty[, \quad x^3 - x - 1 \geq \frac{x^3}{2},$$

từ đó với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $n \geq E(A) + 1$ ta có:

$$0 \leq \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3-x-1} \leq \int_n^{+\infty}\frac{2}{x^3}dx = \frac{1}{n^2}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

d'') $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^n} \geq \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^n}$$

$$\geq \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)^n} = \int_0^{+\infty}\left(x+1\right)^{-2n}dx = \frac{1}{2n-1}.$$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

e'') $\displaystyle 0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{Arc}\tan x\, dx \leq \int_0^{+\infty} xe^{-nx}dx = \frac{1}{n^2}.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

f'') Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $p - \dfrac{1}{2} < n\sqrt{2} < p + \dfrac{1}{2}$, từ đó có $\left|n\pi\sqrt{2} - p\pi\right| < \dfrac{\pi}{2}$, do đó: $\left|\sin(n\pi\sqrt{2})\right| = \left|\sin(n\pi\sqrt{2} - p\pi)\right| \geq \dfrac{2}{\pi}\left|n\pi\sqrt{2} - p\pi\right|$,

sau đó có: $$\frac{1}{\left|\sin(n\pi\sqrt{2})\right|} \leq \frac{1}{2\left|n\sqrt{2}-p\right|} = \frac{n\sqrt{2}+p}{2\left|2n^2-p^2\right|} \leq \frac{n\sqrt{2}+p}{2},$$

vì $\left|2n^2 - p^2\right| \in \mathbb{N}^*$.

Như vậy: $0 < \dfrac{1}{n^2(\ln n)^2\left|\sin(n\pi\sqrt{2})\right|} \le \dfrac{2n\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{2n^2(\ln n)^2} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n(\ln n)^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

g") $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+n)^2-k^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}$ và $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}} \underset{n\infty}{\to} \int_0^1\frac{dx}{1+2x} = \frac{1}{2}\ln 3$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

h") Chú ý rằng $10^{\alpha(n)-1} \le n < 10^{\alpha(n)}$, từ đó có $\dfrac{\ln n}{\ln 10} < \alpha(n) \le 1 + \dfrac{\ln n}{\ln 10}$, rồi lại có $0 < (\alpha(n))^{-\alpha(n)} \le \left(\dfrac{\ln n}{\ln 10}\right)^{-\frac{\ln n}{\ln 10}} = n^{-\frac{1}{\ln 10}\ln\left(\frac{\ln n}{\ln 10}\right)} \le n^{-2}$ với $n \to \infty$ (tức là: kể từ một hạng nào đó).

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

3.2.2 *a) Phương pháp thứ nhất*

Bằng cách tính KTHH(∞), ta được:

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+an+b} = \frac{1-a}{2} + \frac{3-4b+a^2}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Phương pháp thứ hai

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+an+b} = \frac{(1-a)n+(1-b)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+an+b}} \begin{cases} \underset{n\infty}{\sim}\dfrac{1-a}{2} & \text{nếu } a \ne 1 \\ \underset{n\infty}{\sim}\dfrac{1-b}{2n} & \text{nếu } a = 1 \text{ và } b \ne 1 \\ = 0 & \text{nếu } a = b = 1 \end{cases}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a = b = 1$.

b) $n\,u_n = \exp\left(\dfrac{-a}{\ln n + \sqrt{(\ln n)^2 + a}}\right) \underset{n\infty}{\to} 1$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ với mọi a thuộc $\mathbb{R}$.

c) • Nếu $a \ge 0$ thì $n^{n^a} - 1 \underset{n\infty}{\to} \infty$.

• Nếu $a < 0$ thì $n^{n^a} - 1 \underset{n\infty}{\sim} n^a \ln n$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a < -1$.

d) • Nếu $a < 1$ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} 1$.

• Nếu $a = 1$ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} e^{-1}$.

• Nếu $a > 1$ thì $n^2 u_n = \exp\left(2\ln n - n^{a-1} + o\left(n^{a-1}\right)\right) \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a > 1$.

e) $u_n \underset{n\infty}{\sim} \tan u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^a}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a > 1$.

f) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(\ln(n+1)\right)^a}{(n+1)^b} \underset{n\infty}{\sim} 0.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ .

g) $(n+1)^b - n^b = n^b\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^b - 1\right) \underset{n\infty}{\sim} b\,n^{b-1}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

h)
- Nếu $a > 0$ thì $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$.
- Nếu $a = 0$ thì $u_n = 1 \underset{n\infty}{\rightarrow} 1$.
- Nếu $a < 0$ thì $n^2\, u_n = \exp\left(2\ln n + a\ln n \ln\ln n\right) \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a < 0$.

i)
- Nếu $a < b$ thì số hạng tổng quát không xác định.
- Nếu $a = b$ thì ta gặp trường hợp tầm thường.
- Nếu $a > b$ thì: $\ln\left(n^2 u_n\right) = 2\ln n + \sqrt[3]{n}\ln\left(\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}\right)$

$$= 2\ln n + \sqrt[3]{n}\ln\left(\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$= 2\ln n + \sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{2}\ln n + \ln\left(\frac{a-b}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\infty}{\sim}$$

$$\underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}\ln n \underset{n\infty}{\rightarrow} -\infty.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a \geq b$.

j) Trường hợp $a = b$ là tầm thường; giả thiết $a \neq b$. Ta có:

$$\left(n^a + 1\right)^{\frac{1}{a}} = n\left(1+\frac{1}{n^a}\right)^{\frac{1}{a}} = n + \frac{1}{a}n^{1-a} + o\left(n^{1-a}\right).$$

- Nếu $a > b$ thì $u_n \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{1}{b}n^{1-b}$.
- Nếu $a < b$ thì $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{a}n^{1-a}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi: $a = b$ hay $2 < a < b$ hoặc $2 < b < a$.

k)
- Nếu $a \leq 3$ thì: $u_n \geq \dfrac{1}{n^a} + \dfrac{2}{n^a} + \ldots + \dfrac{n}{n^a} = \dfrac{n+1}{2n^{a-1}} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{a-2}}$.
- Nếu $a > 3$ thì: $0 \leq u_n \leq \left(1+\dfrac{n}{n^a}\right)^n - 1 = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{a-1}}\right)\right) - 1$

$$= \exp\left(\frac{1}{n^{a-2}} + o\left(\frac{1}{n^{a-2}}\right)\right) - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^{a-2}}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 3$.

l) Bằng cách so sánh $\sum_{k=2}^{n} \ln k$ với $\int_1^n \ln x\, dx$ và $\int_2^{n+1} \ln x\, dx$, ta được $\ln(n!) \underset{n\infty}{\sim} n\ln n$, từ đó suy ra:

$$\frac{\left(\ln(n!)\right)^a}{n^b} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^{b-a}(\ln n)^{-a}}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $b-a>1$ hay ($b-a=1$ và $a<-1$).

m) Hãy chứng minh: $u_n = e^{-\frac{1}{2}n^{a-2}+o\left(n^{a-2}\right)}$.

- Nếu $a<2$ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} 1$.
- Nếu $a=2$ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} e^{-\frac{1}{2}}$.
- Nếu $a>2$ thì $n^2 u_n = \exp\left(2\ln n - \frac{1}{2}n^{a-2} + o\left(n^{a-2}\right)\right) \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 2$.

n) Tương tự như *m)*.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 2$.

o) Tương tự như *m)*.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 2$.

p) $\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} n) \underset{n\infty}{\sim} \sin\left(\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} n)\right) = \sqrt{1-\operatorname{th}^2 n} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} n} \underset{n\infty}{\sim} 2e^{-n}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 0$.

q) $\operatorname{Arctan}\left(1+\dfrac{a}{n}\right) - \dfrac{\pi}{4} \underset{n\infty}{\sim} \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{a}{n}}{2+\frac{a}{n}} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{a}{2n}$,

từ đó suy ra:

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^b \frac{1}{n^b}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $b > 1$.

r) $$u_n \underset{n\infty}{\sim} \tan u_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\left(1-\frac{1}{n}\right)^a} \underset{n\infty}{\sim} \frac{a}{n}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a = 0$.

s) Theo bài tập 2.5.33, $\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$, từ đó có: $u_n \underset{n\infty}{\sim} n^a \ln n$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a < -1$.

t)
- Nếu $b<0$ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} +\infty$.
- Nếu $b>0$ thì $n^2 u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.
- Nếu $b=0$ thì $u_n \underset{n\infty}{\sim} n^a(\ln n)^a$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi : $b > 0$ hay ($a < -1$ và $b = 0$).

u) Với $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, ký hiệu: $u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(2 - e^{\frac{a}{k}}\right)$.

• Trước hết, hãy khảo sát trường hợp một trong các nhân tử $2 - e^{\frac{a}{k}}$ bằng không; trường hợp này ứng với trường hợp $a = k\ln 2$, $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

• Mặt khác, tồn tại $N_1 \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ thỏa mãn: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left(k \geq N_1 \Rightarrow 2 - e^{\frac{a}{k}} > 0\right)$.

• Nếu $a \leq 0$ thì: $\forall n \geq 2$, $u_n \geq 1$.

• Giả thiết $a > 0$. Vì $\ln\left(2 - e^x\right) = -x - x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$, nên tồn tại $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ sao

cho: $\forall x \in [0; \eta]$, $\left|\ln\left(2 - e^x\right) + x\right| \leq 2x^2$.

Khi đó, nếu ký hiệu $N = \mathrm{Max}\left(N_1, \mathrm{E}\left(\frac{a}{\eta}\right) + 1\right)$, thì với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq N$ ta có:

$$\left|\ln\left(\prod_{k=N+1}^{n}\left(2 - e^{\frac{a}{k}}\right)\right) + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{a}{k}\right| \leq 2\sum_{k=N+1}^{n}\left(\frac{a}{k}\right)^2 \leq 2a^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2},$$

từ đó suy ra $\ln u_n = -\sum_{k=N+1}^{n}\frac{a}{k} + \underset{n\infty}{O}(1) = -a\ln n + \underset{n\infty}{O}(1)$,

và cuối cùng ta được: $u_n = n^{-a}e^{O(1)}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 1$.

v) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu: $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^p} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n!) - p\ln n\right)$.

• Nếu $p < 1$, vì $\ln(n!) \underset{n\infty}{\sim} n\ln n$, nên ta có: $u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$.

• Nếu $p > 2$, thì do $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^p} \leq \frac{1}{n^{p-1}}$, nên $\sum_{n\geq 1} u_n$ hội tụ.

• Nếu $p = 2$, hãy chứng minh (truy hồi): ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$), và suy ra $u_n \geq \frac{1}{en}$.

• Nếu $1 \leq p < 2$, thì $u_n \geq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $p > 2$.

w) • $u_n \geq \frac{(\mathrm{sh}\,n)^a}{ne^n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^a n e^{(1-a)n}}$.

• $u_n \leq \frac{(n\,\mathrm{sh}\,n)^a}{ne^n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^a n^{1-a} e^{(1-a)n}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a < 1$.

x) Bằng một phép so sánh chuỗi-tích phân, hãy chứng minh: $\sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{5} n^{\frac{5}{2}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > \frac{7}{2}$.

y) Tương tự như *x)*.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > 3$.

3.2.3 *a)* Chú ý rằng: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le v_n \le u_n$.

b) Nếu M là một cận trên của $(u_n)_{n\ge 0}$, thì: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \ge \frac{u_n}{1+M^2} \ge 0.$

c) ◊ **Trả lời:** $u_n = n^2$.

3.2.4 Vì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, nên $(u_n)_n$ bị chặn: tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$, sao cho $(\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le M)$.

Khi đó: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n^2 \le M u_n$

3.2.5 Ta nhắc lại bất đẳng thức Hölder trong $\mathbb{R}^n$:

$$\forall (x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Áp dụng cho $x_k = u_k^{\frac{1}{p}}$, $y_k = 1$, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}}.$$

3.2.6 Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có:

$$a_0 u_0 - a_n u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k u_k - a_{k+1} u_{k+1}) > \lambda \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1},$$

từ đó suy ra: $\sum_{k=1}^{n} u_k < \frac{a_0 u_0}{\lambda}$.

Hãy áp dụng bổ đề.

3.2.7 • $$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 - \left(1 + \frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}},$$

do đó $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ cùng loại với $\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$.

- $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\infty}{\to} 1$, do đó $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ hội tụ.

3.2.8 Cho $n \in \mathbb{N}$, sao cho $n \geq N+1$; ta có: $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}, \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \dots, \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N}$, từ đó bằng cách nhân vế với vế ta được: $u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$.

Bây giờ hãy áp dụng định lý hàm trội.

3.2.9 Trước hết chú ý rằng nếu $\alpha \leq 0$ thì $(u_n)_{n\geq 0}$ tăng và có các số hạng thuộc $\mathbb{R}_+^*$, do đó $\sum_n u_n$ phân kỳ.

Bây giờ ta giả thiết $\alpha > 0$.

Ký hiệu $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, và với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$.

Ta có: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Ký hiệu $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, sao cho ta có: $1 < \beta < \gamma < \alpha$. Tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\gamma}{n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Do $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\beta}$ hội tụ (vì $\beta > 1$), nên bài tập 3.2.8 cho phép ta kết luận rằng chuỗi $\sum_n u_n$ hội tụ.

Cũng lập luận như với *a*).

3.2.10 Với $n \geq 2$, ta ký hiệu: $v_n = \frac{1}{n\ln n}$.

- $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{-1}$$
$$= 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Như vậy tồn tại $N_1 \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ sao cho:

$$\forall n \geq N_1, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n\ln n}.$$

- Mặt khác thì theo giả thiết tồn tại $N_2 \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ sao cho:

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n\ln n}.$$

- Ký hiệu $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, ta được:

$$\forall n \geq N, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Do $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ (xem 3.2.3, Mệnh đề 2), nên bài tập 3.2.8 cho phép ta kết luận (bằng phản đảo) rằng chuỗi $\sum_n u_n$ phân kỳ.

3.2.11 • Nếu $b - a = 1$, thì $\left(\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \dfrac{a}{a+n}\right)$, và do đó chuỗi $\sum_n u_n$ phân kỳ.

• Nếu $b - a \neq 1$, thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a+n}{b+n} = 1 - \dfrac{b-a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, nên ta có thể áp dụng quy tắc Raabe và Duhamel (bài tập 3.2.9), sau khi đã tách riêng các nhân tử < 0 có thể có trong các u_n.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $b - a > 1$.

3.2.12 $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=1}^{p}\left(\frac{[a_k]_{n+1}}{[a_k]_n}\right)^{r_k} = \prod_{k=1}^{p}(a_k+n)^{r_k} = n^{\sum_{k=1}^{p} r_k}\prod_{k=1}^{p}\left(1+\frac{a_k}{n}\right)^{r_k}.$$

• Nếu $\sum_{k=1}^{p} r_k > 0$, thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} +\infty$.

• Nếu $\sum_{k=1}^{p} r_k < 0$, thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

• Bây giờ ta giả thiết $\sum_{k=1}^{p} r_k = 0$. Khi đó $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{\sum_{k=1}^{p} r_k a_k}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

1) Nếu $\sum_{k=1}^{p} r_k a_k < -1$ (tương ứng: > -1), thì $\sum_n u_n$ hội tụ (tương ứng: phân kỳ) theo quy tắc Raabe và Duhamel (bài tập 3.2.9).

2) Nếu $\sum_{k=1}^{p} r_k a_k = -1$, thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$, do đó $\sum_n u_n$ phân kỳ theo bài tập 3.2.10.

◊ **Trả lời:** $\sum_n u_n$ hội tụ khi và chỉ khi: $\sum_{k=1}^{p} r_k < 0$ hoặc ($\sum_{k=1}^{p} r_k = 0$ và $\sum_{k=1}^{p} r_k a_k < -1$).

3.2.13 Áp dụng quy tắc d'Alembert (3.2.4, *3)*, Định lý).

a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{2^n \ln 3 - 3^n 2\ln 2} \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

b) $0 \le \dfrac{\ln(n!)}{n!} \le \dfrac{n\ln n}{n!} \le \dfrac{n^2}{n!}$ và $\sum_{n\ge1}\dfrac{n^2}{n!}$ hội tụ theo quy tắc d'Alembert.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

c) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\sin\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

d) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\big((pn-n+1)...(pn-n+p-1)\big)}{(pn+1)...(pn+p)} \underset{n\infty}{\to} \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} < 1 .$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

3.2.14 • Giả sử $l < 1$. Khi ký hiệu $\lambda = \dfrac{l+1}{2} \in]0;1[$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq \lambda \Rightarrow u_n \leq \lambda^n).$$

Do $\sum\limits_n \lambda^n$ hội tụ (cấp số nhân, $\lambda \in]0;1[$), nên định lý hàm trội chứng tỏ rằng $\sum\limits_n u_n$ hội tụ.

• Cũng lập luận tương tự như trường hợp $l > 1$.

Thí dụ: *a)* $$\left(\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{2n+5} \underset{n\infty}{\to} \frac{1}{2} < 1.$$

b) $$\left(\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln\ln n\right) \underset{n\infty}{\to} 0 < 1.$$

◊ **Trả lời:** Cả hai chuỗi hội tụ.

3.2.15 *a)* Xem Tập 1, C 3.1 III.

b) Trước hết chú ý rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có: $\alpha_{n+1} \in \{\alpha_n, \alpha_n + 1\}$ và các tập hợp
$A = \{n \in \mathbb{N}^*;\ \alpha_{n+1} = \alpha_n\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N}^*;\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1\}$
đều vô hạn.

1) $$\begin{cases} \forall n \in A, & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \\ \forall n \in B, & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = b^{\alpha_n + 1} \end{cases},$$

do đó $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ không có giới hạn, cả hữu hạn cũng như vô hạn.

Quy tắc d'Alembert không áp dụng được.

2) $u_n^{\frac{1}{n}} = a^{1-\frac{\alpha_n}{n}} b^{\frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{2n}} \underset{n\infty}{\to} a$, vì $\alpha_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$. Quy tắc Cauchy áp dụng được. Ta kết luận rằng chuỗi $\sum\limits_n u_n$ hội tụ.

3.2.16 Ký hiệu $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} \leq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) S_n$,

từ đó bằng lập luận truy hồi theo p ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2^p n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)...\left(1+\frac{1}{2^{p-1}n}\right) S_n .$$

Nói riêng: $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2^p} \leq v_p u_1$, trong đó ta ký hiệu $v_p = \prod\limits_{k=0}^{p-1}\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$.

Do $(\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \le e^x)$, nên ta có: $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p \le \prod_{k=0}^{p-1} e^{\frac{1}{2^k}} = e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}}} < e^2$.

Kết quả trên chứng tỏ: $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad S_{2^p} \le e^2 u_1$.

Do $(S_n)_{n\ge 1}$ tăng, nên ta suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_n \le e^2 u_1$.

Bây giờ thì bổ đề (3.2.1) cho phép ta kết luận.

3.2.17 ◊ **Trả lời:** $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{u_{n-1}}} - \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} & \text{nếu } n \ge 1 \\ 1 & \text{nếu } n = 0 \end{cases}$,

$$b_n = \begin{cases} \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} & \text{nếu } n \ge 1 \\ u_0 & \text{nếu } n = 0 \end{cases}.$$

3.2.18 Hãy chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n^2 u_{n+1} = (n^2-n+1)u_n$.

Như vậy ta có: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\},\quad \ln u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln\dfrac{k^2-k+1}{k^2}\right) + \ln u_1$.

Do $\ln\dfrac{k^2-k+1}{k^2} \underset{k\infty}{\sim} -\dfrac{1}{k}$, nên chuỗi $\sum_{k\ge 1} \ln\dfrac{k^2-k+1}{k^2}$, với các số hạng ≤ 0, phân kỳ, do đó

ta có: $\sum_{k=1}^{n} \ln\dfrac{k^2-k+1}{k^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\infty$, và cuối cùng là $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2.19 *1)* Giả thiết $l = \liminf_{n\infty} nu_n > 0$.

Khi đó tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n > N,\ \operatorname{Inf}_{p \ge n} pu_p \ge \dfrac{l}{2}$,

và nói riêng ta có: $\forall n > N,\quad u_n \ge \dfrac{l}{2n}$.

Do $\sum_{n\ge 1} \dfrac{l}{2n}$ phân kỳ, nên ta suy ra rằng $\sum_n u_n$ phân kỳ.

Như vậy: $\liminf_{n\infty} nu_n \le 0$.

2) Áp dụng *1)* cho dãy $(-u_n)_n$ để thu được $\limsup_{n\infty} nu_n \ge 0$.

3.2.20 *a) α)* Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\quad \left(N_1 \le p < q \ \Rightarrow\ \sum_{k=p+1}^{q} u_k \le \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n > N_1$; như thế ta có: $\dfrac{\varepsilon}{2} \ge \sum_{k=N_1+1}^{n} u_k \ge (n-N_1)u_n$, từ đó suy ra: $0 \leq nu_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + N_1 u_n$.

Vì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$ nên tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $\forall n > N_2, \quad N_1 u_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ký hiệu $N = \text{Max}(N_1, N_2)$, ta được $\forall n > N, \quad 0 \leq nu_n \leq \varepsilon$, và do đó $nu_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

β) • Vì $nu_n \underset{n\infty}{\to} 0$, nên tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nu_n \leq M$.

Như vậy ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq nu_n^2 \leq M u_n$.

• $\frac{u_n}{1 - nu_n} \underset{n\infty}{\sim} u_n$.

◊ **Trả lời:** Các chuỗi $\sum_n nu_n^2$ và $\sum_n \frac{u_n}{1 - nu_n}$ hội tụ.

b) 1) Xét chuỗi $\sum_n u_n$ xác định bởi: $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} & \text{nếu tồn tại } p \in \mathbb{N}^* \text{ sao cho } n = p^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{nếu trái lại} \end{cases}$

Chứng minh rằng $\sum_n u_n$ hội tụ và $\sum_n nu_n^2$ phân kỳ.

2) Xét chuỗi $\sum_n u_n$ xác định bởi: $u_n = \begin{cases} \frac{n^4 + 1}{n^5} & \text{nếu tồn tại } p \in \mathbb{N}^* \text{ sao cho } n = p^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{nếu trái lại} \end{cases}$

Chứng minh rằng $\sum_n u_n$ hội tụ và $\sum_n \frac{u_n}{1 - nu_n}$ phân kỳ.

3.2.21 Nếu $(u_n)_{n\geq 1}$ không phải là dãy không, thì tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_k > 0$, và với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq k$ ta có: $v_n \geq \frac{1}{n}\frac{u_k}{k}$, từ đó suy ra tính phân kỳ của chuỗi $\sum_{n\geq 1} v_n$.

◊ **Trả lời:** $\sum_n v_n$ hội tụ khi và chỉ khi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0$.

3.2.22 • Vì f liên tục trên tập compac $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, nên tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow |f(x, y)| \leq M)$.
Khi đó ta có:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}, \quad |f(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}\left|f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right| \leq M\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hơn nữa ta có $f(0, 0) = 0$, và do đó: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leq M\sqrt{x^2 + y^2}$.

• Do $\sum_n x_n^2$ và $\sum_n y_n^2$ hội tụ, nên $\sum_n M^2\left(x_n^2 + y_n^2\right)$ hội tụ, và do đó (định lý hàm trội) chuỗi $\sum_n \left(f(x_n, y_n)\right)^2$ hội tụ.

3.2.23 Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $\sum_n u_n$ hội tụ, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon$.

Khi đó ta có với mọi $n \geq N$: $\varepsilon \geq \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k \geq \sum_{k=N+1}^{n} u_k \geq \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} n u_n = n u_n \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ta biết rằng với N cố định thì: $\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

Vậy tồn tại $N_1 \in \mathbf{N}$ sao cho $N_1 \geq N$ và: $\forall n > N_1$, $\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \ln n$.

Khi đó ta có $\forall n > N_1$, $2\varepsilon \geq n u_n \ln n$, chứng tỏ rằng: $n u_n \ln n \underset{n\infty}{\to} 0$.

3.2.24 Với mọi n thuộc $\mathbf{N}^*$, ta ký hiệu: $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$. Với mọi $n > n_0$ ta có:

$$S_{nk} - S_{n_0 k} = \sum_{p=n_0 k+1}^{nk} u_p = \sum_{i=n_0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} u_{ik+j} \geq \sum_{i=n_0}^{n-1} k u_{(i+1)k} \geq \sum_{i=n_0}^{n-1} u_{i+1} = S_n - S_{n_0}.$$

Nếu $\sum_n u_n$ hội tụ, thì khi đó $(S_n)_n$ có giới hạn hữu hạn S, từ đó suy ra $S - S_{n_0 k} \geq S - S_{n_0}$, do đó $S_{n_0 k} - S_{n_0} \leq 0$.

Nhưng mặt khác thì: $S_{n_0 k} - S_{n_0} = \sum_{p=n_0+1}^{n_0 k} u_p > 0$, mâu thuẫn.

3.2.25 Với mọi n thuộc $\mathbf{N}^*$, các số nguyên $f(1), ..., f(n)$ đôi một khác nhau, từ đó suy ra:

$$\frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} f(k) \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

3.2.26 *a)* Ánh xạ $f: \begin{array}{l} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \ln x \end{array}$ tăng nghiêm ngặt, liên tục, và $f(1) = 1$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

b) $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\infty}{\to} +\infty$, vậy $n = x_n - \ln x_n \underset{n\infty}{\sim} x_n$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < -1$.

3.2.27 • Chứng minh rằng $(u_n)_{n\geq 0}$ giảm, bị chặn dưới bởi 0, do đó hội tụ, và chứng minh giới hạn l của dãy đó thỏa mãn $(1+l)^3 = 1 + 3l$, từ đó suy ra $l = 0$.

• Ký hiệu $U_n = \frac{1}{u_n}$, ta có:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{u_n - \sqrt[3]{1+3u_n} + 1}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n - \left(1 + u_n - u_n^2 + o(u_n^2)\right) + 1}{u_n(u_n + o(u_n))} \underset{n\infty}{\to} 1.$$

Theo bổ đề hàm bậc thang, hoặc theo định lý Césaro (xem tập 1, C 3.1), ta suy ra rằng $U_n \underset{n\infty}{\sim} n$, và do đó $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

3.2.28 Ta có: $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1}| \le \dfrac{1}{n})$, do đó $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, rồi lại có:

$$u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

3.2.29 *1)* Giả thiết $\sum_n u_n$ hội tụ. Vì: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = \dfrac{1}{4} u_n$, nên ta suy ra rằng $\sum_n v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$ hội tụ. Hơn nữa, $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} \ge v_n \ge 0)$, vậy $\sum_n v_n(v_{n+1} - v_n)$ cũng hội tụ. Sau đó, bằng cách cộng từng vế, ta thấy $\sum_n (v_{n+1}^2 - v_n^2)$ hội tụ, $\left(v_n^2\right)_n$ hội tụ, $\left(v_n\right)_n$ hội tụ.

2) Đảo lại, ta giả thiết $\left(v_n\right)_n$ hội tụ. Khi đó dãy $\left(v_n^2\right)_n$ hội tụ, vậy chuỗi $\sum_n (v_{n+1}^2 - v_n^2)$ hội tụ. Do $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) \le v_{n+1}^2 - v_n^2)$, nên chuỗi $\sum_n v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$ hội tụ, và cuối cùng thì $\sum_n u_n$ hội tụ.

3.2.30 *a)* Khảo sát ánh xạ $f : \left]0;1\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$.

Do $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt \ge \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x$, nên từ đó suy ra $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

Như vậy, f thực hiện một song ánh từ $]0;\ 1]$ lên $[0;\ +\infty[$.

x	0		u_n		1
f		$+\infty$ ↘	n	↘	0

b) $u_n = f^{-1}(n) \underset{n\infty}{\to} 0$.

c) $v_n = \displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,dt - \int_{u_n}^1 \frac{dt}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t}\,dt \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,dt$, vì rằng ánh xạ $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$ khả tích trên $]0;\ 1]$.

◊ **Trả lời:** $v_n \underset{n\infty}{\to} \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,dt$.

d) Với ký hiệu $\lambda = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$, ta suy từ *c)* ra rằng: $u_n \underset{n\infty}{\sim} e^{\lambda - n}$.

◊ **Trả lời:** $\sum_n u_n$ hội tụ.

3.2.31 *a)* • Khảo sát sự biến thiên của ánh xạ

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln\frac{e^x - 1}{x}.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ 0	↗	$+\infty$

Ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = 0$.

• Khảo sát sự biến thiên của

$$g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↘	

Như vậy, nếu $(u_n)_n$ hội tụ, thì $(u_n)_n$ hội tụ đến 0.

• Nếu $u_1 > 0$ (tương ứng: < 0), thì $(u_n)_n$ giảm (tương ứng: tăng), bị chặn dưới (tương ứng: chặn trên) bởi 0, do đó hội tụ.

◊ **Trả lời:** $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

b) Ta có:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{u_n} = 1 + u_n e^{u_{n+1}}$, từ đó suy ra: $e^{u_1} = 1 + u_1 e^{u_2} = 1 + u_1(1 + u_2 e^{u_3}) = \dots$, và do đó, bằng lập luận truy hồi, ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} u_1 \dots u_k = e^{u_1} - 1 - \left(\prod_{k=1}^{n+1} u_k\right) e^{u_{n+2}}.$$

Cuối cùng thì $\prod_{k=1}^{n+1} u_k \underset{n\infty}{\to} 0$ vì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **Trả lời:** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) = e^a - 1$.

3.2.32 Ký hiệu: $A_0 = 1$, $A_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - u_k)$ với $n \geq 1$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} u_j A_{j-1}$ với $n \geq 1$.

Ta chứng minh truy hồi rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 - A_n$.

• $S_1 = u_1 = 1 - A_1$

• Nếu $S_n = 1 - A_n$, thì: $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}A_n = 1 - (1 - u_{n+1})A_n = 1 - A_{n+1}$.

Ta suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq 1$.

Theo bổ đề, ta kết luận rằng chuỗi $\sum_{n \geq 2}\left(u_n \prod_{k=1}^{n-1}(1 - u_k)\right)$ hội tụ.

Cuối cùng: $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n A_n \leq u_n A_{n-1}$;

định lý hàm trội cho phép ta kết luận rằng chuỗi $\sum_{n\geq 1}\left(u_n\prod_{k=1}^{n}(1-u_k)\right)$ hội tụ.

3.2.33 Các tọa độ x_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ của các điểm cực trị địa phương của f được xác định bởi:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}+n\pi < x_n < \dfrac{\pi}{2}+n\pi \\ 2x_n - \tan x_n = 0 \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $\sin^2 x_n = \dfrac{\tan^2 x_n}{1+\tan^2 x_n} = \dfrac{4x_n^2}{1+4x_n^2}$, từ đó suy ra:

$$f(x_n) = \frac{4x_n}{1+4x_n^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}.$$

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

3.2.34 Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, ta ký hiệu $E_k = \{n \in \mathbb{N}^*;\ \ 3^k \leq n \leq 3^{k+1}-1\}$, đây là tập hợp các số nguyên $n \geq 1$ mà cách viết trong hệ cơ số 3 có chứa đúng $k+1$ chữ số.
Với $k \in \mathbb{N}$ và $i \in \{0, \dots, k\}$, tập hợp các n thuộc E_k sao cho $a(n) = i$ có bản số là $C_k^i 2^{k+1-i}$.
Từ đó suy ra, với mọi k thuộc $\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} x^{a(n)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i x^i 2^{k+1-i} = 2(x+2)^k,$$

sau đó là:

$$\frac{2(x+2)^k}{\left(3^{k+1}\right)^3} \leq \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} \frac{x^{a(n)}}{n^3} \leq \frac{2(x+2)^k}{\left(3^k\right)^3}.$$

Cuối cùng ta thấy chuỗi nhân $\sum_k \left(\dfrac{x+2}{3^3}\right)^k$ hội tụ khi và chỉ khi $\dfrac{x+2}{3^3} < 1$.

◊ **Trả lời:** $\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^{a(n)}}{n^3}$ hội tụ khi và chỉ khi $x < 25$.

3.2.35 Với $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu: $v_n = \ln(1+u_n)$. Như thế ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{v_k}{2^k}.$$

Khi đó: $$\forall n \geq 1,\quad v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{v_k}{2^k} + \frac{v_n}{2^n} = v_n + \frac{v_n}{2^n} = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)v_n,$$

từ đó suy ra: $$\forall n \geq 1,\quad v_{n+1} = v_1\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^j}\right).$$

Với ký hiệu $w_n = \ln v_n$, ta được:

$$\forall n \geq 1,\quad w_{n+1} = \ln v_1 + \sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^j}\right).$$

Do $\ln\left(1+\frac{1}{2^j}\right) \underset{j\infty}{\sim} \frac{1}{2^j} \geq 0$, và vì $\sum_j \frac{1}{2^j}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_j \ln\left(1+\frac{1}{2^j}\right)$ hội tụ, do đó dãy $(w_n)_n$ có giới hạn hữu hạn l, sau đó có $v_n \underset{n\infty}{\to} e^l$, $u_n \underset{n\infty}{\to} e^{e^l} - 1$.

3.2.36 Với mọi N thuộc $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, ta có:

$$\sum_{p=1}^{\sigma(n)} u_p \geq \sum_{n=1}^{N-1} (u_{\sigma(n)} + u_{\sigma(n)+1} + \ldots + u_{\sigma(n+1)-1}) \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma(n+1)-\sigma(n)}{\sigma(n+1)}.$$

Chúng ta phân biệt hai trường hợp.

1) Nếu $1 - \frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)} \underset{n\infty}{\not\to} 0$, khi đó chuỗi $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}\right)$ phân kỳ.

2) Nếu $1 - \frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)} \underset{n\infty}{\to} 0$, khi đó:

$$0 < 1 - \frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)} \underset{n\infty}{\sim} -\ln\left(1-\left(1-\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}\right)\right) = \ln\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}.$$

Vì $\ln \sigma(n) \underset{n\infty}{\to} +\infty$, nên chuỗi $\sum_{n\geq 2} \ln\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}$ phân kỳ, do đó (định lý hàm tương đương), chuỗi $\sum_n \left(1-\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}\right)$ phân kỳ.

Như thế chúng ta đã chứng minh rằng chuỗi $\sum_n \left(1-\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}\right)$, vốn có các số hạng > 0, phân kỳ, do đó $\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}\right) \underset{N\infty}{\to} +\infty$, và $\sum_{p=1}^{\sigma(N)} u_p \underset{N\infty}{\to} +\infty$, cuối cùng thì chuỗi $\sum_n u_n$ phân kỳ.

3.2.37 *1)* Giả sử $\sum_n R_n$ hội tụ. Ta có:

$$\forall N \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{N} nu_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} R_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} R_n,$$

do đó (bổ đề), $\sum_n nu_n$ hội tụ.

2) Đảo lại, giả thiết $\sum_n nu_n$ hội tụ.

Ta có: $$\forall N \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{N} R_n = \sum_{n=1}^{N} nu_n + (N+1)\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} nu_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} nu_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nu_n,$$

do đó (bổ đề), $\sum_n R_n$ hội tụ.

3) Trong trường hợp chuỗi hội tụ, ta có:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} nu_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} R_n & \text{theo 1)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} nu_n & \text{theo 2)} \end{cases}$$

3.2.38 Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ta có:

$$\frac{1}{2}\int_0^n f''(t)\left(t-\mathrm{E}(t)-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f''(t)\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t .$$

Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, hai lần tích phân từng phần sẽ cho:

$$\frac{1}{2}\int_k^{k+1} f''(t)\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left(f'(k+1)-f'(k)\right) - \frac{1}{2}\left(f(k+1)+f(k)\right) + \int_k^{k+1} f .$$

Từ đó, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ta có:

$$\frac{1}{2}\int_0^n f''(t)\left(t-\mathrm{E}(t)-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f'(k+1)-f'(k)\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(k+1)+f(k)\right) + \int_0^n f$$

$$= \frac{1}{8}\left(f'(n)-f'(0)\right) + \frac{1}{2}\left(f(n)+f(0)\right) - \sum_{k=0}^{n} f(k) + \int_0^n f .$$

b) Ký hiệu: $$I_n(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^n \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\left(t-\mathrm{E}(t)-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t$$

và áp dụng *a)* cho ánh xạ $f : t \mapsto (t+1)^{-\alpha}$, ta được:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{8}\left(-\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}+\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^\alpha}+1\right) + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - I_n(\alpha) .$$

Ta có: $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le I_n(\alpha) \le \frac{1}{2}\int_0^n \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}t \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}} = \frac{\alpha}{8}$.

Từ đó chuyển qua giới hạn khi n dần đến vô cùng, ta được:

$$\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{2} \le \zeta(\alpha) \le \frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{8}.$$

3.3. 1 Áp dụng Nhận xét.

a) Lấy $\alpha_n = \mathrm{E}\left(e^n\right)+1,\ \beta_n = \mathrm{E}\left(e^{n+1}\right)-1$.

b) Lấy $\alpha_n = \mathrm{E}\left(e^{e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi}}\right)+1,\ \beta_n = \mathrm{E}\left(e^{e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}}\right)-1$.

3.3. 2 *a)* $\left|(-1)^n\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

b) $\left|\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)^{-n}\right| = \left(\frac{n}{\ln n}-1\right)^{-n} \leq 2^{-n}$ với $n \to \infty$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

c) $\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)\right| = \left|\sin\left(\pi n^2\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right| = \left|\sin\left(\pi n^2+\frac{\pi}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^2}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

d) $n^2\left|\left(\operatorname{th}\left(a+\frac{b}{n}\right)\right)^n\right| = n^2\left(\operatorname{th}\left|a+\frac{b}{n}\right|\right)^n = \exp\left(2\ln n+n\ln\operatorname{th}\left|a+\frac{b}{n}\right|\right) \underset{n\infty}{\to} 0,$

vì $\ln\operatorname{th}\left|a+\frac{b}{n}\right| \underset{n\infty}{\to} \ln\operatorname{th}|a| < 0.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

e) **Phương pháp thứ 1**

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}dx \underset{y=e^x}{=} \int_n^{n+1}\frac{\sin(\ln y)}{y\sqrt{(\ln y)^3+\ln y+1}}dy,$$

từ đó suy ra:

$$|u_n| \leq \int_n^{n+1}\frac{dy}{y(\ln y)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{và} \quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}} \text{ hội tụ.}$$

Phương pháp thứ 2

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\ln k}^{\ln(k+1)}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}dx = \int_0^{\ln(n+1)}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}dx \underset{n\infty}{\to} \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}dx,$$

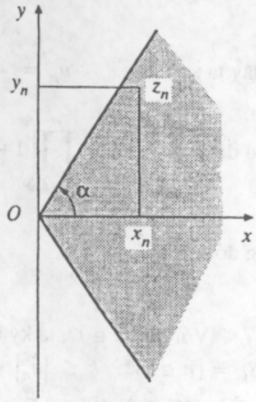
vì ánh xạ $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}$ khả tích trên $[0; +\infty[$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

3.3.3 Vì $\sum_n u_n$ hội tụ và $\sum_n |u_n|$ phân kỳ, và do ($\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$), nên ta kết luận: $\sum_n u_n^+$ phân kỳ. Tương tự, $\sum_n u_n^-$ phân kỳ.

3.3.4 Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu:

$$x_n = \mathrm{Re}(z_n),\ y_n = \mathrm{Im}(z_n).$$



Như thế ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n > 0 \\ |y_n| \le x_n \tan\alpha \end{cases}.$

Chuỗi $\sum\limits_n x_n$ hội tụ (vì $\sum\limits_n z_n$ hội tụ), do đó $\sum\limits_n |y_n|$ hội tụ. Sau nữa, vì:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \le x_n + |y_n|,$$

nên ta kết luận rằng $\sum\limits_n |z_n|$ hội tụ.

3.3.5 • $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| = \left| \dfrac{n+1}{(n+2)^3} u_n + \dfrac{n}{(n+2)^3} \right|$

$$\le \frac{n+1}{(n+2)^3}|u_n| + \frac{n}{(n+2)^3} \le |u_n| + \frac{1}{(n+1)^2},$$

từ đó bằng cách lấy tổng ta được: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \le |u_0| + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \le M,$

trong đó $M = |u_0| + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \le \dfrac{n+1}{(n+2)^3}|u_n| + \dfrac{n}{(n+2)^3} \le \dfrac{n+1}{(n+2)^3}M + \dfrac{n}{(n+2)^3} \le \dfrac{M+1}{n^2}.$

◊ **Trả lời:** Hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

3.3.6 • Hãy chứng minh rằng tồn tại $C \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, \quad \left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| \le C|x|^3.$$

• Khi đó ta có: $\forall k \in \mathbb{N} - \{0; 1\}, \quad \left| \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \left(\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2k}\right) \right| \le \dfrac{C}{k^{3/2}}.$

Ta suy ra rằng chuỗi $\sum\limits_{k \ge 2} \left(\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \left(\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2^k}\right) \right)$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

Với $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$, nếu ký hiệu $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$, $v_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, $w_n = -\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{2^k}$, thì tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho: $u_n - (v_n + w_n) \underset{n\infty}{\to} L$.

• Chuỗi $\sum\limits_{n \ge 2} v_n$ bán hội tụ; ta ký hiệu: $V = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n$.

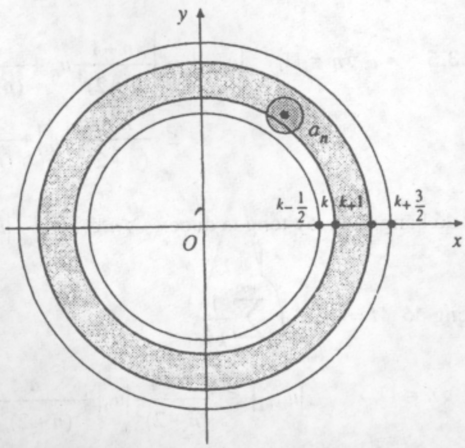
Mặt khác (xem 3.3.7, *2)*, Thí dụ), ta có: $w_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}\left(-1+\ln n+\gamma+\underset{n\infty}{o}(1)\right)$.

Từ đây ta suy ra: $$u_n = -\frac{1}{2}\ln n + \frac{1-\gamma}{2} + L + V + o(1),$$

và do đó: $$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{n}},$$

trong đó $a = \mathrm{e}^{\frac{1-\gamma}{2}+L+V}$.

3.3.7 Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu:
$$S_k = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \ k \le |a_n| < k+1\}.$$
Với $k \in \mathbb{N}^*$ cố định, các đĩa tròn $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a_n| \le \frac{1}{2}\}$ từng đôi một nằm ngoài nhau, và đều bao hàm trong hình vành khăn:
$$\{z \in \mathbb{C};\quad k-\frac{1}{2} \le |z| \le k+\frac{1}{2}\}.$$



Chuyển qua các diện tích, ta được:
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{\pi}{4}\,\mathrm{Card}(S_k) \le \pi\left(\left(k+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2\pi(2k+1),$$
từ đó suy ra:
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{Card}(S_k) \le 8(2k+1),$$
và do đó:
$$\forall k\in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n\in S_k}\frac{1}{|a_n|^3} \le \frac{8(2k+1)}{k^3} \le \frac{24}{k^2}.$$

Mặt khác ta dễ dàng thấy rằng: $\mathrm{Card}(S_0) \le 9$.

Kết quả này chứng tỏ rằng chuỗi $\displaystyle\sum_{k\ge 0}\left(\sum_{n\in S_k}\frac{1}{|a_n|^3}\right)$ hội tụ.

Với mọi $N \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $K \in \mathbb{N}$ sao cho:
$$\forall n \in \{1, \ldots, N\},\quad |a_n| \le K,$$
và bây giờ ta có
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|a_n|^3} \le \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{n\in S_k}\frac{1}{|a_n|^3}\right) \le \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in S_k}\frac{1}{|a_n|^3}\right),$$

chứng tỏ rằng $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|a_n|^3}$ hội tụ.

3.3.8 *1)* $\|f_n\|_1 = \frac{n}{2^n}$, do đó chuỗi $\sum_n \|f_n\|_1$ hội tụ.

2) Giả thiết $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ trong $(E, \|\cdot\|_1)$, và ký hiệu:

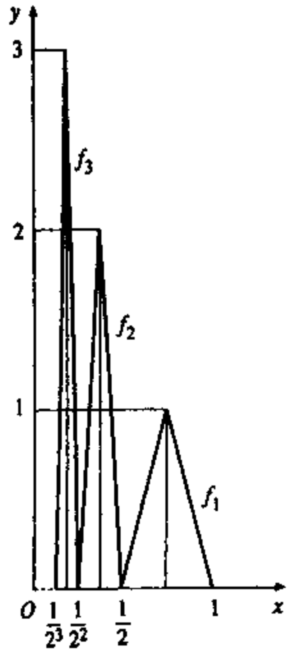
$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $S_n = \sum_{n=1}^{n} f_k$. Cho $x \in]0;1]$;

xét: $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln\left\{\frac{1}{x}\right\}}{\ln 2}\right) + 2$, tức là $\dfrac{1}{2^{N-1}} \leq x$.

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $n \geq N$, ta có:

$$\|S - S_n\|_1 = \int_0^1 |S - S_n| \geq \int_x^1 |S - S_n| = \int_x^1 |S - S_N|.$$



Do $\|S - S_n\|_1 \xrightarrow[n\infty]{} 0$, nên ta suy ra $\int_x^1 |S - S_N| = 0$, do đó:

$$\forall t \in [x; 1], \quad S(t) = S_N(t), \text{ và nói riêng } S(x) = S_N(x).$$

Nhưng khi đó, với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$, khi áp dụng kết quả trên đây cho $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$, ta được $S(x) = k$, và kết quả này chứng tỏ rằng S không bị chặn trong lân cận 0, mâu thuẫn với giả thiết $S \in E$.

Cuối cùng thì $\sum_n f_n$ không hội tụ trong E.

3.3.9 *a)* Để chứng tỏ rằng $\left(n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ giảm, hãy khảo sát sự biến thiên của

$f: \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x \end{array}$. Khi đó ta có thể áp dụng Đldbcđd.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

b) • Nếu $a \geq 0$ thì $|u_n| = \dfrac{1}{n^{1+n^a}} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

• Nếu $a < 0$, hãy khảo sát sự biến thiên của $f: \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\left(1+x^a\right)\ln x \end{array}$ để áp dụng Đldbcđd.

◊ **Trả lời:** Hội tụ với mọi a thuộc $\mathbb{E}$.

c) Ta có thể áp dụng Đldbcdd vì $\left(|u_n|\right)_{n\geq 1}$ giảm và $|u_n| \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$ (do $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \underset{n\infty}{\rightarrow} +\infty$).

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

d) • $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(n!)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n \ln n} = \frac{1}{n} \underset{n\infty}{\rightarrow} 0.$

• $|u_n| - |u_{n+1}| = \dfrac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\ln(n+1) - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k}{\ln(n!)\ln\left((n+1)!\right)}.$

Do $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln n$ và $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k \underset{n\infty}{\sim} n \ln n$, nên ta suy ra $|u_n| - |u_{n+1}| \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{(n \ln n)^2} = \dfrac{1}{n^2} > 0$,

chứng tỏ rằng $\left(|u_n|\right)_{n\geq 2}$ giảm kể từ một hàng nào đó.
Như thế ta có thể áp dụng Đldbcdd.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

e) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{(-1)^n}{n^a}} \frac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt[3]{t}}dt$, $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{(-1)^n}{n^a}} \sqrt{|t|}dt$, $w_n = u_n - v_n$.

1) Khảo sát $\displaystyle\sum_n v_n$

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{n^{1/a}} \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3a}{2}}}$, và do đó $\displaystyle\sum_n v_n$ hội tụ (theo Đldbcdd)

với mọi a thuộc $\mathbf{R}_+^*$.

2) Khảo sát $\displaystyle\sum_n w_n$

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = -\displaystyle\int_0^{\frac{(-1)^n}{n^a}} \frac{\sqrt{|t|}\sqrt[3]{t}}{1+\sqrt[3]{t}}dt$.

Vì : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \forall t \in \left[-\frac{1}{n^a}; \frac{1}{n^a}\right]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} \leq 2$,

nên ta suy ra : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\dfrac{-12}{11n^{\frac{11a}{6}}} \leq w_n \leq \dfrac{-3}{11n^{\frac{11a}{6}}}$,

chứng tỏ rằng $\displaystyle\sum_n w_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\dfrac{11a}{6} > 1$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > \dfrac{6}{11}$.

3.3.10 • Với mọi N thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\sum_{n=1}^{N^2} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1 \le n \le N^2 \\ n \text{ không chính phương}}} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N^2} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n^2}}{n^2}.$$

Vì ba chuỗi $\sum_n \frac{1}{n^2}$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ, nên ta suy ra $\sum_{k=1}^{N^2} u_k \underset{n\infty}{\to} S$, trong đó $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

• Với mọi M thuộc $\mathbb{N}^*$ tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $N^2 \le M \le (N+1)^2 - 1$, và ta có:

$$\sum_{n=1}^{M} u_n = \sum_{n=1}^{N^2} u_n + \sum_{n=N^2+1}^{M} u_n.$$

Nhưng $\sum_{n=N^2+1}^{M} u_n = \sum_{n=N^2+1}^{M} \frac{(-1)^n}{n} \underset{M\to\infty}{\to} 0$ theo Điều kiện cần và đủ Cauchy để một chuỗi hội tụ áp dụng cho chuỗi $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$.

• Dưới đây ta sẽ thấy (bài tập 3.3.23, hay Tập 4, 6.4), rằng

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ và } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

và (Tập 4, 5.5.3, *4*)) rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

3.3.11 Với mọi N thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k U_k = \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) U_k = \sum_{k=1}^{n} \left(U_k^2 - U_{k-1}(U_{k-1} + u_k) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(U_k^2 - U_{k-1}^2 - (U_k - u_k) u_k \right) = U_n^2 - U_0^2 - \sum_{k=1}^{n} u_k U_k + \sum_{k=1}^{n} u_k^2,$$

từ đó suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sum_{k=0}^{n} u_k U_k = U_n^2 + \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$

Dãy $(U_n)_{n\ge 0}$ hội tụ, vì chuỗi $\sum_n u_n$ hội tụ theo Đldbcdd.

Điều đó chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_n u_n U_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_n a_n^2$ hội tụ, và trong trường hợp hội tụ thì ta có: $2\sum_{n=1}^{+\infty} u_n U_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$

Chẳng hạn, khi áp dụng kết quả trên đây cho dãy xác định bởi $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, ta được:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right) = \frac{1}{2}\left((\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

(xem bài tập 3.3.23 và Tập 4, 5.5.3, *4*)).

3.3.12 *a)* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

b) $\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + (-1)^n n^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

c) $\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

d) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

e) **Phương pháp thứ 1:**

$(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Phương pháp thứ 2:

$(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = (-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, và có thể áp dụng Đldbcdd.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

f) $\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) = \ln n + \ln 2 + \; + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

từ đó có: $\dfrac{(-1)^n\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n+2}} = \dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n+2}} + \dfrac{(-1)^n\ln 2}{\sqrt{n+2}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

g) $(-1)^n\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n+1}{n^2+3}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

h) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{1}{n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

i) $(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

j) $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

k) $\dfrac{(-1)^n}{\cos n + n^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

l) $(-1)^n n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

m) $(-1)^n \ln\dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1} = 3\dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

n) $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

o) $\dfrac{(-1)^n}{\left(\ln n + (-1)^n\right)^2} = \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^2} + v_n$, trong đó $v_n \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{2}{(\ln n)^3}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

p) $\dfrac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \dfrac{(-1)^n}{\ln n} + \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

q) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n \ln\ln n} = \dfrac{(-1)^n}{\ln n} + v_n$, trong đó $v_n \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{\ln\ln n}{(\ln n)^2}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

r) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n} + O\left(\dfrac{1}{n(\ln n)^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

s) $(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-\mathrm{e}^{-1}\right)=\frac{(-1)^n}{2\mathrm{e}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

t) $(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}-1\right)=\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

u) $(-1)^n\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n^{\frac{1}{n}}\right)=O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

v) $\ln\left(1+(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right)=\frac{(-1)^n\ln n}{n}+O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

w) $\cos\left(\pi n^2\ln\frac{n}{n-1}\right)=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

x) $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)=\frac{(-1)^n\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

y) $\sin\left(\left(1+(-1)^n\sqrt{n}\right)^{-1}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

z) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right)=\frac{(-1)^n}{n^a}+v_n$, trong đó $v_n\underset{n\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^{2a}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a>\frac{1}{2}$.

a') $\ln\frac{n+(-1)^n\sqrt{n}+a}{n+(-1)^n\sqrt{n}+b}=\frac{a-b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a=b$.

b') $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{n^{\frac{a}{2}}}+v_n$, trong đó $v_n\underset{n\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^{\frac{3a}{2}}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a>\frac{2}{3}$.

c') Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $x\mapsto\frac{\ln x}{x(x+1)}$ khả tích trên $[n;+\infty[$, và:

$$\int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x(x+1)}\mathrm{d}x=\int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x-\int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x.$$

Một phép tích phân từng phần cho ta $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}$.

Mặt khác thì: $\displaystyle 0 \le \int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2(x+1)}dx \le \int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{\ln n}{2n^2} + \frac{1}{4n^2}$.

Như thế ta được: $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\ln x}{x(x+1)}dx = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

- Nếu $a \ge 1$ thì $|u_n| \underset{n\infty}{\sim} n^{a-1}\ln n \underset{n\infty}{\to} +\infty$.
- Nếu $a < 0$ thì $|u_n| \underset{n\infty}{\sim} n^{a-1}\ln n$ và do đó $\displaystyle\sum_n |u_n|$ hội tụ.
- Nếu $0 \le a < 1$, thì $\displaystyle u_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n^{1-a}} + \frac{(-1)^n}{n^{1-a}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{2-a}}\right)$, và do đó $\displaystyle\sum_n u_n$ hội tụ.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a < 1$.

3.3.13 Hãy chứng minh liên tiếp rằng:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ge 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1} \le \dfrac{1}{n+1}$, do vậy $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$
- $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$, do vậy $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
- $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- $(-1)^n u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

3.3.14 *a)* $\dfrac{n^n}{n!e^n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

b) $\dfrac{n^a n! e^n}{(n+1)^n} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{e} n^{a+\frac{1}{2}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a < -\dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{(2n)!}{n! a^n n^n} \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{2}\left(\dfrac{4}{ea}\right)^n$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $a > \dfrac{4}{e}$.

d) $\dfrac{(n!)^a n^{bn}}{\left((2n)!\right)^c} \underset{n\infty}{\sim} K\, n^{(a+b-2c)n}\, n^{\frac{a-c}{2}} \left(e^{2c-a}2^{-2c}\right)^n$, trong đó $K = 2^{\frac{a}{2}-c}\pi^{\frac{a-c}{2}}$.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi:

$(a + b - 2c < 0)$ hay $\begin{cases} a+b-2c=0 \\ 2(1-\ln 2)c-a<0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a+b-2c=0 \\ 2(1-\ln 2)c-a=0 \\ a-c+2<0 \end{cases}$.

e) • $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1.$

Từ công thức Stirling $\left(n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$, ta suy ra $|u_n| \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ và do đó $|u_n| \underset{n\infty}{\to} 0$.

Bây giờ ta có thể áp dụng Đldbcdd.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

3.3.15 Ta có: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n - \dfrac{1}{2} + o(1)\right) \underset{n\infty}{\sim} e^{n-\frac{1}{2}}$,

từ đó bằng cách áp dụng công thức Stirling ta được:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{e^{n-\frac{1}{2}} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.$$

◊ **Trả lời:** $\sqrt{\dfrac{2\pi}{e}}$.

3.3.16 Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\int_n^{n+1} \frac{x-\frac{1}{2}-E(x)}{x}dx = \int_n^{n+1}\left(1-\frac{\frac{1}{2}+n}{x}\right)dx = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(n+1)-\ln n\right),$$

từ đó suy ra: $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{x-\frac{1}{2}-E(x)}{x}dx = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\ln(k+1)-\ln k\right)$

$$= n - \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln k$$

$$= n + \sum_{k=2}^{n}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)\ln k - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1)$$

$$= n + \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln n + \frac{1}{n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= n + \left(n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)\right) - \left(n\ln n + \frac{1}{2}\ln n + 1 + o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1 + \underset{n\infty}{o}(1).$$

Hơn nữa, với mọi X thuộc $[1; +\infty[$ ta có:

$$\left|\int_{E(X)}^{X}\frac{x-\frac{1}{2}-E(x)}{x}dx\right| \le \int_{E(X)}^{X}\frac{\frac{1}{2}}{x}dx \le \frac{1}{2E(X)} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ta suy ra rằng tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{2}-E(x)}{x}dx$ hội tụ,

và: $$\int_1^{+\infty}\frac{x-\frac{1}{2}-E(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)-1.$$

◊ **Trả lời:** $$\int_1^{+\infty}\frac{x-\frac{1}{2}-E(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)-1.$$

3.3.17 *a)* Hai chuỗi cần xét hội tụ tuyệt đối và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos n\theta + i\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\sin n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{1-xe^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-xe^{-i\theta}}{\left(1-xe^{i\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)} = \frac{1-x\cos\theta+ix\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

◊ **Trả lời:** Với mọi (x, θ) thuộc $]-1; 1[\times \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos n\theta = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\sin n\theta = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

b) Hai chuỗi cần xét hội tụ tuyệt đối vì:

$$\left|x^n\operatorname{ch}n\theta\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(|x|e^{|\theta|}\right)^n, \quad \left|x^n\operatorname{sh}n\theta\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(|x|e^{|\theta|}\right)^n \text{ và } |x|e^{|\theta|} < 1.$$

Ta có: $$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\operatorname{ch}n\theta + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\operatorname{sh}n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{\theta}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-xe^{\theta}} = \frac{1-xe^{-\theta}}{\left(1-xe^{\theta}\right)\left(1-xe^{-\theta}\right)} = \frac{1-x\operatorname{ch}\theta+x\operatorname{sh}\theta}{1-2x\operatorname{ch}\theta+x^2}.$$

Với a cố định, hãy xét các phần chẵn và phần lẻ.

◊ **Trả lời:** Với mọi (x, θ) thuộc $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $|x|e^{|\theta|} < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\operatorname{ch}n\theta = \frac{1-x\operatorname{ch}\theta}{1-2x\operatorname{ch}\theta+x^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\operatorname{sh}n\theta = \frac{x\operatorname{sh}\theta}{1-2x\operatorname{ch}\theta+x^2}.$$

c) Đây là một trường hợp riêng của *a)*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{2^n\cos^n x} + i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{2^n\cos^n x} = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2\cos x}} - 1 = \frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x} = e^{2ix}.$$

◊ **Trả lời:** Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $|\cos x| > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n \cos^n x} = \cos 2x, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n \cos^n x} = \sin 2x.$$

d) Tương tự như *c)*.

◊ **Trả lời:** Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x} = \operatorname{ch} 2x, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x} = \operatorname{sh} 2x.$$

Đối với các thí dụ từ e) đến v), hãy làm xuất hiện một chuỗi có thể khử chéo được.

e)
$$\sum_{k=2}^{n} \ln \frac{(\ln(k+1))^2}{(\ln k)(\ln(k+2))} = \sum_{k=2}^{n} \left(2\ln\ln(k+1) - \ln\ln k - \ln\ln(k+2)\right)$$
$$= \ln\ln 3 - \ln\ln 2 + \ln\ln(n+1) - \ln\ln(n+2))$$
$$= \ln\frac{\ln 3}{\ln 2} - \ln\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \underset{n\infty}{\to} \ln\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

◊ **Trả lời:** $\ln\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

f)
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1+\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{2^k}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \underset{n\infty}{\to} 1.$$

◊ **Trả lời:** 1.

g)
$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

◊ **Trả lời:** 1.

h) Trước tiên hãy chứng minh rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2+2k} & \text{nếu tồn tại } k \in \mathbb{N}^* \text{ sao cho } n = k^2+2k \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}.$$

Sau đó chứng minh:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \underset{n\infty}{\to} \frac{3}{4}.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{3}{4}$.

i) Chú ý rằng : $\operatorname{Arctan}\dfrac{a}{1+a^2n+a^2n^2} = \operatorname{Arctan}\left(a(n+1)\right) - \operatorname{Arctan}(an)$.

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)$.

j) Chú ý rằng : $\operatorname{Arctan}\dfrac{8n}{n^4-2n^2+5} = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}(n+1)^2\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}(n-1)^2\right)$,

từ đó suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{8k}{k^4-2k^2+5} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}n^2\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\right) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

◊ **Trả lời:** π - Arctan$\left(\frac{1}{2}\right)$.

k) Một phép phân tích thành phân thức đơn giản cho ta:

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-X+1}{X^2-X+1}+\frac{X+1}{X^2+X+1}\right),$$

từ đó ta có với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$\frac{2}{n!\left(n^4+n^2+1\right)} = \frac{-n+1}{n!\left(n^2-n+1\right)} + \frac{n+1}{n!\left(n^2+n+1\right)}.$$

Ký hiệu $\alpha_n = \dfrac{-n+1}{n!\left(n^2-n+1\right)}$, ta có: $\alpha_{n+1} = \dfrac{-n}{(n+1)!\left(n^2+n+1\right)}$, từ đó suy ra:

$$\frac{2}{n!\left(n^4+n^2+1\right)} = \alpha_n - \alpha_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Như vậy $\quad 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\left(k^4+k^2+1\right)} = \alpha_0 - \alpha_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!} \underset{n\infty}{\rightarrow} 1+(e-1)=e.$

◊ **Trả lời:** $\frac{e}{2}$.

l) Chú ý rằng: $\quad \dfrac{1}{\text{sh}na\ \text{sh}(n+1)a} = \dfrac{1}{\text{sh}a}\left(\coth na - \coth(n+1)a\right).$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\text{ch}a - \text{sh}a}{\text{sh}^2a}$ hoặc cũng là $\dfrac{4e^a}{(e^{2a}-1)^2}$.

m) Chú ý rằng:

$$\frac{1}{\text{ch}na\ \text{ch}(n+1)a} = \frac{1}{\text{sh}a}\left(\text{th}(n+1)a - \text{th}\,na\right).$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{\text{sh}a}$.

n) Chú ý rằng: $\quad \dfrac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}}-1} = \dfrac{1}{z^{2^n}-1} - \dfrac{1}{z^{2^{n+1}}-1}.$

Như thế: $\quad \sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^{2^k}}{z^{2^{k+1}}-1} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^{2^{n+1}}-1} \underset{n\infty}{\rightarrow} \begin{cases}\dfrac{1}{z-1} & \text{nếu } |z|>1\\ \dfrac{1}{z-1}+1 & \text{nếu } |z|<1\end{cases}.$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases}\dfrac{1}{z-1} & \text{nếu } |z|>1\\ \dfrac{1}{z-1}+1 & \text{nếu } |z|<1\end{cases}.$

o) Chú ý rằng: $\quad \dfrac{1}{1-z^n} - \dfrac{1}{1-z^{n+1}} = \dfrac{z^n(1-z)}{(1-z^n)(1-z^{n+1})},$

từ đó suy ra: $\quad \sum_{k=1}^{n}\dfrac{z^k}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \dfrac{1}{1-z}\left(\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{1-z^{n+1}}\right) \underset{n\infty}{\rightarrow} \dfrac{1}{1-z}\left(\dfrac{1}{1-z}-1\right).$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

p) Ta có: $$4\frac{(-1)^n}{3^n}\cos^3\left(3^n\theta\right) = \frac{(-1)^n}{3^n}\left(3\cos\left(3^n\theta\right)+\cos\left(3^{n+1}\theta\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}\cos\left(3^n\theta\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\cos\left(3^{n+1}\theta\right),$$

từ đó suy ra: $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3^k}\cos^3\left(3^k\theta\right) = \frac{1}{4}\left(3\cos\theta-\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\cos\left(3^{n+1}\theta\right)\right) \underset{n\infty}{\to} \frac{3}{4}\cos\theta.$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{3}{4}\cos\theta$.

q) Tương tự như *p)*.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{3}{4}\sin\theta$.

r) Ta có: $$3^n\text{sh}^3\frac{x}{3^n} = \frac{1}{4}\,3^n\left(\text{sh}\frac{x}{3^{n-1}}-3\text{sh}\frac{x}{3^n}\right),$$

từ đó suy ra: $$\sum_{k=0}^{n}3^k\text{sh}^3\frac{x}{3^k} = \frac{1}{4}\left(\text{sh}3x-3^{n+1}\text{sh}\frac{x}{3^n}\right) \underset{n\infty}{\to} \frac{1}{4}\left(\text{sh}3x-3x\right).$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{4}\left(\text{sh}3x-3x\right)$.

s) Chú ý rằng với mọi t thuộc $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[-\{0\}$, ta có: $\dfrac{2}{\tan 2t} = \dfrac{1-\tan^2 t}{\tan t} = \dfrac{1}{\tan t}-\tan t$,

từ đó suy ra: $\tan t = \dfrac{1}{\tan t}-\dfrac{2}{\tan 2t}$, và do đó với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ ta có:
$$\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k\tan\frac{x}{2^k}}-\frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}}}.$$

◊ **Trả lời:** $$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}+\tan x & \text{nếu } x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}\\ 0 & \text{nếu } \quad x=0\end{cases}.$$

t) Chú ý rằng: $\forall t\in\mathbb{R},\quad 2\,\text{ch}t-1 = \dfrac{2\,\text{ch}2t+1}{2\,\text{ch}t+1}$, từ đó suy ra:
$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(2\text{ch}\frac{x}{2^k}-1\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\ln\left(2\text{ch}\frac{x}{2^{k-1}}+1\right)-\ln\left(2\text{ch}\frac{x}{2^k}+1\right)\right)$$
$$= \ln(2\,\text{ch}2x+1)-\ln\left(2\text{ch}\frac{x}{2^n}+1\right) \underset{n\infty}{\to} \ln(2\,\text{ch}2x+1)-\ln 3.$$

◊ **Trả lời:** $\ln\dfrac{2\,\text{ch}2x+1}{3}$.

u) Chứng minh rằng: $\forall t\in\mathbb{R},\quad 4\,\text{ch}^2 t-2\text{ch}t-1 = \dfrac{4\,\text{ch}^2 2t+2\text{ch}2t-1}{4\,\text{ch}^2 t+2\text{ch}t-1}$.

◊ **Trả lời:** $\ln\left(\frac{1}{5}\left(4\operatorname{ch}^2 2x+2\operatorname{ch}2x-1\right)\right)$.

3.3.18 Với mọi p thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\begin{cases} S_{2p+1}=\sum_{k=0}^{2p+1}u_k=(1+b)\sum_{k=0}^{p}(ab)^k \\ S_{2p} \;=S_{2p+1}-u_{2p+1} \end{cases}$$

- Nếu $ab \geq 1$, thì $u_{2p} \underset{p\infty}{\not\to} 0$, do đó $\sum_n u_n$ phân kỳ.

- Nếu $ab < 1$, thì $S_{2p+1} \underset{p\infty}{\to} \frac{1+b}{1-ab}$, $u_{2p+1} \underset{p\infty}{\to} 0$, $S_{2p} \underset{p\infty}{\to} \frac{1+b}{1-ab}$.

Nhận xét: Quy tắc d'Alembert không áp dụng được trong việc khảo sát tính hội tụ của $\sum_n u_n$ (nếu $a \neq b$), như ta có thể áp dụng quy tắc Cauchy (bài tập 3.2.14).

◊ **Trả lời:** $\sum_n u_n$ hội tụ khi và chỉ khi $ab<1$. Nếu $ab<1$, thì $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\frac{1+b}{1-ab}$.

3.3.19 *a)* Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x+2k+1}+\frac{1}{x+2k}-\frac{1}{x+k}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{x+k}=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{x+1}{n}+\frac{p}{n}}.$$

Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu: $v_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{p}{n}}$.

Một mặt thì: $v_n \underset{n\infty}{\to} \int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$.

Mặt khác ta có: $\left|u_n-v_n\right|=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{\frac{x+1}{n}}{\left(1+\frac{p}{n}\right)\left(1+\frac{x+1}{n}+\frac{p}{n}\right)}\leq\frac{(n+1)(x+1)}{n^2} \underset{n\infty}{\to} 0.$

Ta kết luận: $u_n \underset{n\infty}{\to} \ln 2$.

b) $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(x+2k+1)^2}+\frac{1}{(x+2k)^2}-\frac{1}{(x+k)^2}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{(x+k)^2} \underset{n\infty}{\to} 0,$

vì: $0\leq\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{(x+k)^2}\leq\frac{n+1}{(x+n+1)^2}$.

3.3.20 Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu: $P_n(x)=(x+1)(2x+1)\ldots(nx+1)$ và $f_n(x)=\frac{n}{P_n(x)}$.

Hãy chứng minh truy hồi rằng: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\; x\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=1-\frac{1}{P_n(x)}$.

◊ **Trả lời:** $\frac{1}{x}$.

Ký hiệu σ_1, σ_2, ... là các hàm đối xứng sơ cấp của phương trình đại số trên đây, ta có:

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{và} \quad \sigma_2 = \frac{2C_{2n+1}^3 i^3}{2C_{2n+1}^1 i} = -\frac{n(2n-1)}{3},$$

từ đó suy ra: $$\sum_{k=1}^{2n} \cot\mathrm{an}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \frac{2n(2n-1)}{3},$$

sau đó vì: $\forall k \in \{n+1, ..., 2n\}$, $\cot\mathrm{an}\dfrac{k\pi}{2n+1} = -\cot\mathrm{an}\dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$,

nên ta có: $$\sum_{k=1}^{n} \cot\mathrm{an}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \cot\mathrm{an}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

c) Với $u \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ta có:

- $0 < u < \tan u$ do đó $\cot\mathrm{an}^2 u < \dfrac{1}{u^2}$
- $0 < \sin u < u$ do đó $1 + \cot\mathrm{an}^2 u = \dfrac{1}{\sin^2 u} > \dfrac{1}{u^2}$.

d) Từ *c)* ta suy ra:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in \{1, ..., n\}, \quad 0 < \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 - \cot\mathrm{an}^2 \frac{k\pi}{2n+1} < 1,$$

từ đây bằng cách lấy tổng và áp dụng *b)*, ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{n(2n-1)}{3} < n,$$

và do đó: $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}.$$

3.3.24 *a)* Bằng một phép so sánh chuỗi–tích phân, ta suy ra được:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\infty}{\sim} \int_n^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}.$$

Sau đó, bằng cách so sánh các hàm tương đương theo lôgarit $\left(\dfrac{1}{2n^2} \underset{n\infty}{\to} 0 \neq 1\right)$, ta có:

$$\ln\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right) \underset{n\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{2n^2}\right) = -2\ln n.$$

◊ **Trả lời:** e.

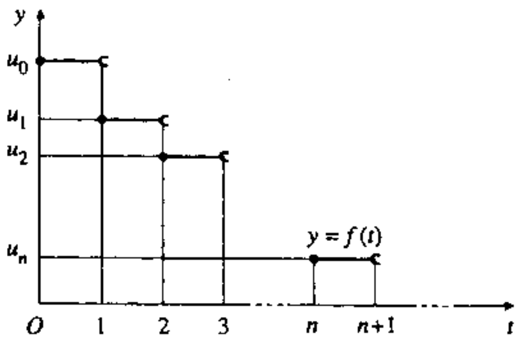
b) Theo kết quả khảo sát phần dư của một chuỗi thỏa mãn Đldbcdd (xem 3.3.8, *2), c)*), ta có

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right| \le \frac{1}{n+1},$$

suy ra: $$\ln\left(\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right|^{\frac{1}{\ln\ln n}}\right) \le -\frac{\ln(n+1)}{\ln\ln n} \underset{n\infty}{\to} -\infty.$$

◊ **Trả lời:** 0.

3.3.25



1) Chứng minh rằng chuỗi $\sum_n v_n$ hội tụ khi và chỉ khi g khả tích trên $[0; +\infty[$.

- Giả thiết g khả tích trên $[0; +\infty[$.

Do ta có: $\sum_{n=0}^{N} v_n = \int_0^{N+1} g \le \int_0^{+\infty} g$ với mọi N thuộc $\mathbb{N}$, nên bổ đề cho các chuỗi với số hạng ≥ 0 chứng tỏ rằng $\sum_n v_n$ hội tụ, và hơn nữa $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \le \int_0^{+\infty} g$.

- Đảo lại giả thiết $\sum_n v_n$ hội tụ. Do: $\int_0^{X} g \le \int_0^{E(X)+1} g = \sum_{n=0}^{E(X)} v_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$,

với mọi X thuộc $\mathbb{R}_+$, nên định lý hàm trội đối với các hàm với giá trị ≥ 0 (xem 2.5.1, 2), Mệnh đề 2), chứng tỏ rằng g khả tích trên $[0; +\infty[$, và hơn nữa: $\int_0^{+\infty} g \le \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Như vậy $\sum_n v_n$ hội tụ hội tụ khi và chỉ khi g khả tích trên $[0; +\infty[$.

Chẳng hạn, giả sử: $\begin{cases} u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n) \\ \sum_n v_n \text{ hội tụ} \end{cases}$.

2) Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \ge N_1$, $|u_n| \le \varepsilon v_n$.

Cho $t \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn $t \ge N_1$. Với ký hiệu $n = E(t)$ ta có: $|f(t)| = |u_n| \le \varepsilon v_n = \varepsilon g(t)$.

Điều này chứng tỏ: $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$.

Khi đó ta có theo một định lý về tích phân các quan hệ so sánh (2.5.3, *1*), Mệnh đề 1):

$$\int_x^{+\infty} f = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g\right),$$

và do đó nói riêng có (bằng cách thay x bởi $n+1$):

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

Các định lý khác cũng chứng minh theo phương pháp tương tự.

3.3.26 Vì chuỗi $\sum_n u_n$ với các số hạng ≥ 0 phân kỳ, nên $S_n \underset{n\infty}{\to} +\infty$, và do đó $\frac{u_n}{S_n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

Như thế $\frac{u_n}{S_n} \underset{n\infty}{\sim} -\ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) = \ln S_n - \ln S_{n-1}$. Chuỗi $\sum_{n\geq 2}\left(\ln S_n - \ln S_{n-1}\right)$ có các số hạng ≥ 0, phân kỳ vì $\sum_{k=2}^{n}\left(\ln S_k - \ln S_{k-1}\right) = \ln S_n - \ln S_{n-1} \underset{n\infty}{\to} +\infty$. Theo một định lý về phép cộng các hệ thức so sánh (3.3.9, *2)*, Mệnh đề 3), ta suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{S_k} \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n}\left(\ln S_k - \ln S_{k-1}\right) = \ln S_n - \ln S_1 ,$$

và do đó $v_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

3.3.27

Hãy chứng minh (như trong bài tập 3.3.11) rằng:

$$\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad 2u_kS_k = S_k^2 - S_{k-1}^2 + u_k^2 ,$$

từ đó bằng cách lấy tổng được: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sum_{k=1}^{n} u_kS_k = S_n^2 + \sum_{k=1}^{n} u_k^2$.

Vì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, nên ta có: $u_n^2 = \underset{n\infty}{o}\left(u_n\right)$.

Bây giờ thì một định lý về phép cộng các hệ thức so sánh (3.3.9, *2)*, Mệnh đề 3), cho ta:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \underset{n\infty}{o}\left(S_n\right),$$

suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n} u_kS_k \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}S_n^2 .$$

Tổng quát hóa:

Một sự khảo sát tương tự chứng tỏ rằng nếu $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ là những chuỗi thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_n v_n \quad \text{phân kỳ} \\ u_n \underset{n\infty}{\to} 0 \end{cases},$$

thì:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(u_kV_k + v_kU_k\right) - U_nV_n = \underset{n\infty}{o}\left(V_n\right),$$

trong đó $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

3.3.28

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$u_{n+1} - u_n = 2\sum_{q=1}^{n} \frac{(n+1)q}{(n+1)+q} + \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} = 2\,(n+1)^2 \frac{1}{n+1} \sum_{q=1}^{n} \frac{\frac{q}{(n+1)}}{1+\frac{q}{(n+1)}} + \frac{n+1}{2}.$$

Vì $\frac{1}{n+1} \sum_{q=1}^{n} \frac{\frac{q}{(n+1)}}{1+\frac{q}{(n+1)}} \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 - \ln 2$, nên ta suy ra:

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\infty}{\sim} 2(1-\ln 2)\, n^2.$$

Một định lý về phép cộng các hệ thức so sánh (3.3.9, *2)*, Mệnh đề 3), cho phép suy ra:

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} 2(1-\ln 2) \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1-\ln 2}{3} n(n+1)(2n+1) \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{3}(1-\ln 2)n^3.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{2}{3}(1-\ln 2)n^3$.

3.3.29

- $\frac{S_n}{nu_n} \underset{n\infty}{\to} \alpha \Rightarrow \frac{u_n}{S_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha n} \Rightarrow \frac{u_n}{S_n} \underset{n\infty}{\to} 0$, sau nữa là: $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} S_n$

và cuối cùng được: $u_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{S_{n+1}}{\alpha(n+1)} \sim \frac{S_n}{\alpha n} \sim u_n$.

Như thế ta đã chứng minh: $u_n = o(S_n)$, $u_{n+1} \sim u_n$, $S_{n+1} \sim S_n$.

- Chúng ta chứng minh bằng cách lập luận phản chứng rằng $\sum_n u_n$ phân kỳ.

Nếu $S_n \underset{n\infty}{\to} S \in \mathbb{R}_+^*$ thì $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{S}{n}$, do đó $\sum_n u_n$ phân kỳ, mâu thuẫn.

Như thế chuỗi $\sum_n u_n$ với các số hạng ≥ 0 phân kỳ, vậy $S_n \underset{n\infty}{\to} +\infty$.

- Với $n \geq 1$, ta ký hiệu: $x_n = S_{n+1}T_{n+1} - S_nT_n$.

Ta có: $$\sum_{k=1}^{n} x_k = S_{n+1}T_{n+1} - S_1T_1 \underset{n\infty}{\to} +\infty.$$

Mặt khác thì: $$\sum_{k=1}^{n} x_k = u_{n+1}T_n + v_{n+1}S_n + u_{n+1}v_{n+1}$$

$$\underset{n\infty}{\sim} u_nT_n + v_nS_n \underset{n\infty}{\sim} (\alpha+\beta)nu_nv_n.$$

Theo một định lý về phép cộng các hệ thức so sánh (3.3.9, *2)*, Mệnh đề 3), ta suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} (\alpha+\beta) k u_k v_k .$$

Cuối cùng ta được: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = S_{n+1}T_{n+1} - S_1T_1 \underset{n\infty}{\sim} S_nT_n \underset{n\infty}{\sim} \alpha\beta n^2 u_n v_n$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

3.3.30 *a)* • Nếu $\alpha \le 1$ thì $u_{2p+1} = -\dfrac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}} \underset{p\infty}{\not\to} 0$, do đó $\displaystyle\sum_n u_n$ phân kỳ.

• Nếu $\alpha > 1$ thì $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$ và: $u_{2p} + u_{2p+1} = \dfrac{1}{(2p)^{\alpha+1}} - \dfrac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}} \underset{p\infty}{\sim} -\dfrac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}$.

Áp dụng định lý nhóm số hạng.

◊ **Trả lời:** Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 2$.

b) $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$ và: $u_{2p} + u_{2p+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2p}+4p} - \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}+\frac{1}{2}(2p+1)} \underset{p\infty}{\sim} -\dfrac{3}{4p}$.

◊ **Trả lời:** Phân kỳ.

3.4.1 *a)* Cho x_0 là một điểm gián đoạn của f. Vì f là hàm tăng, nên khi đó ta có $\lim\limits_{x_0^-} f < \lim\limits_{x_0^+} f$, và do $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại $r_0 \in \mathbb{Q}$ sao cho $\lim\limits_{x_0^-} f < r_0 < \lim\limits_{x_0^+} f$

Theo cách đó ta xây dựng được một ánh xạ $\varphi : x_0 \mapsto r_0$.
Cho x_1 và x_2 là hai điểm gián đoạn của f sao cho $x_1 < x_2$. Khi đó ta có:

$$\lim_{x_1^-} f < \lim_{x_1^+} f \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \lim_{x_2^-} f < \lim_{x_2^+} f ,$$

từ đó suy ra: $\varphi(x_1) < f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) < \varphi(x_2)$.

Hệ thức này chứng tỏ rằng φ tăng nghiêm ngặt, do đó là đơn ánh.
b) Ký hiệu D là tập hợp các điểm gián đoạn của f, theo *a)* tồn tại một đơn ánh $\varphi : D \to \mathbb{Q}$
Do $\mathbb{Q}$ đếm được nên $\varphi(D)$ không quá đếm được, do đó D không quá đếm được.

3.4.2 *a)* Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, tập hợp $\left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ bao hàm trong $[0; 1]$, và $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\to} +\infty$

do đó $\left\{\displaystyle\sum_{x\in J} x;\ J \in \mathfrak{F}([0;1])\right\}$ không bị chặn trên. Từ đó ta suy ra theo định nghĩa rằng $(x)_{x\in[0;1]}$ không khả tổng.

◊ **Trả lời:** $(x)_{x\in[0;1]}$ không khả tổng.

b) Tương tự như *a)*.

◊ **Trả lời:** $(x)_{x\in\mathbb{Q}}$ không khả tổng.

c) Vì với mọi A thuộc $\mathbb{R}_+^*$ tồn tại $x \in \mathbb{Q}_+^*$ sao cho $\dfrac{1}{x^2} > A$, nên tập hợp

$\left\{\sum_{x\in J}\frac{1}{x^2};\ J\in\mathfrak{F}\left(\mathbb{Q}_+^*\right)\right\}$ không bị chặn trên.

◊ **Trả lời:** $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$ không khả tổng.

3.4.3 Nếu $|x| \geq 1$ thì khi đó $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không khả tổng, do đó $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ cũng không khả tổng.

Nếu $|x| \leq 1$ thì khi đó $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ không khả tổng, do đó $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ cũng không khả tổng.

◊ **Trả lời:** Với mọi x thuộc $\mathbb{C}^*$, họ $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ không khả tổng.

3.4.4 Với mọi (a, b) thuộc $]0;+\infty[^2$ ta có: $0 < e^{-a} < 1$ và $0 < e^{-b} < 1$, và với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$ ta có: $e^{-ap-bq} = \left(e^{-a}\right)^p\left(e^{-b}\right)^q$.

Như thế ta có thể áp dụng 3.4.2, *3)*, Mệnh đề 3.

◊ **Trả lời:** $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} e^{-ap-bq} = \frac{1}{1-e^{-a}}\frac{1}{1-e^{-b}}$.

3.4.5 Ta có: $\forall(\alpha,\beta)\in[0;+\infty[^2,\quad \alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$, từ đó ta có với mọi (a, b) thuộc $]1;+\infty[^2$: $\quad\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ 0\leq\dfrac{1}{a^p+b^q}\leq\dfrac{1}{2\left(\sqrt{a}\right)^p\left(\sqrt{b}\right)^q}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^p\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^q$.

Do $\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\in[0;1]^2$, nên theo 3.4.2, 3), Mệnh đề 3, dãy kép $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^p\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^q\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng, do đó $\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng.

3.4.6 **(i) $\Rightarrow$ (ii):**

Hiển nhiên, vì với mọi $(p, q)\in\mathbb{N}^2$ ta có: $0\leq\dfrac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta}\leq\dfrac{p+q}{(1+p^\alpha)(1+q^\beta)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Giả sử $\left(\dfrac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng.

Khi đó (nếu lấy $q = 0$), thì $\left(\dfrac{p}{(1+p)^\alpha}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ khả tổng. Do $\dfrac{p}{(1+p)^\alpha}\underset{p\infty}{\sim}\dfrac{1}{p^{\alpha-1}}$, nên ta suy ra rằng $\alpha - 1 > 1$, do đó $\alpha > 2$. Tương tự ta có: $\beta > 2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Giả sử $\alpha > 2$, $\beta > 2$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$0 \le \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{p+q}{(1+p^{\alpha})(1+q^{\beta})} = \left(\sum_{p=0}^{n}\frac{p}{1+p^{\alpha}}\right)\left(\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{1+q^{\beta}}\right) + \left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+p^{\alpha}}\right)\left(\sum_{q=0}^{n}\frac{q}{1+q^{\beta}}\right)$$

$$\le \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p}{1+p^{\alpha}}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{1+q^{\beta}}\right) + \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{1+p^{\alpha}}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q}{1+q^{\beta}}\right)$$

Vì $\left(\{0,...,n\}^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng những bộ phận hữu hạn của $\mathbb{N}^2$ mà hợp bằng $\mathbb{N}^2$, nên ta suy ra rằng dãy kép $\left(\dfrac{p+q}{(1+p^{\alpha})(1+q^{\beta})}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng.

3.4.7 Với mọi q thuộc $\mathbb{N}^*$, $\left(z^{pq}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ khả tổng (vì $\left|z^q\right| < 1$), và:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{p=1}^{+\infty}(z^q)^p = \frac{z^q}{1-z^q} & (1) \\ \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \left|z^{pq}\right| = \frac{\left|z^q\right|}{1-\left|z^q\right|} \le \frac{|z|^q}{1-|z|} & (2) \end{cases}$$

Theo (2), vì $\left(z^q\right)_{q\in\mathbb{N}^*}$ khả tổng, nên $\left(\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left|z^{pq}\right|\right)_{q\in\mathbb{N}^*}$ khả tổng. Từ đó suy ra rằng $\left(z^{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng, và: $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} z^{pq} = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} z^{pq}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{z^q}{1-z^q}$.

3.4.8 Ta có $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\left|\dfrac{a^p b^q}{(p+q)!}\right| = \dfrac{\left|a^p\right|}{p!}\,\dfrac{\left|b^q\right|}{q!}\,\dfrac{1}{C_{p+q}^{p}} \le \dfrac{|a|^p}{p!}\,\dfrac{|b|^q}{q!}$.

Do $\left(\dfrac{|a|^p}{p!}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ và $\left(\dfrac{|b|^q}{q!}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ đều khả tổng, nên $\left(\dfrac{|a|^p}{p!}\dfrac{|b|^q}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng, và do đó $\left(\dfrac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng.

3.4.9 • Theo định lý hoán vị thứ tự, $\left(C_{p+q}^{p} x^p y^q\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \text{Với mọi } q \text{ thuộc } \mathbb{N}, \text{ chuỗi } \displaystyle\sum_{p\ge 0} C_{p+q}^{p}|x|^p|y|^q \text{ hội tụ} \\ \text{Chuỗi } \displaystyle\sum_{q\ge 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+q}^{p}|x|^p|y|^q\right) \text{ hội tụ} \end{cases}$$

Rõ ràng là với mọi q thuộc $\mathbb{N}$, chuỗi $\sum\limits_{p\ge 0} C_{p+q}^{p}|x|^{p}$ hội tụ khi và chỉ khi $|x| < 1$.

Bây giờ, với giả thiết $|x| < 1$, ta có với mọi q thuộc $\mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+q}^{p}|x|^{p}|y|^{q} = \frac{|y|^{q}}{\left(1-|x|\right)^{q+1}} = \frac{1}{\left(1-|x|\right)}\left(\frac{|y|}{\left(1-|x|\right)}\right)^{q},$$

do đó chuỗi $\sum\limits_{q\ge 0}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} C_{p+q}^{p}|x|^{p}|y|^{q}\right)$ hội tụ khi và chỉ khi $\frac{|y|}{\left(1-|x|\right)} < 1$, tức là: $|x|+|y| <$

Cuối cùng thì $\left(C_{p+q}^{p}x^{p}y^{q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng khi và chỉ khi $|x|+|y| < 1$.

- Nếu $|x|+|y| < 1$, theo định lý hoán vị thứ tự ta có:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} C_{p+q}^{p}x^{p}y^{q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} C_{p+q}^{p}x^{p}y^{q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{1-x}\left(\frac{y}{1-x}\right)^{q}$$

$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-\frac{y}{1-x}} = \frac{1}{1-x-y}.$$

Nhưng: $$\frac{1}{1-x-y} = \frac{1}{1-(x+y)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(x+y)^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} C_{p+q}^{p}x^{p}y^{q}\right)$$

$$= \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} C_{p+q}^{p}x^{p}y^{q}.$$

◊ **Trả lời:** • $E = \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2; |x|+|y|<1\right\}$

• $\forall (x,y)\in E^2,\quad \sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} C_{p+q}^{p}x^{p}y^{q} = \frac{1}{1-x-y}$.

3.4.10 *a)* Do khi lấy $n = 0$ thì họ $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ không khả tổng, nên ta kết luận được rằng h

$\left(\frac{z^n}{p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ không khả tổng.

◊ **Trả lời:** $\left(\frac{z^n}{p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ không khả tổng với mọi z thuộc $\mathbb{C}$.

b) • Nếu $\left(\frac{z^n}{p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng, thì (lấy $p = 0$) họ $\left(z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ khả tổng, do đó $|z| < 1$.

• Đảo lại, nếu $|z| < 1$ thì $\left(z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ và $\left(\frac{1}{p!}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ đều khả tổng, do đó $\left(\frac{z^n}{p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ kh

tổng và:

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}\frac{z^n}{p!}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\right)=\frac{1}{1-z}\,e.$$

◊ **Trả lời:** $\left(\frac{z^n}{p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng khi và chỉ khi $|z|<1$, và khi đó có tổng bằng $\frac{1}{1-z}$ e.

3.4.11 Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ ta có:

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(p+q+1)^{\alpha}}\ \left|\ \begin{aligned}&\geq\sum_{\substack{r=0\\(r=p+q)}}^{n}\sum_{p=0}^{r}\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}}\\&\leq\sum_{\substack{r=0\\(r=p+q)}}^{2n}\sum_{p=0}^{r}\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}=\sum_{r=0}^{2n}\frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}}\end{aligned}\right.$$

Vì $\left(\frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ khả tổng khi và chỉ khi $\alpha-1>1$, nên ta kết luận rằng $\left(\frac{1}{(p+q+1)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng khi và chỉ khi $\alpha>2$.

2) Nếu $\alpha>2$ thì:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{(p+q+1)^{\alpha}}=\lim_{n\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(p+q+1)^{\alpha}}\right)=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}}=\zeta(\alpha-1).$$

◊ **Trả lời:** $\left(\frac{1}{(p+q+1)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng khi và chỉ khi $\alpha>2$, và khi đó có tổng bằng $\zeta(\alpha-1)$.

3.4.12 • Ta có: $\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;\ p\mid q\}\subset(\mathbb{N}^*)^2$ và $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng, vì rằng $\left(\frac{1}{p^2}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ và $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q\in\mathbb{N}^*}$ đều khả tổng. Vậy $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;\ p\mid q}$ khả tổng.

• $$\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\p\mid q}}\frac{1}{p^2q^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}^*\\p\mid q}}\frac{1}{p^2q^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2}\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}^*\\p\mid q}}\frac{1}{q^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(np)^2}\right)$$

$$=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^4}{90}\frac{\pi^2}{6}$$

$$=\frac{\pi^6}{540}\simeq 1{,}780\,350\ldots$$

◊ **Trả lời:** $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\,|\,q}} \frac{1}{p^2q^2} = \frac{\pi^6}{540}$.

3.4.13 Xét dãy kép: $\left(\dfrac{u^{2^{p+n}}}{v^n}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

Vì $|u| < 1$, và do $2^r \geq r$ với mọi r thuộc $\mathbb{N}$, nên ta có:

$\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad \left|\dfrac{u^{2^{p+n}}}{v^n}\right| \leq \dfrac{|u|^{p+n}}{|v|^n} = \left|\dfrac{u}{v}\right|^n |u|^p$.

Do $\left|\dfrac{u}{v}\right| < 1$ và $|u| < 1$, nên các dãy $\left(\left|\dfrac{u}{v}\right|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ và $\left(|u|^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ khả tổng, do đó dãy k
$\left(\left|\dfrac{u^{2^{p+n}}}{v^n}\right|\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng.

Bằng cách áp dụng định lý hoán vị thứ tự, ta được:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z_n}{v^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{u^{2^{p+n}}}{v^n} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}\frac{u^{2^{p+n}}}{v^n} = \sum_{\substack{(n,q)\in\mathbb{N}^2 \\ n\leq q}}\frac{u^{2^q}}{v^n} =$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{q}\frac{u^{2^q}}{v^n}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{v^{q+1}}}{1-\dfrac{1}{v}}u^{2^q},$$

và do đó: $$(v-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z_n}{v^n} = v\sum_{q=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{v^{q+1}}\right)u^{2^q} = v\sum_{q=0}^{+\infty}u^{2^q} - \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{u^{2^q}}{v^q}.$$

3.4.14 *1)* Cho $z\in\mathbb{C}$.

- Nếu dãy kép $\left(\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ khả tổng, thì khi đó (lấy $q=1$) dãy $\left(z^{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ khả tổng
do đó $|z| < 1$.

- Nếu $|z| < 1$, thì vì : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right| \leq |z|^{2p}\dfrac{1}{q^2}$ và do các dãy $\left(|z|^{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$
và $\left(\dfrac{1}{q^2}\right)_{q\in\mathbb{N}^*}$ đều khả tổng, nên dãy kép $\left(\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ khả tổng.

Như vậy $\left(\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ khả tổng khi và chỉ khi $|z| < 1$.

2) Với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, ta có:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{q^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{q}\right)^{2p}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \frac{1}{1-\left(\frac{z}{q}\right)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2 - z^2}.$$

3.4.15 Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 2$.

Xét dãy kép $\left(\frac{z^n}{p^n}\right)_{n\geq 2, p\geq 2}$.

Với mọi $p \geq 2$, dãy $\left(\left|\frac{z^n}{p^n}\right|\right)_{n\geq 2}$ khả tổng và:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{p^n}\right| = \left|\frac{z}{p}\right|^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{p}\right|^m = \left|\frac{z}{p}\right|^2 \frac{1}{1-\left|\frac{z}{p}\right|} = \frac{|z|^2}{p(p-|z|)}.$$

Và dãy $\left(\frac{|z|^2}{p(p-|z|)}\right)_{p\geq 2}$ khả tổng, vì $\frac{|z|^2}{p(p-|z|)} \underset{p\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{p^2}$.

Điều này chứng tỏ rằng dãy kép $\left(\frac{z^n}{p^n}\right)_{n\geq 2, p\geq 2}$ khả tổng.

Khi đó ta có: $$\sum_{\substack{n\geq 2\\ p\geq 2}} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)},$$

và $$\sum_{\substack{n\geq 2\\ p\geq 2}} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} z^n(\zeta(n)-1).$$

Như vậy ta đã chứng minh rằng, với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < 2$ thì:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} z^n(\zeta(n)-1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)}.$$

- Với $z = 1$: $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = 1$, chuỗi khử chéo được.
- Với $z = -1$: $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n(\zeta(n)-1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}$, chuỗi khử chéo được.

3.4.16 Dãy kép $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng, vậy dãy $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;\, p\wedge q=1}$ cũng khả tổng, và ta có: $$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=n}} \frac{1}{p^2q^2} =$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{(r,s)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ r\wedge s=1}}\frac{1}{\left(n^2r^2\right)\left(n^2s^2\right)}=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\right)\left(\sum_{\substack{(r,s)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ r\wedge s=1}}\frac{1}{r^2s^2}\right).$$

Mặt khác thì: $$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2q^2}=\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\right)^2.$$

Từ đây ta suy ra: $$\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2}=\frac{\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\right)^2}{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}}=\frac{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2}{\frac{\pi^4}{90}}=\frac{5}{2}.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{5}{2}$.

3.4.17 Với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$ ta có: $0\le 2^{-3q-p-(p+q)^2}\le 2^{-(p+q)}=2^{-p}\,2^{-q}$.
Vì dãy $\left(2^{-p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ khả tổng, nên dãy kép $\left(2^{-p}2^{-q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ cũng khả tổng, và do đó dãy kép đang xét khả tổng.

Sau nữa: $$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}2^{-3q-p-(p+q)^2}=\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 0\le q\le n}}2^{-2q-n-n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n-n^2}\left(\sum_{q=0}^{n}2^{-2q}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n-n^2}\frac{1-\left(2^{-2}\right)^{n+1}}{1-2^{-2}}=\frac{4}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n-n^2}-\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n^2-3n-2}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n-n^2}-\sum_{\substack{m=1\\ (m=n+1)}}^{+\infty}2^{-m-m^2}\right)=\frac{4}{3}$$, chuỗi khử chéo được.

Trả lời: $\frac{4}{3}$.

3.4.18 Với mọi (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$, ta có:

$$\frac{p!q!}{(p+q+2)!}=\frac{p!}{p+1}\left(\frac{q!}{(p+q+1)!}-\frac{(q+1)!}{(p+q+2)!}\right).$$

Từ đó ta suy ra được là với mọi p thuộc $\mathbb{N}$, chuỗi $\sum_{q\ge 0}\frac{p!q!}{(p+q+2)!}$ hội tụ, và:

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{p!q!}{(p+q+2)!}=\frac{p!}{p+1}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{q!}{(p+q+1)!}-\frac{(q+1)!}{(p+q+2)!}\right)=\frac{p!}{p+1}\cdot\frac{1}{(p+1)!}=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Do chuỗi $\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(p+1)^2}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{p!q!}{(p+q+2)!}\right)$ hội tụ, do đó (định lý hoán vị thứ tự trong $\mathbb{R}_+$), dãy kép $\left(\frac{p!q!}{(p+q+2)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng và:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{p!q!}{(p+q+2)!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi^2}{6}$.

3.4.19 *a)* Cho $q\in\mathbb{N}^*$ cố định.

Vì $\frac{1}{p^2-q^2}\underset{p\infty}{\sim}\frac{1}{p^2}>0$, nên chuỗi $\sum_{\substack{p\geq 1\\ p\neq q}}\frac{1}{p^2-q^2}$ hội tụ.

Bằng cách phân tích ra phân thức đơn giản, với mọi N thuộc $\mathbb{N}^*$ sao cho $N\geq 2q$, ta được:

$$\sum_{\substack{1\leq p\leq N\\ p\neq q}}\frac{1}{p^2-q^2}=\sum_{\substack{1\leq p\leq N\\ p\neq q}}\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}\right)=\frac{1}{2q}\left(\sum_{\substack{k=1-q\\ k\neq 0}}^{N-q}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{\ell=1+q\\ \ell\neq 2q}}^{N+q}\frac{1}{\ell}\right)=$$

$$=\frac{1}{2q}\left(-\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-q}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=1+q}^{2q-1}\frac{1}{\ell}-\sum_{\ell=2q+1}^{N+q}\frac{1}{\ell}\right)=\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{2q}-\sum_{k=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{k}\right).$$

Vì $$0\leq\sum_{k=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{k}\leq\frac{2q}{N-q+1}\underset{N\infty}{\longrightarrow}0,$$

nên ta suy ra: $\forall q\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{\substack{p\geq 1\\ p\neq q}}\frac{1}{p^2-q^2}=\frac{3}{4q^2}$.

b) • Theo *a)*, với mọi q thuộc $\mathbb{N}^*$, chuỗi $\sum_{p\geq 1}u_{p,q}$ hội tụ và có tổng bằng $\frac{3}{4q^2}$, do đó chuỗi $\sum_{q\geq 1}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}u_{p,q}\right)$ hội tụ và có tổng bằng $\sum_{q\geq 1}\frac{3}{4q^2}$ ($=\frac{\pi^2}{8}$, xem Tập 4, 6.4).

• Vì $\forall(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ u_{q,p}=-u_{p,q}$

nên ta có: $$-\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{p,q}=\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{q,p}=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}.$$

Nếu dãy kép $(u_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng, thì ta sẽ có: $\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{p,q}=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}$,

mâu thuẫn với kết quả trên đây.

3.4.20 Xét dãy kép $\left(\dfrac{1}{np^n}\right)_{n\geq 2, p\geq 2}$.

Với mọi p thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $p \geq 2$, dãy $\left(\dfrac{1}{np^n}\right)_{n\geq 2}$ khả tổng và:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{np^n} = -\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}\right)^n = -\frac{1}{p} - \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) > 0.$$

Theo 3.3.7, *1)*. Thí dụ, chuỗi $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$ hội tụ và:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \gamma$, do đó $\displaystyle\sum_{p\geq 2}\left(-\frac{1}{p} - \ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)$ hội tụ và:

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{p} - \ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \gamma.$$

Kết quả này chứng tỏ dãy kép $\left(\dfrac{1}{np^n}\right)_{n\geq 2, p\geq 2}$ khả tổng và có tổng bằng $1 - \gamma$, từ đó suy ra:

$$1 - \gamma = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{np^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}(\zeta(n) - 1).$$

3.4.21 Dãy kép $\left(\dfrac{(-1)^n}{np^n}\right)_{n\geq 2, p\geq 2}$ khả tổng (xem bài tập 3.4.20) và:

- $$\sum_{\substack{n\geq 2\\ p\geq 2}} \frac{(-1)^n}{np^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(\zeta(n) - 1)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} - 1 + \ln 2.$$

- $$\sum_{\substack{n\geq 2\\ p\geq 2}} \frac{(-1)^n}{np^n} = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np^n} = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right) = -1 + \ln 2 + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)$$

$$= -1 + \ln 2 + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+1} - \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)$$

$$= -1 + \ln 2 + 1 + (\gamma - 1) = -1 + \ln 2 + \gamma.$$

Ta kết luận: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma.$

3.4.22 Cho $(x, y) \in A^2$ thỏa mãn: $xy = yx$.

Phép chứng minh của Định lý ở 3.4.2, *4)*, cải biên cho các chuỗi với số hạng thuộc một đại số định chuẩn đủ, chứng tỏ rằng chuỗi–tích $\sum_{n\geq 0} w_n$ của những chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$ và $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}y^n$ cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là $e^x e^y$.

Nhưng: $\quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ w_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\frac{1}{(n-k)!}y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$

(vì $xy = yx$), từ đó suy ra: $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = e^{x+y}$.

3.4.23 *a)* $W_n = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \ldots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0) =$

$$= u_0(v_0 + v_1 + \ldots + v_n) + u_1(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) + \ldots + u_nv_0,$$

từ đó suy ra : $U_nV_n - W_n = u_1v_n + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots + u_n(v_1 + \ldots + v_n) = \sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}$.

b) Cho $\varepsilon > 0$ cố định.

Vì $\sum_n v_n$ hội tụ, nên tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ ,\ \left(N_1 \leq p < q \ \Rightarrow\ |V_{p,q}| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} v_k\right| \leq \varepsilon\right).$$

Do $(V_n)_n$ hội tụ, nên $(V_n)_n$ bị chặn: tồn tại $A \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |V_n| \leq A$.

Như vậy ta có: $\quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ ,\ \left(p < q \ \Rightarrow\ |V_{p,q}| \leq 2A\right)$.

Mặt khác, vì $\sum_n |u_n|$ hội tụ, nên tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ ,\ \left(N_2 \leq p < q \ \Rightarrow\ \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq \varepsilon\right).$$

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho: $\ n \geq N_1 + N_2$. Ta có:

$$|U_nV_n - W_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k||V_{n-k,n}|.$$

- Với mọi k thuộc $\{1, \ldots, N_2\}$, ta có $n - k \geq n - N_2 \geq N_1$, do đó:

$$\sum_{k=1}^{N_2} |u_k||V_{n-k,n}| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N_2} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k|.$$

- Mặt khác thì: $\displaystyle\sum_{k=N_2+1}^{n} |u_k||V_{n-k,n}| \leq 2A \sum_{k=N_2+1}^{n} |u_k| \leq 2A\varepsilon.$

Như thế chúng ta đã chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \ \Rightarrow \ |U_n V_n - W_n| \leq \varepsilon \left(2A + \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| \right) \right),$$

do đó $\qquad U_n V_n - W_n \underset{n\infty}{\rightarrow} 0.$

c) Do $U_n \underset{n\infty}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ và $V_n \underset{n\infty}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$, nên ta kết luận rằng $W_n \underset{n\infty}{\rightarrow} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right)$

◊ **Trả lời:** $\sum_n w_n$ hội tụ, và $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

3.4.24 *a)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n+1-k}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}$.

Chú ý rằng $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $k(n+1-k) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$, từ đó suy ra $|w_n| \geq \frac{2n}{n+1}$, và do c

$w_n \underset{n\infty}{\not\rightarrow} 0.$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)}$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Sau đó hãy chứng minh rằng chuỗi $\left(\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$ giảm, cuối cùng hãy áp dụng Đlđbcđ

(cùng một phương pháp như trong bài tập 3.3.9, *d)*).

3.4.25 Ta ký hiệu $P = \{n \in \mathbb{N}; \ u_n > 0\}$ và $N = \{n \in \mathbb{N}; \ u_n \leq 0\}$; như thế ta có $P \cap N = \varnothing$ và $P \cup N = \mathbb{N}$. Hơn nữa, do $\sum_{n \geq 0} u_n$ bán hội tụ, các tập hợp P và N đều vô hạn, do đó tồn tại hai song ánh $f: \mathbb{N} \to P$ và $g: \mathbb{N} \to N$ đồng biến ngặt.

Với $p \in P$, ký hiệu $v_p = u_{f(p)} > 0$, và với $n \in N$, $w_n = -u_{g(n)} \geq 0$,

Vì $\sum_{n \geq 0} u_n$ bán hội tụ, nên các chuỗi $\sum_{p \geq 0} v_p$ và $\sum_{n \geq 0} w_n$ phân kỳ (và có các số hạng ≥ 0), do đó các tổng riêng của chúng có giới hạn $+\infty$.

Ta ký hiệu p_1 là số nguyên ≥ 0 nhỏ nhất sao cho: $\sum_{p=0}^{p_1} v_p > S$,

và n_1 là số nguyên ≥ 0 nhỏ nhất sao cho: $\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n < S$, rồi p_2 là số nguyên $> p_1$ nhỏ nhất sao cho: $\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p > S$.

và n_2 là số nguyên $> n_1$ nhỏ nhất sao cho: $\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p - \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n > S$, v.v...

Theo cách đó ta xây dựng được hai chuỗi $(p_k)_{k\geq 1}$ và $(n_k)_{k\geq 1}$ những số nguyên ≥ 0, tăng nghiêm ngặt, sao cho khi ký hiệu $a_0 = \sum_{p=0}^{p_1} v_p$, $b_0 = \sum_{n=0}^{n_1} w_n$, $a_1 = \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p$, $b_1 = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n$, ...,

thì ta có với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + \sum_{p=p_k+1}^{p_{k+1}-1} v_p \leq S \\ a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k > S \end{cases}$$

và:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1} w_n \geq S \\ a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k < S \end{cases}$$

Khi đó với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\begin{cases} 0 < (a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k) - S \leq v_{p_k+1} \\ w_{n_k+1} \leq (a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k) - S < 0 \end{cases}$$

Do $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ nên $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, do đó $v_p \underset{p\infty}{\to} 0$ và $w_n \underset{n\infty}{\to} 0$, từ đó suy ra $v_{p_{k+1}} \underset{k\infty}{\to} 0$ và $w_{n_{k+1}} \underset{k\infty}{\to} 0$, và như thế:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k \underset{k\infty}{\to} S \\ a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k \underset{k\infty}{\to} S \end{cases}$$

Ta ký hiệu φ là hoán vị của $\mathbb{N}$ cho bởi:

$\varphi(0) = f(0), ..., \varphi(p_1) = f(p_1), \varphi(p_1+1) = g(0), ..., \varphi(p_1+n_1) = g(n_1), \varphi(p_1+n_1+1) = f(p_1+1), ...$,
tương ứng với việc "sắp xếp" $\sum_{n\geq 0} u_n$ thành $a_0 - b_0 + a_1 - b_1 + ...$

Vì các a_k và b_k đều ≥ 0, nên mọi tổng riêng $\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)}$ của chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ đều bao gồm giữa hai tổng kiểu $a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k$ và $a_0 - b_0 + ... + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k$, và do đó $\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \underset{N\infty}{\to} S$.

Cuối cùng thì $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ hội tụ và có tổng bằng S.

C3. 1 *1)* • Với mọi $a = (a_n)_{n\geq 1}$ thuộc $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$, chuỗi $\sum_{n\geq 1} a_n 3^{-n}$ hội tụ, do đó $\varphi(a)$ tồn tại, và hơn nữa $\varphi(a) \in [0; 1]$.

• Cho $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$.

Vì $a_1 \in \{0, 2\}$ nên ta có: $\varphi(a_1) \in C_1$.

Tương tự, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, vì $a_1, \ldots, a_n$ đều thuộc $\{0, 2\}$, nên ta có: $\varphi(a) \in C_n$.

Như vậy: $\varphi(a) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = C$.

• Đảo lại, cho $x \in C$.

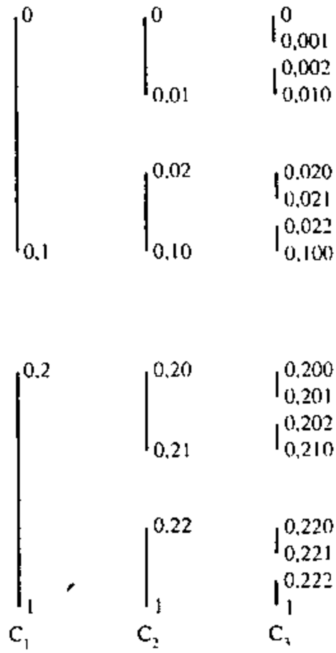
Trước hết ta chú ý rằng các đầu mút của các đoạn tạo nên $C_1, C_2, \ldots$ là những số tam phân nào đó, tức là có dạng $\alpha 3^{-n}$, $(\alpha, n) \in \mathbb{N}^2$.

1) Nếu x không phải là số tam phân, thì x có một khai triển tam phân duy nhất (tương tự như dạng thập phân trong hệ cơ số 3, xem 3.2.4, *2)*),

$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$, trong đó $a_n \in \{0, 1, 2\}$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, và trong đó $(a_n)_{n\geq 1}$ không dừng cố định ở 0 hay 2.

Do $x \in C_1$ nên ta có $a_1 \neq 1$; sau đó do $x \in C_2$ nên ta có $a_2 \neq 1, \ldots$

Ta được: $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \{0, 2\}$.



2) Nếu x là số tam phân thì tồn tại $(\alpha, n) \in \mathbb{N}^2$ duy nhất thỏa mãn: $x = \alpha 3^{-n}$, và $3 \nmid \alpha$.

Vì $x \in C_n$ nên khi đó x là một đầu mút của C_n.

Nếu x là một mút trái thì x có một dạng khai triển tam phân $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & a_k \in \{0,2\} \\ \forall k \geq n+1, & a_k = 2 \end{cases}.$$

2) a) • Cho $x \in C$, $(a_n)_{n\geq 1} = \varphi^{-1}(x) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$.

Khi đó $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2} 2^{-n}$ hội tụ, và do $\frac{a_n}{2} \in \{0,1\}$ với mọi n *thuộc* $\mathbb{N}^*$, nên ta có:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} \in [0;1].$$

Kết quả này chứng tỏ rằng với mọi x thuộc C, $f(x)$ tồn tại và $f(x) \in [0;1]$.

- Cho $y \in [0;1]$. Tồn tại $(b_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ sao cho $y = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n}$ (khai triển nhị phân vô hạn của y), và khi ký hiệu $x = \sum_{n=1}^{+\infty}(2b_n)3^{-n}$, ta có $x \in C$ và:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(2b_n)2^{-n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n} = y.$$

Như vậy f là một toàn ánh từ C lên $[0;1]$.

b) Nếu C đếm được, thì vì $f: C \to [0;1]$ là toàn ánh nên $[0;1]$ cũng sẽ đếm được. Nhưng vì $\mathbb{R}$ không đếm được và do tồn tại một song ánh $]0;1[\to \mathbb{R}$, nên $[0;1]$ không đếm được.

Ta kết luận: C không đếm được.

3) 1) • Vì $C \subset [0;1]$ nên ta có: $C + C = \{x + y;\ (x, y) \in C \times C\} \subset [0; 2]$.

- Đảo lại, cho $u \in [0; 2]$. Vì $\frac{u}{2} \in [0; 1]$, nên theo sự tồn tại của dạng khai triển tam phân của một phần tử thuộc $[0; 1]$, ta suy ra sự tồn tại của $(u_n)_{n\geq 1} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}^*}$ sao cho:

$$\frac{u}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 3^{-n}.$$

Xét $x = \sum_{n\geq 1} x_n 3^{-n}$ và $y = \sum_{n\geq 1} y_n 3^{-n}$, trong đó: $\begin{cases} x_n = y_n = 0 & \text{nếu } u_n = 0 \\ x_n = 2 \text{ và } y_n = 0 & \text{nếu } u_n = 1 \\ x_n = 2 \text{ và } y_n = 2 & \text{nếu } u_n = 2 \end{cases}$.

Khi đó ta có: $(x, y) \in C \times C$ và $x + y = 2\left(\frac{u}{2}\right) = u$.

Kết quả này chứng tỏ: $C + C = [0; 2]$.

2) Vì $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ đều thuộc C nên:

$$C + C + C \supset C + C + \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\} = [0; 2] + \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$$
$$= [0; 2] \cup \left[\frac{1}{3}; 2+\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 2+\frac{2}{3}\right] \cup [1; 3] = [0; 3].$$

3) Ta chứng minh bằng phương pháp truy hồi theo p rằng với mọi $p \geq 3$ thì:

$$\underbrace{C + ... + C}_{p \text{ số hạng}} = [0; p].$$

Nếu $p \geq 3$ và $\underbrace{C + ... + C}_{p-1 \text{ số hạng}} = [0; p\text{-}1]$ và $\underbrace{C + ... + C}_{p \text{ số hạng}} = [0; p]$ thì:

$$\underbrace{C + ... + C}_{p+1 \text{ số hạng}} = \underbrace{C + ... + C}_{p-1 \text{ số hạng}} + (C + C) = [0; p-1] + [0; 2] = [0; p+1].$$

C3. 2 *1)* Ta ký hiệu $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, trong đó $n \geq 2$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$.

Cho $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Vì $\alpha \notin \mathbb{Q}$, nên ta có: $\alpha \neq \frac{p}{q}$, và ta có thể áp dụng định lý số gia hữu hạn cho P giữa α và $\frac{p}{q}$; tồn tại $\xi \in \left|\alpha; \frac{p}{q}\right|$ (khoảng mở nối α và $\frac{p}{q}$) sao cho:

$$P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)P'(\xi).$$

Nếu $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$, ta có thể lấy $c = 1$, vì lẽ khi đó ta có: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1 \geq \frac{1}{q^n}$.

Vậy ta giả thiết $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq 1$.

Do P' liên tục trên đoạn $[-|\alpha|-1; |\alpha|+1]$, nên tồn tại $M \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall u \in [-|\alpha|-1; |\alpha|+1], \qquad |P'(u)| < M.$$

Hơn nữa: $\quad |\xi| = |\alpha + (\xi - \alpha)| \leq |\alpha| + |\xi - \alpha| \leq |\alpha| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha| + 1,$

do đó $\xi \in [-|\alpha|-1; |\alpha|+1]$, từ đây suy ra $P'(\xi) < M$.

Khi đó ta có: $\quad \left|-P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |P'(\xi)| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| M,$

từ đây suy ra: $\quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{M}\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{1}{Mq^n}\left|q^n P\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$

Do $q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_n p^n \neq 0$, và vì $q^n P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$, nên ta có: $\left|q^n P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1$, từ đó có: $\quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}$.

Cuối cùng thì $c = \text{Min}\left(1, \frac{1}{m}\right)$ thích hợp (không phụ thuộc p và q).

2) Vì $(u_n)_{n\geq 1}$ bị chặn, nên tồn tại $C \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq C$.

- Do: $\forall n \geq 1, \left|u_n 10^{-n!}\right| \leq C.10^{-n}$, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n 10^{-n!}$ hội tụ. Ta ký hiệu;

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 10^{-n!}.$$

- Nếu $L \in \mathbb{Q}$ thì khi đó khai triển thập phân của nó sẽ tuần hoàn, và do đó (vì $n!$ là một bội của n, với $n \geq 1$), dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ sẽ dừng tại 0, trường hợp này loại.

Kết quả trên chứng tỏ: $\quad L \notin \mathbb{Q}$.

- Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $p_n = 10^{n!}\sum_{k=1}^{n} u_k 10^{-k!}$ và $q_n = 10^{n!}$.

Từ đó suy ra với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\left|L - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k 10^{-k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} C.10^{-k!} = C.10^{-(n+1)!}\sum_{p=0}^{+\infty} 10^{-(p+n+1)!+(n+1)!}$$

$$\leq C.10^{-(n+1)!}\sum_{q=0}^{+\infty} 10^{-q} = \frac{10C}{9}10^{-(n+1)!} = \frac{10C}{9}\left(\frac{1}{q_n}\right)^{n+1} \leq \frac{10C}{9q_n}\frac{1}{q_n^n}.$$

Nếu L là số đại số, thì theo *1)*, sẽ tồn tại $c \in \mathbb{R}_+^*$ và $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ sao cho:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left| L - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n},$$

mâu thuẫn với kết quả trên đây.
Cuối cùng thì L là số siêu việt.

C3. 3 *1)* Áp dụng nguyên lý thêm vào-loại trừ: n^2 là tổng số cặp; ta loại bỏ đi những cặp (u, v) sao cho $p_1 \mid u$ và $p_1 \mid v$ cho p_1 cặp đầu tiên; sau đó ta thêm vào những cặp mà $p_1 p_2 \mid u$ và $p_1 p_2 \mid v$, v.v. ...

2) a) Sắp xếp lại chuỗi trên đây (trong đó thực ra thì các số hạng đều bằng không kể từ một hạng nhất định).

b) $$\left| \frac{q_n}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu(k)}{n^2} \left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)\right)^2 - \frac{\mu(k)}{k^2} \right) \right| = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left(\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)\right)^2 \right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)\right)^2 \right).$$

Chú ý rằng: $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x^2 - \left(\mathrm{E}(x)\right)^2 \leq x + \mathrm{E}(x) \leq 2x,$ từ đó suy ra:

$$\left| \frac{q_n}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} \right| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2 \ln n}{n} \underset{n\infty}{\to} 0.$$

Mặt khác: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} \underset{n\infty}{\to} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$, đây là một chuỗi hội tụ vì $|\mu(k)| \leq 1$.

3) a) Các họ được sử dụng đều khả tổng và:

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{b_\ell}{\ell^\alpha} \right) = \sum_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_k b_\ell}{(k\ell)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d \mid n} \frac{a_d b_{\frac{n}{d}}}{n^\alpha}.$$

b) Với $n \geq 2$, giả sử $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ là dạng khai triển nguyên tố của n ($r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ là những số nguyên tố đôi một khác nhau, $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}^*$); ta có:

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{I \subset \{1,\dots,r\}} \mu\left(\prod_{i \in I} p_i \right) = \sum_{I \subset \{1,\dots,r\}} (-1)^{\mathrm{card}(I)} = \left(1 + (-1)\right)^r = 0.$$

c) $$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{d \mid n} \mu(d) 1 \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta_{1,n}}{n^2} = 1.$$

4) $$\frac{q_n}{n^2} \underset{n\infty}{\to} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2}} = \frac{6}{\pi^2}.$$

C3. 4 *1) a)* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ và $P_n \underset{n\infty}{\to} l \neq 0$, do đó $z_n \underset{n\infty}{\to} 1$.

b) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, xét $z_n = e^{\frac{1}{n}}$. Ta có: $z_n \underset{n\infty}{\to} 1$ và $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k = e^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \underset{n\infty}{\to} +\infty$ (vì chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ có các số hạng dương và phân kỳ).

◊ **Trả lời:** Đảo của *a)* sai.

2) Ta có: $\forall n \in \mathbb{N},\quad \ln\left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln x_k$.

Dãy $\left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\geq 0}$ có giới hạn khác không khi và chỉ khi dãy $\left(\ln\left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)\right)_{n\geq 0}$ hội tụ, tức khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n\geq 0}\ln x_n$ hội tụ. Hơn nữa, trong trường hợp chuỗi hội tụ thì:

$$\ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln x_n .$$

3) a) Theo *2)*, $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{n\geq 0}\ln(1+u_n)$ hội tụ.

- Nếu $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ hội tụ, thì khi đó $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$ (xem *1) a)*), $u_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(1+u_n) > 0$, và do đó $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ.

- Đảo lại, nếu $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ, thì khi đó $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$, $\ln(1+u_n) \underset{n\infty}{\sim} u_n > 0$, $\sum_{n\geq 0}\ln(1+u_n)$ hội tụ và do đó $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ hội tụ.

b) α) $\frac{1}{n^\alpha} > 0$ và $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

◊ **Trả lời:** $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

β) Theo *2*, tích vô hạn $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ cùng loại với chuỗi $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Vì $1-\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{n^\alpha} < 0$, nên $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ cùng loại với $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha}$.

◊ **Trả lời:** $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

γ) Theo *3) a)*, $\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)$ cùng loại với $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$.

Đến đây hãy áp dụng kết quả khảo sát các chuỗi Bertrandt (xem 3.2.3, Mệnh đề 2).

◊ **Trả lời:** $\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)$ phân kỳ.

4) a) Với $n\in\mathbb{N}$, ta ký hiệu $P_n=\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ và $Q_n=\prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|)$. Ta sẽ chứng minh rằng $(P_n)_{n\geq 0}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$.

Cho $\varepsilon>0$. Vì $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ hội tụ, nên tích vô hạn $\prod_{n\geq 0}(1+|u_n|)$ hội tụ (xem *3) a)*), và do đó dãy $(Q_n)_{n\geq 0}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$ (thậm chí trong $\mathbb{R}$). Khi đó tồn tại $N\in\mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall p\in\in\mathbb{N},\forall r\in\in\mathbb{N}^*,\quad (p\geq N\ \Rightarrow |Q_{p+r}-Q_p|\leq\varepsilon)$$

Cho $(p,r)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$; ta có:

$$|Q_{p+r}-Q_p|=|Q_p|\left(\prod_{k=p+1}^{p+r}(1+|u_k|)-1\right).$$

Một mặt thì: $|P_p|=\prod_{k=0}^{p}|1+u_k|\leq\prod_{k=0}^{p}(1+|u_k|)=Q_p$.

Mặt khác, khi khai triển $\prod_{k=p+1}^{p+r}(1+u_k)$ và giản ước hạng tử bằng 1, ta có:

$$\left|\prod_{k=p+1}^{p+r}(1+u_k)-1\right|\leq\prod_{k=p+1}^{p+r}(1+|u_k|)-1.$$

Như thế ta suy ra rằng: $\forall p\in\mathbb{N},\forall r\in\mathbb{N}^*,\quad \left(p\geq N\Rightarrow|P_{p+r}-P_p|\leq|Q_{p+r}-Q_p|\leq\varepsilon\right)$.

Hệ thức này chứng tỏ $(P_n)_{n\geq 0}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$, do đó hội tụ; cuối cũng thì tích vô hạn $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ hội tụ.

b) Với $n\in\mathbb{N}$, ta ký hiệu $u_n=\frac{|a_n|(a_n-z)}{|a_n||1-\overline{a_n}z|}-1$; ta có ngay: $|u_n|=(1-|a_n|)\frac{|a_n+|a_n|z|}{|a_n||1-\overline{a}_nz|}-1$.

Một mặt thì: $\quad |a_n+|a_n|z|\leq|a_n|+|a_n||z|\leq 2$;

mặt khác thì: $\quad |a_n||1-\overline{a}_nz|\geq|a_n||1-|a_n||z||\underset{n\infty}{\to}1-|z|>0$.

Kết quả này chứng tỏ dãy $\left(\frac{|a_n+|a_n|z|}{|a_n||1-a_nz|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. Do $\sum_{n\geq 0}(1-|a_n|)$ hội tụ, nên ta suy ra rằng $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ hội tụ. Đặc biệt, tồn tại $N\in\mathbb{N}$ sao cho: $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|<1$.

Theo *a)*, ta kết luận rằng tích vô hạn $\prod_{n\geq N}\frac{|a_n|(a_n - z)}{a_n(1-\overline{a_n}z)}$ hội tụ.

5) a) • Theo *2)*, $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ cùng loại với $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$. Một phép khai triển tiệm cận cho ta:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

và chứng tỏ rằng $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$ phân kỳ.

• $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo Đldbcđd (xem 3.3.5, Định lý).

b) • Theo *2)*, tích vô hạn $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ cùng loại với chuỗi $\sum_{n\geq 1}\ln(1+u_n)$. Ký hiệu $v_n = \ln(1+u_n)$, ta sẽ nghiên cứu loại của $\prod_{n\geq 1}v_n$ bằng cách nhóm các hạng tử kế tiếp nhau từng đôi một. Ta có ngay: $v_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

Và: $v_{2p} + v_{2p+1} = \ln((1+u_{2p})(1+u_{2p+1})) = \ln(1+\alpha_p)$, trong đó:

$$\alpha_p = u_{2p} + u_{2p+1} + u_{2p}u_{2p+1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p+1}} - \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{p\sqrt{p+1}} - \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right).$$

Ta suy ra rằng $\prod_{p\geq 1}\alpha_p$ hội tụ, sau đó suy ra $\sum_{p\geq 1}(v_{2p}+v_{2p+1})$ hội tụ, và cuối cùng thì $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ hội tụ.

• Tương tự, ta chứng minh bằng cách nhóm hai hạng tử kế tiếp nhau, rằng $\sum_{n\geq 1}u_n$ phân kỳ.

6) Đây là những thí dụ về các tích khử chéo được, là những đối tượng tương tự theo tính nhân của các chuỗi khử chéo được (xem 3.3.8, *1) b)*). Hãy tính một tích riêng $\prod_{n=2}^{N}$ (hoặc $\prod_{n=1}^{N}$), giản ước, sau đó cho N dần đến $+\infty$.

Chẳng hạn: $\prod_{n=2}^{N}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \left(\prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)}{(n+1)}\right)\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{(n^2+n+1)}{(n^2-n+1)}\right)$

$$= \frac{1.2}{N(N+1)}\frac{N^2+N+1}{2^2-2+1},$$

chú ý rằng: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2+n+1 = (n+1)^2-(n+1)+1$.

◊ **Trả lời:** *a)* $\frac{2}{3}$ *b)* $\sqrt{2}$.

C3. 5 *1) a) α)* Theo bài tập 1.1.8, *b)*, ta có:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N}|u_n||v_n| \le \left(\sum_{n=0}^{N}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{N}|v_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|u\|_p\|v\|_q.$$

Bổ đề hàm trội đối với các chuỗi có hạng tử ≥ 0 cho phép ta suy ra rằng $\sum_{n\ge0}|u_nv_n|$ hội tụ và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n||v_n| \le \|u\|_p\|v\|_q.$$

Theo 3.3.2, ta kết luận rằng $\sum_{n\ge0}\overline{u}_nv_n$ hội tụ tuyệt đối và:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{u}_nv_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty}|u_nv_n| \le \|u\|_p\|v\|_q.$$

β) Theo bài tập 1.1.8, *c)*, ta có:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N}|u_n+v_n|^p \le \left(\left(\sum_{n=0}^{N}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{N}|v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \le \left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)^p.$$

Bổ đề hàm trội đối với các chuỗi có hạng tử ≥ 0 cho phép ta suy ra rằng $\sum_{n=0}^{N}|u_n+v_n|^p$ hội tụ

(do đó $u+v \in \ell^p$) và: $\|u+v\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n+v_n|^p \le \left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)^p$.

Các tính chất $\ell^p \ne \varnothing$ và ($\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u \in \ell^p, \quad \lambda u \in \ell^p$) có thể chứng minh dễ dàng.

b) Các điều kiện ($\|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$) và $\|\lambda u\|_p = |\lambda|\|u\|_p$ có thể chứng minh dễ dàng; bất đẳng thức tam giác thì ta đã thấy ở *a) β)*.

2) • Nếu $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ và $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, thì khi đó $\sum_{n\ge0}|u_n|$ và $\sum_{n\ge0}|v_n|$ hội tụ, do đó

$\sum_{n\ge0}|u_n+v_n|$ hội tụ (từ đó suy ra $u+v \in \ell^1$) và:

$$\|u+v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n+v_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty}|v_n| = \|u\|_1+\|v\|_1.$$

- Nếu $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ và $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, thì $u + v \in \ell^\infty$ và:

$$\|u+v\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Sup}}|u_n + v_n| \le \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Sup}}|u_n| + \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Sup}}|v_n| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty .$$

Các điều kiện khác định nghĩa chuẩn có thể kiểm chứng dễ dàng.

3) a) Cho $p_1 \in [1; +\infty[$, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p_1}$. Vì $\sum_{n\ge 0}|u_n|^{p_1}$ hội tụ, nên $u_n \underset{n\infty}{\to} 0$.

Đặc biệt, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn, tức là $u \in \ell^\infty$. Như thế ta đã có $\ell^{p_1} \subset \ell^\infty$.
Sau nữa, nếu $p_2 \ne \infty$ thì:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n|^{p_2} = |u_n|^{p_1}\,|u_n|^{p_2-p_1} \le |u_n|^{p_1}\,\left(\|u\|_\infty\right)^{p_2-p_1},$$

do đó $u \in \ell^{p_2}$, và hơn nữa: $\|u\|_{p_2} \le \|u\|_{p_1}\,\left(\|u\|_\infty\right)^{p_2-p_1}$.

b) • Theo *a)* $\displaystyle\bigcup_{p\in[1;+\infty[} \ell^p \subset \ell^\infty$.

• Dãy dừng (1) thuộc ℓ^∞ và không thuộc ℓ^p nào ($p \in [1; +\infty[$),vì hạng tử tổng quát của dãy đó không dần đến không.

• Ta còn có được cả $\displaystyle\bigcup_{p\in[1;+\infty[} \ell^p \ne c_0$ (trong đó c_0 chỉ tập hợp các dãy phức hội tụ đến 0), khi xét $\left(\dfrac{1}{\ln(n+1)+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

◊ **Trả lời:** Không.

c) • Theo *a)* ta đã có: $\forall p \in [1; +\infty[, \quad u \in \ell^p$.

• Vì $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \le \left(\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}|u_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_p$, nên ta suy ra: $\|u\|_\infty \le \|u\|_p$.

• Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $u \in \ell^1$ nên $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|u_n| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Khi đó ta có:

$$\left(\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|u_n| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Theo bài tập 1.1.8, *d)*:

$$\left(\sum_{n=0}^{n_0}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{p\to\infty}{\to} \underset{0\le n\le n_0}{\mathrm{Max}}|u_n| \le \|u\|_\infty .$$

Vậy tồn tại $p_0 \in [1; +\infty[$ sao cho: $\forall p \in [1; +\infty[$, $\left(p \ge p_0 \Rightarrow \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|u\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Khi ký hiệu v, w là các chuỗi xác định bởi:

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{nếu } n \le n_0 \\ 0 & \text{nếu } n \ge n_0+1 \end{cases} \qquad w_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \le n_0 \\ u_n & \text{nếu } n \ge n_0+1 \end{cases},$$

thì rõ ràng là: $v \in \ell^1$, $w \in \ell^1$, $u = v + w$. Từ đó, với mọi p thuộc $[1; +\infty[$ sao cho $p \ge p_0$, ta có:

$$\|u\|_p = \|v+w\|_p \le \|v\|_p + \|w\|_p \le \|u\|_\infty + \varepsilon.$$

Như thế ta đã chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in [1; +\infty[, \forall p \in [1; +\infty[, \ (p \ge p_0 \Rightarrow \|u\|_\infty \le \|u\|_p \le \|u\|_\infty + \varepsilon),$$

và cuối cùng thì: $$\|u\|_p \underset{p\to\infty}{\to} \|u\|_\infty.$$

4) Trường hợp $p = +\infty$ đã được xét (xem C2. 1, *1)*), vì $\ell^\infty = B(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.
Vậy ta giả thiết $p \in [1; +\infty[$.

Cho $\left(U^m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong ℓ^p; với mỗi m thuộc $\mathbb{N}$, ta ký hiệu $\left(u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}} = U^m$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $\left(U^m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong ℓ^p, nên tồn tại $m_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} r \ge m_0 \\ s \ge m_0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^r - u_n^s\right|^p = \left\|U^r - U^s\right\|_p^p \le \varepsilon\right).$$

Cho $n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} r \ge m_0 \\ s \ge m_0 \end{cases} \Rightarrow \left|u_n^r - u_n^s\right|^p = \left\|U^r - U^s\right\|_p^p \le \varepsilon\right),$$

vậy $\left(u_n^m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$. Vì $\mathbb{C}$ đủ nên tồn tại $y_n \in \mathbb{C}$, sao cho: $u_n^m \underset{m\infty}{\to} y_n$.
Ta có với mọi N thuộc $\mathbb{N}$:

$$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} r \ge m_0 \\ s \ge m_0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} \left|u_n^r - u_n^s\right|^p = \left\|U^r - U^s\right\|_p^p \le \varepsilon\right).$$

Cố định r và cho s dần đến vô cùng, ta suy ra:

$$\forall r \in \mathbb{N}, \qquad \left(r \ge m_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} \left|u_n^r - y_n\right|^p \le \varepsilon\right).$$

Đặc biệt, theo bổ đề hàm trội đối với các chuỗi có số hạng ≥ 0, chuỗi $\sum_{n\ge 0} \left|u_n^{m_0+1} - y_n\right|^p$ hội tụ,

và do đó với ký hiệu $y = \left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ta có: $U^{m_0+1} - y \in \ell^p$.

Do ℓ^p là một kgvc của $\mathbb{N}$, nên ta kết luận $y \in \ell^p$.
Hơn nữa ta còn được:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \ \forall m \in \mathbb{N}, \quad \left(m > m_0 \Rightarrow \left\|U^m - y\right\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^m - y_n\right|^p \le \varepsilon\right),$$

điều này chứng tỏ rằng $U^m \underset{m\infty}{\to} y$ trong ℓ^p.

Cuối cùng, ℓ^p đủ.

C3. 6 *1) a)* • Chú ý rằng: $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad \alpha\beta\le\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

Ta suy ra tính hội tụ của $\sum_{n\ge0}|u_n||v_n|$ từ tính hội tụ của $\sum_{n\ge0}|u_n|^2$ và $\sum_{n\ge0}|v_n|^2$.

• Trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz : $\forall N\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{n=0}^{N}\overline{u_n}v_n\right|^2\le\left(\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2\right)\left(\sum_{n=0}^{N}|v_n|^2\right)$,

cho N dẫn tới vô cùng.

b) Việc kiểm chứng dễ dàng.

2) Xem C3. 5, *4)*.

3) Rõ ràng là: $\forall k\in\mathbb{N},\ e_k\in\ell^2$.

• $\forall n\in\mathbb{N},\ \langle e_n,u\rangle=\sum_{p=0}^{+\infty}\overline{\delta_{np}}u_p=u_n$

• $\left\|u-\sum_{n=0}^{N}\langle e_n,u\rangle e_n\right\|_2^2=\|(0,\dots,0,u_{N+1},u_{N+2},\dots)\|_2^2=\sum_{n=N+1}^{+\infty}|u_n|^2\underset{N\infty}{\to}0$,

do đó $\sum_{n\ge0}\langle e_n,u\rangle e_n$ hội tụ đến u trong $\left(\ell^2,\|\cdot\|_2\right)$.

4) a) • Trước tiên, với mọi $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc ℓ^2 ta có: $\left(\frac{u_n}{n+1}\right)_n\in\ell^2$, vì $\left|\frac{u_n}{n+1}\right|^2\le|u_n|^2$.

• Hiển nhiên f tuyến tính.

• $\forall u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2,\quad \|f(u)\|_2^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{u_n}{n+1}\right|^2\le\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2=\|u\|_2^2$.

Cuối cùng thì: $f\in\mathcal{LC}(\ell^2)$.

b) Với mọi $u=(u_n)_n,\ v=(v_n)_n$ thuộc ℓ^2, ta có:

$$\langle f(u),v\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{\frac{u_n}{n+1}}v_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{u_n}\frac{v_n}{n+1}=\langle u,f(v)\rangle,$$

chứng tỏ rằng f có phụ hợp và $f^*=f$ (ta nói rằng f tự phụ hợp).

c) • $\mathrm{Ker}(f)=\{(u_n)_n\in\ell^2;\ \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_n}{n+1}\}=\{0\}$, vậy $(\mathrm{Ker}(f))^\perp=\{0\}^\perp=\ell^2$.

• Xét $\varepsilon=\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Rõ ràng là $\varepsilon\in\ell^2$. Nếu $\varepsilon\in\mathrm{Im}(f)$, thì sẽ tồn tại $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$

sao cho $\varepsilon=f(u)=\left(\frac{u_n}{n+1}\right)_n$, từ đó suy ra ($\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=1$). Nhưng khi đó thì $\sum_{n\ge0}|u_n|^2$ sẽ phân kỳ, mâu thuẫn.

Điều đó chứng tỏ: $\varepsilon\notin\mathrm{Im}(f)$, và cuối cùng thì $\mathrm{Im}(f)\ne(\mathrm{Ker}(f))^\perp$.

5) a) α) Cho $u=(u_n)_n\in\ell^2$.

- Chuỗi số $\sum_{n\geq 0}\left|\frac{u_n}{n+1}\right|$ hội tụ, vì lẽ $u=(u_n)_n\in \ell^2$ và $\varepsilon=\left(\frac{1}{n+1}\right)_n\in \ell^2$.

- Chuỗi $\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n+1}e_n$ hội tụ tuyệt đối, vì $\left(\forall n\in\mathbb{N},\ \left\|\frac{u_n}{n+1}e_n\right\|_2=\frac{|u_n|}{n+1}\right)$, do đó hội tụ

trong ℓ^2 vì ℓ^2 đủ (xem *3)* và 3.3.1, Định lý).

Như vậy chuỗi $\sum_{n\geq 0}u_n\frac{e_0+e_n}{n+1}$ hội tụ trong ℓ^2, và do đó $g(u)$ tồn tại.

β) Hiển nhiên là g tuyến tính.

γ) Với mọi $u=(u_n)_n$ thuộc ℓ^2, ta có:

$$\|g(u)\|_2\leq 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{u_n}{n+1}\right|\leq 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|_2,$$

chứng tỏ g tuyến tính.

δ) Ta chứng minh rằng g có phụ hợp g^* và tính g^*.

- Giả sử g^* tồn tại. Khu đó với mọi u thuộc ℓ^2 ta có:

$$<e_n, g^*(u)>\ =\ <g(e_n),u>=<\frac{1}{n+1}(e_0+e_n),u>,$$

từ đó suy ra:

$$g^*(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}<e_n,g^*(u)>e_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}<e_0+e_n,u>e_n=<e_0,u>\varepsilon+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{<e_n,u>}{n+1}e_n.$$

- Đảo lại, hãy chứng minh rằng ánh xạ $h:\ell^2\to\ell^2$ xác định bởi:

$$\forall u\in\ell^2,\quad h(u)=<e_0,u>\varepsilon+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{<e_n,u>}{n+1}e_n$$

được định nghĩa hợp lệ, tuyến tính liên tục và là phụ hợp của g.

b) α) Hiển nhiên, vì $E=g(\ell^2)$ và $g\in\mathcal{LC}(\ell^2)$,

β) Giả sử f có phụ hợp f^*.

- Ta có: $\forall(u,v)\in E^2,\quad <u,f^*(v)>\ =<f(u),v>=<g(u),v>=<u,g^*(v)>,$

từ đó suy ra: $\forall v\in E,\quad f^*(v)=g^*(v).$

- Do $e_0=\frac{1}{2}g(e_0)\in E$, nên ta có thể tác động f^* cho e_0:

$$f^*(e_0)=\varepsilon+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{<e_n,e_0>}{n+1}e_n=\varepsilon+e_0.$$

Vì $e_0\in E$, nên ta sẽ thu được mâu thuẫn bằng cách chứng tỏ rằng $\varepsilon\notin E$.

Giả thiết $\varepsilon\in E$; khi đó tồn tại $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ sao cho $\varepsilon=g(x)$, từ đó suy ra:

$$\varepsilon=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\frac{e_0+e_n}{n+1}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{n+1}\right)e_0+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{n+1}e_n=\left(x_0+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{n+1}\right)e_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{n+1}e_n.$$

Lúc này ta suy ra được (xem *3)*):

$$\begin{cases} x_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1} = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{cases},$$

sau đó là $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ x_n = 1)$, mâu thuẫn với sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} |x_n|^2$,

Như vậy $\varepsilon \notin E$, mâu thuẫn. Cuối cùng, f không có phụ hợp.

C3. 7 *1)* $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = u_{p+1}v_{p+1} + \sum_{k=p+2}^{q} u_k(\sigma_{p,k} - \sigma_{p,k-1})$

$$= u_{p+1}v_{p+1} + \sum_{k=p+2}^{q} u_k\sigma_{p,k} - \sum_{k=p+1}^{q-1} u_{k+1}\sigma_{p,k}$$

$$= u_{p+1}v_{p+1} + u_q\sigma_{p,q} - u_{p+2}\sigma_{p,p+1} + \sum_{k=p+2}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k}$$

$$= u_q\sigma_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k},$$

khi chú ý rằng $v_{p+1} = \sigma_{p,p+1}$.

Chú ý sự tương tự của điểm *1)* này với phép tích phân từng phần.

2) Ta chứng minh rằng $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ thỏa mãn điều kiện cần và đủ Cauchy để cho một chuỗi với các hạng tử thuộc một kgvđc đủ hội tụ (xem 3.3.1, Định lý). Ta lấy lại các ký hiệu ở *1)*.
Cho $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $q \geq p + 1$. Ta có:

- $\|u_q\sigma_{p,q}\| = u_q\|\sigma_{p,q}\| \leq u_q M.$
- $\displaystyle\left\|\sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k}\right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\|\sigma_{p,k}\| \leq M \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})$

$$= (u_{p+1} - u_q)M.$$

Theo *1)*, ta suy ra rằng: $\displaystyle\left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k\right\| \leq u_{p+1}M.$

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \Rightarrow u_n \leq \frac{\varepsilon}{M+1}\right).$$

Khi đó ta có: $\displaystyle\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(N \leq p+1 \leq q \quad \Rightarrow \quad \left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k\right\| \leq \varepsilon \right).$

Theo 3.3.1, Định lý, ta kết luận được rằng $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ hội tụ trong E.

3) a) Hãy áp dụng định lý Abel cho $u_0 = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ và $v_n = e^{int}$, lưu ý rằng:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right| \le \left|\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right|.$$

b) 1) Thành lập một khai triển tiệm cận:

$$\frac{(-1)^n\cos n}{n+(-1)^n\sin n} = \frac{(-1)^n\cos n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\cos(\pi+1)n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Theo *a)*, chuỗi $\sum_{n\ge 1}\dfrac{\cos(\pi+1)n}{n}$ hội tụ.

◊ **Trả lời: Hội tụ.**

2) $$\frac{\sin n}{n-\sqrt{n}\sin n} = \frac{\sin n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

◊ **Trả lời: Hội tụ.**

3) $$\left(e^{\frac{\sin(n\sqrt{2})}{\sqrt{n}}}-1\right)\ln\left(1+\frac{\sin(en)}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{\sin(n\sqrt{2})}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{\sin(en)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{\sin(n\sqrt{2})\sin(en)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{\cos(e-\sqrt{2})n}{2n} - \frac{\cos(e+\sqrt{2})n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Hiển nhiên là $e - \sqrt{2}$ và $e + \sqrt{2}$, vốn thuộc $]0; 2\pi[$, không phải là những bội của 2π. Khi đó ta có thể áp dụng *a)*.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

4) Tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(2p + 1)\alpha > 1$.

Do $\dfrac{\sin n}{n^{\alpha}} \underset{n\infty}{\to} 0$, nên ta thu được một khai triển tiệm cận:

$$\sin\left(\frac{\sin n}{n^{\alpha}}\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\sin n}{n^{\alpha}}\right)^{2k+1} + O\left(\frac{1}{n^{(2p+1)\alpha}}\right)$$

- Cho $k \in \{0, \dots, p - 1\}$. Bằng cách tuyến tính hóa $x \mapsto (\sin x)^{2k+1}$, ta thấy tồn tại $\left(A_{k,0},\dots,A_{k,k}\right) \in \mathbb{R}^{k+1}$ thỏa mãn:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (\sin x)^{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} A_{k,i}\sin(2i+1)x.$$

Với $k \in \{0, \dots, p - 1\}$ và $i \in \{0, \dots, k\}$, chuỗi $\sum_{n\ge 1}\dfrac{\sin(2i+1)n}{n^{(2k+1)\alpha}}$ hội tụ theo *a)*.

- Vì $(2p+1)\alpha > 1$, nên chuỗi $\sum_{n\ge 1} O\left(\dfrac{1}{n^{(2p+1)\alpha}}\right)$ hội tụ tuyệt đối.

◊ **Trả lời:** Hội tụ.

5) Tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(p + 1)\alpha > 1$.

Một phép khai triển tiệm cận cho ta:

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(-1)^n \cos^k n}{n^{(k+1)\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{(p+1)\alpha}}\right).$$

• Cho $k \in \{0, \ldots, p-1\}$. Bằng cách tuyến tính hóa $x \mapsto \cos^k x$, ta thấy tồn tại $\left(A_{k,0}, \ldots, A_{k,k}\right) \in \mathbb{R}^{k+1}$ thỏa mãn:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^k x = \sum_{i=0}^{k} A_{k,i} \cos ix .$$

Khi đó ta có: $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(-1)^n \cos^k n}{n^{(k+1)\alpha}} = \sum_{i=0}^{k} A_{k,i} \frac{\cos(i+\pi)n}{n^{(k+1)\alpha}} .$$

Với $k \in \{0, \ldots, p\}$ và $i \in \{0, \ldots, k\}$, chuỗi $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(i+\pi)n}{n^{(k+1)\alpha}}$ hội tụ theo *a)*, vì $i + \pi \neq 2\pi\mathbb{Z}$ $(\pi \notin \mathbb{Q})$.

Bảng ký hiệu

Bảng thuật ngữ

E

G

H

K

Ư

V

X

W

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập
NGÔ ÁNH TUYẾT

Chế bản
NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Giáo trình Toán Tập 3
GIẢI TÍCH 3
In 1.500 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại công ty cổ phần In Phúc Yên.
Giấy phép xuất bản số: 194 - 2006 / CXB / 10 - 323 / GD.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.

Jean-Marie Monier

GIẢI TÍCH 3

Giáo trình và 500 bài tập có lời giải

Giáo trình Toán - Tập 3

Mục tiêu của bộ giáo trình Toán này là cung cấp cho sinh viên những năm đầu của các trường đại học khoa học và kỹ thuật một tài liệu học tập, tra cứu thông dụng và có hiệu quả. Với nhiều bài tập có lời giải, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh của lý thuyết, cuốn sách còn nhằm giúp cho người học rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.

8 934980 640180

Tập 3 đề cập việc khảo sát các không gian vectơ định chuẩn, các hàm vectơ một biến thực và các chuỗi, ứng với phần đầu của môn Giải tích năm thứ hai.

Tập 4 đề cập việc khảo sát các dãy và các chuỗi ánh xạ, chuỗi nguyên, chuỗi Furier, các phương trình vi phân, hàm nhiều biến và bổ sung về phép tính tích phân, ứng với phần hai của môn Giải tích

Giá: 56.000đ