P.F.I.E.V

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán-Tập 4

GIẢI TÍCH 4

Giáo trình và
500 Bài tập có lời giải

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

DUNOD

Giáo trình toán - Tập 4

GIẢI TÍCH 4

Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hoá và Hợp tác của Đại sứ quán Pháp tại nước Cộng hoà Xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

Cours de mathématiques - 4

ANALYSE 4

Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam, bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République Socialiste du Vietnam.

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu và tái bản:
PHẠM PHU
Sửa bản in :
PHẠM PHU
Chế bản :
TRẦN BÍCH VÂN

194 - 2006/CXB/11 - 323/GD

Mã số : 7K477T6

Jean - Marie Monier

Giáo trình Toán
Tập 4

GIẢI TÍCH 4

Giáo trình và 500 bài tập có lời giải

(Tái bản lần thứ hai)

Người dịch :
Đoàn Quỳnh - Lý Hoàng Tú

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Cours de mathématiques - 4

ANALYSE 4

Cours et 500 exercices corrigés

2e année MP. PSI. PC. PT

Jean - Marie Monier

Professeur en classe de Spéciales

au lycée la Martinière-Monplaisir à Lyon

DUNOD

Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán mới này, với nhiều bài tập có lời giải, được biên soạn dành cho sinh viên giai đoạn I các trường đại học công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và thứ 2 mọi chuyên ngành), cho sinh viên giai đoạn I đại học khoa học, và cho các thí sinh dự thi tuyển giáo viên trung học phổ thông.

Bố cục của bộ giáo trình này như sau :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tập 1 : Giải tích 1}\\ \text{Tập 2 : Giải tích 2}\end{array}\right\}\ \text{Giải Tích năm thứ 1 (xuất bản lần 2, 6/1996)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tập 3 : Giải tích 3}\\ \text{Tập 4 : Giải tích 4}\end{array}\right\}\ \text{Giải Tích năm thứ 2 (xuất bản lần 2, 6/1997)}$$

Tập 5 : Đại số 1 : Đại số năm thứ 1

Tập 6 : Đại số 2 : Đại số năm thứ 2

Tập 7 : Hình học : Hình học năm thứ 1 và năm thứ 2.

Để kiểm tra mức độ lĩnh hội kiến thức, trong mỗi chương độc giả sẽ thấy có lời giải in ở cuối sách. Trừ một vài trường hợp đặc biệt, các bài tập này đều khác với những bài đã có trong các bộ bài tập có lời giải ở các tập trước.

Nhiều vấn đề ở ranh giới của chương trình được đề cập ở cuối chương, dưới dạng các bổ sung có lời giải.

Tác giả rất mong nhận được những lời phê bình và gợi ý của độc giả. Xin vui lòng gửi các ý kiến đến Nhà xuất bản Dunod, 15, phố Gossin, 92541 Montrouge Cedex.

Jean - Marie Monier

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn đến các bạn đồng nghiệp đã vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy : Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gerard BOURGIN, Gerard Pierre BOUVIER, Gerard CASSAYRE, Gilles CHAFFARD, Jean-Yves CHEVROLAT, Jean- Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole GAILLARD, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Chritian GIRAUD, Alain GOURET, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Jean- Paul MARGIRIER, Annie MICHEL, Rémy NICOLAI, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ và Gérard SIBERT.

Cuối cùng tôi xin trân trọng cảm ơn Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic đã tạo điều kiện để hoàn thành các tập sách này.

MỤC LỤC TẬP 4

Phần I - Giáo trình

Phần I

GIÁO TRÌNH

Chương 4

Dãy và chuỗi ánh xạ

Trong suốt chương 4, $\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$, E chỉ một $\mathbb{K}$ -kgvđc hữu hạn chiều mà chuẩn được ký hiệu bởi $\|.\|$. Trong lần đọc thứ nhất, có thể tự giới hạn ở $E = \mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$.

4.1 Dãy ánh xạ

Việc khảo sát các dãy ánh xạ đã được bắt đầu trong Tập 3, 2.3.2.

4.1.1 Các sự hội tụ

Để tiện lợi cho độc giả, chúng tôi nhắc lại ở đây việc khảo sát các dãy ánh xạ đã được tiến hành trong Tập 3, 2.3.2. Trong § 4.1.1 này, X chỉ một tập không rỗng.

◆ **Định nghĩa 1** Cho một dãy ánh xạ $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Cho $f \in E^X$. Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đơn đến** f (trên X) nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$, dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến $f(x)$ trong E. Ta cũng nói f là **giới hạn đơn** của $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đơn** (trên X) nếu và chỉ nếu có $f \in E^X$ sao cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến f (trên X).

Ta có thể dùng ký hiệu $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ để diễn tả $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến f (trên X).

Giả sử $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ, Y là một bộ phận không rỗng của X, $f \in E^Y$. Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đơn đến** f **trên** Y nếu và chỉ nếu $(f_n|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến f, tức là:

$$\forall x \in Y, f_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Với $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ cho trước, đôi khi người ta gọi tập các x thuộc X mà $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ là **tập** (hay: **miền**) **hội tụ đơn** của $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◆ **Định nghĩa 2** • Cho một dãy ánh xạ $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Cho $f \in E^X$. Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đều đến** f (trên X) nếu và chỉ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon).$$

Ta cũng nói f là **giới hạn đều** của $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đều** (trên X) nếu và chỉ nếu có $f \in E^X$ sao cho $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f (trên X).

Ta có thể dùng ký hiệu $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ để diễn tả $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f (trên X).

Nhận xét : Ta dễ dàng chứng minh rằng:

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \\ g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda f_n + g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \lambda f + g.$$

■

Giả sử $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ, Y là một bộ phận không rỗng của X, $f \in E^Y$. Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đều đến** f **trên** Y nếu và chỉ nếu $(f_n|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f, tức là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Y, \quad (n \geq N \Rightarrow \| f_n(x) - f(x) \| \leq \varepsilon).$$

Rõ ràng rằng nếu $Z \subset Y \subset X$ và nếu $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f trên Y thì $(f_n)_n$ hội tụ đều đến $f|_Z$ trên Z. ■

◆ **Mệnh đề 1** Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến f.

◆ **Mệnh đề 2** Giả sử $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ và $f \in E^X$. Để $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên X, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \text{có } N_1 \in \mathbb{N} \text{ sao cho với mọi } n \geq N_1, f_n - f \text{ bị chặn} \\ \| f_n - f \| \xrightarrow[n\infty]{} 0. \end{cases}$$

Nhắc lại rằng với $\varphi \in E^X$ bị chặn, ta ký hiệu $\| \varphi \|_\infty = \operatorname{Sup}_{x\in X} \| \varphi(x) \|$. Không nên nhầm lẫn nó với $\| \varphi \| : \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|\varphi(x)\| \end{array}$.

◆ **Hệ quả** Giả sử $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ và $f \in E^X$. Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến f trên X và nếu với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, f_n bị chặn trên X, thì f bị chặn trên X. ■

Nhắc lại (xem Tập 3, 2.1.4, Mệnh đề 3) rằng tập $\mathrm{B}(X,E)$ các ánh xạ bị chặn từ X vào E là một $\mathbb{K}$-kgv và ánh xạ $\|\cdot\|_\infty : \mathrm{B}(X,E) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\| f \|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \| f(x) \|$ là một chuẩn trên $\mathrm{B}(X,E)$.

Ta có tức khắc Mệnh đề sau:

◆ **Mệnh đề 3** Giả sử $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy phần tử của $\mathrm{B}(X,E)$, $f \in \mathrm{B}(X,E)$. Để $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên X, điều kiện cần và đủ là:

$$\| f_n - f \|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Định lý sau nằm ngoài chương trình.

◆ **Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy về hội tụ đều)**
Cho dãy ánh xạ $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$. Để $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều (trên X), điều kiện cần và đủ là: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in X,$

$$\left(\begin{cases} p \ge N \\ q \ge N \end{cases} \Rightarrow \| f_p(x) - f_q(x) \| \le \varepsilon \right).$$

Chứng minh:

1) Giả sử $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến ánh xạ f thuộc E^X, và cho $\varepsilon > 0$. Có $N \in \mathbb{N}$ để:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad \left(n \ge N \Rightarrow \| f_n(x) - f(x) \| \le \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Với $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ mà $p \ge N$ và $q \ge N$, ta có:

$$\forall x \in X, \ \| f_p(x) - f_q(x) \| \le \| f_p(x) - f(x) \| + \| f(x) - f_q(x) \| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Ngược lại, giả sử điều kiện Cauchy được thoả mãn:

- Trước hết, hãy chứng minh $(f_n)_n$ hội tụ đơn. Cho $x \in X$. Theo giả thiết, dãy $(f_n(x))_n$ là một dãy Cauchy trong E. Vì E là một $\mathbb{K}$-kgvđc hữu hạn chiều nên nó đầy (xem Tập 3, 1.4.2, Định lý 2), do đó $(f_n(x))_n$ hội tụ trong E đến một phần tử, ký hiệu là $f(x)$.
- Bây giờ hãy chứng minh sự hội tụ của $(f_n)_n$ đến f là đều. Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Theo giả thiết, có $N \in \mathbb{N}$ để:

$$\forall x \in X, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \ge N \\ q \ge N \end{cases} \Rightarrow \| f_p(x) - f_q(x) \| \le \varepsilon \right).$$

Vậy, với $p \in \mathbb{N}$ và $p \geq N$, có:

$$\forall x \in X, \forall q \in \mathbb{N}, \ \left(q \geq N \Rightarrow \left\|f_p(x) - f_q(x)\right\| \leq \varepsilon\right),$$

từ đó chuyển sang giới hạn khi q dần đến vô tận, ta được:

$$\forall x \in X, \left\|f_p(x) - f(x)\right\| \leq \varepsilon.$$

Ta đã chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left(p \geq N \Rightarrow \left\|f_p(x) - f(x)\right\| \leq \varepsilon\right).$$

Vậy $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f.

Bài tập

◊ **4.1.1** Khảo sát (sự hội tụ đơn, hội tụ đều) các dãy ánh xạ sau:

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1 + nx^2}$

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (x+n)^2}$

d) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$

e) $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}$

f) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$

g) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \sin\sqrt{x + 4\pi^2n^2} - \dfrac{x}{4n\pi}$

h) $f_n : [0;2] \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = n(1-x)^n \sin\dfrac{\pi x}{2}$

i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2 e^{-nx}}{(1 - e^{-x})^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

j) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

◊ **4.1.2** Giả sử X, Y là hai tập hợp không rỗng, φ: $X \to Y$ là một ánh xạ, $(f_n : Y \to E)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ, f: $Y \to E$ là một ánh xạ. Giả sử $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$. Chứng minh $f_n \ \varphi \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \ \varphi$.

◊ **4.1.3** *a)* Giả sử $(f_n : X \to E)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ, $f : X \to E$ là một ánh xạ, F là một $\mathbb{K}$ -kgvđc, g: $E \to F$ là một ánh xạ. Giả sử $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và g liên tục đều trên E.

Chứng minh: $g \ f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g \ f$.

b) Kết quả trên còn đúng không khi thay giả thiết liên tục đều bởi liên tục?

◊ **4.1.4** *a)* Giả sử X, Y là hai tập hợp không rỗng, $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n : Y \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy ánh xạ, $f : X \to \mathbb{C}$, $g : Y \to \mathbb{C}$ là hai ánh xạ.

Ký hiệu $f \otimes g : \begin{array}{l} X \times Y \to \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto f(x)g(y) \end{array}$, cũng tương tự cho $f_n \otimes g_n$. Giả sử $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$, $g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$, và f và g bị chặn. Chứng minh: $f_n \otimes g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \otimes g$.

b) Kết quả trên còn đúng không khi bỏ giả thiết f và g bị chặn?

◊ **4.1.5** Cho dãy $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên X.

Giả sử : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X,\ f_n(x) \in \{0;1\}$.

Chứng minh rằng $(f_n)_n$ là một dãy dừng.

◊ **4.1.6** Cho $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Chứng minh rằng dãy $\left(g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right)_{n\geq 1}$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \frac{\left(f(x)\right)^2}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + \frac{1}{n}}}$$

hội tụ đều đến $|f|$ trên $\mathbb{R}$.

◊ **4.1.7** Cho một dãy ánh xạ $(f_n : X \to \mathbb{R})_n$ hội tụ đều đến một ánh xạ f. Chứng minh: $\left(\dfrac{|f_n|}{1+f_n^2}\right)_n$ hội tụ đều đến $\dfrac{|f|}{1+f^2}$.

◊ **4.1.8*** *a)* Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ($(f_n : [a;b] \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$, $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ là một ánh xạ liên tục.

Giả sử: $\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f \text{ trên } [a;b] \\ \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a;b],\quad |f'_n(x)| \leq M. \end{cases}$

Chứng minh: $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $[a;b]$.

b) Hỏi có thể mở rộng kết quả cho $\mathbb{R}$ thay vì $[a;b]$ được không?

◊ **4.1.9** Cho $N \in \mathbb{N}$ và dãy đa thức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong $\mathbb{R}_N[X]$ (trong đó $\mathbb{R}_N[X]$ là $\mathbb{R}$ -kgv các đa thức bậc $\leq N$). Giả sử:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \qquad |P_n(x)| \leq 1.$$

Chứng minh rằng có một hàm trích σ sao cho $(P_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[0;1]$ đến một ánh xạ đa thức bậc $\leq N$.

◊ **4.1.10** Giả sử $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ liên tục sao cho $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$ và $(g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$

là dãy xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad g_n(x) = f(nx)f\left(\frac{x}{n}\right)$.

Chứng minh: $g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}_+$.

◊ **4.1.11** Giả sử $k \in \mathbb{N}$, $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{k+1} trên $[0;1]$ và sao cho:

$$\forall i \in \{0,1,\dots,k\},\quad f^{(i)}(1) = 0.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^k x^n f(x)\end{array}$.

Chứng minh $(f_n)_n$ hội tụ đều đến 0 trên $[0;1]$.

◊ **4.1.12** *a)* Cho $n \in \mathbb{N}$, $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{n+1}.

α) Chứng minh rằng có $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ sao cho:

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\},\qquad P_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right).$$

β) Chứng minh rằng với mọi x thuộc $[0;1]$, có c_x trong $]0;1[$ sao cho:

$$f(x) - P_n(x) = \left(\prod_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)\right)\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}.$$

b) Ở đây xét: $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x\,e^{-x}$.

α) Chứng minh: $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1] \quad |f(x) - P_n(x)| \le \frac{1}{n!}$.

β) Suy ra: $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $[0;1]$.

◊ **4.1.13*** Cho f: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục và khả tích trên $[0;+\infty[$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $F_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_n(t) = \int_0^t\left(\int_{ny}^{+\infty} f(x)dx\right)dy.$$

Chứng minh $(F_n)_n$ hội tụ đều đến 0 trên mọi tập con compăc của $\mathbb{R}_+$.

Cho một ví dụ về f mà $(F_n)_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

◊ **4.1.14*** Cho f : $[0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục. Khảo sát sự hội tụ đơn và hội tụ đều của dãy $(f_n : [0;1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, trong đó: $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \int_0^x f(t^n)dt$.

◊ **4.1.15** Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+x^n)^n\end{array}$.

a) Khảo sát sự hội tụ đơn và đều của $(f_n)_n$.

b) Chứng minh: $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{n\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{n^2}$.

4.1.2 Hội tụ đều và giới hạn

Trong § 4.1.2 này, X chỉ một tập con không rỗng của một $\mathbb{K}$- kgvđc hữu hạn chiều F; tổng quát hơn, X có thể là một tập con không rỗng của một không gian mêtric (xem tập 3, 1.1.1, .2), Chú ý 1). Ký hiệu $\overline{X}$ là bao đóng của X trong F; nếu $F = \mathbb{R}$, $\overline{X}$ có thể chỉ bao đóng của X trong đường thẳng số mở rộng $\overline{\mathbb{R}}$.

◆ **Định lý** Cho $a \in \overline{X}$, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N}, f_n \text{ có giới hạn tại } a \text{ là } l_n, \\ \bullet\ (f_n)_n \text{ hội tụ đều trên } X \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } f, \end{cases}$

thì: $\begin{cases} \bullet \text{ dãy } (l_n)_n \text{ hội tụ trong } E, \\ \bullet\, f \text{ có giới hạn tại } a, \\ \bullet\ \lim\limits_{a} f = \lim\limits_{n\infty} l_n. \end{cases}$

Chứng minh:

1) Hãy chứng minh $(l_n)_n$ là một dãy Cauchy trong E. Cho $\varepsilon > 0$. Vì $(f_n)_n$ hội tụ đều trên X đến f, có $N \in \mathbb{N}$ để:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad \left(n \ge N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Với $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p \ge N$, $q \ge N$, ta có:

$$\forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\| \le \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ;$$

từ đó, cho x dần đến a, ta được $\|l_p - l_q\| \le \varepsilon$. Điều đó chứng tỏ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \ge N \\ q \ge N \end{cases} \Rightarrow \|l_p - l_q\| \le \varepsilon\right).$$

Vậy $(l_n)_n$ là một dãy Cauchy trong E.

2) Vì E hữu hạn chiều nên đầy (xem Tập 3, 1.4.2, Định lý 2). Vậy $(l_n)_n$ hội tụ trong E đến một phần tử ký hiệu là l.

Bây giờ, hãy chứng minh: $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f, có $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \ge N_1 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Vì $l_n \underset{n\infty}{\to} l$, có $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \ge N_2 \Rightarrow \|l_n - l\| \le \dfrac{\varepsilon}{3}\right)$.

Ký hiệu $N' = \operatorname{Max}(N_1, N_2)$; vì $f_{N'} \underset{a}{\to} l_{N'}$, có một lân cận V của a trong F sao cho:

$$\forall x \in X \cap V, \qquad \|f_{N'}(x) - l_{N'}\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Khi đó, ta có:

$$\forall x \in X \cap V,\ \ \|f(x)-l\| \le \|f(x)-f_{N'}(x)\| + \|f_{N'}(x)-l_{N'}\| + \|l_{N'}-l\| \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Điều đó chứng tỏ: $\quad f(x) \underset{x\to a}{\to} l .$ ■

Nhận xét: Phần thứ ba của kết luận của định lý có thể được diễn tả thành: có thể hoán vị $\lim\limits_{x\to a}$ và $\lim\limits_{n\infty}$: $\quad \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\infty}(\lim\limits_{x\to a} f_n(x))$.

4.1.3 Hội tụ đều và tính liên tục

Trong § 4,1,3 này, X chỉ một tập con không rỗng của một $\mathbb{K}$ -kgvđc hữu hạn chiều F.

◆ **Định lý** Cho $a \in X$, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mỗi } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ liên tục tại } a, \\ \bullet\ (f_n)_n \text{ hội tụ đều trên } X \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } f, \end{cases}$

thì f liên tục tại a.

Chứng minh:

Cách thứ nhất

Định lý này là một hệ quả trực tiếp của định lý ở 4.1.2, vì nếu f_n liên tục tại a, ta có $\lim\limits_{a} f_n = f_n(a)$.

Cách thứ 2 (không sử dụng Định lý ở 4.1.2)

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $(f_n)_n$ hội tụ đều đến f, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},\ \ \left(n \ge N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Vì f_N liên tục tại a, có một lận cận V của a trong F sao cho:

$$\forall x \in X \cap V, \qquad \|f_N(x) - f_N(a)\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vậy với mọi $x \in X \cap V$,

$$\|f(x)-f(a)\| \le \|f(x)-f_N(x)\| + \|f_N(x)-f_N(a)\| + \|f_N(a)-f(a)\| \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Từ đó, f liên tục tại a. ■

Nhận xét: Dùng phản đảo đề, định lý trên cho phép, trong một số ví dụ, chứng minh tính không hội tụ đều.

Chẳng hạn $\left(f_n : \begin{matrix}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n\end{matrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên $[0;1]$ đến f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in [0;1[\\ 1 \ \text{ nếu } x = 1 \end{cases}$, nhưng không hội tụ đều trên $[0;1]$ vì mọi f_n liên tục tại 1 mà f thì không.

◆ **Hệ quả 1** Cho dãy ánh xạ $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ Với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N},\ f_n \text{ liên tục trên } X, \\ \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đều trên } X \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } f \end{cases}$,

thì f liên tục trên X. ■

Thường xảy ra: không có hội tụ đều trên X nhưng lại có hội tụ đều trên những bộ phận nào đó của X. Từ đó có định nghĩa sau:

◆ **Định nghĩa** Giả sử $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ và $f \in E^X$. Ta nói $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **hội tụ đều địa phương đến** f trên X nếu và chỉ nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên mọi tập con compăc của X.

Nhắc lại (xem Tập 3, 1.3.2, Định lý 2) rằng do F hữu hạn chiều, các tập con compăc của F là các tập đóng, bị chặn của F và các tập con compăc của X là các tập con compăc của F nằm trong X. Đặc biệt, với trường hợp X là một khoảng I của $\mathbb{R}$ là trường hợp hay gặp nhất trong thực hành, ta thấy rằng $(f_n : I \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều địa phương trên I nếu và chỉ nếu với mọi (a, b) thuộc I^2 mà $a \le b$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên $[a; b]$.

◆ **Hệ quả 2** I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $(f_n : I \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N}, f_n \text{ liên tục trên } I, \\ \bullet\ (f_n)_n \text{ hội tụ đều địa phương trên } I \text{ đến ánh xạ} \\ \quad \text{ký hiệu là } f : I \to E, \end{cases}$

thì f liên tục trên I.

Chứng minh:

Theo Hệ quả 1, với mọi đoạn $[a; b]$ nằm trong I, thu hẹp $f|_{[a;b]}$ liên tục trên $[a; b]$. Giả sử chẳng hạn $I =]\alpha, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (các trường hợp khác của khoảng được xét một cách tương tự). Với mọi $x_0 \in I$, có $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho: $\alpha < a < x_0 < b$. Vì $f|_{[a;b]}$ liên tục tại x_0 và vì $[a; b]$ là một lân cận của x_0 trong $\mathbb{R}$ nên f liên tục tại x_0. ■

Vậy tính hội tụ đều địa phương cho phép chuyển được các tính chất địa phương (liên tục như ở trên đây, thuộc lớp C^1 như về sau, 4.1.5, Hệ quả 1)).

◆ **Mệnh đề**
Nếu X là một tập con compăc của F thì $C(X, E)$ là một kgvc đóng của $B(X; E)$ đối với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$.

Chứng minh:
Vì X compăc, mọi ánh xạ liên tục từ X vào E đều bị chặn, do đó:

$$C(X,E) \subset B(X,E).$$

Rõ ràng rằng $C(X,E)$ là một kgvc của $B(X,E)$. Hãy chứng minh rằng $C(X,E)$ đóng trong $(B(X,E),\|.\|_\infty)$. Giả sử $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy phần tử của $C(X,E)$ hội tụ trong $(B(X,E),\|.\|_\infty)$ đến một phần tử f thuộc $B(X,E)$. Vì $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0$, theo 4.1.1, Mệnh đề 3, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên X. Do đó, theo Định lý trên, f liên tục trên X.
Vậy $f \in C(X,E)$.

Bài tập

◊ **4.1.16** Giả sử $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ liên tục trên X, hội tụ đều trên X đến một ánh xạ $f : X \to E$, $(u_n)_n$ là một dãy trong X hội tụ đến một phần tử l trong X và $\sigma, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là hai hàm trích. Chứng minh: $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \underset{n\infty}{\to} f(l)$.

◊ **4.1.17** Giả sử $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ đến một ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f_n o f \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f o f$ (có thể áp dụng bài tập 4.1.16).

b) Chứng minh rằng nếu f liên tục đều trên $\mathbb{R}$ thì $f_n \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \circ f$.

c) Hỏi kết quả của *b)* còn đúng không khi thay giả thiết liên tục đều của f bằng liên tục của f?

d) Tìm một ví dụ dãy $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ đến một ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nhưng $(f_n \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đơn đến $f \circ f$ trên $\mathbb{R}$.

◊ **4.1.18** Tổng quát hóa Hệ quả 2.
Giả sử E, F là những $\mathbb{K}$ -kgvđc hữu hạn chiều, $X \in \mathcal{P}(F)$, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ, $f: X \to E$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều địa phương đến f trên X và các f_n liên tục trên X thì f liên tục trên X.

◊ **4.1.19*** Khảo sát sự hội tụ đơn và đều của $(f_n)_{n\geq 1}$, trong đó:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (n^2 + k^x)^{-\frac{1}{2}}.$$

4.1.4 Hội tụ đều và lấy tích phân trên một đoạn

◆ **Định lý** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$ và $(f_n : [a;b] \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ .

Nếu: $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N},\ f_n \text{ liên tục trên } [a;b], \\ \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đều trên } [a;b] \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } f, \end{cases}$

thì : $\begin{cases} \bullet\ f \text{ liên tục trên } [a;b], \\ \bullet \text{ dãy } \left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ trong } E, \\ \bullet\ \int_a^b f = \lim\limits_{n\infty} \int_a^b f_n\ . \end{cases}$

Chứng minh:
Ta đã đạt được tính liên tục của f (xem Hệ quả 1).

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, ta có:

$$\left\| \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right\| = \left\| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x \right\|$$

$$\le \int_a^b \|f_n(x) - f(x)\|\mathrm{d}x \quad \text{(xem Tập 3, 2.3.4, 2), Định lý 2)}$$

$$\le (b-a)\|f_n - f\|_\infty\ .$$

Vì $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, ta kết luận: $\int_a^b f_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Nhận xét:

1) Phần thứ ba của kết luận của định lý trên có thể được diễn tả thành: có thể hoán vị $\int_a^b$ với $\lim\limits_{n\infty}$: $\int_a^b \left(\lim\limits_{n\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

2) Có thể có dãy ánh xạ liên tục $(f_n : [a;b] \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn nhưng không đều đến một ánh xạ f: $[a;b] \to E$ liên tục và dãy $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ hội tụ đến $\int_a^b f$ (xem bài tập 4.1.20).

3) Có thể có dãy ánh xạ liên tục $(f_n : [a;b] \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến một ánh xạ f: $[a;b] \to E$ liên tục và dãy $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến $\int_a^b f$ (xem bài tập 4.1.21). ■

4) Chúng ta sẽ thấy sau đây (4.1.6) một số định lý khác (định lý về hội tụ đơn điệu và định lý về hội tụ bị chặn). ■

Nhắc lại (xem Tập 3, 2.3.4, 2)) các định nghĩa và ký hiệu sau:

1) • Với $f \in C([a;b], \mathbb{K})$, ta ký hiệu $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$.

• Ta nói dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của $C([a;b], \mathbb{K})$ hội tụ trung bình đến một phần tử f thuộc $C([a;b], \mathbb{K})$ nếu và chỉ nếu $\int_{[a;b]} |f_n - f| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ tức là nếu và chỉ nếu $\|f_n - f\|_1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) • Với $f \in C([a;b], \mathbb{K})$, ta ký hiệu $\|f\|_2 = \left(\int_a^b (|f|)^2 \right)^{1/2}$.

• Ta nói dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của $C([a;b], \mathbb{K})$ hội tụ trung bình bình phương đến một phần tử f thuộc $C([a;b],\mathbb{K})$ nếu và chỉ nếu $\int_{[a;b]} |f_n - f|^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ tức cũng có nghĩa là $\|f_n - f\|_2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

◆ **Mệnh đề**

1) Với mọi f thuộc $C([a;b], \mathbb{K})$, ta có:

$$\|f\|_1 \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_2, \quad \|f\|_2 \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty, \qquad \|f\|_1 \le (b-a)\|f\|_\infty.$$

2) Giả sử $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy phần tử của $C([a;b], \mathbb{K})$ và:

$$f \in C([a;b], \mathbb{K}).$$

• Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên $[a;b]$ thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình bình phương đến f.

• Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình bình phương đến f thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình đến f.

Chứng minh:

1) • Dùng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz đối với 1 (hằng) và f:

$$\|f\|_1^2 = \left(\int_a^b |1f| \right)^2 \le \left(\int_a^b 1^2 \right)\left(\int_a^b |f|^2 \right) = (b-a)\|f\|_2^2.$$

• $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f|^2 \le (b-a) \sup_{x\in[a;b]} \left(|f(x)|^2 \right) = (b-a)\|f\|_\infty^2$.

• $\|f\|_1 = \int_a^b |f| \le (b-a) \sup_{x\in[a;b]} |f(x)| = (b-a)\|f\|_\infty$

2) Theo 1):

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Nhận xét:

1) Sự hội tụ trung bình bình phương hay sự hội tụ trung bình không kéo theo sự hội tụ đơn; ví dụ sau đây chứng tỏ điều đó: $a=0$; $b=1; f_n : \underset{x \mapsto x^n}{[0;1] \to \mathbb{R}}$ thì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình bình phương và hội tụ trung bình đến 0, nhưng $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đơn đến 0.

2) Giả sử $(f_n : [a;b] \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ liên tục và $f \in C([a;b], \mathbb{K})$.

Nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình đến f trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f_n \underset{n\infty}{\to} \int_a^b f$, vì với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f_n - f| = \|f_n - f\|_1 .$$

3) Mệnh đề đảo của Nhận xét 2) là không đúng; ví dụ sau chứng tỏ điều đó:

$$a=0; b=2\pi; \left(f_n : \underset{x \;\mapsto\; n\sin x}{[0;2\pi] \to \mathbb{R}} \right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Bài tập

◊ **4.1.20** Chứng minh rằng dãy $(f_n : [0;1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \quad f_n(x) = nx^n(1-x)$$

hội tụ đơn nhưng không đều đến 0 và $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\to} 0$.

◊ **4.1.21** Chứng minh rằng dãy $(f_n : [0;1] \to \mathbb{R})_{n\ge 2}$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & \text{nếu } x \in \left[0;\frac{1}{n}\right] \\ (-1)^{n+1} n^3 \left(x - \frac{2}{n} \right) & \text{nếu } x \in \left[\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{nếu } x \in \left[\frac{2}{n};1\right] \end{cases}$$

hội tụ đơn nhưng không đều đến 0 và $\left(\int_0^1 f_n(x)dx \right)_{n\ge 2}$ phân kỳ.

4.1.5 Hội tụ đều và lấy đạo hàm

Trong § 4.1.5 này, I chỉ một khoảng trong $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm.

◆ **Định lý** Cho dãy ánh xạ $(g_n : I \to E)_{n\in\mathbb{N}}$, $a \in I$.

Nếu: $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N},\ g_n \text{ liên tục trên } I, \\ \bullet\ (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn trong } I \\ \quad \text{đến một ánh xạ ký hiệu là } g, \end{cases}$

thì:

$\begin{cases} \bullet\ g \text{ liên tục trên } I, \\ \bullet \text{ Nếu với mỗi } n \in \mathbb{N}, \text{ ký hiệu } h_n : I \to E \text{ là nguyên hàm của} \\ \quad g_n \text{ trên } I \text{ sao cho } h_n(a) = 0, \text{ thì } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đều trên mọi} \\ \quad \text{đoạn trong } I \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } h, \\ \bullet\ h \text{ là nguyên hàm của } g \text{ trên } I \text{ sao cho } h(a) = 0. \end{cases}$

Chứng minh:
Theo 4.1.3, Hệ quả 2, g liên tục trên I.
Ký hiệu h: $I \to E$ là nguyên hàm của g trên I sao cho $h(a) = 0$, tức là $h : \begin{array}{l} I \to E \\ x \mapsto \int_a^x g \end{array}$.

Giả sử $J = [\alpha,\beta]$ là một đoạn trong I; có thể coi $a \in J$. Với mọi x thuộc J, ta có:

$$\|h_n(x) - h(x)\| = \left\| \int_a^x g_n - \int_a^x g \right\| = \left\| \int_a^x (g_n - g) \right\| \le \left| \int_a^x \|g_n - g\| \right|$$

$$\le |x-a| \operatorname*{Sup}_{t\in|a;x|} \|g_n(t) - g(t)\| \le (\beta - \alpha) \operatorname*{Sup}_{t\in[\alpha;\beta]} \|g_n(t) - g(t)\|,$$

và vậy:
$$\operatorname*{Sup}_{x\in J} \|h_n(x) - h(x)\| \le (\beta - \alpha) \operatorname*{Sup}_{t\in J} \|g_n(t) - g(t)\|.$$

Vì $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên J đến g, $\operatorname*{Sup}_{t\in J} \|g_n(t) - g(t)\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, vậy

$\operatorname*{Sup}_{x\in J} \|h_n(x) - h(x)\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Điều đó chứng tỏ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên mỗi đoạn trong I đến h.

◆ **Hệ quả 1** Cho dãy ánh xạ $(f_n : I \to E)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nếu: $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \text{ trong } \mathbb{N},\ f_n \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I, \\ \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đơn trên } I \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } f, \\ \bullet\ (f'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn trong } I \text{ đến một ánh} \\ \quad \text{xạ ký hiệu là } g, \end{cases}$

thì: $\begin{cases} \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn trong } I \text{ đến } f, \\ \bullet\ f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I, \\ \bullet\ f' = g. \end{cases}$

Chứng minh:
Giả sử a là một điểm nào đó thuộc I (có ít nhất một); với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $g_n = f_n'$ và $h_n = f_n - f_n(a)$.
Bây giờ có thể áp dụng định lý trên và suy ra: g liên tục trên I, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên mọi đoạn trong I đến một ánh xạ h và h là nguyên hàm của g trên I sao cho $h(a) = 0$.
Từ đó, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên mọi đoạn trong I đến $h + f(a)$, mà vì $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ nên $f = h + f(a)$ và vậy, f thuộc lớp C^1 trên I, và $f' = h' = g$. ■

Một phép quy nạp trực tiếp (trên k) cho phép suy ra hệ quả sau:

◆ **Hệ quả 2** Cho dãy ánh xạ $(f_n : I \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ và $k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu:
- với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, f_n thuộc lớp C^k trên I,
- với mỗi i thuộc $\{0,..., k-1\}$, $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên I đến một ánh xạ ký hiệu là φ_i,
- $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên mọi đoạn trong I đến một ánh xạ ký hiệu là φ_k,

thì:
- với mỗi i thuộc $\{0,...,k-1\}$, $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên mọi đoạn trong I đến φ_i,
- f thuộc lớp C^k trên I,
- với mỗi i thuộc $\{1,..., k\}$, $f^{(i)} = \varphi_i$.

Nhận xét:
Trong các giả thiết của Hệ quả 2, có thể thay điều kiện :

- Với mỗi i thuộc $\{0,..., k-1\}$, $\left(f_n^{(i)}\right)$ hội tụ đơn trên I đến một ánh xạ ký hiệu là φ_i,

bởi điều kiện:

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên I đến một ánh xạ ký hiệu là φ_0.

Bài tập

◊ **4.1.22** Chứng minh rằng dãy những ánh xạ thuộc lớp C^1 sau:

$$\left(\begin{array}{rcl} f_n : [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

hội tụ đều đến một ánh xạ không thuộc lớp C^1.

4.1.6 Sự hội tụ của một dãy ánh xạ và việc lấy tích phân trên một khoảng tuỳ ý

Trong § 4.1.6 này, I chỉ một khoảng trong $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm (tức là $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$).

Cho dãy ánh xạ $(f_n : I \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên I đến một ánh xạ (liên tục) $f: I \to \mathbb{K}$.

- Có thể các f_n khả tích trên I nhưng f thì không (xem bài tập 4.1.23).
- Có thể các f_n khả tích trên I, f cũng thế nhưng dãy $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến $\int_I f$ (xem bài tập 4.1.24).

Vậy ta phải tăng thêm giả thiết để đến được kết luận f khả tích trên I và $\int_I f_n \underset{n\infty}{\to} \int_I f$.

Đấy là nội dung của định lý sau:

Định lý 1 (Định lý về hội tụ đơn điệu)

Cho một dãy ánh xạ $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$.

Nếu
- Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên I,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy tăng, tức là $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$ (**giả thiết đơn điệu**),
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên I đến một ánh xạ ký hiệu là f,
- f liên tục từng khúc trên I,

thì f khả tích trên I nếu và chỉ nếu dãy thực $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên.

Ngoài ra, trong các điều kiện đó:

$$\int_I f = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\infty} \int_I f_n .$$

Chứng minh:

Theo đúng chương trình, kết quả này được thừa nhận trong trường hợp tổng quát; bạn đọc quan tâm tìm thấy một khảo sát đầy đủ trong: *Herve' Pépin, Hội tụ đơn điệu và hội tụ bị chặn, Revue de Mathématiques spéciales*, năm thứ 107, N^{0}2, tr 199-206.

Ta sẽ chứng minh kết quả trong giả thiết $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trên mọi đoạn trong I đến f.

Bằng cách, nếu cần, thay f và $f_n (n \in \mathbb{N})$ bởi $f - f_0$ và $f_n - f_0$, ta có thể coi f và mọi f_n đều ≥ 0.

Vì với mọi x thuộc I, dãy thực $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tăng và hội tụ đến $f(x)$, ta có $f_n(x) \leq f(x)$.

Vậy: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le f_n \le f$.

1) Giả sử f khả tích trên I.

Vì: $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \le f$, ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_I f_n \le \int_I f \text{, vậy } (\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bị chặn trên bởi } \int_I f .$$

2) Đảo lại, giả sử $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên. Dãy thực $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ đến biên trên, ở đây ký hiệu là M.

Giả sử J là một đoạn trong I. Vì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên J đến f nên $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình trên J đến f, vậy: $\int_J f_n \underset{n\infty}{\to} \int_J f_n$.

Vì: $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_J f_n \le \int_I f_n \le M$, suy ra: $\int_J f_n \le M$.

Vậy, với mọi đoạn J trong I, $\int_J f \le M$, do đó f khả tích trên I và $\int_I f \le M$.

Vì f khả tích trên I, theo 1), ta còn có $M \le \int_I f$, nên cuối cùng:

$$\int_I f = M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\infty} \int_I f_n .$$ ■

Nhận xét:

Khi đổi chiều, ta được kết quả sau:

Nếu:
- Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên I,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy giảm,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên I đến một ánh xạ ký hiệu là f,
- f liên tục từng khúc trên I,

thì: f khả tích trên I nếu và chỉ nếu dãy thực $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn dưới.

Ngoài ra, trong các điều kiện đó:

$$\int_I f = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\infty} \int_I f_n .$$

VÍ DỤ:

Nếu $g:[0;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$ thì $\int_0^{+\infty} e^{-nt} g(t)dt \underset{n\infty}{\to} 0$ bằng cách áp dụng định lý hội tụ đơn điệu cho $f_n : t \mapsto e^{-nt} g(t)$ và $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \in]0;+\infty[\\ g(0) & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$.

◆ **Định lý 2 (Định lý về hội tụ bị chặn)**

Cho dãy ánh xạ $(f_n : I \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$. Nếu:

$$\begin{cases} \bullet \text{ Với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N},\ f_n \text{ liên tục từng khúc trên } I \\ \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hội tụ đơn trên } I \text{ đến một ánh xạ ký hiệu là } f \\ \bullet\ f \text{ liên tục từng khúc trên } I \\ \bullet \text{ có } \varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \text{ liên tục từng khúc, } \geq 0, \text{ khả tích trên I sao cho:} \\ \qquad \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \ \ \textbf{(giả thiết bị chặn)} \end{cases}$$

thì: $\begin{cases} \bullet \text{ Với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N},\ f_n \text{ khả tích trên } I, \\ \bullet\ f \text{ khả tích trên } I, \\ \bullet\ \int_I f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f. \end{cases}$

Chứng minh:

Theo chương trình, kết quả này được thừa nhận trong trường hợp tổng quát. Ta sẽ chứng minh nó trong giả thiết $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên mọi đoạn trong I đến f.

Trước hết, với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n khả tích trên I vì $|f_n| \leq \varphi$.

Vì mới mọi x thuộc I, $(f_n(x))$ hội tụ đến $f(x)$ và vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$, ta có: $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$, và vậy f khả tích trên I.

Cho $\varepsilon > 0$. Vì φ khả tích trên I, có một đoạn J_ε trong I sao cho $\int_{I-J_\varepsilon} \varphi \leq \frac{\varepsilon}{3}$, trong đó $\int_{I-J_\varepsilon} \varphi$ là tổng của hai tích phân nếu $I - J_\varepsilon$ hợp bởi hai khoảng.

Vì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên J_ε đến f, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trung bình trên J_ε đến f, vậy:

$$\int_{J_\varepsilon} f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_{J_\varepsilon} f_n .$$

Do đó, có $N \in \mathbb{N}$, để $\forall n > N$, $\left|\int_{J_\varepsilon} f_n - \int_{J_\varepsilon} f\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Bây giờ, với mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$, ta có:

$$\left|\int_I (f_n - f)\right| = \left|\int_{I-J_\varepsilon} (f_n - f) + \int_{J_\varepsilon} (f_n - f)\right| \leq \int_{I-J_\varepsilon} |f_n| + \int_{I-J_\varepsilon} |f| + \int_{J_\varepsilon} |f_n - f|$$

$$\leq 2\int_{I-J_\varepsilon} \varphi + \left|\int_{J_\varepsilon} f_n - \int_{J_\varepsilon} f\right| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon ,$$

điều đó chứng tỏ $\int_I f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f$.

Nhận xét:

Giả thiết bị chặn không thể bỏ được (xem bài tập 4.1.24).

VÍ DỤ:

1) Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Định lý về hội tụ bị chặn được áp dụng ở đây với :

$$I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\qquad f_n : x\mapsto \sin^n x,\quad f:x\mapsto\begin{cases}0 \text{ nếu } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ 1 \text{ nếu } x=\frac{\pi}{2}\end{cases},\ \text{và}\ \ \varphi=1.$$

Định lý về hội tụ đơn điệu cũng áp dụng được ở ví dụ này.

2) Chứng minh rằng với mỗi $\alpha\in\,]0;+\infty[$ cố định:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\alpha\frac{k}{n}\right)^n \underset{n\infty}{\to}\frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}.$$

Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, ký hiệu f_n: $[1;+\infty[\ \to\mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\alpha\dfrac{\mathrm{E}(x)}{n}\right)^n & \text{nếu } 1\le x<n+1\\ 0 & \text{nếu } x\ge n+1\end{cases}.$$

Khi đó:

- Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[1;+\infty[$,
- $(f_n)_{n\ge1}$ hội tụ đơn trên $[1;+\infty[$ đến $f:x\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha E(x)}$ vì với mọi $x\in$

$[1;+\infty[$, khi mà $n\ge \mathrm{E}(x)$, ta có $f_n(x)=\left(1-\alpha\dfrac{E(x)}{n}\right)^n$,

- f liên tục từng khúc trên $[1;+\infty[$,
- $\varphi=f$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[1;+\infty[$ (vì với $x\ge 2$,

$0\le\varphi(x)\le e^{-\alpha(x-1)}$) và với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ và $x\in[1;n+1[$:

$$|f_n(x)|=\left(1-\alpha\frac{\mathrm{E}(x)}{n}\right)^n\le \mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{E}(x)}=\varphi(x),$$

do: $\quad\forall t\in\,]-1;+\infty[,\qquad \ln(1+t)\le t$.

Định lý về hội tụ bị chặn có thể áp dụng được nên:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\alpha\frac{k}{n}\right)^n=\int_{[1;+\infty[}f_n\underset{n\infty}{\to}\int_{[1;+\infty[}f.$$

Cuối cùng, $\displaystyle\int_{[1;+\infty[}f=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{E}(x)}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha n}=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$. ■

Nhận xét:

Ta có thể suy ra các định lý về tính liên tục dưới dấu $\displaystyle\int_I$ và tính có thể lấy đạo hàm dưới dấu $\displaystyle\int_I$ (xem Tập 3, 2.5.5 *1)*và *2)*) từ định lý về hội tụ bị chặn:

1) Giả sử $m\in\mathbb{N}^*$, A là một tập con của $\mathbb{R}^m$, $F:A\times I\to\mathbb{K}$ là một ánh xạ liên tục trên $A\times I$ thoả mãn giả thiết bị chặn, tức là có $\varphi: I\to\mathbb{R}$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên I sao cho:

$$\forall(x,t)\in A\times I,\qquad |F(x,t)|\leq\varphi(t).$$

Giả sử $x\in A$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy trong A, hội tụ đến x. Ký hiệu $g=F(x,.)$ và với mọi $n\in\mathbb{N}$, $g_n=F(x_n,.)$. Khi đó:

- Với mọi $n\in\mathbb{N}$, g_n liên tục và khả tích trên I,
- $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến g trên I,
- g liên tục trên I,
- φ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên I và: $\forall n\in\mathbb{N},\qquad |g_n|\leq\varphi$.

Theo định lý về hội tụ bị chặn (4.1.6, Định lý 2), g khả tích trên I và $\int_I g_n \underset{n\infty}{\to} \int_I g$,

tức là: $\int_I F(x_n,t)dt \underset{n\infty}{\to} \int_I F(x,t)$.

Điều đó chứng tỏ rằng $f: x\mapsto \int_I F(x,t)$ liên tục trên A.

2) Giả sử A là một khoảng trong $\mathbb{R}$, $F: A\times I\to\mathbb{K}$ là một ánh xạ liên tục trên $A\times I$. Giả sử thêm:

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $A\times I$,
- $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ thỏa mãn điều kiện bị chặn, tức là có $\psi: I\to\mathbb{R}$ liên tục từng khúc, $\geq$ 0, khả tích trên I sao cho:

$$\forall(x,t)\in A\times I,\qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right|\leq\psi(t).$$

Giả sử $x\in A$ và $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $A-\{x\}$ hội tụ đến x. Ký hiệu $h=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ và $h_n=\dfrac{1}{x_n-x}\big(F(x_n,.)-F(x,.)\big)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Khi đó:

- với mọi $n\in\mathbb{N}$, h_n liên tục trên I,
- $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến h trên I,
- h liên tục trên I,
- ψ liên tục, ≥ 0, khả tích trên I và bằng cách sử dụng bất đẳng thức số gia hữu hạn, ta có với mọi $n\in\mathbb{N}$ và mọi $t\in I$:

$$|h_n(t)|=\frac{|F(x_n,t)-F(x,t)|}{|x_n-x|}\leq\psi(t).$$

Theo định lý về hội tụ bị chặn, h khả tích trên I và $\int_I h_n \underset{n\infty}{\to}\int_I h$, tức là:

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\underset{n\infty}{\to}\int_I\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt.$$

Vậy f có đạo hàm tại x và $f'(x)=\int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$. Cuối cùng theo định lí về hội tụ bị chặn, do $\frac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên $A\times I$ và bị chặn (bởi ψ), f' liên tục trên A. ■

Nhắc lại những định lý, ký hiệu, kết quả đã có trong tập 3, 2.5.2 2).

1) Tập $C\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ các ánh xạ liên tục và khả tích trên I với giá trị trong $\mathbb{K}$ là một $\mathbb{K}$ - kgv và ánh xạ $N_1 : f \to \int_I |f|$ là một chuẩn trên $\mathbb{K}$ -kgv đó.

Ta nói một dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của $C\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ **hội tụ trung bình** đến một phần tử f thuộc $C\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ nếu và chỉ nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến f đối với chuẩn N_1,tức là:

$$\int_I |f_n - f| \underset{n\infty}{\to} 0.$$

2) Một phần tử f của $C\mathcal{M}(I,\mathbb{K})$ gọi là **bình phương khả tích** trên I nếu và chỉ nếu $|f|^2$ khả tích trên I.

Tập $C\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$ các ánh xạ liên tục, bình phương khả tích trên I, giá trị trong $\mathbb{K}$, là một $\mathbb{K}$ - kgv và ánh xạ $(f,g)\mapsto (f\mid g)=\int_I \bar{f}g$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{K}$ - kgv đó. Ta ký hiệu N_2 là chuẩn liên kết: $N_2(f)=\left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$.

Ta nói một dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những phần tử của $C\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$ **hội tụ trung bình bình phương** đến một phần tử f thuộc $C\mathcal{L}^2(I; \mathbb{K})$ nếu và chỉ nếu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến f đối với chuẩn N_2, tức là:

$$\int_I |f_n - f|^2 \underset{n\infty}{\to} 0.$$ ■

Ta không thể "so sánh" các chuẩn N_1, N_2, N_∞, chúng được xác định trong những $\mathbb{K}$ - kgv khác nhau. Tuy nhiên, ta có mệnh đề sau:

◆ **Mệnh đề**

Cho một dãy ánh xạ $(f_n : I \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$.

Nếu:
- với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, f_n liên tục và khả tích trên I,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên I đến một ánh xạ ký hiệu là f,
- I bị chặn,

thì:
- f liên tục và khả tích trên I,
- $\int_I f_n \underset{n\infty}{\to} \int_I f$.

Chứng minh:

1) Tính liên tục của f trên I suy ra từ 4.1.3, Hệ quả 2.

2) Vì $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên I đến f, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall x \in I, \quad |f_N(x) - f(x)| \le 1,$$

từ đó: $\quad \forall x \in I, \quad |f(x)| \le 1 + f_N(x).$

Do f_N khả tích trên I và $x \mapsto 1$ khả tích trên I (vì I bị chặn) nên f khả tích trên I.

3) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\left|\int_I f_n - \int_I f\right| = \left|\int_I (f_n - f)\right| \le \int_I |f_n - f| \le l(I)\|f_n - f\|_\infty,$$

trong đó, $l(I)$ là độ dài của khoảng bị chặn I, và vậy $\int_I f_n \underset{n\infty}{\to} \int_I f$.

Bài tập

◊ **4.1.23** Cho một ví dụ khoảng I và dãy $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sao cho:

- Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, f_n khả tích trên I,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ đều trên I đến một ánh xạ ký hiệu là f,
- f không khả tích trên I.

◊ **4.1.24** Cho một ví dụ khoảng I và dãy $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sao cho:

- Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, f_n khả tích trên I,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ đều trên I đến một ánh xạ ký hiệu là f,
- f khả tích trên I.
- $\int_I f_n \underset{n\infty}{\not\to} \int_I f$.

◊ **4.1.25** Cho ba ví dụ dãy ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, liên tục, bị chặn, khả tích, bình phương khả tích sao cho:

$$\begin{cases} N_1(f_n) \underset{n\infty}{\to} 0 \\ N_2(f_n) \underset{n\infty}{\not\to} 0 \\ N_\infty(f_n) \underset{n\infty}{\not\to} 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} N_1(g_n) \underset{n\infty}{\not\to} 0 \\ N_2(g_n) \underset{n\infty}{\to} 0 \\ N_\infty(g_n) \underset{n\infty}{\not\to} 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} N_1(h_n) \underset{n\infty}{\not\to} 0 \\ N_2(h_n) \underset{n\infty}{\not\to} 0 \\ N_\infty(f_n) \underset{n\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

◊ **4.1.26** Ta ký hiệu $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là tập hợp các ánh xạ liên tục, bị chặn từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là tập hợp các ánh xạ liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$, có giới hạn 0 tại $-\infty$ và $+\infty$, $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là tập các ánh xạ liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$, triệt tiêu ở bên ngoài một đoạn (đoạn này phụ thuộc từng ánh xạ).

Ta trang bị cho đại số $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ các ánh xạ bị chặn từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ chuẩn $\|\cdot\|_\infty$

a) Chứng minh:

1) $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là một đại số con của $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2) $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ và $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là những iđêan của đại số $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, tức là :

$$\begin{cases} \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \neq \phi, \\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \alpha f + g \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \\ \forall f \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \forall \varphi \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ f\varphi \ \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \end{cases}$$

và tương tự cho $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

b) Chứng minh:

1) $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ đóng trong $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

2) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ đóng trong $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

3) bao đóng của $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ trong $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

4) hình cầu đơn vị đóng $\left\{ f \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}); \|f\|_\infty \leq 1 \right\}$ của $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ không compăc.

c) Chứng minh rằng $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ trù mật trong $\left(\mathcal{CL}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1\right)$.

◇ **4.1.27** Xác định các giới hạn khi n dần đến $+\infty$ của:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} dx$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^p + 1)^n} dx$, $p \in]0; +\infty[$ cố định *f)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 + x^n e^{-x}} dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^{2n} + x^n + 1)^{-\frac{1}{n}} dx$ *h)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1 + x^2} dx$

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin nx dx$ *j)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ne^{-x^2} \sin x}{1 + n^2 x^2} dx$

k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} dx$.

◇ **4.1.28** Chứng minh:

$$\forall \alpha \in]0; +\infty[, \qquad \int_0^1 x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \underset{n\infty}{\to} \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx .$$

◇ **4.1.29** Cho f: $]0;1] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc, khả tích trên $]0;1]$. Hãy tìm $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + nx} dx$.

◇ **4.1.30** Cho f: $[-1;1] \to \mathbb{R}$ liên tục. Hãy tìm $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_{-1}^1 \left| \cos\left(\pi \frac{x^2 + (f(x))^2}{1 + (f(x))^2} \right) \right|^n dx$.

◇ **4.1.31** Chứng minh:

a) $\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,dx \underset{n\infty}{\sim} n$,

b) $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\,dx \underset{n\infty}{\sim} \frac{C}{n}$, $\qquad C \in \mathbb{R}^*$ và hãy tính C.

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+a^2)} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\pi\sqrt{2}}{4a^2}$.

◊ **4.1.32** Cho f: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục, giảm, khả tích trên $]0;1]$ và $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbb{R}_+$ hội tụ đến 0. Tìm $\lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_n + \frac{k}{n})$.

◊ **4.1.33**

a) Chứng minh: $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$.

b) Chứng minh: $\qquad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Nhắc lại (công thức Wallis, xem tập 3, 3.3.7 4)), $\int_0^{\pi/2} \sin^p x\mathrm{d}x \underset{p\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$. Hãy tìm lại giá trị của tích phân của Gauss: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

◊ **4.1.34**

a) Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc sao cho $x \mapsto e^{\alpha x}\varphi(x)$ khả tích trên $]0;+\infty[$. Chứng minh:

$$\int_0^n \left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^n \varphi(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

b) Từ đó suy ra:

1) $\forall a \in]1;+\infty[$, $\qquad \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{a-1}$,

2) $\forall b \in]-\infty,1[$, $\qquad \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{bx}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{1-b}$,

3) $\forall c \in]0;+\infty[$, $\qquad \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right) x^{c-1}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \Gamma(c)$.

◊ **4.1.35***

a) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu: $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}x$ và $J_n = \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

α) Chứng minh: $I_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ và $J_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}dx$.

β) Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n - J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

γ) Từ đó suy ra: $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}}{x}dx = \gamma$, γ là hằng số Euler.

◊ **4.1.36**

a) Cho $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục từng khúc và $(f_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy ánh xạ liên tục từng khúc, hội tụ đơn trên $]0;+\infty[$ đến một ánh xạ f: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$. Giả sử:

$$\begin{cases} \bullet\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0;+\infty[, |f_n(x)| \le |f(x)|, \\ \bullet\ \ f \text{ liên tục từng khúc trên }]0;+\infty[, \\ \bullet\ \ \varphi f \text{ khả tích trên }]0;+\infty[. \end{cases}$$

Chứng minh: $\int_0^n \varphi(x) f_n(x)dx \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \varphi(x) f(x)dx$.

b) Từ đó suy ra: $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma$, γ là hằng số Euler.

◊ **4.1.37*** **Công thức Stirling cho hàm số Γ**

a) Chứng minh: $\forall x \in]0;+\infty[,\quad \Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt$

trong đó ta ký hiệu $f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \le -\sqrt{x}, \\ \left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}\, t} & \text{nếu } t > -\sqrt{x}. \end{cases}$

b) α) Chứng minh: $\forall x \in [1;+\infty[, \forall t \in [0;+\infty[,\quad 0 \le f(x,t) \le (1+t)e^{-t}$.

β) Chứng minh: $\forall x \in [0;+\infty[, \forall t \in [-\sqrt{x};0],\quad 0 \le f(x,t) \le e^{-\frac{t^2}{2}}$.

c) Từ đó suy ra: $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$. Công thức này mở rộng công thức Stirling trong Tập 3 (3.3.7, 4)) $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

◊ **4.1.38 Công thức Gauss cho hàm số Γ**

a) Chứng minh: $\forall x \in]0;+\infty[,\quad \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \underset{n\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$.

b) Từ đó suy ra công thức Gauss:

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}.$$

◊ **4.1.39 Công thức Weierstrass cho hàm số Γ.**
Chứng minh:

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right)$$

(sử dụng công thức Gauss, bài tập 4.1.38).

◊ **4.1.40 Hàm số ψ.**

Ta ký hiệu $\psi:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $\forall x \in]0;+\infty[, \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

a) Chứng minh: $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n)}.$$

b) Từ đó suy ra:

1) $\gamma = -\Gamma'(1)$

2) $\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma$

(xem bài tập 4.1.36).

◊ **4.1.41** Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin nx\end{array}$. Chứng minh rằng không có dãy con nào trích từ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn trên [0;1] đến 0 (có thể xét $\int_0^1 \left(f_{\sigma(n)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x$ đối với một hàm trích σ).

◊ **4.1.42*** Cho $f \in C([0;1], \mathbb{R})$. Chứng minh:

$$\int_0^1 f = 0 \Leftrightarrow \left(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \int_0^1 |1 + zf(x)| \mathrm{d}x \geq 1 \right).$$

4.2 Xấp xỉ hàm số một biến thực

4.2.1 Xấp xỉ bởi các hàm số bậc thang hay afin từng khúc và liên tục.

Trong mục 4.2.1 này (a,b) chỉ một cặp số thực sao cho $a < b$.
Nhắc lại hai định lý xấp xỉ đã thấy trong Tập 3, 2.3.3.

◆ **Định lý 1**
Với mọi ánh xạ f: $[a;b] \to E$ liên tục từng khúc, có một dãy $(e_n : [a;b] \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ bậc thang trên $[a;b]$ hội tụ đều đến f trên $[a;b]$.

◆ **Định lý 2**
Với mọi ánh xạ $f : [a;b] \to E$ liên tục, có một dãy $(\varphi_n : [a;b] \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ *afin* từng khúc và liên tục, hội tụ đều đến f trên $[a; b]$.

Bài tập

◇ **4.2.1 Định lý Riemann - Lebesgue trên một đoạn**

Cho f:$[a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc. Chứng minh: $\int_a^b f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

◇ **4.2.2 Định lý Riemann - Lebesgue trên một khoảng**

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, f: $I \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc và khả tích trên I.

Chứng minh: $\int_I f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

(Sử dụng bài tập 4.2.1).

4.2.2 Xấp xỉ bởi đa thức

◆ **Định lý (Định lý thứ nhất của Weierstrass)**
Với mọi ánh xạ liên tục f:$[a;b] \to \mathbb{K}$, có một dãy $(P_n : [a;b] \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ những đa thức hội tụ đều đến f trên $[a;b]$.

Ở đây, ta đồng nhất đa thức với ánh xạ đa thức.

Chứng minh: (ngoài chương trình).

1) Chúng ta sẽ sử dụng các **đa thức Bernstein.**

1) Trước hết, giả sử $a = 0$ và $b = 1$.

Cho f: $[0;1] \to \mathbb{K}$ liên tục. Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $B_n(f)$ là đa thức (với hệ số trong $\mathbb{K}$) xác định bởi:

$$\forall x \in [0;1], \quad B_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

gọi là **đa thức Bernstein.**

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục trên $[0;1]$ nên theo Định lý Heine, f liên tục đều trên $[0;1]$; vậy có $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (u,v) \in [0;1]^2, \quad \left(|u-v| \le \eta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Cho $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;1]$. Vì $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \left(x + (1-x)\right)^n = 1$, ta có:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

Ký hiệu $E_1 = \left\{k \in \{0,\dots,n\}; \quad \left|x - \frac{k}{n}\right| \le \eta\right\}$

và $E_2 = \left\{k \in \{0,\dots,n\}; \quad \left|x - \frac{k}{n}\right| > \eta\right\} = \{0,\dots,n\} - E_1$.

- Với mọi k thuộc E_1, ta có: $\left|x - \frac{k}{n}\right| \le \eta$ nên $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$,

suy ra:

$$\sum_{k \in E_1} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in E_1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Mặt khác:

$$\sum_{k \in E_2} C_n^k \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} \le 2\|f\|_\infty \sum_{k \in E_2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k \in E_2} C_n^k \eta^2 x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k \in E_2} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k},$$

do với mọi k thuộc E_2, $|\eta| < \left|x-\frac{k}{n}\right|$.

Cho $n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = x^2\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

Ta xuất phát từ: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$

Bằng cách lấy đạo hàm đối với x rồi nhân với x, ta được

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}.$$

Thay y bằng 1-x, ta được : $\forall x\in\mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx.$

Lại lấy đạo hàm đối với x rồi nhân với x, ta được:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k x^k y^{n-k} = nx\left((x+y)^{n-1}+(n-1)x(x+y)^{n-2}\right)$$

$$= nx(nx+y)(x+y)^{n-2},$$

từ đó bằng cách thay y bằng $1-x$ ta được:

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx\left((n-1)x+1\right).$$

Ta suy ra:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = x^2 - \frac{2x}{n}nx + \frac{1}{n^2}nx\left((n-1)x+1\right) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Vì: $\forall x\in[0;1], \qquad x(1-x)\leq\frac{1}{4},$

nên ta được:

$$\sum_{k\in E_2} C_n^k \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}.$$

- Hai điểm trên đây cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \ \left|f(x) - B_n(f)(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}.$$

Vì $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} \underset{n\infty}{\to} 0$ (do $\eta > 0$ giữ cố định), có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n > N, \ \dfrac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vậy ta đã chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \ \left(n \ge N \Rightarrow \left|f(x) - B_n(f)(x)\right| \le \varepsilon\right)$$

tức là $\quad B_n(f) \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên [0; 1].

2) Chuyển sang trường hợp tổng quát: $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Cho f: $[a;b] \to \mathbb{K}$ liên tục.

Xét ánh xạ liên tục $g : \begin{array}{ccc}[0;1] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(a+(b-a)x)\end{array}$

Theo *1)*, dãy ánh xạ (với hệ số trong $\mathbb{K}$) $(B_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến g trên [0;1], tức là $\|B_n(g) - g\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu P_n: $[a;b] \to \mathbb{K}$ là ánh xạ đa thức xác định bởi:

$$\forall t \in [a;b], \qquad P_n(t) = B_n(g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right).$$

Vì $\begin{array}{ccc}[0;1] & \to & [a;b] \\ x & \mapsto & a+(b-a)x\end{array}$ và $\begin{array}{ccc}[a;b] & \to & [0;1] \\ t & \mapsto & \frac{t-a}{b-a}\end{array}$ là những song ánh nghịch đảo của nhau, nên với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\|P_n - f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[a;b]} \left|P_n(t) - f(t)\right| = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} \left|B_n(g)(x) - g(x)\right| = \|B_n(g) - g\|_\infty,$$

từ đó $\quad \|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vậy $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên $[a;b]$.

Nhận xét:

1) Độc giả tìm được hai chứng minh khác của định lý thứ nhất của Weierstrass trong các bài Tập 4. 2.2.22 và 4.2.23.

2) Định lý thứ nhất của Weierstrass là một trường hợp riêng của **định lý Stone - Weierstrass**, xem C 4. 4.

3) Định lý thứ nhất của Weierstrass có thể được diễn tả thành: tập các ánh xạ đa thức từ $[a;b]$ vào $\mathbb{K}$ là trù mật trong $C([a;b]; \mathbb{K})$ đối với chuẩn $\|.\|_\infty$.

4) Vì mọi ánh xạ đa thức từ $[a;b]$ vào $\mathbb{K}$ thuộc lớp C^∞, từ định lý thứ nhất của Weierstrass suy ra kết quả sau:

Mọi ánh xạ liên tục từ $[a;b]$ vào $\mathbb{K}$ là giới hạn đều trên $[a;b]$ của một dãy ánh xạ thuộc lớp C^∞ trên $[a;b]$.

◆ **Hệ quả** Giả sử $f:[a;b] \to \mathbb{K}$ liên tục. Nếu với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$, thì $f = 0$.

Chứng minh:
Theo giả thiết và do mọi đa thức là tổ hợp tuyến tính của những đơn thức nên với mọi đa thức P, ta có: $\int_a^b \overline{P(x)} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Theo định lý thứ nhất của Weierstrass có một dãy đa thức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[a;b]$ đến f. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$0 \le \int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\overline{f(x)} - \overline{P_n(x)}\right) f(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\|f-P\|_\infty \|f\|_\infty .$$

Vì $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$ suy ra $\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$, từ đó do f liên tục trên $[a;b]$, $f = 0$.

Bài tập

Các bài tập từ 4.2.3. đến 4.2.9 không dùng đến định lý Weierstrass.

◊ **4.2.3** Giả sử $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy đa thức với hệ số thực sao cho với mọi đoạn J trong $\mathbb{R}$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến 0 trên J. Hỏi có thể khẳng định rằng $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến 0 trên $\mathbb{R}$ hay không?

◊ **4.2.4** Cho một ví dụ dãy đa thức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[-1;1]$ nhưng không hội tụ đều trên mọi khoảng I chứa nghiêm ngặt $[-1;1]$.

◊ **4.2.5** Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $P(I) \subset I$ và $P \ne X$, $(P_n)_{n\ge 1}$ là dãy các ánh xạ từ I vào $\mathbb{R}$ xác định bởi: $P_1 = P$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = P_n \circ P_1$. Giả sử $(P_n)_{n\ge 1}$ hội tụ đều đến một ánh xạ $f: I \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng f là ánh xạ hằng.

◊ **4.2.6** Chứng minh rằng ánh xạ $f: \left]0;1\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ không phải là giới hạn đều trên $]0;1]$ của một dãy ánh xạ đa thức.

◊ **4.2.7*** Giả sử $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy đa thức với hệ số thực, hội tụ đều đến 0 trên $[-1;0]$ và sao cho $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x = 1$. Chứng minh rằng dãy $\left(\deg(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không bị chặn trên.

◊ **4.2.8*** Giả sử $k \in \mathbb{N}$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy đa thức với hệ số thực sao cho $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) \le k$. Chứng minh rằng nếu có một đoạn $[a;b]$ trong $\mathbb{R}$ không thu về một điểm, sao cho $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[a;b]$ thì với mọi đoạn $[c;d]$ trong $\mathbb{R}$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[c;d]$ đến một đa thức.

◊ **4.2.9*** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $(P_n : [a;b] \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy đa thức, $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ là một ánh xạ. Giả sử rằng $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đơn đến f trên $[a;b]$ và có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) \le N$. Chứng minh rằng f là một đa thức và $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên $[a;b]$.

◊ **4.2.10** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ liên tục và $\varepsilon > 0$. Chứng minh rằng có các đa thức P, Q với hệ số thực sao cho:

$$\forall x \in [a;b], \quad \begin{cases} P(x) \le f(x) \le Q(x) \\ Q(x) - P(x) \le \varepsilon \end{cases}.$$

◊ **4.2.11** Cho $a \in \,]0;+\infty[$. Với mỗi ánh xạ $f : [-a;a] \to \mathbb{C}$, ký hiệu : $\check{f} : \begin{matrix}[-a;a] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(-x)\end{matrix}$.

(xem Tập 1, 4.1.3).

a) Chứng minh rằng nếu một dãy $(f_n : [-a;a] \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến một ánh xạ $f: [-a;a] \to \mathbb{C}$ thì $(\check{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến $\check{f}$.

b) Cho $f: [-a;a] \to \mathbb{C}$ liên tục. Chứng minh rằng nếu f chẵn (theo thứ tự, lẻ) thì ta có dãy đa thức chẵn (theo thứ tự, lẻ) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên $[-a;a]$.

◊ **4.2.12** Cho $k \in \mathbb{N}^*$ và $f: [0;1] \to \mathbb{C}$ liên tục. Chứng minh rằng có dãy đa thức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho nếu ký hiệu $A_n = P_n(\mathrm{X}^k)$ thì $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến f trên $[0;1]$.

◊ **4.2.13** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $f: [a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục. Chứng minh rằng nếu

với mọi $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_a^b \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) f(x)\mathrm{d}x = 0$, thì $f = 0$.

(Quy ước rằng $\displaystyle\prod_{k\in\phi} (x+k) = 1$).

◊ **4.2.14** Giả sử $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ liên tục. Chứng minh rằng các tính chất sau tương đương từng cặp:

1) $f = 0$,

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$,

3) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \ge N \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0 \right)$,

4) $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^{kn} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

◊ **4.2.15** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, $E = C([a;b],\mathbb{C})$ với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{P}$ là tập các ánh xạ đa thức từ $[a;b]$ vào $\mathbb{C}$. Hãy xác định $\overline{\mathcal{P}}, \overset{0}{\mathcal{P}}, \partial(\mathcal{P})$ (trong E).

◊ **4.2.16** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, f: $[a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục. $N \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_N \in [a;b]$ phân biệt từng cặp. Chứng minh rằng có một dãy đa thức phức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho:

$$\begin{cases} P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \text{ trên } [a;b] \\ \forall i \in \{1,\dots,N\}, \forall n \in \mathbb{N}, P_n(a_i) = f(a_i) \end{cases}.$$

◊ **4.2.17** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ f: $[a;b] \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng có một dãy giảm $(P_n : [a;b] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ những ánh xạ đa thức với hệ số thực hội tụ đều đến f trên $[a;b]$.

◊ **4.2.18** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ f: $[a;b] \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^1. Chứng minh rằng có một dãy đa thức phức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho:

$$P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \text{ và } P'_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f',$$

(xem thêm bài tập 4.2.36 cho một khảo sát sâu sắc hơn).

◊ **4.2.19*** Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$ f: $]a;b[\to \mathbb{K}$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng hai tính chất sau là tương đương:
(i) f liên tục đều trên $]a;b[$,
(ii) có một dãy đa thức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc $\mathbb{K}[X]$ hội tụ đều đến f trên $]a;b[$.

◊ **4.2.20* Ví dụ về dãy có hai giới hạn khác nhau đối với hai chuẩn**
Ký hiệu $E = \mathbb{R}[X]$, $I_1 = [-2;-1]$; $I_2 = [1;2]$, $N_1 = E \to \mathbb{R}$, N_2: $E \to \mathbb{R}$ là hai chuẩn trên E xác định bởi:

$$\forall P \in E, \quad N_1(P) = \operatorname{Sup}_{x\in I_1}|P(x)| \quad \text{và} \quad N_2(P) = \operatorname{Sup}_{x\in I_2}|P(x)|.$$

Cho $(A, B) \in E^2$ tuỳ ý. Chứng minh rằng có một dãy $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong E sao cho:

$$\begin{cases} P_n \xrightarrow[n\infty]{} A \text{ trong } (E,N_1), \\ P_n \xrightarrow[n\infty]{} B \text{ trong } (E,N_2). \end{cases}$$

◊ **4.2.21** Ký hiệu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy ánh xạ xác định bởi $P_0 = 0$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \; P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right).$$

*a)** Chứng minh:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1],\ 0 \le \sqrt{x} - P_n(x) \le \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.$$

b) Từ đó suy ra $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $[0;1]$ đến $\rho : x \mapsto \sqrt{x}$.

c) Chứng minh rằng dãy đa thức $(Q_n : [-1;1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1;1],\ Q_n(t) = \left(P_n(|t|)^2\right)$$

hội tụ đều trên $[-1;1]$ đến $\varphi : t \mapsto |t|$.

◊ **4.2.22* Một chứng minh của định lý thứ nhất của Weierstrass**

Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b, f : [a;b] \to \mathbb{K}$ liên tục, $\varepsilon > 0$.

a) Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$, có phân hoạch $(x_k)_{0\le k\le n}$ của $[a;b]$ và các số phức $\mu_k (1 \le k \le n-1)$ sao cho ký hiệu $g_k : [a;b] \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le x_k \\ x - x_k & \text{nếu } x > x_k \end{cases}$$

thì ta có : $\forall x \in [a;b], |f(x) - f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k g_k(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Với các ký hiệu của *a)*, chứng minh rằng có các đa thức P_k $(0 \le k \le n-1)$ sao cho :

$\forall x \in [a;b], |g_k(x) - P_k(x)| \le \frac{\varepsilon}{nM}$, trong đó $M = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k|$ (sử dụng bài tập 4.2.21 *c)*).

c) Từ đó suy ra f là giới hạn đều trên $[a;b]$ của một dãy đa thức.

◊ **4.2.23* Một chứng minh của định lý thứ nhất của Weierstrass, phương pháp Korovkine**

Ký hiệu $E = C([0;1],\mathbb{R})$.

Một ánh xạ tuyến tính $T: E \to E$ gọi là dương nếu và chỉ nếu:

$$\forall f \in E, (f \ge 0 \Rightarrow T(f) \ge 0).$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ký hiệu : $e_k : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k\end{array}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu B_n: $E \to E$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall f \in E, \forall x \in [0;1],\ B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

a) Cho $f \in E$, $\varepsilon \in]0;+\infty[$. Chứng minh rằng có $\alpha \in]0;+\infty[$ sao cho:

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ |f(x) - f(y)| \le \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(x-y)^2.$$

b) Kiểm nghiệm rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, B_n là tuyến tính dương.

c) Chứng minh: $\forall k \in \{0,1,2\}, \|B_n(e_k) - e_k\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

d) Từ đó suy ra: $\forall k \in E, \|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vậy f là giới hạn đều trên $[0;1]$ của dãy $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ các đa thức Bernstein của f.

Các bài tập từ 4.2.24 đến 4.2.39 nói về các đa thức Bernstein của f, xác định đối với

f: $[0;1] \to \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0;1]$ bởi: $\quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

◊ **4.2.24** Chứng minh:
$\forall f \in \mathbb{C}^{[0;1]}, \forall n \in \mathbb{N},\ B_n(f)(0) = 0$ và $B_n(f)(1) = 1$.

◊ **4.2.25** Chứng minh:
$\forall f \in \mathbb{C}^{[0;1]}, \forall n \in \mathbb{N},\ B_n(\overline{f}) = \overline{B_n(f)}$.

◊ **4.2.26** Với $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, ký hiệu $\tilde{f} : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathrm{K} \\ x \ \mapsto f(1-x)\end{array}$. Chứng minh:

$\forall f \in \mathbb{K}^{[0;1]}, \forall n \in \mathbb{N},\ B_n(\tilde{f}) = \widetilde{B_n(f)}$.

◊ **4.2.27** Cho $n \in \mathbb{N}$ và $B_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}^{[0;1]} \to \mathbb{R}^{[0;1]} \\ f \ \mapsto B_n(f)\end{array}$.

a) Chứng minh rằng B_n tuyến tính.

b) Chứng minh rằng B_n dương tức là $\forall f \in \mathbb{R}^{[0;1]}, \left(f \geq 0 \Rightarrow B_n(f) \geq 0\right)$.

c) Từ đó suy ra B_n là dãy tăng.

◊ **4.2.28** *a)* Cho $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng nếu f bị chặn trên (theo thứ tự, bị chặn dưới) thì $B_n(f)$ bị chặn trên (theo thứ tự, bị chặn dưới) và với mọi x thuộc $[0;1]$, $B_n(f)(x) \leq \sup_{t\in[0;1]} f(t)$ (theo thứ tự, $B_n(f)(x) \geq \inf_{t\in[0;1]} f(t)$).

b) Chứng minh rằng nếu f: $[0;1] \to \mathbb{C}$ bị chặn thì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)$ bị chặn và

$$\|B_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

◊ **4.2.29** Chứng minh: $\forall f \in \mathbb{K}^{[0;1]}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1],\ B_n(|f|^2)(x) \geq |B_n(f)(x)|^2$.

◊ **4.2.30** Chứng minh rằng nếu $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ lồi thì

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1],\quad B_n(f)(x) \geq f(x) .$$

◊ **4.2.31** *a)* 1) Chứng minh rằng với mọi $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}, x \in [0;1]$:

$$\left(B_n(f)\right)'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-1-k} .$$

2) Từ đó suy ra rằng với mọi f thuộc $\mathbb{R}^{[0;1]}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$:

- Nếu f tăng thì $B_n(f)$ tăng.
- Nếu f giảm thì $B_n(f)$ giảm.

b) 1) Chứng minh rằng với mọi $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}, x \in [0;1]$

$$\left(B_n(f)\right)''(x) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-2-k} .$$

Tổng quát hơn, xem bài tập 4.2..33.

2) Từ đó suy ra rằng với mọi f thuộc $\mathbb{R}^{[0;1]}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$

- Nếu f lồi thì $B_n(f)$ lồi.
- Nếu f lõm thì $B_n(f)$ lõm.

◊ **4.2.32*** Chứng minh rằng nếu f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ lồi thì với mọi x thuộc $[0;1]$, $\left(B_n(f)(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy giảm .

◊ **4.2.33** Cho $n \in \mathbb{N}$. Với mọi f thuộc $\mathbb{K}^{[0;1]}$, ta ký hiệu $\Delta_{n,0}f$, $\Delta_{n,1}f$... là các ánh xạ từ $[0;1]$, $\left[0;1-\frac{1}{n}\right]$, $\left[0;1-\frac{2}{n}\right]$, ... vào $\mathbb{K}$ xác định với mọi $y \in [0;1]$ bởi:

$$(\Delta_{n,0}f)(y) = f(y)$$

$$(\Delta_{n,1}f)(y) = f\left(y+\frac{1}{n}\right) - f(y)$$

$$\dots$$

$$(\Delta_{n,r+1}f)(y) = (\Delta_{n,r})f\left(y+\frac{1}{n}\right) - (\Delta_{n,r})f(y)$$

$$\dots$$

Ta nói rằng $\Delta_{n,1}f$ là một toán tử sai phân và $\Delta_{n,r}f$ (với $\forall r \in \mathbb{N}^*$) là toán tử sai phân lặp.
Cho $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}, x \in [0;1]$, $r \in \mathbb{N}$ sao cho $r \le n$. Chứng minh:

$$\left(B_n(f)\right)^{(r)}(x) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-r}^{k}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-r-k} .$$

◊ **4.2.34** Với $(n,p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times [0;1]$, ký hiệu:

$$S_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^p C_n^k x^k (1-x)^{n-k} .$$

a) Chứng minh rằng với mọi $(n,p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times [0;1]$:

$$S_{n,p+1}(x) = x(1-x)\left(S'_{n,p}(x) + pnS_{n,p-1}(x)\right).$$

b) Từ đó suy ra có $c \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ 0 \le S_{n,6}(x) \le cn^3 .$$

◊ **4.2.35** Với $(n,\delta,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \times [0;1]$, ký hiệu:

$$A_{n,\delta}(x) = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} .$$

Chứng minh rằng với mọi $(n,\delta,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \times [0;1]$:

a) $0 \le A_{n,\delta}(x) \le \dfrac{1}{4\delta^2 n}$, *b)* $0 \le A_{n,\delta}(x) \le \dfrac{1}{4\delta^4 n^2}$.

(Sử dụng bài tập 4.2.34 *a)*.

◊ **4.2.36*** Cho $p \in \mathbb{N}$, f: $[0;1] \to \mathbb{K}$ thuộc lớp C^p. Chứng minh rằng với mọi r thuộc $\{0,..., p\}$, dãy $\left(\left(B_n(f)\right)^{(r)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến $f^{(r)}$ trên $[0;1]$. (Sử dụng bài tập 4.2.33).

◊ **4.2.37 Định lý Voronovski**

*a)** Cho f: $[0;1] \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^2 và $x \in [0;1]$. Chứng minh:

$$n\left(B_n(f)(x) - f(x)\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}x(1-x)f''(x).$$

b) Từ đó suy ra rằng, nếu f: $[0;1] \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^2 và không afin thì $\|B_n(f) - f(x)\|_\infty$ không phải là một $o\left(\frac{1}{n}\right)$ khi n dần đến vô tận.

◊ **4.2.38*** Cho $x_0 \in]0;1[$, I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ chứa x_0 và nằm trong $]0;1[$, α > 0 sao cho $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$.

a) Cho f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ bị chặn, ký hiệu $M_f = \operatorname*{Sup}_{x\in I} f(x)$. Chứng minh:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(f)(x_0) \le M_f + \frac{\|f - M_f\|_\infty}{4\alpha^2 n},$$

trong đó với mọi φ thuộc $\mathbb{R}^{[0;1]}$, $\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} |\varphi(x)|$.

b) Suy ra từ *a)* rằng nếu f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ bị chặn và nếu $\left(B_n(f)(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số thực l thì $l \le \operatorname*{Sup}_{x\in I} f(x)$.

c) Cho f, g: $[0;1] \to \mathbb{R}$ bị chặn sao cho: $\forall x \in I, f(x) = g(x)$. Chứng minh rằng nếu một trong hai dãy $\left(B_n(f)(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(B_n(g)(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ thì dãy kia cũng hội tụ và chúng có cùng giới hạn.

◊ **4.2.39* Khảo sát cho trường hợp Hölder**

a) Cho $\alpha \in]0;1]$, f: $[0;1] \to \mathbb{K}$ α - HÖlder tức là có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ |f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha.$$

Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \|B_n(f) - f\|_\infty \le \dfrac{M}{4^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

(có thể sử dụng bất đẳng thức HÖlder, xem Tập 1, 5.4.3):

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{C}^n, \forall (y_1,...,y_n) \in \mathbb{C}^n, \forall p \in]1;+\infty[$:

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

b) Cho $\alpha \in]0;1]$ và $f_\alpha : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left|x-\frac{1}{2}\right|^\alpha \end{array}$.

Với $a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*, x \in [0;1]$, ký hiệu: $\quad S_a(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} |k-nx|^a$.

α) Chứng minh (sử dụng bất đẳng thức Hölder):

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \forall p \in]1;+\infty[\,, \quad S_{a+b}(x) \le \left(S_{pa}(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(S_{qb}(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

β) Bằng cách chọn a, b, p trong bất đẳng thức trên một cách thích hợp, suy ra:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \quad S_\alpha(x) \ge n^{\alpha/2} x(1-x)$.

γ) Kết luận: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|B_n(f_\alpha) - f_\alpha\|_\infty \ge \frac{1}{4n^{\alpha/2}}$.

4.2.3 Xấp xỉ bởi một đa thức lượng giác

Trong § 4.2.3 này, T là một số thực > 0, (nó sẽ là chu kỳ của các hàm số được xét đến) và $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gọi là **tần số**.

◆ **Định nghĩa** Ta gọi mọi ánh xạ U: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sao cho có $N \in \mathbb{N}$ và $(c_n)_{-N \le n \le N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$ để

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}.$$

là **đa thức lượng giác phức.**

Nhận xét:

Với các ký hiệu dùng trong định nghĩa trên , nếu $N \ge 1$, ta có với mọi t thuộc $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=-N}^{-1} c_n(\cos n\omega t + \mathrm{i}\sin n\omega t) + c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n(\cos n\omega t + \mathrm{i}\sin n\omega t) \\ &= \sum_{m=1}^{N} c_{-m}(\cos m\omega t - \mathrm{i}\sin m\omega t) + c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n(\cos n\omega t + \mathrm{i}\sin n\omega t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n + c_{-n})\cos n\omega t + \mathrm{i}(c_n - c_{-n})\sin n\omega t. \end{aligned}$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n})$ thì ta có với mọi $t \in \mathbb{R}$:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Đảo lại, cho $N \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{0 \le n \le N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$, $(b_n)_{0 \le n \le N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$ sao cho $b_0 = 0$ và ký hiệu với $n \in \mathbb{Z}$ mà $-N \le n \le N$:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) & \text{nếu } \ 0 \le n \le N \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + \mathrm{i}b_{-n}) & \text{nếu } \ -N \le n \le 0 \end{cases}$$

thì với mọi t thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

Vậy có thể xem một đa thức lượng giác phức như một tổ hợp tuyến tính với hệ số phức của các hàm số $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$ haylà một tổ hợp tuyến tính với hệ số phức của các hàm số $t \mapsto \cos n\omega t$ và các hàm số $t \mapsto \sin n\omega t$.

Các họ $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{Z}}$ và $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos n\omega t \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}} \cup \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin n\omega t \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$ là độc lập tuyến tính, nên ta suy ra tính duy nhất của các hệ số của một đa thức lượng giác.

◆ **Định lý (Định lý thứ hai của Weierstrass)**

Với mọi ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục, T-tuần hoàn, có một dãy những đa thức lượng giác phức hội tụ đều đến f trên $\mathbb{R}$.

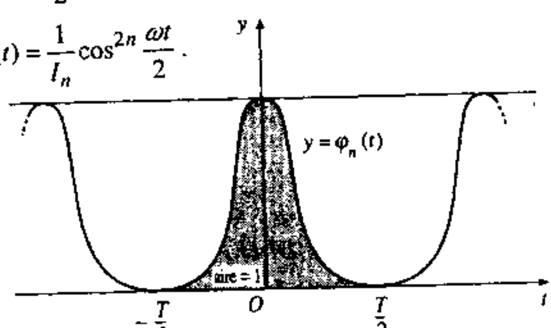
Chứng minh (ngoài chương trình):

Ký hiệu E là tập các đa thức lượng giác phức. Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục và T-tuần hoàn.

a) Xây dựng một dãy làm chính quy $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Với $n \in \mathbb{N}$, tích phân $I_n = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^{2n} \frac{\omega t}{2} \mathrm{d}t > 0$; xét ánh xạ $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{I_n} \cos^{2n} \frac{\omega t}{2}.$$



Rõ ràng rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

- φ_n chẵn,
- φ_n là T-tuần hoàn,
- φ_n liên tục trên $\mathbb{R}$,

- $\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n = 1$.

b) Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu f_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(u)\varphi_n(t-u)\mathrm{d}u$$

(tích phân đó tồn tại vì với $t \in \mathbb{R}$ cố định, ánh xạ $u \mapsto f(u)\varphi_n(t-u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$).

Ánh xạ f_n gọi là **tích chập của** f **với** φ_n và thường được ký hiệu là $f * \varphi_n$.

c) Hãy chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in E$.

- Bằng cách tuyến tính hoá $\cos^{2n} \dfrac{\omega t}{2}$, có $(c_{n,k})_{0 \le k \le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cos k\omega t,$$

điều đó chứng tỏ : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n \in E$.

- Bấy giờ, với mọi $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ta có:

$$f_n(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(u) \quad \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cos k\omega(t-u)\mathrm{d}u$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(c_{n,k}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\cos k\omega u\mathrm{d}u\right)\cos k\omega t + \left(c_{n,k}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\sin k\omega u\mathrm{d}u\right)\sin k\omega t\right),$$

điều đó chứng tỏ: $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in E$.

d) Hãy chứng minh $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ta có:

$$f_n(t) = \int_{-T/2}^{T/2} f(u)\varphi_n(t-u)\mathrm{d}u = \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t-v)\varphi_n(v)\mathrm{d}v = \int_{-T/2}^{T/2} f(t-v)\varphi_n(v)\mathrm{d}v$$

do $v \mapsto f(t-v)\varphi_n(v)$ là T - tuần hoàn.

Từ đó với mọi $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

$$\left|f_n(t) - f(t)\right| = \left|\int_{-T/2}^{T/2} \big(f(t-v) - f(t)\big)\varphi_n(v)\mathrm{d}v\right| \le \int_{-T/2}^{T/2} \left|f(t-v) - f(t)\right|\varphi_n(v)\mathrm{d}v.$$

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ và T - tuần hoàn, dùng định lý Heine trên $[0; 2T]$, suy ra f liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy có $\eta \in \left]0; \dfrac{T}{2}\right[$ sao cho:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left(|x-y| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mặt khác, vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ và T-tuần hoàn nên f bị chặn: có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \le M$ .. Khi đó, ta có:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\eta}^{\eta} |f(t-v)-f(t)| \varphi_n(v) dv \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(v) dv$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(v) dv = \frac{\varepsilon}{2}.$$

- $\int_{-T/2}^{-\eta} |f(t-v)-f(t)| \varphi_n(v) dv + \int_{-T/2}^{T/2} |f(t-v)-f(t)| \varphi_n(v) dv$

$$\leq 4M \int_{\eta}^{T/2} \varphi_n(v) dv \leq \frac{4M\left(\frac{T}{2}-\eta\right)}{I_n} \cos^{2n} \frac{\pi\eta}{T}.$$

Nhưng $I_n = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^{2n+1} \frac{\omega t}{2} dt \underset{s=\sin\frac{\omega t}{2}}{=} \frac{2}{\omega} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^n ds = \frac{4}{\omega} \int_0^1 (1-s^2)^n ds$

$$\geq \frac{4}{\omega} \int_0^1 (1-s)^n ds = -\frac{4}{\omega} \left[\frac{(1-s)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{4}{\omega(n+1)}.$$

Vì $M\left(\frac{T}{2}-\eta\right)\omega(n+1)\cos^{2n} \frac{\pi\eta}{T} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \Rightarrow \int_{-T/2}^{-\eta} |f(t-v)-f(t)| \varphi_n(v) dv + \int_{\eta}^{T/2} |f(t-v)-f(t)| \varphi_n(v) dv \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như thế, ta đã chứng minh: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(n \geq N \Rightarrow |f_n(t)-f(t)| \leq \varepsilon\right)$, tức là:

$$f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Nhận xét:

1) Định lí thứ hai của Weierstrass là một trường hợp riêng của **định lý Stone - Weierstrass**, xem **C 4.4**.

2) Định lí thứ hai của Weierstrass có thể được diễn tả thành: tập các đa thức lượng giác phức (với chu kỳ T) là trù mật trong kgv các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ liên tục và T-tuần hoàn đối với chuẩn $\|\cdot\|_\infty$

3) Vì mọi đa thức lượng giác thuộc lớp C^∞, ta suy ra từ định lý thứ hai của Weierstrass kết quả sau: Mọi ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ liên tục và T-tuần hoàn là giới hạn đều trên $\mathbb{R}$ của một dãy ánh xạ thuộc lớp C^∞ và T-tuần hoàn.

◆ **Hệ quả** Cho f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục và T-tuần hoàn. Nếu với mọi $n \in \mathbb{Z}$, $\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = 0$ thì $f = 0$.

Chứng minh:
Theo giả thiết, vì mọi đa thức lượng giác phức là tổ hợp tuyến tính của các hàm số $t \mapsto e^{in\omega t}$ ($n \in \mathbb{Z}$), ta có: với mọi đa thức lượng giác phức U, $\int_0^T U(t)f(t)\mathrm{d}t = 0$ và vậy lấy phức liên hợp, $\int_0^T U(t)\overline{f(t)}\mathrm{d}t = 0$.. Theo định lý thứ hai của Weierstrass, có một dãy đa thức lượng giác phức $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ đến f. Từ đó với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$0 \le \int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^T \overline{f}(t)\left(f(t) - U_n(t)\right)^2 \mathrm{d}t \le T\|f\|_\infty \|f - U_n\|_\infty .$$

Vì $\|f - U_n\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0$, suy ra $\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$, từ đó do f liên tục trên [0;1]: $\forall t \in [0;T]$, $f(t) = 0$. Cuối cùng vì f là T - tuần hoàn, ta kết luận: $f = 0$. ■

Chúng ta sẽ sử dụng định lý thứ hai của Weierstrass trong khảo sát các chuỗi Fourier, xem 6.2.3.

4.3 Chuỗi ánh xạ

Ta gọi **chuỗi ánh xạ** là mọi cặp $\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ gồm một dãy ánh xạ $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$, trong đó X là một tập không rỗng và dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Chuỗi ánh xạ $\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ được ký hiệu là $\sum_{n\geq 0} f_n$ hay $\sum_{n\geq 0}\left(f_n : X \to E\right)$ khi ta muốn nhắc nhở đến tập nguồn và tập đích của các f_n. Với $n \in \mathbb{N}$, S_n gọi là **tổng riêng thứ *n*** của chuỗi $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Các từ đó cũng được dùng cho chuỗi $\sum_{n\geq n_0} f_n$ mà chỉ số "*xuất phát*" là n_0, $n_0 \in \mathbb{N}$.

4.3.1 Các sự hội tụ

Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}\left(f_n : X \to E\right)$.

◆ **Định nghĩa 1** Ta nói $\sum_{n\geq 0} f_n$ **hội tụ đơn** (trên X) nếu và chỉ nếu dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đơn (trên X), tức là nếu và chỉ nếu với mọi x thuộc X, chuỗi $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ hội tụ trong E.

Khi Y là một bộ phận của X, ta nói $\sum_{n\geq 0} f_n$ **hội tụ đơn trên** Y nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 0} f_n\big|_Y$ hội tụ đơn trên Y tức là nếu và chỉ nếu với mọi x thuộc Y, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ hội tụ trong E.

Đôi khi ta gọi tập các x thuộc X sao cho $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ hội tụ là **tập** (hay **miền**) **hội tụ đơn** của $\sum_{n\geq 0} f_n$.

◆ **Định nghĩa 2** Cho $\sum_{n\geq 0} f_n$ là một chuỗi ánh xạ; giả sử rằng $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên X.

• Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta gọi **phần dư cấp** n là ánh xạ R_n: f: $X \to E$ xác định bởi:

$$\forall x \in X,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

• Ta gọi **tổng của chuỗi** $\sum_{n\geq 0} f_n$, ký hiệu $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, là ánh xạ từ X vào E xác định bởi:

$$\forall x \in X, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Nhận xét:

1) Khái niệm phần dư cấp n của một chuỗi ánh xạ chỉ có nghĩa khi chuỗi ánh xạ đó hội tụ đơn.

2) Với các ký hiệu trên, nếu $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn thì ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

◆ **Định nghĩa 3** Ta nói $\sum_{n\geq 0} f_n$ **hội tụ tuyệt đối** (trên X) nếu và chỉ nếu với mọi x thuộc X, $\sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|$ hội tụ (trong $\mathbb{R}$).

Nhận xét:

$\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ tuyệt đối nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ hội tụ đơn, trong đó ta ký hiệu $\|f_n\|$ là ánh xạ $\|f_n\| : \begin{matrix} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f_n(x)\| \end{matrix}$.

Cần tránh nhầm lẫn ánh xạ $\|f_n\|$ với số thực $\|f_n\|_\infty$. Trong thực hành, E thường là $\mathbb{K}$ và khi đó chuẩn $\|.\|$ là $|.|$ (giá trị tuyệt đối hay môđun); trong trường hợp này, $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ tuyệt đối nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ hội tụ đơn, trong đó $|f_n|$ là ánh xạ $|f_n| : \begin{matrix} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f_n(x)| \end{matrix}$. Chính từ đó mà có từ ngữ "hội tụ tuyệt đối". ■

Nếu Y là một bộ phận của X, ta nói $\sum_{n\geq 0} f_n$ **hội tụ tuyệt đối** trên Y nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 0} f_n|_Y$ hội tụ tuyệt đối (trên Y), tức là nếu và chỉ nếu với mọi x thuộc Y, $\sum_{n\geq 0}\|f_n(x)\|$ hội tụ (trong $\mathbb{R}$).

Đôi khi ta gọi tập các x thuộc X sao cho $\sum_{n\geq 0}\|f_n(x)\|$ hội tụ là **tập** (hay **miền**) **hội tụ tuyệt đối** của $\sum_{n\geq 0} f_n$.

◆ **Định nghĩa 4** Ta nói $\sum_{n\geq 0} f_n$ **hội tụ đều** (trên X) nếu và chỉ nếu dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đều (trên X).

Nhận xét:

Ta chứng minh dễ dàng rằng nếu $\sum_n f_n$ và $\sum_n g_n$ hội tụ đều trên X và nếu $\lambda \in \mathbb{K}$ cố định thì $\sum_n(\lambda f_n + g_n)$ hội tụ đều trên X. ■

Khi Y là một bộ phận của X, ta nói $\sum_n f_n$ **hội tụ đều trên** Y nếu và chỉ nếu $\sum_n f_n|_Y$ hội tụ đều (trên Y).

Rõ ràng rằng nếu $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên Y và $Z \subset Y$ thì $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên Z.

◆ **Mệnh đề 1** $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều trên X nếu và chỉ nếu :

$$\begin{cases}\text{chuỗi } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đơn trên } X,\\ \text{dãy phần dư } (R_n)_{n\geq 0} \text{ hội tụ đều đến 0 trên } X.\end{cases}$$

Chứng minh:

1) Giả sử $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều. Khi đó $(S_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đều, do đó hội tụ đơn.

Ký hiệu S là giới hạn (đơn và đều) của $(S_n)_{n\geq 0}$ thì ta có: $\forall x \in X,\ S_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} S(x)$. Vì với mọi x thuộc X, $S_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ (hạng tử trong E) nên suy ra với mọi x thuộc X, chuỗi $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ hội tụ và có tổng $S(x)$. Vậy $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn (trên X) và $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = S$.

Vì $S_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} S$ và do $(\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n)$ suy ra: $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$.

2) Đảo lại, giả sử $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn và $(R_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đều đến 0. Ký hiệu $S = \sum_{0}^{+\infty} f_n$.

Vì $(\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = S - R_n)$, suy ra $S_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} S$ và vậy $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều.

◆ **Mệnh đề 2** Nếu $\sum_{n} f_n$ hội tụ đều trên X thì $(f_n)_n$ hội tụ đều về 0 trên X.

Chứng minh:

Vì $S_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} S$ ta có $f_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} S - S = 0$. ■

Nhận xét:

1) Nếu $\sum_{n} f_n$ hội tụ đều thì các f_n bị chặn bắt đầu từ một thứ hạng nào đó và $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

2) Dùng phản đảo đề, nếu $\|f_n\|_\infty \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$ thì $\sum_{n} f_n$ không hội tụ đều. ■

Định lý sau đây nằm ngoài chương trình.

◆ **Định lý 1** **(Tiêu chuẩn Cauchy về hội tụ đều của chuỗi ánh xạ).**

Để $\sum_{n} f_n$ hội tụ đều trên X, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in X,$$
$$\left(N \leq p < q \Rightarrow \left\| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right\| \leq \varepsilon \right).$$

Chứng minh:

Chỉ cần áp dụng tiêu chuẩn Cauchy về hội tụ đều của một dãy ánh xạ (xem 4,1,1, Định lý) vào dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\geq 0}$ với chú ý rằng $S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} f_k$.

◆ **Định nghĩa** Ta nói $\sum_n f_n$ **hội tụ chuẩn tắc** (trên X) nếu và chỉ nếu

có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \Rightarrow f_n \in \mathrm{B}(X,E)\right) \\ \sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty \text{ hội tụ} \end{cases}$.

Nhắc lại rằng $\mathrm{B}(X,E)$ chỉ tập các ánh xạ bị chặn từ X vào E (xem Tập 3, 2.1.4).

Nhận xét:
Chứng minh dễ dàng rằng nếu $\sum_n f_n$ và $\sum_n g_n$ hội tụ chuẩn tắc trên X và nếu $\lambda \in \mathbb{K}$ cố định thì $\sum_n \left(\lambda f_n + g_n\right)$ hội tụ chuẩn tắc trên X.. ■

Nếu Y là một bộ phận của X, ta nói $\sum_n f_n$ **hội tụ chuẩn tắc trên** Y nếu và chỉ nếu $\sum_n f_n|_Y$ hội tụ chuẩn tắc trên Y.

Rõ ràng rằng nếu $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên Y và nếu $Z \subset Y$ thì $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên Z. ■

Nhận xét:
Để $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên X, điều kiện cần và đủ là có $N \in \mathbb{N}$ và một dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ với số hạng trong $\mathbb{R}_+$ sao cho: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad \|f_n(x)\| \leq u_n \\ \sum_{n \geq N} u_n \text{ hội tụ} \end{cases}$.

◆ **Định lý 2**

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \underset{\text{tụ tuyệt đối}}{\sum_{n\geq 0} f_n} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \underset{\text{tụ chuẩn tắc}}{\sum_{n\geq 0} f_n} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \underset{\text{tụ đơn}}{\sum_{n\geq 0} f_n} \\ & \underset{\text{tụ đều}}{\sum_{n\geq 0} f_n} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

(ta viết tắt hội tụ chuẩn tắc, hội tụ tuyệt đối, hội tụ đều, hội tụ đơn theo thứ tự là: tụ chuẩn tắc, tụ tuyệt đối, tụ đều, tụ đơn).

Chứng minh:

1) Giả sử $\sum_{n \geq 0} f_n$ hội tụ chuẩn tắc. Khi đó có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \geq N, f_n \in B(X,E), \\ \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty \text{ hội tụ.} \end{cases}$$

Vì với mọi x thuộc X, $\|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_\infty$ suy ra với mọi x thuộc X, $\sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|$ hội tụ, vậy $\sum_{n\geq N} f_n$ hội tụ tuyệt đối, và vậy $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ tuyệt đối.

2) Nếu $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ tuyệt đối thì với mọi x thuộc X, $\sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|$ hội tụ và vậy $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ hội tụ (xem Tập 3, 3.3.2, Định lý ; E là đầy vì E là một $\mathbb{K}$ -kgvđc hữu hạn chiều, xem Tập 3, 1.4.2, Định lý 2).

3) Giả sử $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ chuẩn tắc. Có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \geq N, \quad f_n \in \mathrm{B}(X,E) \\ \sum_{n\geq N} \|f_n\|_\infty \text{ hội tụ} \end{cases}.$$

Ta vừa thấy $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn. Với mọi $(n,x) \in \mathbb{N}\times X$ sao cho $n \geq N$, ký hiệu R_n là phần dư cấp n thì ta có:

$$\|R_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty .$$

Điều đó chứng tỏ:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} R_n \in \dot{\mathrm{B}}(X,E) \\ \|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \end{cases}.$$

Theo định nghĩa phần dư cấp n của chuỗi số hội tụ $\sum_{k\geq N} \|f_k\|_\infty$, ta có:

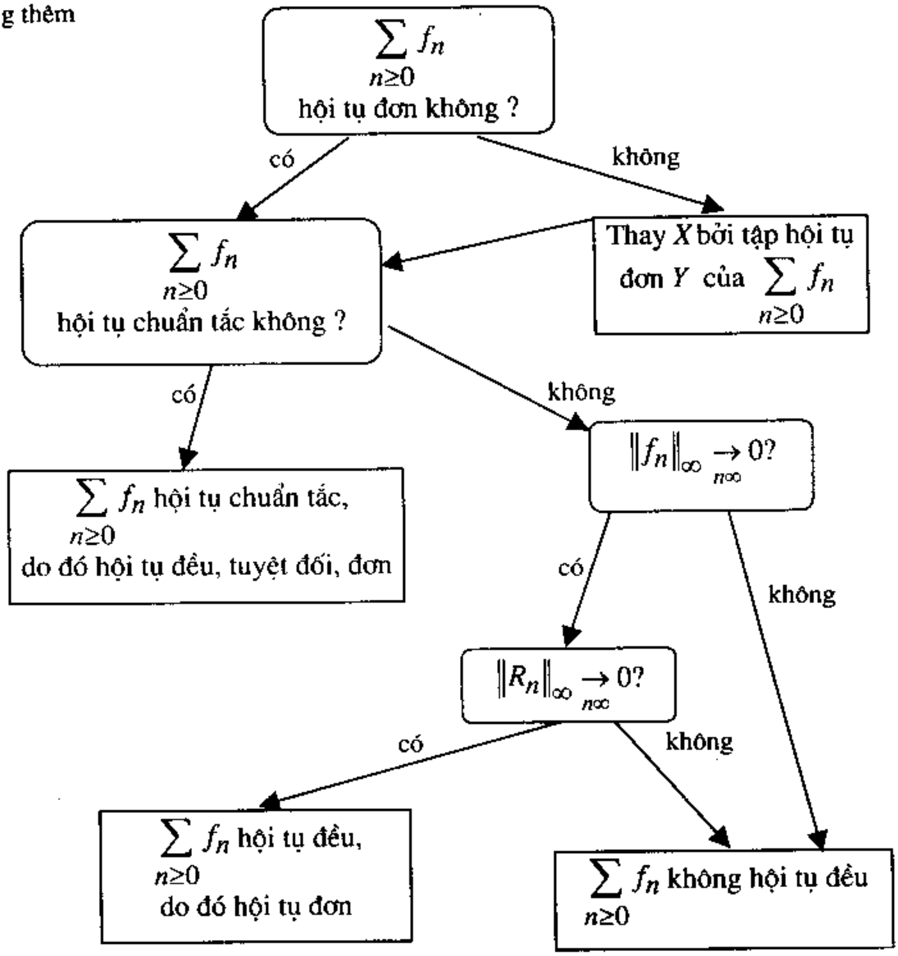
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0 \text{ và vậy } \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Theo Mệnh đề 1, kết luận được rằng $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều.

4) Ta đã thấy rằng nếu $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều thì $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn (xem Mệnh đề 1). ∎

Tóm tắt các bước khảo sát một chuỗi ánh xạ

Vấn đề là trên một ví dụ cụ thể, hãy khảo sát các sự hội tụ của một chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(f_n : X \to E)$. Ta có thể đề nghị các bước như sau mà đôi khi cũng cần bổ sung thêm



Trong trường hợp không có hội tụ chuẩn tắc hay hội tụ đều của $\sum_{n\geq 0} f_n$ trên X, hãy chỉ ra các bộ phận của X trên đó có hội tụ chuẩn tắc hay hội tụ đều.

VÍ DỤ:

1) Khảo sát $\sum_{n\geq 0} f_n$, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin nx}{n!} \end{array}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n bị chặn và $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n!}$. Vì $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ hội tụ, suy ra $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ do đo hội tụ đều, tuyệt đối, đơn.

2) Khảo sát $\sum_{n\geq 0} f_n$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

• ***Hội tụ đơn***

Với $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ hội tụ vì $n^2 f_n(x) = n^3 x^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Và rõ ràng $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ hội tụ, nên $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$.

• ***Hội tụ chuẩn tắc***

Với $n \in \mathbb{N}^*$ cố định, f_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}_+$ và:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Vậy f_n bị chặn và $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2}$.

Vì $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ phân kỳ, $\sum_{n\geq 0} f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}_+$.

Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, có $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{2}{\sqrt{N}} < a$ và khi đó ta có:

$$\forall n \geq N, \quad \left\| f_n|_{[a;+\infty[} \right\|_\infty = \sup_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Vì $\sum_{n\geq 0} f_n(a)$ hội tụ (xem hội tụ đơn) suy ra $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;+\infty[$.

• ***Hội tụ đều.***

Vì với $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2} \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$, $\sum_{n\geq 0} f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$ (xem Mệnh đề 2). Với mọi $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều trên $[a;+\infty[$ vì $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;+\infty[$.

3) Khảo sát $\sum_{n\geq 0} f_n$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n+n^3x^2}$.

- ***Hội tụ đơn***

Với $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, $\frac{1}{n+n^3x^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2} \geq 0$ và $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ hội tụ nên $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ hội tụ. Mặt khác, $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ phân kỳ. Vậy $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ đơn trên $]0;+\infty[$. Từ nay, thay cho f_n, ta xét ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) \end{array}$ mà ta vẫn ký hiệu là f_n.

- ***Hội tụ chuẩn tắc.***

Với $n \in \mathbb{N}^*$ cố định, f_n bị chặn và $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in]0;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$. Vì $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ phân kỳ, ta kết luận $\sum_{n\geq 1} f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $]0;+\infty[$.

Với $a \in\ ]0;+\infty[$ cố định, $\left\| f_n|_{[a;+\infty[} \right\|_\infty = \sup_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$ và $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ hội tụ (xem hội tụ đơn), vậy $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;+\infty[$.

- ***Hội tụ đều.***

Ta đã thấy $\|f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Hãy khảo sát dãy các phần dư $(R_n)_n$. Với mọi $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0;+\infty[$, ta có:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k+k^3x^2}$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+k^3x^2} \geq \frac{n}{2n+8n^3x^2} = \frac{1}{2+8n^2x^2}$$

Đặc biệt: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{10}$. Điều này chứng tỏ $\|R_n\|_\infty \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} 0$ và vậy $\sum_{n\geq 1} f_n$ không hội tụ đều trên $]0;+\infty[$.

Mặt khác, với $a > 0$ cố định, $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ đều trên $[a;+\infty[$ vì $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;+\infty[$.

4) Khảo sát $\sum_{n\geq 1} f_n$, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right) \end{array}$.

- ***Hội tụ đơn.***

Cho $x \in \mathbb{R}_+$ cố định, ta có khai triển tiệm cận:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + \underset{n\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (xem Tập 3, 3.3.5, Ví dụ) và chuỗi $\sum_{n\geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ hội tụ tuyệt đối. Vậy $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$.

- ***Hội tụ tuyệt đối.***

  Với $x\in\mathbb{R}_+^*$ cố định, $|f_n(x)| \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n(1+x)}\geq 0$ và $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n\geq 1}|f_n(x)|$ phân kỳ. Vậy tập hội tụ tuyệt đối của $\sum_{n\geq 1} f_n$ là $\{0\}$.
- ***Hội tụ chuẩn tắc***

  Vì hội tụ chuẩn tắc kéo theo hội tụ tuyệt đối, $\sum_{n\geq 1} f_n$ chỉ hội tụ chuẩn tắc trên $\{0\}$.
- ***Hội tụ đều***

  Với $x\in\mathbb{R}_+$ cố định, chuỗi $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ thuộc phạm vi ĐLĐB (Định lý đặc biệt) về hội tụ của chuỗi đan dấu (xem Tập 3, 3.3.5, Định lý) vì nó đan dấu và $\left(|f_n(x)|\right)_{n\geq 1}$ giảm dần đến 0. Vậy (xem 3.3.8, 2), c), Mệnh đề):

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+, \qquad R_n(x)=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\leq |f_{n+1}(x)|.$$

Việc khảo sát sự biến thiên của $|f_{n+1}|$ chứng tỏ $\qquad \|f_{n+1}\|_\infty=\frac{1}{n+1}$.

Vậy, R_n bị chặn với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ và $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Kết quả là $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

Bài tập

◊ **4.3.1** Khảo sát (sự hội tụ đơn, tuyệt đối, chuẩn tắc, đều) các chuỗi ánh xạ $\sum_n f_n$ sau:

a) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f_n(x)=\frac{1}{n^2}\left(x^n+(1-x)^n\right)$, $\quad n\geq 1$

b) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f_n(x)=xe^{-nx^2}$, $\quad n\geq 0$

c) $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$, $\quad f_n(x)=n^2(x^{2n}-x^{2n+1})$, $\quad n\geq 0$

d) $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $\quad f_n(x)=x^2e^{-x\sqrt{n}}$, $\quad n\geq 0$

e) $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $\quad f_n(x)=\frac{nx^2}{1+n^3x}$, $\quad n\geq 0$

f) $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+nx}$, $\quad n \geq 0$

g) $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + x^{-n}}$, $\quad n \geq 0$

h) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu } \quad n < x < n+1 \\ 0 & \text{với mọi x khác} \end{cases}$, $\quad n \geq 1$

i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{n^4 + x^2}$, $\quad n \geq 1$

j) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \operatorname{th}\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \dfrac{x}{\sqrt{n+1}}$, $\quad n \geq 1$

k) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{\ln(n+x)}{n^2 + x^2}$, $\quad n \geq 1$

*l)** $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{n} e^{-(x-n)^2}$, $\quad n \geq 1$

*m)** $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x^2)\ln x}$, $\quad n \geq 2$

*n)** $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n n^{-x}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $\quad n \geq 2$

o) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, $\quad n \geq 1$

p) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$, $\quad n \geq 1$

*q)** $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$, $\quad n \geq 0$.

◊ **4.3.2** Đối với các chuỗi ánh xạ $\sum\limits_n f_n$ sau, hãy khảo sát các sự hội tụ (đơn, tuyệt đối, chuẩn tắc, đều) và tính tổng của chúng:

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$, $\quad n \geq 0$

b) $f_n : \mathbb{R} - \{-1;1\} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, $\quad n \geq 1$

c) $f_n : \mathbb{C} - \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, $\quad f_n(z) = \dfrac{2^n}{z^{2^n} + 1}$, $\quad n \geq 1$.

◊ **4.3.3** Với $n \geq 1$, ký hiệu $f_n : \left]0;+\infty\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^x e^{-nx}$.

a) Khảo sát các sự hội tụ của $\sum\limits_n f_n$.

b) Ký hiệu S là tổng: $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Chứng minh $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

◊ **4.3.4** Với $n \geq 0$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Min}\left(n!x, \frac{1}{n!x}\right) \end{array}$.

a) Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_n f_n$.

b) Chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{7}{2}$.

◊ **4.3.5** Giả sử $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy phức sao cho $\left(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1\right)$ và với $n \in \mathbb{N}$, xét $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & a_n e^{-|x-n|} \end{array}$.

a) Khảo sát sự hội tụ đơn của $\sum_n f_n$.

b) Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{2e}{e-1}$.

◊ **4.3.6** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \end{array}$.

b) Ký hiệu $S=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, chứng minh $S(x) \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$.

◊ **4.3.7** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{n(1+n^2x)} \end{array}$,

b) Ký hiệu $S=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, hỏi S có đạo hàm bên phải tại 0 hay không?

◊ **4.3.8** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x\sqrt{n}} \end{array}$.

b) Ký hiệu $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, hãy xác định phần chính của $S(x)$ khi $x \to 0^+$.

◊ **4.3.9** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n} \end{array}$.

b) Ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, lập khai triển tiệm cận của $S(x)$ với độ chính xác $\frac{1}{x}$ khi $x \to +\infty$. Sử dụng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, xem 5.5.3, 4) Nhận xét.

◊ **4.3.10*** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\end{array}$.

Ký hiệu $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

*b)** Xác định phần chính của $S(x)$ khi x dần đến $+\infty$.

c) Tính $S(1)$ (dùng công thức Wallis, $\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} \underset{n\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$, Tập 3, Ví dụ 3.3.7, 4)).

◊ **4.3.11*** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{nx}{(n^2+x)^2}\end{array}$.

*b)** Ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, chứng minh: $S(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$.

◊ **4.3.12** Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} f_n$ là một chuỗi ánh xạ từ I vào $\mathbb{R}$, tăng (theo thứ tự: lồi) hội tụ đơn trên I. Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ là tăng (theo thứ tự , lồi) trên I.

◊ **4.3.13 Hàm số ζ của Riemann**

Ký hiệu $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ với $x \in]1;+\infty[$ (xem bài tập 4.3.1, o)), và $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ với $x \in]0;+\infty[$ (xem bài tập 4.3.1, p)). Chứng minh:

$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad T(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

◊ **4.3.14** Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ và $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

a) Chứng minh: $S_n \xrightarrow[n\infty]{} \ln 2$ và $T_n \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\pi}{4}$.

b) Chứng minh rằng các chuỗi $\sum_{n\geq 1} (S_n - \ln 2)$ và $\sum_{n\geq 1} (T_n - \frac{\pi}{4})$ hội tụ và tính tổng của các chuỗi đó.

◊ **4.3.15** Giả sử $(a_n)_{n\geq 1}$ là một dãy thực sao cho $\sum_{n\geq 1} n^2 a_n^2$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1} f_n$ xác định bởi $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n \sin nx\end{array}$ hội tụ chuẩn tắc.

4.3.2 Hội tụ đều và giới hạn

Ở đây ta vẫn giữ các ký hiệu của 4.1.2.

◆ **Định lý** Cho $a \in \overline{X}$, $\sum_{n\geq 0} (f_n : X \to E)$ là một chuỗi ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ có giới hạn } l_n \text{ tại } a, \\ \bullet \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đều trên } X \end{cases}$

thì khi ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$: $\begin{cases} \bullet \sum_{n\geq 0} l_n \text{ hội tụ trong } E, \\ \bullet\ S \text{ có giới hạn tại } a, \\ \bullet \lim_a S = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n \end{cases}$

Chứng minh:

Chỉ cần áp dụng Định lý 4, 1. 2, cho dãy $(S_n)_{n\geq 0}$ các tổng riêng $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Nhận xét:
Phần thứ ba của kết luận của định lý có thể được diễn tả thành: có thể hoán vị $\lim_{x\to a}$ với $\sum_{n=0}^{+\infty}$:

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

4.3.3 Hội tụ đều và tính liên tục

Trong § 4.3.3 này, X chỉ một bộ phận không rỗng của một $\mathbb{K}$ - kgvđc hữu hạn chiều.

◆ **Định lý** Cho $a \in X$, $\sum_{n\geq 0}(f_n : X \to E)$ là một chuỗi ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ liên tục tại } a, \\ \bullet \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đều trên } X, \end{cases}$

thì $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục tại a.

Chứng minh:

Chỉ cần áp dụng Định lý 4.1.3 cho dãy $(S_n)_{n\geq 0}$ các tổng riêng $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Nhận xét:
Dùng phản đảo đề, định lý trên cho phép trong một số trường hợp, chứng minh sự không hội tụ đều. Chẳng hạn $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$, hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ nhưng không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ vì mọi f_n liên tục tại 0 và tổng S không liên tục tại 0

do: $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}.$$

◆ **Hệ quả 1** Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(f_n : X \to E)$.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ liên tục trên } X, \\ \bullet \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đều trên } X, \end{cases}$

thì $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục trên X. ■

Cũng giống như lúc khảo sát dãy ánh xạ, nhiều khi không có sự hội tụ đều của $\sum_{n\geq 0} f_n$ trên X, nhưng có sự hội tụ đều trên những tập con nào đó của X. Từ đó có định nghĩa sau:

◆ **Định nghĩa** Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(f_n : X \to E)$. Ta nói $\sum_{n\geq 0} f_n$ **hội tụ đều địa phương** trên X nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ trên mọi tập con compắc của X.

◆ **Hệ quả 2** Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0}(f_n : I \to E)$ là một chuỗi ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ liên tục trên } I, \\ \bullet \ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đều địa phương trên } I, \end{cases}$

thì $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục trên I.

Giả sử A là một đại số hữu hạn chiều (kết hợp, có đơn vị) định chuẩn, phần tử trung hoà được ký hiệu là e. Ta đã thấy trong Tập 3, 3.3.3, rằng:

- Với mọi a thuộc A mà $\|a\| < 1$, chuỗi cấp số nhân $\sum_{n\geq 0} a^n$ hội tụ, $e - a$ khả nghịch và $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = (e-a)^{-1}$.
- Với mọi a thuộc A, chuỗi $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ hội tụ và tổng của nó được ký hiệu là $\exp(a)$.

◆ **Mệnh đề 1** Ánh xạ $a \mapsto (e-a)^{-1}$ liên tục trên $B(0; 1)$.

Chứng minh:

Cho $\alpha \in [0;1[$. Chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(a \mapsto a^n)$ hội tụ chuẩn tắc, vậy hội tụ đều, trên quả cầu đóng $B'(0; \alpha)$ vì với mọi a thuộc $B'(0; \alpha)$ và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $\|a^n\| \leq \|a\|^n \leq \alpha^n$ và $\sum_{n\geq 0} \alpha^n$ hội tụ.

Do với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $a \mapsto a^n$ liên tục trên $B'(0; \alpha)$ suy ra (xem Định lý) $a \mapsto (e-a)^{-1}$ liên tục trên $B'(0;\alpha)$ và điều này đúng với mọi α thuộc $[0;1[$ nên $a \mapsto (e-a)^{-1}$ liên tục trên $B(0;1)$. ∎

Một lý luận tương tự chứng minh Mệnh đề sau:

◆ | **Mệnh đề 2** Ánh xạ $a \mapsto \exp(a)$ liên tục trên A.

Bài tập

◊ **4.3.16** Với $n \in \mathbb{N}$ ký hiệu $f_n : \begin{array}{ccc}(\mathbb{R}_+)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1+x^{2n}}{1+y^{2n}}\end{array}$.

a) Xác định tập hội tụ đơn D của $\sum_{n\geq 0} f_n$.

b) Chứng minh rằng tổng $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục trên D.

◊ **4.3.17** Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$ trong đó $f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\end{array}$. Ký hiệu

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

b) Chứng minh rằng S liên tục trên $]1;+\infty[$.
c) Chứng minh: $S(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

◊ **4.3.18** a) Cho φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi(t) = \mathrm{E}(t) + (t - E(t))^2$. Khảo sát và vẽ đồ thị của φ. Chứng minh rằng φ là 2 - Lipschitz.
b) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu f_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{\varphi(nx)}{n^2(n+1)}$. Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$. Chứng minh rằng tổng $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ liên tục và 2 - Lipschitz.

◊ **4.3.19** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+z}$.

b) Chứng minh rằng tổng $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục trên $U = \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$.

◊ **4.3.20** Giả sử $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục, giảm sao cho $\lim_{+\infty} g = 0$. Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(n)-g(n+x)\end{array}$.

a) α) Cho $x \in \mathbb{R}_+$, chứng minh rằng các tổng riêng của chuỗi $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ bị chặn trên bởi $\sum_{p=0}^{E(x)} g(p)$ bắt đầu từ một thứ hạng nào đó.

β) Từ đó suy ra $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$. Ký hiệu $S : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\end{array}$.

b) Chứng minh rằng S tăng trên $\mathbb{R}_+$.

c) Chứng minh: $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S(x+1) - S(x) = g(x)$

d) α) Chứng minh rằng với mọi a thuộc $\mathbb{R}_+$, $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $[0; a]$

β) Từ đó suy ra S liên tục trên $\mathbb{R}_+$.

e) Xác định tập các ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sao cho $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = g(x)$.

f) Diễn tả tường minh S khi $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x}\end{array}$.

◊ **4.3.21* Hàm số ζ của *Riemann***

Với $x \in]1;+\infty[$, ký hiệu $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (xem bài tập 4.3.1 o)).

a) Chứng minh: $\zeta(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2^{-x}$.

*b)** Với $x \in \mathbb{R}_+^*$, đặt $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^{x+1}} dt$.

α) Chứng minh: $\forall x \in]1;+\infty[, \qquad \zeta(x) = \frac{x}{x-1} - xI(x)$.

β) Suy ra $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1$.

◊ **4.3.22* Hàm số Van der Waerden**

Gọi $\varphi_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ 1-tuần toàn sao cho:

$$\forall x \in [0;1], \qquad \varphi_0(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = 4^{-n}\varphi_0(4^n x).$$

Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào của $\mathbb{R}$.

4.3.4 Hội tụ đều và lấy tích phân trên một đoạn

◆ **Định lý** Giả sử $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$ và $\sum_{n\ge 0}(f_n : [a;b] \to E)$ là một chuỗi ánh xạ.

Nếu $\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ liên tục trên } [a;b], \\ \bullet \displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n \text{ hội tụ đều trên } [a;b], \end{cases}$

thì : $\begin{cases} \bullet \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ liên tục trên } [a;b], \\ \bullet \displaystyle\sum_{n\ge 0}\left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right) \text{ hội tụ trong } E, \\ \bullet \displaystyle\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$

Chứng minh:

Chỉ cần áp dụng Định lý 4.1.4, cho dãy $(S_n)_{n\ge 0}$ các tổng riêng $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Nhận xét:
Phần thứ ba của kết luận của định lí có thể được diễn tả thành: có thể hoán vị $\int_a^b$ với $\sum_{n=0}^{+\infty}$.

◆ **Mệnh đề** Cho chuỗi ánh xạ liên tục $\sum_{n\ge 0}(f_n : [a;b] \to E)$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;b]$. Khi đó, $\sum_{n\ge 0}\|f_n\|_1$ hội tụ trong $\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục trên $[a;b]$ và $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_1 \le \sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_1$.

Nhắc lại (xem Tập 3, 2.3.4 2), Nhận xét 2), rằng với $g \in C([a;b], E)$, ta ký hiệu:

$$\|g\|_1 = N_1(g) = \int_a^b \|g(t)\|\mathrm{d}t.$$

Chứng minh:

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_1 = \int_a^b \|f_n(t)\| \mathrm{d}t \le (b-a)\|f_n\|_\infty$ nên do $\sum_{n\ge 0}\|f_n\|_\infty$ hội tụ, $\sum_{n\ge 0}\|f_n\|_1$ hội tụ.

Mặt khác, theo định lý trên, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ và $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(t \mapsto \|f_n(t)\|\right)$ liên tục trên $[a;b]$, $\sum_{n\ge 0}\int_a^b f_n$ và $\sum_{n\ge 0}\int_a^b \|f_n(t)\|\mathrm{d}t$ hội tụ (theo thứ tự trong E và $\mathbb{R}$) và:

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_1 = \int_a^b \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right\| \mathrm{d}t \le \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n(t)\|\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b \|f_n(t)\|\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_1 . \blacksquare$$

VÍ DỤ:

Hãy chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x$.

Cho $x \in \mathbb{R}$ cố định. Xét chuỗi ánh xạ $\sum_{n\ge 0} f_n$ xác định bởi $f_n : |0;x| \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t^n e^{-t}}{n!}$.

Vì $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \le \frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}\right)$ và vì $\sum_{n\ge 0}\frac{|x|^n}{n!}$ hội tụ, suy ra $\sum_{n\ge 0} f_n$ hội tụ chuẩn tắc, do đó đều trên $|0;x|$. Theo định lý trên, tổng $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục trên $|0;x|$, chuỗi số $\sum_{n\ge 0}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ hội tụ và

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}e^t\mathrm{d}t = x,$$

xem Tập 2, 7.2.

Nhận xét:

Trong khá nhiều trường hợp, có thể hoán vị các ký hiệu $\int_a^b$ với $\sum_{n=0}^{+\infty}$ nhưng không có hội tụ đều. Cho $\sum_{n\ge 0}(f_n : [a;b] \to E)$ là một chuỗi ánh xạ liên tục trên $[a;b]$, hội tụ đơn trên $[a;b]$. Ký hiệu $S=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ và giả sử S liên tục từng khúc trên $[a;b]$. Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}$, R_n liên tục từng khúc trên $[a;b]$ và:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)+R_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)+\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x .$$

Nếu $\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$ thì $\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)\xrightarrow[n\infty]{}\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ và vậy $\sum_{k\geq 0}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ hội tụ và:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x .$$

Có thể nhớ một cách sơ lược rằng để có thể hoán vị được $\int_a^b$ và $\sum_{n=0}^{+\infty}$, chỉ cần chứng minh rằng **tích phân của phần dư dần đến 0 khi n dần đến vô tận**. Việc ứng dụng Nhận xét này tế nhị hơn ứng dụng Định lý trên vì có thể $\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nhưng không có $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$.

Nhận xét này cũng đúng cho tích phân trên một khoảng tuỳ ý.

VÍ DỤ:

Hãy chứng minh: $\forall a>0,\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}$.

Trước hết, ta thấy: $\forall x \in [0;1[,\qquad \frac{1}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^a)^n$.

Xét chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0} f_n$ trong đó $f_n : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R}\\ x \mapsto (-x^a)^n\end{array}$. Chuỗi $\sum_{n\geq 0} f_n$ đó hội tụ đơn trên $[0;1[$. Với mọi $(n,x)\in\mathbb{N}\times[0;1[$, ta có:

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-x^a)^k=\frac{(-x^a)^{n+1}}{1+x^a}.$$

Với mọi $n\in\mathbb{N}$, R_n liên tục trên $[0;1[$ và thác triển liên tục được tại 1 nên R_n khả tích trên $[0;1]$ và:

$$\left|\int_0^1 R_n(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_0^1\frac{x^{a(n+1)}}{1+x^a}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^{a(n+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{a(n+1)+1}\xrightarrow[n\infty]{}0 .$$

Vậy $\sum_{n\geq 0}\int_0^1(-x^a)^n\,\mathrm{d}x$ hội tụ và:

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-x^a)^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{an+1}}{an+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{an+1}.\qquad\blacksquare$$

Chúng ta sẽ thấy về sau (4.3.6) những định lý khác (định lý về hội tụ đơn điệu, định lý về hội tụ bị chặn).

Bài tập

◊ **4.3.23** Chứng minh:

a) $\int_0^{+\infty}x\left(x-\ln(e^x-1)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$

b) $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{1-\mathrm{e}^{-bx}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2},\qquad (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$

c) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{\mathrm{ch}x}\mathrm{d}x=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+a^2},\qquad a\in\mathbb{R}$

d) $\int_0^1\frac{(-\ln x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=p!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{p+1}},\qquad p\in\mathbb{N}$

e) $\int_0^1\frac{(\ln x)^p}{1-x}\mathrm{d}x=(-1)^p p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}},\qquad p\in\mathbb{N}^*$

f) $\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x^b}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb},\qquad (a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*.$

4.3.5 Hội tụ đều và lấy đạo hàm

Trong §4.3.5 này, I chỉ một khoảng trong $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm.

◆ **Định lý** Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(f_n : I \to E)$.

Nếu
$$\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I, \\ \bullet \ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đơn trên } I, \\ \bullet \ \sum_{n\geq 0} f'_n \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn trong } I, \end{cases}$$

thì
$$\begin{cases} \bullet \ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn trong } I, \\ \bullet \ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I, \\ \bullet \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n. \end{cases}$$

Chứng minh;

Chỉ cần áp dụng định lý tương tự về dãy hàm số (4.2.5, Hệ quả 1) cho dãy (S_n) các tổng riêng $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. ■

Một quy nạp trực tiếp (trên k) cho ta nhận được kết quả sau.

◆ **Hệ quả** Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(f_n : I \to E)$ và $k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu
$$\begin{cases} \bullet \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } I, \\ \bullet \text{ với mọi } i \text{ thuộc } \{0,...,k-1\}, \sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ hội tụ đơn trên } I, \\ \bullet \ \sum_{n\geq 0} f_n^{(k)} \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn trong } I, \end{cases}$$

$$\text{thì: } \begin{cases} \bullet \text{ với mọi } i \text{ thuộc } \{0,...,k-1\}, \sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ hội tụ đều trên mọi đoạn} \\ \quad \text{trong } I, \\ \bullet \ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } I, \\ \bullet \text{ với mọi } i \text{ thuộc } \{1,...,k\}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}. \end{cases}$$

■

Nhận xét: (xem 4.1.5, Nhận xét).
Trong các giả thiết của hệ quả trên, có thể thay điều kiện :

- Với mọi i thuộc $\{0,..., k\text{-}1\}$, $\sum_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ hội tụ đơn trên I

bởi điều kiện

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên I.

VÍ DỤ: **Hàm số ζ của Riemann**

Xét chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1} f_n$ trong đó $f_n :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*, f_n$ thuộc lớp C^∞ trên $]1;+\infty[$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1;+\infty[, \ \ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ hội tụ đơn trên $]1;+\infty[$ vì với mọi $k \in \mathbb{N}$ và mọi x thuộc $]1;+\infty[$, $n^{\frac{1+x}{2}} f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^{\frac{x-1}{2}}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ (theo quy tắc $n^\alpha u_n$).

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi đoạn $[a;b]$ trong $]1;+\infty[$, $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc nên đều trên $[a;b]$ vì:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a;b], \ \left|f_n^{(k)}(x)\right| = \frac{(\ln n)^k}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} = \left|f_n^{(k)}(a)\right|.$$

Theo hệ quả trên, ζ thuộc lớp C^∞ trên $]1;+\infty[$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1;+\infty[, \ \ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

■

◆ **Mệnh đề**

Giả sử A là một đại số hữu hạn chiều (kết hợp, có đơn vị), định chuẩn, $a \in A$. Khi đó ánh xạ $e_a : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to A \\ t \mapsto \exp(ta)\end{array}$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và

$De_a = ae_a = e_a a$.

Chứng minh:
Nhắc lại (xem Tập 3, 3.3.3, 2)):

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(ta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(ta)^n .$$

Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to A \\ t \mapsto \frac{1}{n!}t^n a^n\end{array}$.

- Rõ ràng rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n^{(k)}(t) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n!} t^{n-k} a^n .$$

- Với mọi $k \in \mathbb{N}$, chuỗi $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ và đều trên mọi đoạn

trong $\mathbb{R}$ vì với mọi M thuộc $\mathbb{R}_+$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-M, M], \ \left\| f_n^{(k)}(t) \right\| = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n!} M^{n-k} \|a\|^n ,$$

và chuỗi số $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n!} M^{n-k} \|a\|^n$ hội tụ.

Từ Hệ quả trên, suy ra e_a thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và

$$\forall t \in \mathbb{R}, De_a = e'_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} t^{n-1} a^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} a^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p a^{p+1} .$$

Cuối cùng, vì $x \mapsto ax$ và $x \mapsto xa$ liên tục trên A nên:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p a^{p+1} = ae_a(t) = e_a(t)a .$$

Bài tập

◇ **4.3.24** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n \geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}\end{array}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.

b) Chứng minh rằng S thuộc lớp C^1 trên $[0;+\infty[$.

c) Vẽ đường biểu diễn của S.

◊ **4.3.25** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$ trong đó $f_n : D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.

b) Chứng minh rằng S thuộc lớp C^1 trên D: Hỏi $S(1)$ bằng bao nhiêu?

◊ **4.3.26** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.

b) Chứng minh rằng S thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^*$.

c) Chứng minh $S(1) = 1$, S lẻ, $\frac{S(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

◊ **4.3.27** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-n^2 x}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.

b) Chứng minh rằng S thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}_+^*$.

c) Lập khai triển tiệm cận của $S(x)$ với độ chính xác e^{-5x} khi $x \to +\infty$.

d) Vẽ đường biểu diễn của S.

◊ **4.3.28** Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, và $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

a) Chứng minh rằng S xác định trên $\mathbb{R}_+^*$, $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$ và $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

b) Chứng minh rằng S thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}_+^*$.

c) Chứng minh: $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

d) Lập khai triển tiệm cận của $S(x)$ với độ chính xác $\frac{1}{x^3}$ khi $x \to +\infty$.

e) Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$.

◊ **4.3.29** Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.

b) Khảo sát tính liên tục, sự tồn tại của đạo hàm, các giới hạn tại 0^+ và $+\infty$ của S.

c) Sử dụng $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (xem Tập 3, Ví dụ 2.5.6, c)), hãy chứng minh:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\mathrm{d}t\,.$$

◊ **4.3.30** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 0} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n+1}e^{-nx}\end{array}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.
b) Khảo sát sự tồn tại đạo hàm của S.
c) Tính S. Có thể sử dụng $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\ln 2$, xem 5.5.3, 4) Nhận xét.

◊ **4.3.31** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(n+x)^2}\end{array}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.
b) Chứng minh rằng S giảm và dương.
c) Chứng minh rằng ánh xạ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{S(x)}}$ là lõm trên $\mathbb{R}_+$.

◊ **4.3.32** *a)* Khảo sát các sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{ccc}[-\pi;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin nx}{n^2(n+1)}\end{array}$.

Ký hiệu S là tổng của nó.
b) Chứng minh : $\forall (x,y) \in [-\pi;\pi]^2,\ \left(x \neq y \to |S(x)-S(y)| \leq |x-y|\right)$.
c) Phải chăng là S là một ánh xạ co?

◊ **4.3.33** Giả sử $\alpha \in]0;1[$, $\beta \in]0;1]$. $(u_n)_{n\geq 1}$ là một dãy thực sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\beta;1]$. Chứng minh rằng ánh xạ $S : x \mapsto \ln\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n^x\right)$ xác định trên $[1;+\infty[$, thuộc lớp C^∞ và lồi.

◊ **4.3.34 Hàm số ζ của Riemann**

Chứng minh rằng $\zeta :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (xem bài tập 4.3.1 *o)* và 4.3.5, Ví dụ) thuộc lớp C^∞, giảm. Vẽ đường biểu diễn của ζ.

◊ **4.3.35** Cho f: $]-1;1[\to \mathbb{C}$ liên tục. Ta xác định dãy $(f_n)_{n\geq 0}$ những ánh xạ từ $]-1;1[$ vào $\mathbb{C}$ bởi: $f_0 = f$ và $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1;1[, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

Khảo sát sự hội tụ của $\sum_n f_n$ và biểu diễn $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ theo f.

◊ **4.3.36** Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu f_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{e^{i2^n x}}{n^n}$.

a) Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ và tổng S của nó thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}^*$, chuỗi Taylor của S tại 0, $\sum_{n\geq 0} \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$, phân kỳ.

◊ **4.3.37** Gọi φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ 1- tuần hoàn sao cho , $\forall t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $\varphi(t) = t(1-4t^2)$. Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\varphi_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(n!)^2}\varphi(n!x) \end{array}$.

a) Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 0} \varphi_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ và tổng của nó thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh: $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4.3.6 Hội tụ của một chuỗi ánh xạ và lấy tích phân trên một khoảng bất kỳ

Trong § 4.3.6 này, I chỉ một khoảng trong $\mathbb{R}$, không rỗng và không thu về một điểm.

◆ **Định lý 1 (Trường hợp các hàm thực không âm)**

Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0} (f_n : I \to \mathbb{R})$.

Nếu
- với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên I,
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên I,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục từng khúc trên I,

thì $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ khả tích trên I nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 0} \left(\int_I f_n \right)$ hội tụ.

Ngoài ra, trong các điều kiện đó, $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Chứng minh:

Chỉ cần áp dụng định lý về hội tụ đơn điệu (xem 4.1.6, Định lý 1) cho dãy (S_n) các tổng riêng $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

VÍ DỤ:

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!(1+x^2)} dx$ hội tụ và tính tổng của nó.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, xét f_n: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!(1+x^2)}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n liên tục, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$. Chuỗi $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{e^{-x}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ánh xạ $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$ liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;+\infty[$.

Từ đó suy ra, theo Định lý 1) rằng $\sum_{n\geq 0} \int_{[0;+\infty[} f_n$ hội tụ và có tổng là $\int_{[0;+\infty[} S$ tức là:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!(1+x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctan}x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

◆ **Định lý 2** Cho chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0} (f_n : I \to \mathbb{K})$.

Nếu
- với mọi $n \in \mathbb{N}, f_n$ liên tục từng khúc và khả tích trên I,
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên I,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ liên tục từng khúc trên I,
- $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ hội tụ,

thì $\begin{cases} \bullet \ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ khả tích trên } I, \\ \bullet \ \int_I \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|, \\ \bullet \ \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n. \end{cases}$

Chứng minh:

Ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} |f_k|$.

1) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $U_n = \mathrm{Inf}(T_n, |S|)$. Rõ ràng rằng:

$\begin{cases} \bullet \ \text{Với mọi } n \in \mathbb{N}, U_n \text{ liên tục từng khúc và } \geq 0 \text{ trên } I, \\ \bullet \ (U_n)_{n\geq 0} \text{ tăng tức là } \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}, \\ \bullet \ (U_n)_{n\geq 0} \text{ hội tụ đơn đến } |S| \text{ trên } I, \end{cases}$

(vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Inf}(|S_n|, |S|) \leq U_n \leq |S|$ và $\mathrm{Inf}(|S_n|, |S|) \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} |S|$).

Theo định lý về hội tụ đơn điệu (xem 4.1.6, định lý 1) $|S|$ khả tích trên I và $\int_I |S| = \lim_{n\infty} \int_I U_n$.

Vì: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I U_n \leq \int_I T_n = \int_I \sum_{k=0}^{n} |f_k| = \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |f_k|$,

ta suy ra: $$\int_I |S| = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$

2) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, khảo sát trên đây ứng dụng được cho chuỗi (bị xén) $\sum_{k\geq n+1} f_k$. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ khả tích trên I và:

$$\left|\int_I \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right| \leq \int_I \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |f_k|.$$

Nhưng do $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_k|$ hội tụ nên $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |f_k| \xrightarrow[n\infty]{} 0$, vậy $\int_I \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_I S = \int_I \sum_{k=0}^{n} f_k + \int_I \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k + \int_I \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \,,$$

ta kết luận: $$\sum_{k=0}^{n} \int_I f_k \xrightarrow[n\infty]{} \int_I S \text{ tức là } \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \,.$$

Nhận xét:

1) Hãy so sánh với 4.3.4. Nhận xét.

2) Nếu thay giả thiết: $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ hội tụ bởi $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ hội tụ đơn trên I và $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ liên tục từng khúc trên I và khả tích trên I, thì việc chứng minh Định lý 2 được đơn giản đi vì chỉ cần áp dụng định lý về hội tụ bị chặn (4.1.6, định lí 2) vào dãy $(S_n)_{n\geq 0}$ các tổng riêng, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, giả thiết bị chặn trên được bảo đảm bởi $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|$.

VÍ DỤ:

Hãy chứng minh rằng với mọi (a, b, ω) thuộc $]0;+\infty[\times]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, ta có:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} \sin \omega x \mathrm{d}x = 2\omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a+bn}{\left((a+bn)^2+\omega^2\right)^2} \,.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, xét f_n: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f_n(x) = xe^{-(a+bn)x} \sin \omega x \,.$$

Rõ ràng rằng :

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $]0;+\infty[$ (hay $[0;+\infty[$).
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên $]0;+\infty[$ (và ngay cả $[0;+\infty[$) và có tổng

$$S : x \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} \sin \omega x \,,$$

- S liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$.
- $\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ hội tụ vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, sử dụng phép lấy tích phân từng phần, ta có: $$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} xe^{-(a+bn)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{(a+bn)^2} \,.$$

Theo Định lý 2, S khả tích trên $]0;+\infty[$ và :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} \sin \omega x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(a+bn)x} \sin \omega x \mathrm{d}x .$$

Một phép tích phân từng phần cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} xe^{(-(a+bn)+i\omega)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\left((a+bn)-i\omega\right)^2} = \frac{\left((a+bn)+i\omega\right)^2}{\left((a+bn)^2+\omega^2\right)^2} .$$

Từ đó,
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} \sin \omega x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\omega(a+bn)}{\left((a+bn)^2+\omega^2\right)^2} .$$

Bài tập

◊ **4.3.38** Chứng minh: $\forall x \in]1;+\infty[, \forall \lambda \in [-1;1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-\lambda e^{-t}} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}$.

◊ **4.3.39** Chứng minh: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\zeta(x)-1\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$,

trong đó ζ là hàm Riemann, $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (xem 4.3.5, Ví dụ).

Bổ sung

◊ **C4.1 Phép biến đổi Laplace**

Ở đây ta ký hiệu $\mathcal{C}$ là tập các ánh xạ liên tục từ $[0;+\infty[$ vào $\mathbb{C}$. Với $f \in \mathcal{C}$, ký hiệu $\mathcal{D}_f$ là tập các $p \in \mathbb{C}$, sao cho ánh xạ $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$. Ký hiệu $\mathcal{F}$ là tập các f thuộc $\mathcal{C}$ sao cho $\mathcal{D}_f \neq \phi$.

Với $f \in \mathcal{F}$, ánh xạ $\begin{array}{ccc} D_f & \to & \mathbb{C} \\ p & \mapsto & \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \end{array}$ gọi là **biến đổi Laplace** của f và được ký hiệu là $\mathcal{L}f$. Vậy: $\forall f \in \mathcal{F}, \forall p \in \mathcal{D}_f,\ (\mathcal{L}_f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$.

I Các tính chất chung của phép biến đổi Laplace

1) Hoành độ hội tụ

Cho $f \in \mathcal{F}$. Hãy chứng minh: $\forall p_0 \in \mathcal{D}_f, \forall p \in \mathbb{C},\ \left(\mathrm{Re}(p) \geq \mathrm{Re}(p_0) \Rightarrow p \in \mathcal{D}_f\right)$.

Ký hiệu $\sigma_f = \operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}}\left\{\mathrm{Re}(p); p \in \mathcal{D}_f\right\}$, σ_f gọi là **hoành độ hội tụ của** f (đối với biến đổi Laplace).

Rõ ràng rằng:

- Nếu $\sigma_f \in \mathbb{R}$ thì $\mathcal{D}_f$ là nửa phẳng mở hay đóng giới hạn ở bên trái bởi đường thẳng có phương trình $\mathrm{Re}(p) = \sigma_f$.
- Nếu $\sigma_f = -\infty$ thì $\mathcal{D}_f = \mathbb{C}$.

2) Một ví dụ:

Với $(n,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, hãy xác định biến đổi Laplace của $f : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t^n e^{at} \end{array}$ (xác định rõ σ_f và $\mathcal{D}_f$).

3) Tính liên tục của $\mathcal{L}f$ (với $f \in \mathcal{F}$)

Cho $f \in \mathcal{F}$, hãy chứng minh rằng $\mathcal{L}f$ liên tục trên $\mathcal{D}_f$.

4) Các tính chất đại số:

a) Tuyến tính:

Chứng minh rằng nếu $f, g \in \mathcal{F}$ và $\lambda \in \mathbb{C}$ thì :

$$\begin{cases} \lambda f + g \in \mathcal{F}, & \sigma_{\lambda f+g} \leq \mathrm{Max}(\sigma_f, \sigma_g) \\ \forall p \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, & \mathcal{L}(\lambda f + g)(p) = \lambda \mathcal{L}f(p) + \mathcal{L}g(p) \end{cases}$$

b) Nhân với e^{at}

Cho $f \in \mathcal{F}$, $a \in \mathbb{R}$. Xét $g : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{at} f(t) \end{array}$. Hãy chứng minh:

$$\begin{cases} g \in F, \mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f + a = \left\{p + a; p \in \mathcal{D}_f\right\},\ \sigma_g = \sigma_f + a, \\ \forall p \in \mathcal{D}_g,\ \mathcal{L}g(p) = \mathcal{L}f(p - a). \end{cases}$$

5) Lấy đạo hàm

a) Cho $f \in \mathcal{C}$ thuộc lớp C^1 trên $[0;+\infty]$. Giả sử rằng với mọi $p \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{cases} e^{-pt}f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0, \\ t\mapsto e^{-pt}f'(t) \text{khả tích trên } [0;+\infty[. \end{cases}$$

Hãy chứng minh:

$$\begin{cases} f'\in F, \mathcal{D}_{f'}\supset \mathcal{D}_f,\ \sigma_{f'}\le \sigma_f, \\ \forall p\in \mathcal{D}_f, \mathcal{L}(f')(p)=p\mathcal{L}f(p)-f(0). \end{cases}$$

b) Suy ra rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, nếu $f\in\mathcal{F}$ thuộc lớp C^n trên $[0;+\infty[$ và nếu với mọi $p\in\mathcal{D}_f$ và mọi k thuộc $\{0, ..., n-1\}$, $\begin{cases} e^{-pt}f^{(k)}(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0 \\ t\mapsto e^{-pt}f^{(k+1)}(t) \text{khả tích trên } [0;+\infty[, \end{cases}$

thì $\begin{cases} f^{(n)}\in\mathcal{F}, \mathcal{D}_{f^{(n)}}\supset\mathcal{D}_f,\ \sigma_{f^{(n)}}\le\sigma_f, \\ \forall p\in\mathcal{D}_f, \mathcal{L}(f^{(n)})(p)=p^{(n)}\mathcal{L}f(p)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-k-1}f^{(k)}(0). \end{cases}$

6) Tính đơn ánh của phép biến đổi Laplace

Giả sử $f\in\mathcal{F}$ sao cho: $\forall\ p\in\mathcal{D}_f$, $\mathcal{L}f(p)=0$.

a) Cho $p\in\mathcal{D}_f$, g: $[0;+\infty[\ \to\mathbb{C}$ xác định bởi :

$$\forall t\in[0;+\infty[,\quad g(t)=\int_0^t e^{-pu}f(u)\mathrm{d}u.$$

α) Chứng minh: $\mathcal{L}f(p+a)=a\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-at}g(t)\mathrm{d}t$,

β) Từ đó suy ra: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right)u^n\mathrm{d}u=0$,

γ) Chứng minh: $\forall t\in[0;+\infty[$, $g(t)=0$.

b) Từ đó suy ra: $f=0$.

II Dùng phép biến đổi Laplace để giải một số phương trình vi phân hay hệ vi phân

Nếu một ánh xạ y: $[0;+\infty[\ \to\mathbb{C}$ là nghiệm của một phương trình vi phân thích hợp, theo *I.5.b)*, biến đổi Laplace $\mathcal{L}y$ là nghiệm của một phương trình "đại số". Ta thường có thể từ đó suy ra $\mathcal{L}y$, rồi trở lại y nhờ tính đơn ánh của phép biến đổi *Laplace* (*I*.6) và một bảng liệt kê các biến đổi Laplace quen thuộc. Thường $\mathcal{L}y(p)$ được biểu diễn dưới dạng một phân thức hữu tỷ của p. Một triển khai nó thành tổng những phần tử đơn giản và tính đơn ánh của $\mathcal{L}$ cho phép tính được y.

Người ta thường dùng ký hiệu $y(t)\sqsupset F(p)$ để diễn tả F: $p\mapsto F(p)$ là biến đổi Laplace của y: $t\mapsto y(t)$ (ký hiệu của phép toán toán tử).

1) Giải phương trình vi phân với các điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=4e^{2t} \\ y(0)=-3 \\ y'(0)=5 \end{cases} \quad \text{ẩn } y: [0;+\infty[\to \mathbb{C} \text{ thuộc lớp } C^2.$$

2) Giải hệ vi phân với các điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} x'+2y''=e^{-t} \\ x'+2x-y=1 \\ x(0)=y(0)=y'(0)=0 \end{cases} \quad \text{các ẩn } x, y: [0;+\infty[\to \mathbb{C} \text{ thuộc lớp } C^2.$$

◊ **C4.2** ***Phép biến đổi Fourier***

Ở đây ta ký hiệu $\mathcal{L}^1$ là $\mathbb{C}$ - kgv các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ liên tục từng khúc và khả tích trên $\mathbb{R}$.

I Định nghĩa phép biến đổi Fourier

1) Chứng minh rằng với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$ và mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ánh xạ $h: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t)e^{-ixt}\end{array}$ liên tục từng khúc và khả tích trên $\mathbb{R}$.

Với f thuộc $\mathcal{L}^1$, người ta ký hiệu $\mathfrak{F}f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là ánh xạ xác định như sau, gọi là **biến đổi Fourier** của f (viết tắt là BĐF hay TF):

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$$

Người ta cũng ký hiệu (với $F = \mathfrak{F}f$): $f \rightharpoonup F$ hay một cách lạm dụng $f(t) \rightharpoonup F(x)$.
Bạn đọc có thể gặp trong những tài liệu khác những định nghĩa sau hơi khác với định nghĩa được chọn trên đây:

$$\mathfrak{F}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\mathrm{d}t, \qquad \mathfrak{F}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t.$$

Sự có mặt của hệ số $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sẽ được giải thích về sau (V*I* và V*II*).

2) Hãy chứng minh:

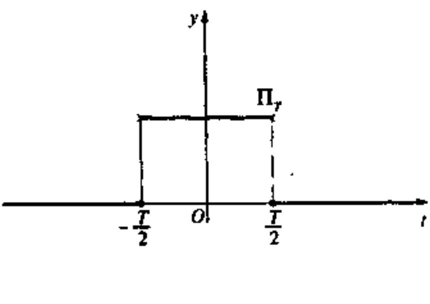
a) Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$ và khả tích trên $\mathbb{R}$ thì $\mathfrak{F}f$ liên tục trên $\mathbb{R}$

b) Với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$, $\mathfrak{F}f$ liên tục trên $\mathbb{R}$

c) Với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$, $\mathfrak{F}f$ bị chặn trên $\mathbb{R}$ và

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\mathfrak{F}f(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$$

d) Ánh xạ $\mathfrak{F}: \begin{array}{l}\mathcal{L}^1 \to C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f \mapsto \mathfrak{F}f\end{array}$ là tuyến tính.



II Các ví dụ

1) BĐF *của một "cánh cửa"*

Với $T \in]0;+\infty[$, ký hiệu $\Pi_T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là ánh xạ, gọi là "cánh cửa (có tâm)", xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 \text{ nếu } |t| \geq \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

Nói cách khác, $\Pi_T = \chi_{\left]-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right[}$ là hàm số đặc trưng của $\left]-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right[$.

Hãy kiểm nghiệm rằng $\Pi_T \in \mathcal{L}^1$ và chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathfrak{F}\Pi_T(x) = \dfrac{T}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$.

2) BĐF *của* $t \mapsto \dfrac{1}{a^2 + t^2}$.

Cho $a \in]0;+\infty[$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$. Hãy kiểm nghiệm rằng $f \in \mathcal{L}^1$ và chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathfrak{F}f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|x|}$

(sử dụng Tập 3, bài tập 2.5.53).

3) BĐF *của* $t \mapsto e^{-a|t|}$

Cho $a \in]0;+\infty[$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(t) = e^{-a|t|}$. Hãy kiểm nghiệm rằng $f \in \mathcal{L}^1$ và chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathfrak{F}f(x) = \dfrac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2 + x^2)}$.

4) BĐF *của* $t \mapsto e^{-a^2t^2}$

Cho $\alpha \in]0;+\infty[$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(t) = e^{-a^2t^2}$. Hãy kiểm nghiệm rằng $f \in \mathcal{L}^1$ và chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathfrak{F}f(x) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$.

(sử dụng Tập 3, bài tập 2.5.44).

III Các tính chất đại số của phép biến đổi Fourier

1) Nhắc lại rằng với mọi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ta ký hiệu $\overline{f}: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \overline{f(t)}\end{array}$ và $\check{f}: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(-t)\end{array}$.

Hai ánh xạ $f \mapsto \overline{f}$ và $f \mapsto \check{f}$ là hai phép đối hợp của $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ và chúng giao hoán với nhau.

a) α) Hãy chứng minh rằng với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$, $\overline{f}$ và $\check{f}$ nằm trong $\mathcal{L}^1$

và: $\mathfrak{F}\overline{f} = \overline{\check{\mathrm{F}f}}$, $\mathfrak{F}\check{f} = \check{\mathfrak{F}f}$.

β) Suy ra rằng với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$:

$$\mathfrak{F}\check{\overline{f}} = \mathfrak{F}\overline{\check{f}} = \overline{\mathfrak{F}f}\ ,\ \overline{\mathfrak{F}\overline{f}} = \check{\mathfrak{F}f}\ ,\ \check{\overline{\mathfrak{F}f}} = \overline{\mathfrak{F}f}\ ,\ \overline{\mathfrak{F}\check{f}} = \overline{\check{\mathfrak{F}f}}\ ,\ \mathfrak{F}\check{\check{f}} = \mathfrak{F}f.$$

b) Chứng minh rằng với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$:

- Nếu f là thực và chẵn thì $\mathfrak{F}f$ thực và chẵn.

- Nếu f là thực và lẻ thì $\mathfrak{F}f$ thực và lẻ.

2) Tịnh tiến biến số

Nhắc lại rằng với $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ và $a \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $\tau_a f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t-a)\end{array}$ gọi là **tịnh tiến của** f **bởi** a.

Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{L}^1$ và $a \in \mathbb{R}$ thì $\tau_a f \in \mathcal{L}^1$ và:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \mathfrak{F}(\tau_a f)(x) = e^{-ixa}\mathfrak{F}f(x).$$

Nói cách khác: $\quad f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow f(t-a) \rightharpoonup e^{-ixa}F(x)$.

3) Nhân với $e^{i\lambda t}$

Cho $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^1$, $g : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{i\lambda t}f(t)\end{array}$.

Hãy kiểm nghiệm rằng $g \in \mathcal{L}^1$ và chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathfrak{F}g(x) = \tau_\lambda(\mathfrak{F}f)(x)$.

nói cách khác: $\quad f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow e^{i\lambda t}f(t) \rightharpoonup F(x-\lambda)$.

4) Đổi tỷ xích:

Cho $k \in \mathbb{R}^*, f \in \mathcal{L}^1$, $h : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(kt)\end{array}$.

Hãy kiểm nghiệm rằng $h \in \mathcal{L}^1$ và chứng minh: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \mathfrak{F}h(x) = \dfrac{1}{|k|}\mathrm{F}f\left(\dfrac{x}{k}\right)$.

nói cách khác: $\quad f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow f(kt) \rightharpoonup \dfrac{1}{|k|}F\left(\dfrac{x}{k}\right)$.

IV Dáng điệu tiệm cận

*1)** Chứng minh: $\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \mathfrak{F}f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

2) Phải chăng: $\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$?

V Lấy đạo hàm

*1) a)** Giả sử $f \in \mathcal{L}^1$ sao cho ký hiệu $f_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto tf(t)\end{array}$ thì $f_1 \in \mathcal{L}^1$. Chứng minh rằng $\mathcal{F}f$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và: $\forall x \in \mathbb{R}, \ (\mathfrak{F}f)'(x) = -i\mathfrak{F}f_1(x)$.

Nói cách khác, nếu f và $t \mapsto tf(t)$ nằm trong $\mathcal{L}^1$ thì: $f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow -itf(t) \rightharpoonup F'(x)$.

hay: $\quad f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow tf(t) \rightharpoonup iF'(x)$.

b) Suy ra rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi f sao cho: $\forall k \in \{0, ..., n\}, \left(f_k : t \mapsto t^k f(t)\right) \in \mathcal{L}^1$ thì $\mathfrak{F}f$ thuộc lớp C^n trên $\mathbb{R}$:

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathfrak{F}f)^{(k)}(x) = (-i)^k \mathfrak{F}f(x)$$

Nói cách khác, với các giả thiết đó: $\quad f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow t^k f(t) \rightharpoonup i^k F^{(k)}(x)$

c) Chứng minh rằng với mọi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc và triệt tiêu ngoài một đoạn, $\mathfrak{F}f$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

Chẳng hạn (xem *III* 1)), $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$ vì nó là (sai khác một hệ số nhân cố định khác không) biến đổi Fourier của Π_2 mà Π_2 triệt tiêu bên ngoài đoạn $[-1;1]$.

2) a) Cho $f \in \mathcal{L}^1$ trên $\mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ sao cho $f' \in \mathcal{L}^1$.

α) Chứng minh: $f(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$

β) Suy ra: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(f')(x) = ix\mathfrak{F}f(x)$ Nói cách khác, với các giả thiết đó:

$$f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow f'(t) \rightharpoonup ixF(x).$$

b) Suy ra từ đó rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và với mọi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^{n-1} và thuộc lớp C^n từng khúc trên $\mathbb{R}$ sao cho $\forall\, k \in \{0, ..., n\}, f^{(k)} \in \mathcal{L}^1$, thì ta có:

$$\forall\, k \in \{0, ..., n\}, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathfrak{F}(f^{(k)})(x) = (ix)^k \mathfrak{F}f(x).$$

Nói cách khác, với các giả thiết đó: $f(t) \rightharpoonup F(x) \Rightarrow f^{(k)}(t) \rightharpoonup (ix)^{(k)} F(x)$

c) Từ đó suy ra rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và với mọi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^n sao cho:

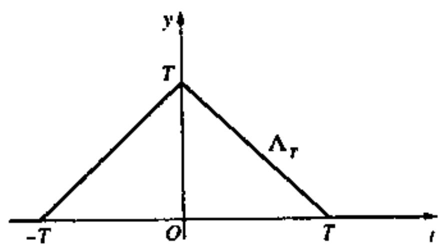
$$\forall\, k \in \{0, ..., n\}, f^{(k)} \in \mathcal{L}^1 \text{ thì ta có: } \mathfrak{F}f(x) = \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

3) Cho $\alpha \in]0;+\infty[$, $f: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{-\alpha^2 t^2}\end{array}$.

Sử dụng *2)a)* và giá trị của tích phân của Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ hãy chứng minh:

$$\forall x \in \sqrt{R},\ \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

kết quả này ta đã có trong *II*. 4).



4) Với $T \in]0;+\infty[$, ký hiệu $\Lambda_T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là ánh xạ gọi là **tam giác** (có tâm) xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Lambda_T(t) = \begin{cases} t + T & \text{nếu } t \in [-T;0] \\ -t + T & \text{nếu } t \in [0;T] \\ 0 & \text{nếu } |t| \geq T \end{cases}$$

Sử dụng 2) a) và *II*.1) chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathfrak{F}\Lambda_T)(x) = \dfrac{T^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}\right)^2$.

VI Phép biến đổi Fourier và tích chập

1) Cho $f \in \mathcal{L}^1$ và g: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc và bị chặn. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ánh xạ $f: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t)g(x-t)\end{array}$ liên tục từng khúc và bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Ký hiệu $f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$, $f*g$ được gọi là **tích chập của** f **với** g.

Tích chập có thể được định nghĩa với các điều kiện (về f và g) rộng rãi hơn các điều kiện đã được chọn ở đây.

2) Cho $f \in \mathcal{L}^1$ và $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc và bị chặn. Hãy chứng minh rằng

$f * g \in \mathcal{L}^1$ và $\mathfrak{F}(f*g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$.

Ta giả sử rằng có thể hoán vị các ký hiệu tích phân xuất hiện trong phần này.

VII Tính chất khả nghịch của Fourier

Với mọi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc, ta ký hiệu $\tilde{f}$ là ánh xạ gọi là **chính quy hoá** của f, xác định bởi: $\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$.

(xem thêm về sau, 6.2.1).

Ký hiệu $\widetilde{\mathcal{L}^1}$ là tập các $f \in \mathcal{L}^1$, sao cho $\tilde{f} = f$.

1) Chứng minh rằng: $\forall f \in \mathcal{L}^1,\ \tilde{f} = \widetilde{\mathcal{L}^1}$.

2) Giả sử $f \in \mathcal{L}^1$ sao cho $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$, ta thừa nhận:

$$\int_{-A}^{A} \mathfrak{F}f(u)e^{ixu}du \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(x).$$

Từ đó hãy suy ra **công thức về khả nghịch của Fourier**:

$$\text{Nếu } \begin{cases} f \in \widetilde{\mathcal{L}^1} \\ f \rightharpoonup F \\ F \in \mathcal{L}^1 \end{cases}, \quad \text{thì } F \rightharpoonup \check{\tilde{f}} = \check{f}.$$

Với $f \in \mathcal{L}^1$, người ta thường ký hiệu $\overline{\mathfrak{F}}f$ là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ được xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \overline{\mathfrak{F}}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt.$$

Khi đó, với mọi f thuộc $\mathcal{L}^1$ sao cho $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$, ta có: $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}f = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = \tilde{f}$ và $\mathfrak{F}\mathfrak{F}f = \check{\tilde{f}}$.

3) *Tính chất đơn ánh của* $\mathfrak{F}$

Chứng minh rằng $\mathfrak{F}: \begin{array}{l}\widetilde{\mathcal{L}^1} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto \mathfrak{F}f\end{array}$ là đơn ánh.

4) *Một ví dụ ứng dụng tính đơn ánh của* BĐF:

Cho $f \in \widetilde{\mathcal{L}^1}$. Giả sử tồn tại $\eta > 0$ và $\alpha > 1$ sao cho:

$$\forall t \in]0;\eta],\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u-t) - f(u)|dt \le t^{\alpha}.$$

Hãy chứng minh: $f = 0$.

5) Giả sử $(f,g) \in (\mathcal{L}^1)^2$ sao cho $(\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g) \in (\mathcal{L}^1)^2$. Chứng minh $fg \in \mathcal{L}^1$ và $\mathfrak{F}(fg) = (\mathfrak{F}f) * (\mathfrak{F}g)$.

6) Tính tích chập nhờ phép biến đổi Fourier thuận và ngược:

a) Với $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, ký hiệu $\gamma_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma_{a,b}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{(t-b)^2 + a^2}.$$

Chứng minh: $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\gamma_{a,b} * \gamma_{a',b'} = \gamma_{a+a',b+b'}$.

b) Cho $T \in]0;+\infty[$, Π_T là hàm cánh cửa (xem *III*, 1), Λ_T là hàm tam giác (xem V.4). Chứng minh: $\Lambda_T = \sqrt{2\pi}\Pi_T * \Pi_T$.

c) Với $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, ký hiệu $\varphi_\alpha : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\alpha^2 t^2}\end{array}$. Chứng minh: $\forall (\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$,

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \varphi_{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}.$$

VIII Sử dụng $\mathcal{L}^2$

Ở đây, ký hiệu $\mathcal{L}^2$ là $\mathbb{C}$ - kgv các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ liên tục từng khúc và bình phương khả tích trên $\mathbb{R}$ và $\mathcal{E} = \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \cap B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (trong đó $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ là tập các ánh xạ bị chặn từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$).

1) Cho $f, g \in \mathcal{E}$. Chứng minh: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathfrak{F}f(u)}\mathfrak{F}g(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$

2) Suy ra rằng với mọi f thuộc $\mathcal{E}$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$.

3) Chứng minh rằng ánh xạ đặt ứng với mỗi f thuộc $\mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}^1}$ phần tử $\mathfrak{F}f$ là một đơn ánh (trường hợp riêng của V*III*.3)

◊ C4. 3 Tích phân suy rộng phụ thuộc một tham số

Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $F : I \times [a;+\infty[\to \mathbb{C}$ liên tục. Mục đích ở đây là khảo sát tính liên tục và có đạo hàm của $f: I \to \mathbb{C}$ xác định bởi (giả sử tồn tại):

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \int_a^{+\infty} F(x,t)dt.$$

Việc khảo sát có thể được áp dụng cho tích phân suy rộng tại -∞ ...

1) Các họ tích phân suy rộng

a) Ta nói họ tích phân suy rộng $\left(\displaystyle\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I}$ **hội tụ đều** nếu và chỉ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in [a;+\infty[, \forall (t_1,t_2) \in [a;+\infty[^2, \forall x \in I, \left(t_2 \ge t_1 \ge t_0 \Rightarrow \left|\int_{t_1}^{t_2} F(x,t)\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon\right).$$

Chứng minh rằng để $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I}$ hội tụ đều, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{Với mọi } x \text{ thuộc } I, \displaystyle\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t \text{ hội tụ,} \\ \bullet \quad \forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in [a;+\infty[, \forall t_1 \in [t_0;+\infty[, \forall x \in I, \left(t_1 \ge t_0 \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{t_1}^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon\right) \end{cases}$$

b) Ta nói họ tích phân suy rộng $\left(\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I}$ **hội tụ chuẩn tắc** nếu và chỉ nếu có μ: $[a;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$$\begin{cases}\forall t\in[a;+\infty[,\ \mu(t)\geq 0,\\ \int_a^{\to+\infty}\mu(x)\mathrm{d}t \text{ hội tụ },\\ \forall(x,t)\in I\times[a;+\infty[,\ \ |F(x,t)|\leq\mu(t).\end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu họ tích phân suy rộng $\left(\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I}$ hội tụ chuẩn tắc thì nó hội tụ đều, nhưng điều ngược lại có thể sai.

2) Hãy chứng minh định lý sau đây gọi là *tính liên tục dưới dấu* $\int$ *cho tích phân suy rộng.*

$$\text{Nếu }\begin{cases}F \text{ liên tục trên } I\times[a;\infty[\\ \left(\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I} \text{ hội tụ đều,}\end{cases}$$

thì $f: \begin{array}{l} I\to\mathbb{C}\\ x\mapsto\int_a^{\to+\infty}F(x,t)\mathrm{d}t\end{array}$ liên tục trên I.

3) Hãy chứng minh định lý sau gọi là *lấy đạo hàm dưới dấu* $\int$ *cho tích phân suy rộng.*

$$\text{Nếu }\begin{cases}F \text{ liên tục trên } I\times[a;\infty[\ ,\\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ tồn tại và liên tục trên } I\times[a;+\infty[,\\ \exists x_0\in I,\ \int_a^{\to+\infty}F(x_0,t)\mathrm{d}t \quad \text{hội tụ,}\\ \left(\int_a^{\to+\infty}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I} \text{ hội tụ đều,}\end{cases}$$

thì với mọi x thuộc I, $\int_a^{\to+\infty} F(x,t)dt$ hội tụ, ánh xạ $f: \begin{array}{l} I\to\mathbb{C}\\ x\mapsto\int_a^{+\infty}F(x,t)\mathrm{d}t\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I và: $\quad \forall x\in I,\ f'(x)=\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Có thể xét dãy ánh xạ $(f_n: I\to\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I,\ \ f_n(x)=\int_a^{a+n}F(x,t)\mathrm{d}t$$

◊ **C4.4* Định lý Stone - Weierstrass**

Đây là một kết quả tổng quát hơn hai định lý củaWeierstrass.

Cho X là một không gian metric (xem tập 3, 1.1.1 2) Nhận xét 1)) *compăc* và E là đại số các ánh xạ liên tục từ X vào $\mathbb{R}$ (các luật hợp thành là phép cộng, luật ngoài, phép nhân) được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ xác định bởi $\|f\|_\infty=\operatorname{Sup}_{x\in X}|f(x)|$.

Ta nói tập con A của E tách các điểm của X nếu và chỉ nếu:

$$\forall (x,y) \in X^2,\ \left(x \neq y \Rightarrow (\exists f \in A, f(x) \neq f(y))\right).$$

Giả sử A là một đại số con, tách các điểm của X và chứa các hàm hằng.

1) a) Chứng minh: $\forall f \in A,\ |f| \in \overline{A}$ (sử dụng bài tập 4.2.21).

b) Suy ra $\forall (f,g) \in \left(\overline{A}\right)^2,\ \left(\mathrm{Inf}(f,g) \in \overline{A} \text{ và } \mathrm{Sup}(f,g) \in \overline{A}\right)$.

2) Chứng minh:

$$\forall (x,y) \in X^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left(x \neq y \Rightarrow (\exists f \in A, f(x) = \alpha \text{ và } f(y) = \beta)\right).$$

*3)** Suy ra: $\forall f \in E, \forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists g \in \overline{A},\ \begin{cases} g(x) = f(x) \\ \forall y \in [0;1],\ g(y) \leq f(y) + \varepsilon \end{cases}$.

*4)** Kết luận: $\overline{A} = E$.

Như vậy, ta đã thiết lập được định lý Stone - Weierstrass:

Cho X là một không gian metric compắc, E là đại số các ánh xạ liên tục từ X vào $\mathbb{R}$ (luật hợp thành thứ ba là phép nhân), A là một đại số con của E tách các điểm của X và chứa các hàm hằng. Khi đó $\overline{A} = E$ tức là mọi ánh xạ liên tục từ X vào $\mathbb{R}$ là giới hạn đều trên X của một dãy ánh xạ thuộc A.

5) a) Một hệ quả: cho ánh xạ liên tục $f : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, có $n \in \mathbb{N}^*$ và $u_1, ..., u_n; v_1, ..., v_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ \left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y) \right| \leq \varepsilon.$$

b) Chứng minh rằng hàm số $f : \begin{array}{l}[0;1]^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto |x-y|\end{array}$ không thể viết dưới dạng tổng hữu hạn

$\sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y)$ trong đó $u_i, v_i : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục.

◊ **C4. 5* Xấp xỉ đều một hàm số liên tục bởi những đa thức với hệ số nguyên**

Phần bổ sung này sử dụng các đa thức *Bernstein* và định lý thứ nhất của *Weierstrass*. Bốn phần sau đây độc lập với nhau.

I Định lý Pal

Cho $\alpha \in]0;1[$ và $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ liên tục.

1) Giả sử có một dãy $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ những đa thức với hệ số nguyên hội tụ đều đến f trên $[-\alpha;\alpha]$. Chứng minh: $f(0) \in \mathbb{Z}$.

2) Ngược lại, giả sử $f(0) \in \mathbb{Z}$, đặt $g = f - f(0)$ và cho $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Chứng minh rằng có số nguyên lẻ k sao cho: $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \alpha^n \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

b) Sử dụng định lý *Stone - Weierstrass*, chứng minh rằng có $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho

$$\forall x \in [-\alpha;\alpha],\ \left| g(x) - P(x^k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

c) Đặt $Q = P - P(0)$. Hãy kiểm nghệm:

$$\left(\forall x \in [-\alpha;\alpha],\ \left|P(x^k) - Q(x^k)\right| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

d) Gọi R là đa thức có được từ Q bằng cách thay mỗi hệ số bởi phần nguyên của nó. Chứng minh: $\forall x \in [-\alpha;\alpha],\ \left|Q(x^k) - R(x^k)\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$.

e) Ký hiệu A là đa thức xác định bởi $A(X) = R(X^k)$, kết luận: $A \in \mathbb{Z}[X]$ và $\|g - A\|_\infty \le \varepsilon$.

Như vậy, ta đã chứng minh **định lý Pal** :

Cho $\alpha \in]0;1[$ và $f \in [-\alpha;\alpha] \to \mathbb{R}$ liên tục. Để có một dãy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ những đa thức với hệ số nguyên hội tụ đều đến f trên $[-\alpha;\alpha]$, điều kiện cần và đủ là $f(0) \in \mathbb{Z}$.

II Định lý Chodnovsky

1) Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 < a < b < 1$ và $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Chứng minh rằng có $k \in \mathbb{N}$ để: $\forall x \in [a;b],\ \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2 - x^k}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Với $k \in \mathbb{N}$ cố định, chứng minh rằng có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall x \in [a;b],\ \left|\frac{1}{2 - x^k} - \sum_{n=0}^{N}(x^k - 1)^n\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Suy ra rằng hằng số $\frac{1}{2}$ là giới hạn đều trên $[a;b]$ của một dãy đa thức với hệ số nguyên.

2) Từ đó suy ra mọi số dạng $n2^{-m}$ ($(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$) rồi mọi số thực, là giới hạn đều trên $[a;b]$ của một dãy đa thức với hệ số nguyên.

3) Cho f: $[a;b] \to \mathbb{R}$ liên tục. Theo định lý thứ nhất của *Weierstrass*, có $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $\|P - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$. Áp dụng kết quả của 2) vào các hệ số của P, chứng minh rằng f là giới hạn đều trên $[a;b]$ của một dãy đa thức với hệ số nguyên.

Như vậy, ta đã chứng minh **định lý Chodnovsky** :

Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 < a < b < 1$ và f: $[a;b] \to \mathbb{R}$ liên tục, thì có dãy đa thức với hệ số nguyên hội tụ đều đến f trên $[a;b]$.

III Định lý thứ nhất của Kantorovic.

Cho f: $[0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục.

1) Giả sử ở đây rằng f là giới hạn đều trên $[0;1]$ của một dãy đa thức với hệ số nguyên, chứng minh $(f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^2$.

2) Ngược lại, giả sử $(f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Gọi g: $[0;1] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi: $g(x) = f(x) - (f(1)x + f(0)(1-x))$.

Với $n \in \mathbb{N}^*$ và $x \in [0;1]$, ký hiệu $B_n(g)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (đa thức

Bernstein). Ta đã biết rằng $(B_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến g trên $[0;1]$. Đặt $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1} E\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}$, chứng minh : $\|A_n - B_n(g)\|_\infty \le \frac{1}{n}$.

b) Suy ra rằng có một dãy đa thức với hệ số nguyên hội tụ đều đến f trên $[0;1]$.
Vậy, ta đã chứng minh một **định lý của Kantorovic**:
Cho $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ liên tục; để f là giới hạn đều trên $[0;1]$ của một dãy đa thức với hệ số nguyên, điều kiện cần và đủ là $(f(0),f(1))\in\mathbb{Z}^2$.

IV Định lý thứ hai của Kantorovic

Giả sử f: $[0;1]\to\mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(0)=f(1)=0$ và $n\in\mathbb{N}^*$. Ký hiệu $\mathbb{R}_n[X]$ là tập các đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ có bậc $\le n$.

1) Chứng minh rằng cận dưới đúng (biên dưới) $E_n(f)=\inf\limits_{P\in\mathbb{R}_n[X]}\|f-P\|_\infty$ tồn tại và đạt được.

Ký hiệu P_n là một phần tử của $\mathbb{R}_n[X]$ sao cho $\|f-P\|_\infty = E_n(f)$ và

$$Q_n = P_n - \left(P_n(1)X + P_n(0)(1-X)\right).$$

2) Chứng minh: $\|f-Q\|_\infty = 2E_n(f)$.

3) Chứng minh rằng có $a_1, ..., a_{n-1}\in\mathbb{R}$ sao cho: $Q_n=\sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k(1-X)^{n-k}$.

4) Ký hiệu $A_n=\sum_{k=1}^{n-1} E(a_k)X^k(1-X)^{n-k}$. Chứng minh: $\|A_n-Q_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$.

Như vậy, ta đã chứng minh được một **định lý của Kantorovic:**
Cho f: $[0;1]\to\mathbb{R}$ liên tục thoả mãn $f(0)=f(1)=0$, thì có $A\in\mathbb{Z}[X]$ sao cho:

$$\|f-A\|_\infty = 2\inf_{P\in\mathbb{R}_n[X]}\|f-P\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

Chương 5

Chuỗi luỹ thừa

$\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$.

5.1 Bán kính hội tụ

5.1.1 Khái niệm chuỗi luỹ thừa

◆ **Định nghĩa** Ta gọi **chuỗi luỹ thừa** là mọi chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(f_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C})$ sao cho có một dãy phức $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ để:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall z\in\mathbb{C},\ f_n(z)=a_nz^n.$$

Chuỗi luỹ thừa còn gọi là chuỗi nguyên, do số mũ n trong z^n là một số nguyên không âm.

Nhận xét:

1) Đối với chuỗi luỹ thừa, thông thường người ta dùng ký hiệu $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ thay cho $\sum_{n\geq 0}\left(z\mapsto a_nz^n\right)$. Vậy $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ có thể chỉ một chuỗi luỹ thừa (trường hợp riêng của chuỗi ánh xạ) hoặc một chuỗi số, khi z cố định.

2) Nếu một số những a_n bằng không, ta cũng có thể gọi chuỗi luỹ thừa là chuỗi có được từ chuỗi $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ bằng cách bỏ các số hạng bằng không. Ta cũng có thể xét các chuỗi luỹ thừa:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}z^n,\ \sum_{n\geq 0}(n+1)z^{2n},\ \sum_{n\geq 2}z^{n^2}\ \dots$$ ■

Mục tiêu chủ yếu của chương 5 này là:

1) Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$, hãy xác định (nếu có thể) tập các z thuộc $\mathbb{C}$ mà $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ hội tụ và khảo sát ánh xạ $z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$.

2) Cho ánh xạ f, có chăng một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ sao cho, giả sử chuỗi hội tụ thì $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ với mọi x trong một tập con nào đó của $\mathbb{R}$ (hay của $\mathbb{C}$).

5.1.2 Bán kính hội tụ và tổng của một chuỗi luỹ thừa

◆ **Mệnh đề** **(Bổ đề Abel)**

Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ là một chuỗi luỹ thừa, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $\left(a_n \rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. Khi đó với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ mà $|z|<\rho$, ta có $a_n z^n = \underset{n\infty}{O}\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$ và đặc biệt, chuỗi $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh:

Có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a_n \rho^n\right| \leq M$.

Khi đó, ta có: $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a_n z^n\right| = \left|a_n \rho^n\right| \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq M\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$, vậy $a_n z^n = \underset{n\infty}{O}\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$.

Vì $\frac{|z|}{\rho} \in [0;1[$, chuỗi cấp số nhân $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ hội tụ và do đó $\sum_{n\geq 0}\left|a_n z^n\right|$ hội tụ.

◆ **Định lý - Định nghĩa** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Có phần tử duy nhất R thuộc $\overline{\mathbb{R}_+} = [0;\infty]$ sao cho:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} |z|<R \Rightarrow \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ hội tụ tuyệt đối}\right), \\ |z|>R \Rightarrow \left(\left(a_n z^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ không bị chặn}\right). \end{cases}$$

Phần tử R đó của $\overline{\mathbb{R}_+}$ gọi là **bán kính hội tụ** (hay **bán kính**) của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Chứng minh:

1) **Tồn tại của** R

Ký hiệu: $E = \left\{\rho \in \mathbb{R}_+;\ \left(a_n \rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bị chặn}\right\}$.

Rõ ràng rằng: $\begin{cases} E \subset \mathbb{R}_+ \\ 0 \in E \\ \forall \rho \in E,\ [0;\rho] \subset E \end{cases}$.

Vậy E là một khoảng trong $\mathbb{R}_+$ chứa 0. Ký hiệu $R = \mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(E)$, tức là:

$$\begin{cases} R = \mathrm{Sup}_{\mathbb{R}_+}(E) \text{ nếu } E \text{ bị chặn trên trong } \mathbb{R}_+ \\ R = +\infty \text{ nếu } E = \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Vậy ta có $[0; R[\subset E \subset [0; R]$

Cho $z \in \mathbb{C}$.

- Giả sử $|z| < R$. Khi đó có $\rho \in E$ sao cho $|z| < \rho < R$. Vì $\left(a_n \rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn, bổ đề Abel chứng tỏ $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ tuyệt đối.
- Giả sử $|z| > R$. Khi đó $|z| \notin E$ nên $\left(a_n z^n\right)_n$ không bị chặn.

2) **Duy nhất**

Giả sử có R_1, R_2 thoả mãn các điều kiện nói trong định lý với $R_1 < R_2$. Ký hiệu $\rho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \rho^n$ hội tụ tuyệt đối (vì $0 \leq \rho < R_2$) và dãy $\left(a_n \rho^n\right)_{n\geq 0}$ không bị chặn (vì $\rho > R_1$) nên có mâu thuẫn.

Nhận xét:

1) Cho chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ và bán kính R của nó. Ta có:

- $R = 0$ nếu và chỉ nếu $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ chỉ hội tụ tai $z = 0$.
- $R = \infty$ nếu và chỉ nếu $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ tại mọi z thuộc $\mathbb{C}$.

2) Các chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| z^n$ có cùng bán kính.

◆ **Hệ quả** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ và bán kính R của nó.

Khi đó, với mọi z thuộc $\mathbb{C}$, ta có:

$$\begin{cases} \bullet\ \left(\left(a_n z^n\right)_{n\geq 0} \text{ bị chặn}\right) \Rightarrow |z| \leq R \\ \bullet\ \left(\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \text{ không hội tụ tuyệt đối}\right) \Rightarrow |z| \geq R \end{cases}$$

$$\text{và vậy} \begin{cases} \bullet \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ hội tụ} \right) \Rightarrow |z| \leq R \\ \bullet \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ phân kỳ} \right) \Rightarrow |z| \geq R \end{cases}.$$

Nhận xét: Độc giả có thể nhận thấy rằng trong suốt chương này, đối diện với các bán kính hội tụ, các bất đẳng thức trong giả thiết là nghiêm ngặt, còn trong kết luận làbất đẳng thức suy rộng.

Nói cách khác, khi $|z| = R$ (R là bán kính hội tụ của $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$), "nói chung" không thể đơn giản khẳng định điều gì về tính cách của dãy $\left(a_n z^n\right)_{n\geq 0}$ hay của chuỗi $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

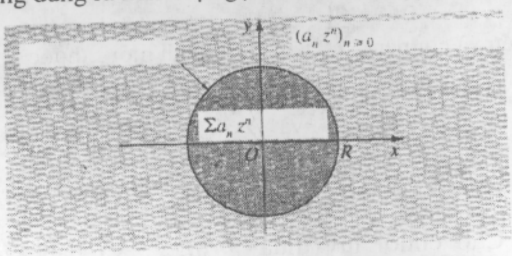
VÍ DỤ:

- $\sum_{n\geq 0} z^n$: $R = 1$ và $\sum_{n\geq 0} z^n$ phân kỳ tại mọi z mà $|z| = 1$.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$: $R = 1$ và $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ phân kỳ tại 1 và hội tụ tại mọi z mà $|z| = 1$ và $z \neq 1$

(xem bài tập 5.5.25).

- $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$ và $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ hội tụ tại mọi z mà $|z| = 1$.

Tập $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = R\}$ thường được gọi là **đường tròn hội tụ** của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, nhưng đúng ra nên được gọi là **đường tròn chưa chắc chắn**.



VÍ DỤ:

1) **Chuỗi cấp số nhân**

Cho $a \in \mathbb{C}^*$. Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a^n z^n$ gọi là chuỗi cấp số nhân, nó có bán kính $\frac{1}{|a|}$.

2) Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}} z^n$?

Cho $z \in \mathbb{C}^*$. Vì : $\left|e^{-\sqrt{n}} z^n\right| = \exp\left(-\sqrt{n} + n\ln|z|\right)$, ta có: $\begin{cases} |z| < 1 \Rightarrow \left|e^{-\sqrt{n}} z^n\right| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ |z| > 1 \Rightarrow \left|e^{-\sqrt{n}} z^n\right| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty \end{cases}$.

Theo Hệ quả, ta kết luận $R = 1$.

3) Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 0} \sin nz^n$?

Cho $z \in \mathbb{C}$.

- Nếu $|z| < 1$ thì $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sin nz^n\right| \leq |z|^n\right)$ và vậy $\sin nz^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.
- Nếu $z = 1$: $\sin nz^n = \sin n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$ (xem tập 1, bài tập 3.1.10), vậy $\sum_{n\geq 0} \sin nz^n$ phân kỳ.

Theo Hệ quả, ta kết luận $R = 1$.

◆ **Định nghĩa** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ và bán kính R của nó. Ta gọi **tổng của chuỗi luỹ thừa** $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ là ánh xạ

$S : \{z \in \mathbb{C}, |z| < \mathbb{R}\} \to \mathbb{C}$ xác định bởi: $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Nếu $R = 0$, có thể gọi tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ là ánh xạ tầm thường $\underset{0 \mapsto a_0}{\{0\} \to \mathbb{C}}$.

VÍ DỤ: Chuỗi cấp số nhân : $\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\right)$ (xem Tập 3, 3.2.4 1)).

5.1.3 So sánh các bán kính

◆ **Mệnh đề 1** Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ với bán kính theo thứ tự là R_a, R_b.

Nếu $\left(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|\right)$ thì $R_a \geq R_b$.

Chứng minh:

Giả sử $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < R_b$; theo 5.1.2, Định lý - Định nghĩa, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ hội tuyệt đối.

Vì $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \left|a_n z^n\right| \le \left|b_n z^n\right|\right)$ suy ra $\sum\limits_{n\ge 0} a_n z^n$ hội tụ tuyệt đối và vậy (xem 5.1.2, Hệ quả): $|z| \le R_a$.

Như thế, ta đã chứng minh $[0;R_b[\subset[0;R_a]$. Vậy $R_a \ge R_b$.

Nhận xét:
Rõ ràng rằng trong Mệnh đề 1 trên đây, ta có thể thay giả thiết bằng:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ (n \ge N \Rightarrow |a_n| \le |b_n|).$$

◆ **Mệnh đề 2** Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\ge 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\ge 0} b_n z^n$ với bán kính theo thứ tự là R_a, R_b.
Nếu $a_n = \underset{n\infty}{O}(b_n)$ thì $R_a \ge R_b$.

Chứng minh:
Theo giả thiết, có $N \in \mathbb{N}$ và $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \ge N,\quad |a_n| \le M|b_n|$.

Rõ ràng rằng $\sum\limits_{n\ge 0} Mb_n z^n$ có bán kính $\ge R_b$ (cũng xem sau đây 5.2.1, Mệnh đề 1).

Dùng Mệnh đề 1, ta kết luận: $R_a \ge R_b$.

◆ **Mệnh đề 3** Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\ge 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\ge 0} b_n z^n$ với bán kính theo thứ tự là R_a, R_b.
Nếu $|a_n| \underset{n\infty}{\sim} |b_n|$ thì $R_a = R_b$.

Chứng minh:

$$|a_n| \underset{n\infty}{\sim} |b_n| \ \Rightarrow \begin{cases} |a_n| = \underset{n\infty}{O}(|b_n|) \\ |b_n| = \underset{n\infty}{O}(|a_n|) \end{cases} \Rightarrow \ \begin{cases} R_a \ge R_b \\ R_b \ge R_a \end{cases} \Rightarrow \ R_a = R_b.$$

VÍ DỤ:

1) Hỏi bán kính R của $\sum\limits_{n\ge 0} \mathrm{e}^{\sin n} z^n$?

Ta có: $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{e}^{-1} \le \mathrm{e}^{\sin n} \le \mathrm{e}$.

Do $\sum\limits_{n\ge 0} \mathrm{e}^{-1} z^n$ và $\sum\limits_{n\ge 0} \mathrm{e} z^n$ có cùng bán kính 1, nên dùng Mệnh đề 1 ta kết luận $R = 1$.

2) Hỏi bán kính R của $\sum\limits_{n\ge 1}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right) z^n$?

Ta có: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right)$

$$= \exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

từ đó: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e = e\left(e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{e}{2n}$.

Vì $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}z^n$ có bán kính 1, nên dùng Mệnh đề 3, ta kết luận: $R = 1$.

5.1.4 Dấu hiệu d'Alembert

Trước hết, hãy nhắc lại dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi số (Tập 3, 3.2.4 3), Định lý).

Cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} u_n$ với số hạng thực >0. Giả sử rằng dãy $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ có một giới hạn hữu hạn l thuộc $\mathbb{R}_+$.

1) Nếu $\ell < 1$ thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ hội tụ, 2) Nếu $\ell > 1$ thì $\sum_{n\geq 0} u_n$ phân kỳ.

◆ **Mệnh đề (Dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi luỹ thừa)**

Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Nếu có $N\in\mathbb{N}$ sao cho $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\, a_n\neq 0,\\ \left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq N} \text{ có giới hạn } \ell \text{ trong } \overline{\mathbb{R}_+},\end{cases}$

thì bán kính R của $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ là $R=\dfrac{1}{\ell}$ (trong đó theo quy ước $\dfrac{1}{0}=\infty$, $\dfrac{1}{\infty}=0$).

Chứng minh:

Giả sử $z\in\mathbb{C}^*, n\in\mathbb{N}$ sao cho $n>N$. Ta có $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell|z|$ (trong $\overline{\mathbb{R}_+}$).

- Nếu $|z|<\dfrac{1}{\ell}$ thì $l|z|<1$, (vậy theo dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi số) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ.

- Nếu $|z| > \frac{1}{\ell}$ thì $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ phân kỳ.

Theo 2.5.1, Hệ quả, ta kết luận: $R = \frac{1}{\ell}$.

◆ **Hệ quả** Giả sử $\sum_n a_n z^n$ là chuỗi luỹ thừa sao cho có phân thức hữu tỷ F của $\mathbb{C}(X) - \{0\}$ để: $\forall n,\ a_n = F(n)$.

Khi đó, bán kính của $\sum_n a_n z^n$ là 1.

Chứng minh:

Có $(P,Q) \in (\mathbb{C}[X] - \{0\})^2$ sao cho $F = \frac{P}{Q}$.

Ký hiệu λX^{α} (theo thứ tự μX^{β}) là số hạng bậc cao nhất của P (theo thứ tự, của Q), ta có:

$$|a_n| \underset{n\infty}{\sim} \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| n^{\alpha-\beta}.$$

Vì $\frac{(n+1)^{\alpha-\beta}}{n^{\alpha-\beta}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, bán kính của $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| n^{\alpha-\beta} z^n$ bằng 1 (dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi luỹ thừa), vậy bán kính của $\sum_n a_n z^n$ cũng bằng 1 (5.1.3, Mệnh đề 3).

VÍ DỤ:

$$\sum_{n\geq 0} z^n,\ \sum_{n\geq 0} nz^n,\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n,\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2 - n + 3}{2n^3 + n + \pi} z^n \text{ có bán kính 1.}$$

Nhận xét:

1) Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_n a_n z^n$. Nếu $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ không có giới hạn (trong $\overline{\mathbb{R}_+}$), dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi luỹ thừa không ứng dụng được.

Chẳng hạn: $\sum_{n\geq 0} \sin n z^n$ có bán kính 1 và $\left(\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right)_{n\geq 1}$ không có giới hạn trong $\overline{\mathbb{R}_+}$.

2) Dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi luỹ thừa không ứng dụng được cho các chuỗi luỹ thừa dạng:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n},\ \sum_{n\geq 0} a_n z^{2n+1},\ \sum_{n\geq 0} a_n z^{n^2},\ \ldots$$

Để xác định bán kính của một chuỗi luỹ thừa như thế, ta có thể thử:

- Hoặc ứng dụng dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi số khi cố định z
- Hoặc thực hiện một phép biến đổi kiểu $Z = z^2$.

VÍ DỤ:

1) Hỏi bán kính R của $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} z^{2n}$?

Với $z \in \mathbb{C}^*$ cố định: $$\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2+1} z^{2(n+1)}}{\frac{1}{n^2+1} z^{2n}}\right| = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|z|^2 \xrightarrow[n\infty]{} |z|^2.$$

Vậy, nếu $|z| < 1$ (theo thứ tự $|z| > 1$) thì $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} z^{2n}$ hội tụ (theo thứ tự, phân kỳ)

theo dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi số.

Ta kết luận: $R = 1$.

2) Hỏi bán kính R của $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}$?

Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} Z^n$ (có được bằng cách đặt $Z = z^4$). Vì

$\frac{2^n}{3^n+n} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ và do bán kính của chuỗi luỹ thừa cấp số nhân $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n Z^n$ bằng

$\frac{3}{2}$, ta suy ra (xem 5.3.1, Mệnh đề 3) rằng bán kính của $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} Z^n$ bằng $\frac{3}{2}$.

Cho $z \in \mathbb{C}$.

- Nếu $|z| < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ thì $|z|^4 < \frac{3}{2}$ nên $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}$ hội tụ.
- Nếu $|z| > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ thì $|z|^4 > \frac{3}{2}$ nên $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}$ phân kỳ.

Ta kết luận: $R = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Đối với ví dụ này, ta cũng có thể dùng phương pháp nói trong ví dụ 1) trên.

3) Hỏi bán kính R của $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} z^{2^n}$?

Cho $z \in \mathbb{C}^*$, ta có: $\left|\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} z^{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} z^{2^n}}\right| = \dfrac{1}{2}|z|^{2^n} \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z| < 1 \\ +\infty & \text{nếu } |z| > 1 \end{cases}$

Ứng dụng dấu hiệu d'Alembert cho các chuỗi số, ta kết luận: $R = 1$.

Bài tập

◊ **5.1.1** Hãy xác định bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

a) $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n^3+n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)z^n$

b) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{2^n+n!}z^n$

c) $\sum_{n\geq 2}\frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)}z^n$

d) $\sum_{n\geq 2}\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+n+2}\right)z^n$

e) $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n}\right)^n z^n$

f) $\sum_{n\geq 1}(\ln n)^n z^n$

g) $\sum_{n\geq 0}\left(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}\right)z^n$

h) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\ln n} z^n$

i) $\sum_{n\geq 2}\left(\ln n\right)^{\ln n} z^n$

j) $\sum_{n\geq 1}\left((n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n+1}}\right)z^n$

k) $\sum_{n\geq 0}\left(\ln(n!)\right)^2 z^n$

l) $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt[3]{n}} z^n$

m) $\sum_{n\geq 0}e^{-\text{sh}n}z^n$

n) $\sum_{n\geq 2}\left(\text{sh}(\sqrt{\ln n})\right)^{-2} z^n$

o) $\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{n}\,\text{sh}n z^n$

p) $\sum_{n\geq 0}\tan\left(\pi\sqrt{n^2+3n+2}\right)z^n$

q) $\sum_{n\geq 1}\left|\sin\left(\pi\sqrt[3]{n^3+1}\right)\right|^{1/3} z^n$

r) $\sum_{n\geq 0}\sin\sqrt{n}z^n$

s) $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{(n!)^2 n^2}z^n$

t) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}z^{n^2}$

u) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\left(\text{ch}\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$

v) $\sum_{n\geq 1}\left(\text{Arccos}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right)z^n$

w) $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n+1}}z^n$

x) $\sum_{n\geq 0}\left(\left(\text{Arcsin}\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\right)-\frac{\pi}{3}\right)z^n$

y) $\sum_{n\geq 0} sh\left(\frac{\pi}{3} - \text{Arctan}\frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right)z^n$

z) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} \text{ch}k}{ne^n} z^n$

a') $\sum_{n\geq 1}\left(\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}\right)z^n$

b') $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{n^2+\sin^2 x}dx\right)z^n$

c') $\sum_{n\geq 2}\left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3-x-1}\right)z^n$

d') $\sum_{n\geq 0}\left(\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx\right)z^n$

e') $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{a+(-1)^n}} z^n,\ a\in\mathbb{R}$

f') $\sum_{n\geq 2} \frac{a^n}{1+b^n} z^n,\ \ (a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

g')
$\sum_{n\geq 1} \text{Arccos}\left(1-\frac{1}{n^a}\right)z^n,\ a\in[1;+\infty[$

h') $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\ln(n!)\right)^a}{(n!)^b} z^n,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$

i') $\sum_{n\geq 2} e^{-(\ln n)^a} z^n,\ \ a\in\mathbb{R}$

j') $\sum_{n\geq 2} \frac{n^a}{(\ln n)^{\ln n}} z^n,\ \ a\in\mathbb{R}$

k') $\sum_{n\geq 1} \left(n^a\right)^{n^b} z^n,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$

l') $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn^c} z^n,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

m') $\sum_{n\geq 1} \frac{(\text{sh}n)^a}{(\text{ch}n)^b} z^n,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$

n') $\sum_{n\geq 1} a^{n^b} z^n,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

o') $\sum_{n\geq 0} e^{(n+1)^a-n^a} z^n,\ \ \ \ a\in\mathbb{R}$

p') $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^a} z^n,\ \ a\in\mathbb{R}$

q') $\sum_{n\geq 1} \left(\text{ch}\frac{1}{n}\right)^{n^a} z^n,\ \ a\in\mathbb{R}$

r') $\sum_{n\geq 1} \left(\text{ch}\frac{1}{n^a}\right)^{n} z^n,\ \ a\in\mathbb{R}$.

◊ **5.1.2** Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 2}\left(\ln\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)z^n$? Hãy xác định tính cách của chuỗi với $z=1$ và $z=-1$.

◊ **5.1.3** *a)* Chứng minh rằng dãy $\left(\sin(n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0.

b) Từ đó suy ra bán kính của $\sum_{n\geq 0}\sin(n^2)z^n$.

◊ **5.1.4** Với $(a,b,c)\in(\mathbb{N}^*)^3$, hãy xác định bán kính của $\sum_{n\geq 1}\frac{(an)!}{(bn)!\,n^{cn}}z^n$ (Có thể sử dụng công thức Stirling: $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, xem Tập 3, 3.7.4, Định lý).

◊ **5.1.5** *a)* Xác định bán kính của $\sum_{n\geq 1}\sigma_p(n)z^n$, trong đó $\sigma_p(n)$ là tổng các luỹ thừa bậc p ($p\in\mathbb{N}^*$ cố định) của các ước số ≥ 1 của n.

b) Xác định bán kính của $\sum_{n\geq 1}\varphi(n)z^n$, trong đó φ là chỉ biểu(số chỉ) Euler, tức là

$$\varphi(n)=\mathrm{Card}\{m\in\{1,...,n\};\ \mathrm{USCLN}(m,n)=1\}.$$

◊ **5.1.6** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$, với bán kính R. Chứng minh rằng nếu có $z_0\in\mathbb{C}$ sao cho $\sum_{n\geq 0}a_nz_0^n$ bán hội tụ thì $R=|z_0|$.

◊ **5.1.7** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ với bán kính R và cho $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 0}\lambda^na_nz^n$?

◊ **5.1.8** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ với bán kính R và cho $p\in\mathbb{R}_+^*$. Hỏi bán kính R' của $\sum_{n\geq 0}|a_n|^pz^n$?

◊ **5.1.9** Cho $(a_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{C}^{\mathbf{N}^*}$ và $\alpha\in\,]-\infty;1[$. Chứng minh rằng các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1}a_nz^n$ và $\sum_{n\geq 1}a_ne^{n^\alpha}z^n$ có cùng bán kính.

◊ **5.1.10*** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ với bán kính R và cho dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ trong $\mathbb{C}^*$ sao cho $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\underset{n\infty}{\to} l\in\mathbb{R}_+$. Có thể nói gì về bán kính của $\sum_{n\geq 0}u_na_nz^n$?

◊ **5.1.11** Cho $(a_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{C}^{\mathbf{N}^*}$.Chứng minh rằng hai tính chất sau là tương đương:

(i) $\sqrt[n]{|a_n|}=\underset{n\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(ii) Bán kính của $\sum_{n\geq 1}n!a_nz^n$ lớn hơn không. (Có thể sử dụng công thức Stirling $n!\underset{n\infty}{\sim}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$), xem Tập 3, 3.7.4, Định lý).

◊ **5.1.12*** **Công thức Hadamard**

Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ với bán kính R. Hãy chứng minh:

$$R = \left(\limsup_{n\infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(về định nghĩa và các tính chất của limsup, xem Tập 1, C 3.2).

◊ **5.1.13*** Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 1} e^{n\sin n} z^n$? (sử dụng công thức Hadamard, bài tập 5.1.12).

◊ **5.1.14*** Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ là hai chuỗi luỹ thừa sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{R}_+^*, \\ \sum_{n\geq 0} b_n \text{ phân kỳ}, \\ \sum_{n\geq 0} b_n z^n \text{ có bán kính 1}, \\ \dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Chứng minh: $$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \underset{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}}{\longrightarrow} \ell.$$

◊ **5.1.15*** Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ là hai chuỗi luỹ thừa sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbf{R}_+^* \\ \sum_{n\geq 0} b_n z^n \text{ có bán kính } +\infty, \\ \dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\infty]{} \ell \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Chứng minh: $$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \underset{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}}{\longrightarrow} \ell.$$

5.2 Các phép toán trên các chuỗi luỹ thừa

5.1.2 Cấu trúc vectơ

◆ **Mệnh đề 1** Cho $\lambda \in \mathbb{C}^*$ và chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ với bán kính R_a, với tổng S_a. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ có bán kính được ký hiệu là $R_{\lambda a}$ và tổng được ký hiệu là $S_{\lambda a}$. Ta có:

$$\begin{cases} R_{\lambda a} = R_a \\ \forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < R_a \Rightarrow S_{\lambda a}(z) = \lambda S_a(z)\right) \end{cases}.$$

Chứng minh:
Giả sử $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < R_a$. Chuỗi số $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ nên chuỗi số $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ hội tụ và: $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Điều đó chứng tỏ $\begin{cases} R_{\lambda a} \geq R_a \\ \forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < R_a \Rightarrow S_{\lambda a}(z) = \lambda S_a(z)\right). \end{cases}$

Ứng dụng kết quả trên cho $\left(\frac{1}{\lambda}, (\lambda a_n)_n\right)$ thay cho $\left(\lambda, (a_n)_n\right)$, ta cũng suy ra $R_a \geq R_{\lambda a}$, vậy cuối cùng $R_{\lambda a} = R_a$.

Nhận xét:
Một cách tầm thường, với các ký hiệu trên đây, ta thấy nếu $\lambda = 0$ thì $R_{\lambda a} = +\infty$ và $S_{\lambda a} = 0$. Nhưng giá trị 0 của λ có thể không tường minh, vì λ có thể phụ thuộc tham số. Chẳng hạn, với mọi $t \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln t}{n} z^n$ là 1 nếu $t \neq 1$ và ∞ nếu $t = 1$.

◆ **Định nghĩa 1** Ta gọi **chuỗi luỹ thừa tổng** của hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ là chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$.

◆ **Mệnh đề 2** Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ là hai chuỗi luỹ thừa với bán kính và tổng tương ứng là R_a, R_b, và S_a, S_b và $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ là chuỗi luỹ thừa tổng mà bán kính và tổng được ký hiệu là R_{a+b} và S_{a+b}.

*1)*Ta có: $\begin{cases} R_{a+b} \geq \text{Min}(R_a, R_b) \\ \forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < \text{Min}(R_a, R_b) \Rightarrow S_{a+b}(z) = S_a(z) + S_b(z)\right) \end{cases}$

2) Hơn nữa, nếu $R_a \neq R_b$ thì $R_{a+b} = \text{Min}(R_a, R_b)$. •

Chứng minh:

1) Giả sử $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$. Vì $|z| < R_a$ và $|z| < R_b$, hai chuỗi số $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ hội tụ; theo Tập 3, 3.1.2, Mệnh đề 1, chuỗi số $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ hội tụ và: $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n z^n + b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Điều đó chứng minh kết quả *1)* đã nói.

2) Giả sử chẳng hạn $R_a < R_b$

Theo 1) ta có $R_{a+b} \geq R_a$.

Cho $\rho \in]R_a; R_b[$. Chuỗi số $\sum_{n\geq 0} a_n \rho^n$ phân kỳ (vì $\rho > R_a$) và chuỗi số $\sum_{n\geq 0} b_n \rho^n$ hội tụ (vì $\rho < R_b$). Vậy chuỗi số $\sum_{n\geq 0}(a_n \rho^n + b_n \rho^n)$ phân kỳ.

Như thế, ta đã chứng minh $\forall \rho \in]R_a; R_b[$, $\rho \geq R_{a+b}$, từ đó $R_{a+b} \leq R_a$ và cuối cùng

$$R_{a+b} = R_a = \text{Min}(R_a, R_b).$$

Nhận xét: Khi $R_a = R_b$, có thể $R_{a+b} = R_a$ hoặc $R_{a+b} > R_a$.

VÍ DỤ:

1) $\sum_{n\geq 0} z^n$ và $\sum_{n\geq 0} nz^n$ có bán kính 1 và chuỗi luỹ thừa tổng $\sum_{n\geq 0}(1+n)z^n$ có bán kính 1.

2) $\sum_{n\geq 0} z^n$ và $\sum_{n\geq 0}(2^{-n} - 1)z^n$ có bán kính 1 và chuỗi luỹ thừa tổng $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} z^n$ có bán kính 2.

3) $\sum_{n\geq 0} z^n$ và $\sum_{n\geq 0} -z^n$ có bán kính 1 và chuỗi luỹ thừa tổng $\sum_{n\geq 0} 0z^n$ có bán kính ∞. ■

Thường xảy ra ta cần cộng những chuỗi luỹ thừa dạng $\sum_{n\geq 0} u_n z^{2n}$ (với chỉ số chẵn)

và $\sum_{n\geq 0} v_n z^{2n+1}$ (với chỉ số lẻ).

◆ **Định nghĩa 2** Hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ gọi là **rời nhau** nếu và chỉ nếu:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n b_n = 0.$$

VÍ DỤ:

1) Các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} u_n z^{2n}$ và $\sum_{n\geq 0} v_n z^{2n+1}$ nói trên đây là rời nhau.

2) Các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$ và $\sum_{n\geq 0} z^{3n}$ không rời nhau.

◆ **Mệnh đề 3** Nếu $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ là hai chuỗi luỹ thừa rời nhau với bán kính theo thứ tự là R_a, R_b thì chuỗi luỹ thừa tổng $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ có bán kính $\mathrm{Min}(R_a, R_b)$.

Chứng minh:

Theo Mệnh đề 2, ta đã có kết quả khi $R_a \neq R_b$. Vậy ta có thể giả sử $R_a = R_b$ và khi đó ta đã có $R_{a+b} \geq R_a$

Giả sử $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| > R_a$. Cả hai dãy $(a_n z^n)_n$ và $(b_n z^n)_n$ đều không bị chặn.

Vì $(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n b_n = 0)$ ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|(a_n + b_n) z^n\right| = \left|a_n z^n\right| + \left|b_n z^n\right| \geq \left|a_n z^n\right|.$$

Từ đó suy ra $((a_n + b_n) z^n)_n$ không bị chặn và vậy $|z| \geq R_{a+b}$. Điều đó chứng tỏ $]R_a : +\infty[\subset [R_{a+b} : +\infty[$ và vậy: $R_{a+b} \leq R_a$.

Cuối cùng: $$R_{a+b} = R_a = \mathrm{Min}(R_a, R_b).$$

VÍ DỤ:

Tìm bán kính R của $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ trong đó $a_n = \begin{cases} n & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$.

Vì $\sum_{p\geq 0} 2pz^{2p}$ và $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{2p+1} z^{2p+1}$ là rời nhau và bán kính 1 nên Mệnh đề 3 chứng tỏ $R = 1$.

5.2.2 Lấy đạo hàm

◆ **Định nghĩa** Ta gọi **chuỗi luỹ thừa đạo hàm** của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ là chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ hay $\sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1} z^n$.

◆ **Mệnh đề** Chuỗi luỹ thừa đạo hàm của một chuỗi luỹ thừa có cùng bán kính với chuỗi luỹ thừa đó.

Chứng minh:

Ký hiệu R_a (theo thứ tự $R_{a'}$) là bán kính của $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (theo thứ tự $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$).

Vì với mọi $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ hội tụ nếu và chỉ nếu $\sum_{n\geq 1} na_n z^n$ hội tụ, nên $R_{a'}$ cũng là bán kính của $\sum_{n\geq 1} na_n z^n$.

1) Do $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq |na_n|\right)$, ta có: $R_a \geq R_{a'}$.

2) Giả sử $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < R_a$. Ta có $\rho \in \mathbb{R}_+$ để $|z| < \rho < R_a$ (chẳng hạn $\rho = \frac{1}{2}(|z| + R_a)$). Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, |na_n z^n| = |a_n \rho^n| \left(n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \right)$.

Vì $0 \leq \rho < R_a$, $\left(a_n \rho^n\right)_{n\geq 1}$ bị chặn. Mặt khác, $n\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Suy ra: $na_n z^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, vậy $|z| \leq R_{a'}$.

Điều đó chứng tỏ $[0;R_a[\subset [0;\ R_{a'}]$, vậy $R_{a'} \geq R_a$. Cuối cùng $R_{a'} = R_a$.

Nhận xét:

1) Áp dụng kết quả trên đây cho một **chuỗi luỹ thừa nguyên hàm** $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ thay cho $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, ta thấy rằng $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ có cùng bán kính với $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

2) Cho chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ và một phân thức hữu tỷ F khác phân thức không. Rõ ràng rằng chứng minh của Mệnh đề trên có thể dùng để chứng minh rằng $\sum\limits_{n} F(n) a_n z^n$ có cùng bán kính với $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Chẳng hạn $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2} z^n$ có bán kính 1 vì $\sum\limits_{n\geq 0} \sin n z^n$ cũng có bán kính 1 (xem 5.1.2, Ví dụ 3).

3) Ta sẽ chứng minh về sau (5.4, Định lý 2) rằng khi chỉ xét z thực thì tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ có đạo hàm trên $]-R;R[$ và đạo hàm đó là tổng của chuỗi luỹ thừa đạo hàm $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

5.2.3 Tích của hai chuỗi luỹ thừa

◆ **Định nghĩa** Ta gọi **chuỗi luỹ thừa tích** (hay **tích Cauchy**) của hai chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ là chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

◆ **Mệnh đề** Giả sử $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ là hai chuỗi luỹ thừa có bán kính và tổng theo thứ tự là R_a, R_b và S_a, S_b và $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ là chuỗi luỹ thừa tích mà bán kính và tổng được ký hiệu là R_c, S_c. Ta có:

1) $R_c \geq \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

2) $\forall z \in \mathbb{C},\ \left(|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \Rightarrow S_c(z) = S_a(z) S_b(z)\right)$

Chứng minh:

Giả sử $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$. Xét chuỗi số tích $\sum\limits_{n\geq 0} \omega_n$ của các chuỗi số $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ (xem Tập 3, 3.4.2 4)):

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \omega_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n.$$

Vì $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ và $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ hội tụ tuyệt đối nên chuỗi số $\sum_{n\geq 0} \omega_n$ hội tụ tuyệt đối và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right),$$

(xem Tập 3, 3.2.4 4), Định lý) và vậy ta có: $\begin{cases} |z| \leq R_c \\ S_c(z) = S_a(z) S_b(z) \end{cases}$.

Điều đó chứng tỏ kết quả đã nêu.

Nhận xét: Có thể $R_c \neq \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ ngay cả khi $R_a \neq R_b$.

VÍ DỤ: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 \\ b_0 = 1, b_1 = -1,\ (\forall n \geq 2, b_n = 0) \end{cases}$.

Ở đây ta có:
- $R_a = 1;\ R_b = \infty$.
- $\begin{cases} c_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 0 \end{cases}$ vậy $R_c = \infty$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < 1 \Rightarrow \left(S_a(z) = \frac{1}{1-z}, S_b(z) = 1 - z, S_c(z) = 1\right)\right)$.

Bài tập

◊ **5.2.1** Xác định bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

a) $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n} + 3^{(-1)^n} n\right)^{-1} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{n^2+1} z^n$

c) $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos n}{\sqrt{n+(-1)^n}} z^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^3 n}{n(n+2)} z^n$

◊ **5.2.2** Cho $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ và R là bán kính hội tụ của $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Có thể nói gì về bán kính R' của $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a_n} z^n$?

◊ **5.2.3*** **Nghịch đảo của một chuỗi luỹ thừa**

Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ với bán kính hội tụ $R > 0$ và $a_0 = 1$.

a) Chứng minh rằng có chuỗi luỹ thừa duy nhất $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 0 \\ 0 & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}.$$

b) Chứng minh rằng $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ có bán kính > 0.

◊ **5.2.4*** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ với bán kính $R > 0$. Chứng minh:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \limsup_{n\infty} \left(\left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right|^{1/n} \right) \leq \mathrm{Max}\left(1, \frac{|z|}{R}\right)$$

(về limsup, xem Tập 1, C 3.2).

◊ **5.2.5** Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 1} b_n z^n$ (số hạng hằng bằng không) với bán kính ≥ 1, và tổng được ký hiệu theo thứ tự là A và B. Hãy chứng minh rằng với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q).$$

Ví dụ:

1) Với mọi α, β, z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1, |z| < 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{p-1} z^{p-1}}{1 - \beta z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\beta^{q-1} z^{q-1}}{1 - \alpha z^q}.$$

2) Với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1 + z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q-1} \frac{z^q}{1 - z^q},$$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1 - z^p)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} q \frac{z^q}{1 - z^q},$$

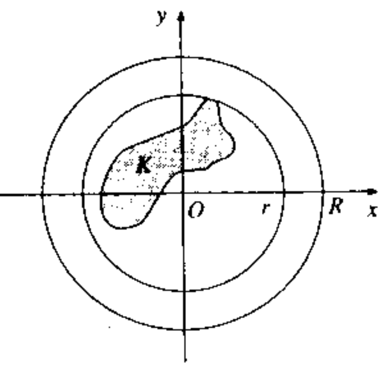
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1 + z^p)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q-1} q \frac{z^q}{1 - z^q}.$$

5.3 Hội tụ

Định lý Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ với bán kính R.

Khi đó, chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(z \mapsto a_n z^n)$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi tập con compăc K nằm trong đĩa mở $B(0; R)$.

Chứng minh:



Vì ánh xạ $\varphi : z \mapsto |z|$ liên tục trên tập compăc K nên φ bị chặn và đạt biên trên. Vậy có $r\in[0;R[$ sao cho:

$$K\subset B'(0;r)\subset B(0;R).$$

Vì $0 \leq r < R$ nên chuỗi số $\sum_{n\geq 0}|a_n| z^n$ hội tụ.

Do $(\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{Sup}_{z\in K} |a_n z^n| \leq |a_n| r^n)$, suy ra chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(z \mapsto a_n z^n)$ hội tụ chuẩn tắc trên K.

Nhận xét:

1) Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, R là bán kính của nó và $z_0 \in \mathbb{C}$. Nếu $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}(z \mapsto a_n z^n)$ hội tụ chuẩn tắc trên $B'(0;|z_0|)$.

Chẳng hạn, $\sum_{n\geq 0}(z \mapsto \frac{z^n}{n^2})$ hội tụ chuẩn tắc trên $B'(0;1)$

2) Đối với chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ với bán kính R, có thể không có hội tụ chuẩn tắc, ngay cả không có hội tụ đều trên đĩa mở $B(0;R)$, ví dụ $\sum_{n\geq 0} z^n$ chứng tỏ điều đó.

Bài tập.

◊ **5.3.1** Chuỗi luỹ thừa nào hội tụ đều trên $\mathbb{R}$?

◊ **5.3.2** Cho $N \in \mathbb{N}^*$ và $z_0, ..., z_N \in \mathbb{C}$ khác nhau từng cặp. Với $P \in \mathbb{C}_N[X]$, đặt $\|P\| = \sum_{k=0}^{N} |P(z_k)|$ ($\mathbb{C}_N[X]$ chỉ $\mathbb{C}$ - kgv các đa thức bậc $\leq N$). Hãy kiểm nghiệm rằng $\|.\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}_N[X]$.

Giả sử $A = \prod_{k=0}^{N}(X - z_k)$ và $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ là một chuỗi luỹ thừa với bán kính R sao cho $\underset{0\leq k\leq N}{\text{Max}} |z_k| < R$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu R_n là phần dư của phép chia Euclide của $\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ cho A.

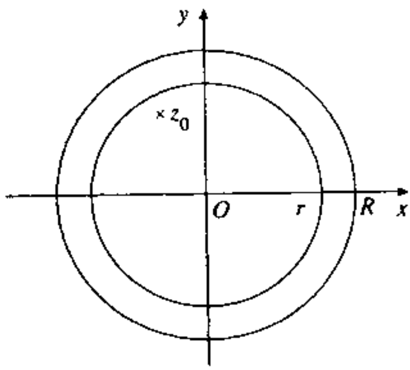
Chứng minh rằng $(R_n)_{n\geq 0}$ hội tụ trong $(\mathbb{C}_N[X], \|.\|)$.

5.4 Tính chính quy của tổng một chuỗi luỹ thừa

◆ **Định lý 1** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ với bán kính R, với tổng S.

Khi đó, ánh xạ S liên tục trên đĩa mở $B(0;R)$.

Chứng minh:



Việc khảo sát là tầm thường khi $R = 0$ nên ta có thể giả sử $R > 0$.

Cho $z_0 \in \mathbb{C}$ mà $|z_0| < R$; có $r \in]|z_0|; R[$.

Vì $\sum_{n\geq 0}(z \mapsto a_n z^n)$ hội tụ chuẩn tắc, (do đó đều) trên $B'(0;r)$ và do mỗi ánh xạ $z \mapsto a_n z^n$ liên tục trên $B'(0;r)$ nên thu hẹp của S lên $B'(0;r)$ liên tục và vậy do $z_0 \in B(0;r)$, S liên tục tại z_0.

VÍ DỤ:

1) Ánh xạ $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \, z^n$ liên tục trên $B(0;1)$.

2) Ánh xạ $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ liên tục trên $B(0;1)$. Vì $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên có hội tụ chuẩn tắc của $\sum_{n\geq 0}(z \mapsto \frac{z^n}{n^2})$ trên $B'(0;1)$ và vậy $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ liên tục trên $B'(0;1)$. ■

Vì lý thuyết đạo hàm đã không được trình bầy trong trường hợp hàm một biến phức, trong phần sau của § 5.4 này, chúng tôi giới hạn ở trường hợp một biến thực mà theo thói quen, ta ký hiệu là x thay cho z. Tuy nhiên, các hệ số vẫn là số phức.

◆ **Định lý 2** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ với bán kính R, với tổng S.

Giả sử $R > 0$. Khi đó ánh xạ S thuộc lớp C^∞ trên $]-R; R[$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R; R[, \ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Đặc biệt: $$\forall k \in \mathbb{N}, \ a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

Chứng minh:

Vì các chuỗi luỹ thừa đạo hàm liên tiếp $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, ..., $\sum_{n\geq k} n(n-1)...(n-k-1)a_n x^{n-k}$ có cùng bán kính R (xem 5.2.2, Mệnh đề), các chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq k}\left(x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}\right), k \in \mathrm{N}$, hội tụ chuẩn tắc trên mọi tập con compăc của $B(0; R)$. Theo 5.3.5, Định lý, ta suy ra rằng S thuộc lớp C^∞ trên $]-R; R[$ và:

$$\forall k \in \mathrm{N}, \forall x \in]-R; R[,$$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Nhận xét:

Có thể tóm tắt Định lý 2 như sau:có thể lấy đạo hàm từng số hạng tổng của một chuỗi luỹ thừa trong khoảng mở $]-R;R[$:

$$\forall x \in]-R; R[, \ \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

VÍ DỤ:

Ta đã thấy (5.1.2, Ví dụ) rằng chuỗi cấp số nhân $\sum_{n\geq 0} x^n$ có bán kính 1 và:

$$\forall x \in]-1; 1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Từ đó suy ra: $\quad \forall x \in]-1; 1[, \ \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n,$

rồi dùng quy nạp trên k:

$$\forall k \in \mathrm{N}^*, \forall x \in]-1; 1[,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+k)...(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{k!\,n!}x^n.$$

Bài tập

◊ **5.4.1** Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Xác định bán kính R.

b) Khảo sát sự hội tụ tại $-R$ và R.

c) Ký hiệu S là tổng của chuỗi, khảo sát tính liên tục của S.

d) Chứng minh: $(1-x)S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

5.5 Khai triển thành chuỗi luỹ thừa

Trong suốt § 5.5 này, biến số, ký hiệu x, là thực.

5.5.1 Tổng quát

◆ **Định nghĩa 1**

1) Cho $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$. Ta nói f **khai triển được thành chuỗi luỹ thừa (có tâm) tại** 0 (viết tắt là **ktđCLT**(0)) nếu và chỉ nếu có một chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ có bán kính R và $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ sao cho:

$$\begin{cases} R > 0, \\ \forall x \in U \cap V \cap]-R;R[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{cases}$$

2) Cho $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$. Ta nói f **khai triển được thành chuỗi luỹ thừa (có tâm) tại** x_0 viết tắt **ktđCLT**(x_0) nếu và chỉ nếu có một chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$ có bán kính R và $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ sao cho:

$$\begin{cases} R > 0 \\ \forall x \in U \cap V \cap]x_0 - R; x_0 + R[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n. \end{cases}$$

Nhận xét:

1) Khái niệm hàm số ktđCLT(x_0) là một tính chất địa phương: nếu f ktđCLT(x_0) thì có $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ sao cho nếu f và g trùng nhau trên W thì g ktđCLT(x_0).

2) Với các ký hiệu của định nghĩa 1, f ktđCLT(x_0) nếu và chỉ nếu $t \mapsto f(x_0 + t)$ ktđCLT(0). Vậy chúng ta quan tâm chủ yếu đến khái niệm hàm số ktđCLT(0).

3) Với mọi x_0 thuộc $\mathbb{R}$, mọi đa thức P đều ktđCLT(x_0). Thật vậy, theo công thức Taylor cho các đa thức (xem Tập 5, Đại số, 5.1.7, Định lý) hay theo công thức Taylor với phần dư tích phân (xem Tập 3, 2.3.10, Định lý), ta có:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

◆ **Mệnh đề 1** **(Tính duy nhất của khai triển thành chuỗi luỹ thừa)**

Cho $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0), f \in \mathbb{C}^V$, ktdCLT(0), $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là một chuỗi luỹ thừa có bán kính $R > 0$ và $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ sao cho: $\forall x \in U \cap V \cap]-R;R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Khi đó f thuộc lớp C^∞ trên $U \cap V \cap]-R;R[$ và $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Chứng minh:
Theo 5.4, Định lý 2, tổng S của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ thuộc lớp C^∞ trên $]-R;R[$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S^{(n)}(0) = n!a_n .$$

Vì f và S trùng nhau trên $U \cap V \cap]-R;R[$ là một lân cận của 0 trong $\mathbb{R}$ nên f thuộc lớp C^∞ trên $U \cap V \cap]-R;R[$ và: $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = S^{(n)}(0) = n!a_n$.

◆ **Định nghĩa 2**

1) Cho $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0), f \in \mathbb{C}^V$ ktdCLT(0). Hệ thức $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, đúng trên một lân cận của 0, gọi là **khai triển thành chuỗi lũy thừa của** f **tại** 0 (ký hiệu tắt **KTCLT**(0)) hay **khai triển Mac - Laurin của** f.

2) Cho $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ ktdCLT(x_0). Hệ thức $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, đúng trên một lân cận của x_0, gọi là **khai triển thành chuỗi luỹ thừa của** f **tại** x_0 (ký hiệu tắt **KTCLT**(x_0)) hay **khai triển Taylor của** f **tại** x_0.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ ktdCLT(0), $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là KTCLT(0) của f.

1) Nếu f chẵn thì KTCLT(0) của f là chẵn, tức là: $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$.

2) Nếu f lẻ thì KTCLT(0) của f là lẻ, tức là: $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0$.

Chứng minh:
Có thể giả sử V đối xứng với 0 tức là $\forall x \in V, -x \in V$ (nếu không, có thể thay V bởi một lân cận W đối xứng đối với 0 và nằm trong V).

Xét $\overset{\vee}{f} : \begin{array}{l} V \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$ (xem Tập 1, 4.1.3. Rõ ràng rằng $\overset{\vee}{f}$ ktđCLT(0) và:

$$\forall x \in V, \ \overset{\vee}{f}(x) = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n .$$

Nếu f chẵn thì $\overset{\vee}{f} = f$ nên do tính duy nhất của KTCLT(0) của f: $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n(-1)^n = a_n$ và vậy: $\forall p \in \mathbb{N}, \ a_{2p+1} = 0$. Lý luận tương tự cho trường hợp f lẻ.

Nhận xét:

Có thể hàm số f thuộc lớp C^∞ trên một lân cận của 0 nhưng f không ktđCLT(0). Xét chẳng hạn f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$.

- Ánh xạ f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^*$ và ta chứng minh bằng quy nạp trên n

rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, có $P_n \in \mathbb{R}[X]$ sao cho: $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Một áp dụng lặp định lý giới hạn của đạo hàm (xem Tập 1, 5.2.2, Hệ quả) cho phép suy ra f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và $\forall n \in \mathbb{N}, \ f^{(n)}(0) = 0$.

- Nếu f ktđCLT(0) thì có một lân cận U của 0 sao cho:

$$\forall x \in U, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

là điều vô lý vì f chỉ triệt tiêu tại 0.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, f$: $]-\alpha; \alpha[\to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^∞.

Với $(n, x) \in \mathbb{N} \times]-\alpha; \alpha[$, xét phần dư $(R_n(f))(x)$ trong công thức Taylor với phần dư tích phân áp dụng cho f giữa 0 và x ở cấp n, tức là:

$$\big(R_n(f)\big)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t .$$

Điều kiện cần và đủ để f ktđCLT(0) là có $\beta \in]0; \alpha]$ sao cho dãy $(R_n(f))_{n \geq 0}$ hội tụ đơn đến 0 trên $]-\beta; \beta[$ tức là:

$$\forall x \in]-\beta; \beta[, \ \big(R_n(f)\big)(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0 .$$

Chứng minh:

1) Giả sử f ktđCLT(0). Khi đó chuỗi luỹ thừa $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ có bán kính

$R > 0$ và có $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho: $\begin{cases} 0 < \beta < \mathrm{Min}(\alpha, R), \\ \forall x \in]-\beta;\beta[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{cases}$.

Cho $\forall x \in]-\beta;\beta[$, ta có:

$$\left(R_n(f)\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\infty]{} 0 .$$

2) Ngược lại, giả sử có $\beta \in]0;\alpha]$ sao cho $R_n(f) \xrightarrow[n\infty]{\text{đcn}} 0$ trên $[-\beta,\beta[$. Khi đó ta có: $\forall x \in]-\beta;\beta[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \left(R_n(f)\right)(x) \underset{n\infty}{\rightarrow} f(x)$,

điều này chứng tỏ rằng chuỗi luỹ thừa $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ có bán kính $R \geq \beta > 0$ và vậy f ktđCLT(0).

◆ **Hệ quả** Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f: $]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^∞. Điều kiện cần và đủ để f ktđCLT(0) là có $(\beta, A, C) \in]0;\alpha] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall x \in]-\beta;\beta[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq CA^n n! .$$

Chứng minh:

1) Giả sử f ktđCLT(0). Khi đó chuỗi luỹ thừa $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ có bán kính $R > 0$

và có $\gamma \in \mathbb{R}$ sao cho: $\begin{cases} 0 < \gamma < \mathrm{Min}(\alpha, R), \\ \forall x \in]-\gamma;\gamma[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \end{cases}$

Vì $0 < \gamma < R$ nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \gamma^n$ hội tụ tuyệt đối, từ đó dãy $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \gamma^n\right)_{n\geq 0}$ bị chặn. Vậy có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \gamma^n\right| \leq M$. Cho $\beta \in]0;\gamma[$; với mọi (k, n) thuộc $\mathbb{N} \times]-\beta;\beta[$, ta có:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-k}\right| = \left|\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} M\gamma^{-n} \beta^{n-k}\right|$$

$$= M\beta^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n = M\beta^{-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{p+k}$$

$$= M\gamma^{-k}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(p+k)!}{p!}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{p} = M\gamma^{-k}k!\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)^{-k-1} = \frac{M\gamma}{\gamma-\beta}\left(\frac{1}{\gamma-\beta}\right)^{k}k!.$$

2) Ngược lại, giả sử có $(\beta, A, C) \in]0;\alpha[\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall n \in \mathrm{N}, \forall x \in]-\beta;\beta[,\quad \left|f^{(n)}(x)\right| \le CA^n n!.$$

Với các ký hiệu của Mệnh đề 3, với mọi (n, x) thuộc $\mathrm{N}\times]-\beta;\beta[$, ta có:

$$\left|(R_n(f))(x)\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t\right|$$

$$\le CA^{n+1}(n+1)!\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\right| = C\left(A|x|\right)^{n+1}.$$

Từ đó ký hiệu $\beta = \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{1}{A}\right)$, ta có: $\forall x \in]-\beta;\beta[,\ (R_n(f))(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và vậy (xem Mệnh đề 3) f ktđCLT(0).

Bài tập

◊ **5.5.1** Cho $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f, g: U \to \mathbb{C}$ ktđCLT(0), $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $h: V \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu} \quad x \ge 0 \\ g(x) & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng h ktđCLT(0) nếu và chỉ nếu có $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, sao cho:

$$\forall x \in W,\ f(x) = g(x).$$

◊ **5.5.4** Giả sử E là $\mathbb{R}$ - kgv các ánh xạ liên tục từ $[-1; 1]$ vào $\mathbb{R}$, được trang bị $\|\cdot\|_\infty$.

Ký hiệu D là tập hợp các phần tử f thuộc E, f ktđCLT(0). Chứng minh: $\mathring{D} = \varnothing$.

5.5.2 Các phép toán trên các hàm số khai triển được thành chuỗi luỹ thừa

◆ **Mệnh đề 1** Nếu $\lambda \in \mathbb{K}$ và nếu f, g ktđCLT(0) với KTCLT(0) là $\sum_{n\ge0} a_n x^n$, $\sum_{n\ge0} b_n x^n$ thì $\lambda f + g$ ktđCLT(0) và KTCLT(0) của nó là $\sum_{n\ge0}(\lambda a_n + b_n)x^n$.

Chứng minh:

Có hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ có bán kính theo thứ tự R, R' và có hai lân cận U, U' của 0 trong $\mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} R > 0, R' > 0, \\ \forall x \in U \times]-R;R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \\ \forall x \in U' \times]-R';R'[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \end{cases}$$

Bán kính R_1 của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + b_n) x^n$ là > 0 (vì $R_1 \geq \mathrm{Min}(R,R')$), và ký hiệu $U_1 = U \cap U' \in V_{\mathbb{R}}(0)$ thì ta có:

$$\forall x \in U_1 \cap]-R_1;R_1[, \quad (\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n ,$$

(xem 5.2.1, Mệnh đề 1 và 2), điều đó chứng tỏ $\lambda f + g$ ktđCLT(0).

◆ **Mệnh đề 2** Nếu f, g ktđCLT(0) thì fg ktđCLT(0) và KTCLT(0) của fg là tích các KTCLT(0) của f và g.

Chứng minh:

Với các ký hiệu như trong Mệnh đề 1, bán kính R_2 của chuỗi luỹ thừa tích $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ (trong đó $\forall n \in \mathrm{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k}$) là > 0 (vì $R_2 \geq \mathrm{Min}\ (R, R')$, xem 5.2.3, Mệnh đề) và ta có: $\forall x \in U_1 \cap]-R_2;R_2[$, $(fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ (xem 5.2.3, Mệnh đề), điều đó chứng tỏ fg ktđCLT(0).

◆ **Mệnh đề 3** Nếu f ktđCLT(0) thì đạo hàm f' của f ktđCLT(0) và KTCLT(0) của f' có được bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng của KTCLT(0) của f.

Chứng minh:

Có chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ bán kính $R > 0$ và một lân cận U của 0 trong $\mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in U \cap]-R;R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Theo 5.4, Định lý 2, f có đạo hàm trên $U \cap]-R;R[$ và:

$$\forall x \in U \cap]-R;R], \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

điều đó chứng tỏ f' là ktđCLT(0), và KTCLT(0) của f' là các đạo hàm từng số hạng của KTCLT(0) của f,

◆ **Hệ quả** Nếu f là ktđCLT(0), thì các đạo hàm liên tiếp của f và các "*nguyên hàm liên tiếp*" của f là ktđCLT(0) và các KTCLT(0) của các đạo hàm hay nguyên hàm đó có được từ lấy đạo hàm hay lấy nguyên hàm từng số hạng của KTCLT(0) của f.

Khi lấy nguyên hàm, chú ý đừng quên "hằng số tích phân": nếu f có KTCLT(0) là $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ và nếu F là một nguyên hàm của f thì f có KTCLT(0) là:

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Nhận xét: Nếu f ktđCLT(0) thì ánh xạ: $f_1 : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ f'(0) & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$

ktđCLT(0).

Thực vậy, có chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ bán kính $R>0$ và một lân cận U của 0 trong

$\mathbb{R}$ sao cho: $$\forall x \in U \cap]-R;R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Vì $f(0) = a_0$ và $f'(0) = a_1$, ta suy ra:

$$\begin{cases} \forall x \in \left(U \cap]-R;R[\right) - \{0\}, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n, \\ f_1(0) = f'(0) = a_1, \end{cases}$$

và vậy: $$\forall x \in U \cap]-R;R[, \quad f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n.$$ ■

Để khảo sát KTCLT(0) của một phân thức hữu tỷ, chúng ta thừa nhận rằng các định nghĩa và tính chất trên đây, trong § 5.5. này, có thể mở rộng cho trường hợp biến số phức.

◆ **Mệnh đề 4** Mọi phân thức hữu tỷ F, không thừa nhận 0 làm cực điểm, đều ktđCLT(0) và bán kính của KTCLT(0) của F là cực tiểu của các môđun của các cực điểm phức của F.

Chứng minh:

1) Bằng cách phân tích F thành tổng những phần tử đơn giản trong $\mathbb{C}(X)$ (xem

Tập 5, Đại số), ta đưa về tìm KTCLT(0) của một phần tử đơn giản $z \mapsto \dfrac{\lambda}{(z-z_0)^{\alpha}}$,

trong đó $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < |z_0|$ ta có:

$$\frac{\lambda}{(z-z_0)^{\alpha}} = \frac{\lambda}{(-z_0)^{\alpha}}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{-\alpha} = \frac{\lambda}{(-z_0)^{\alpha}}\frac{1}{(\alpha-1)!}\sum_{n=\alpha}^{+\infty}\frac{(n-1)!}{(n-\alpha)!}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-\alpha}$$

(xem 5.4, Ví dụ), điều đó chứng tỏ $z \mapsto \dfrac{\lambda}{(z-z_0)^{\alpha}}$ ktđCLT(0), có bán kính $|z_0|$.

Ký hiệu ρ là các cực tiểu của môđun của các cực điểm phức của F và áp dụng Mệnh đề 1, ta kết luận rằng F ktđCLT(0), bán kính $\geq \rho$.

2) Để chứng minh rằng bán kính R của KTCLT(0) của F là ρ, ta hãy lý luận bằng phản chứng: giả sử $R > \rho$. Có một cực điểm phức z_0 của F sao cho $\rho = |z_0|$. Vì $|z_0| < R$, F liên tục tại z_0 (xem 5.4, Định lý 1), điều đó là vô lý vì $|F(z)| \xrightarrow[z \to z_0]{} +\infty$.

VÍ DỤ:

Hãy lập KTCLT(0) của F: $z \mapsto \dfrac{10z}{z^3-2z^2+z-2}$ và xác định bán kính R của nó.

Vì $X^3-2X^2+X-2 = (X-2)(X-i)(X+i)$, các cực điểm phức của F là 2, i, $-$i và vậy $R = \mathrm{Min}(|2|,|-i|,|i|) = 1$. Ta có khai triển đơn trong $\mathbb{C}(X)$ (xem Tập 5, Đại số)

$$\frac{10X}{(X-2)(X-i)(X+i)} = \frac{4}{X-2} + \frac{-2-i}{X-i} + \frac{-2+i}{X+i}.$$

Với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{z-2} = \dfrac{-2}{1-\dfrac{z}{2}} = -2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \\ \dfrac{-2-i}{z-i} = \dfrac{1-2i}{1+iz} = (1-2i)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-iz)^n, \\ \dfrac{-2+i}{z+i} = (1+2i)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(iz)^n, \end{cases}$$

và vậy $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, trong đó: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + (1-2i)(-i)^n + (1+2i)i^n$

hay: $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{2p} = -2^{1-2p} + 2(-1)^p, \\ a_{2p+1} = -2^{-2p} - 4(-1)^p. \end{cases}$

Bài tập

◊ **5.5.3** Cho $P \in \mathbb{C}(X)$ có bậc 2 và cho $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C}\\ x \mapsto e^{P(x)}\end{array}$.

Chứng minh rằng KTCLT(0) của f không thể có hai hệ số liên tiếp triệt tiêu.

◊ **5.5.4** Cho $P \in \mathbb{R}[X]$, $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto e^{P(x)}\end{array}$.

Giả sử tất cả các hệ số của KTCLT(0) của f đều ≥ 0. Cho $x_0 \in \mathbb{R}_+$ sao cho $P'(x_0) = 0$.

Chứng minh $P''(x_0) \geq 0$.

◊ **5.5.5** Cho hai hàm số f, g ktdCLT(0) sao cho $fg = 0$. Chứng minh rằng có $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ sao cho $f|_V = 0$ hay $g|_V = 0$.

◊ **5.5.6*** Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sao cho $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$,

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ và $z_1, ..., z_n$ là các không điểm của P trong $\mathbb{C}$. Với mọi

$p \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $S_p = \sum_{k=1}^{n} z_k^{-p}$.

Chứng minh : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, pa_p + \sum_{q=1}^{p} a_{p-q} S_q = 0$.

Ứng dụng: Tính $\sum_{k=1}^{4} z_p^{-3}$ trong đó $z_1, ..., z_4$ là các không điểm (trong $\mathbb{C}$) của $X^4 + X^2 + X + 1$.

5.5.3 Những KTCLT(0) thường dùng

1)* KTCLT(0) *của $\exp : x \mapsto e^x$

Ánh xạ exp thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và: $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)}(0) = 1$.

Áp dụng công thức Taylor với phần dư tích phân, với mọi (n, x) thuộc $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ ta

được: $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Vì: $$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \mathrm{Max}(1, e^x) \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| = \mathrm{Max}(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

suy ra: $$\forall x \in \mathbb{R},\quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

và vậy $\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ hội tụ và $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$.

Chúng ta sẽ thấy về sau (5.6.1, Định nghĩa) rằng ta có thể thác triển một cách thoả đáng exp lên $\mathbb{C}$.

Thay x bằng $-x$ ta được: $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ và ta suy ra rằng ch, sh, ktđCLT(0) có bán kính ∞ và: $\forall x\in\mathbb{R},\ \left(\operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!};\ \operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$.

2) KTCLT(0) *của* cos, sin

Các ánh xạ cos, sin thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \begin{cases}\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\\ \sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Sử dụng công thức Taylor với phần dư tích phân, ta chứng minh tương tự như trong 1) rằng cos và sin ktđCLT(0), có bán kính ∞ và:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left(\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};\ \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Chúng ta sẽ thấy về sau (5.6.2, Mệnh đề) rằng ta có thể suy ra các KTCLT(0) đó từ KTCLT(0) của e^z, $z\in\mathbb{C}$.

3) KTCLT(0) *của* $f_\alpha : x\mapsto(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ cố định.

Chúng ta sử dụng ở đây phương pháp gọi là "phương pháp của phương trình vi phân" (xem thêm về sau 7.4.5).

Ánh xạ f_α thuộc lớp C^∞ trên $]-1;\infty[$ và:

$$\forall x\in]-1;\infty[,\ f'_\alpha(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{1+x}f_\alpha(x).$$

Vậy f_α là nghiệm trên $]-1;\infty[$ của phương trình vi phân:

$$(E)\qquad (1+x)y'-\alpha y=0$$

1) Giả sử y là một hàm số ktđCLT(0); có một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ với bán kính $R>0$ và có $r\in\mathbb{R}_+^*$ sao cho: $\begin{cases}r\leq \operatorname{Min}(1,R),\\ \forall x\in]-r;r[,\quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.\end{cases}$

Khi đó, theo 5.4, Định lý 2, ta có: $\forall x\in]-r;r[,\quad y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}$.

Với mọi x thuộc $]-r;r[$, ta có:

$$(1+x)y'(x)-\alpha y(x)=(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)a_{n+1}+na_n-\alpha a_n\big)x^n .$$

Để y là nghiệm của (E) trên $]-r;r[$, theo tính duy nhất của KTCLT(0) của 0, điều kiện cần và đủ là: $\begin{cases}a_0=1,\\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1}=(\alpha-n)a_n\end{cases}$

tức là: $\begin{cases}a_0=1,\\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}.\end{cases}$

2) Bây giờ hãy xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, trong đó:

$$a_0=1 \text{ và } \quad a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \text{ nếu } n\geq 1.$$

Vì $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right|\xrightarrow[n\infty]{}1$ nên bán kính của $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ là 1 và tổng S của nó xác định trên $]-1;1[$. Theo 1), S là nghiệm trên $]-1;1[$ của phương trình vi phân (E) là một phương trình tuyến tính cấp một. Vậy có $\lambda\in\mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x\in]-1;1[,\ S(x)=\lambda e^{\alpha\ln(1+x)}=\lambda(1+x)^\alpha$$

(xem Tập 2, 11.1.2, Định lý).
Ngoài ra $S(0)=a_0=1$ nên ta kết luận:

$$\forall x\in]-1;1[,\ S(x)=(1+x)^\alpha=f_\alpha(x).$$

Cuối cùng, f_α ktdCLT(0), bán kính 1 (nếu $\alpha\notin\mathbb{N}$) và:

$$\forall x\in]-1;1[,\ (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n .$$

Trường hợp riêng: $\quad \forall x\in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n .$

Thay x bằng $-x$, ta lại được chuỗi cấp số nhân: $\quad \forall x\in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n .$

4)* KTCLT(0) *của $x\mapsto\ln(1+x)$ **và** $x\mapsto-\ln(1-x)$.

Lấy nguyên hàm KTCLT(0) của $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ ta được:

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n .$$

Nhận xét:
Chuỗi ánh xạ $\sum_{n \geq 1} f_n$, trong đó $f_n : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\end{array}$, hội tụ đều trên [0;1]. Thực vậy, với x thuộc [0;1], chuỗi số $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu và vậy (xem Tập 3, 3.3.8, 2), c), Mệnh đề):

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

từ đó: $\quad \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vì mọi f_n liên tục tại 1, ta kết luận rằng tổng S liên tục tại 1, và vậy:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2 .$$

■

Xem thêm bài tập 4.3.14.

Thay x bởi $-x$ trong KTCLT(0) của $x \mapsto \ln(1+x)$ ta được

$$\forall x \in]-1;1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} .$$

5) KTCLT(0) các hàm lượng giác ngược và một số lôgarit

a) Vì $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, bằng cách lấy nguyên hàm, ta suy ra:

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} .$$

Nhận xét: Bởi lý luận như trong nhận xét ở 4), công thức trên còn đúng tại 1, tức là:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} .$$

b) Bằng cách lấy nguyên hàm của KTCLT(0) của $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ ta được:

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ta cũng có thể có KTCLT đó bằng cách sử dụng:

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

c) Theo 3): $\forall x \in]-1;1[, \qquad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4....(2n)}x^{2n},$$

từ đó bằng cách lấy nguyên hàm:

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \text{Arcsin}x = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4....(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

d) Cũng bằng cách lấy nguyên hàm của KTCLT(0) của $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ta được:

$\forall x \in]-1;1[,$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1.3...(2n-1)}{2.4....(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Nhận xét: Có thể chứng minh rằng các công thức *c)* và *d)* còn đúng khi $x = -1$ và khi $x = 1$ (xem bài tập 5.5.19).

Bảng các KTCLT(0) thường dùng

Công thức	Bán kính của chuỗi luỹ thừa	Tập hợp trên đó công thức đúng
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\text{ch}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\text{sh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1(∞ nếu $\alpha \in \mathbb{N}$)	$]-1;1[$ ($\mathbb{R}$ nếu $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1;1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	1	$]-1;1]$
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1;1[$
$\text{Arctan}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1	$[-1;1]$
$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$]-1;1[$
$\text{Arcsin}x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{2.4....(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1;1]$
$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) =$ $x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)x^{2n+1}}{2.4...(2n)(2n+1)}$	1	$[-1;1]$

Bài tập

◊ **5.5.7** Tính bán kính hội tụ R và tổng S của các chuỗi luỹ thừa sau (z: biến số phức, x: biến số thực):

a) $\sum_{n\geq 0} n^3 z^n$

b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n n^2 z^{2n-1}$

c) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \left(n+\frac{1}{n}\right) x^{2n}$

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n-1}$

f) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$

h) $\sum_{n\geq 2} \frac{x^{2n}}{n^2-1}$

i) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+3)}$

j) $\sum_{n\geq 1} \frac{4n+1}{2n^2+n-1} x^n$

k) $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

l) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$

m) $\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

n) $\sum_{n\geq 0} \left(3+(-1)^n\right)^n z^n$

o) $\sum_{n\geq 0} (n^2-n-3)3^{n-1} z^{2n}$

p) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{(-1)^n} x^n}{n}$

q) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+1}{n!} x^n$

r) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

s) $\sum_{n\geq 0} \cos n\theta x^n$ và $\sum_{n\geq 0} \sin n\theta x^n$, $\theta \in \mathbb{R}$

t) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$ và $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ (sử dụng bài tập 5.5.7 *s*))

u) $\sum_{n\geq 0} \cos^2 n\, x^n$ (sử dụng bài tập 5.5.7 s))

v) $\sum_{n\geq 0} n\,\mathrm{sh} n x^n$

w) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, trong đó $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{nếu } n \equiv 0[3] \\ 0 & \text{nếu } n \equiv 1[3] \\ 3^n & \text{nếu } n \equiv 2[3]. \end{cases}$

◊ **5.5.8**. Đối với các hàm số f cho bởi $f(x)$ sau đây (x là biến số thực), hãy chứng minh f ktdCLT(0) và tính KTCLT(0) của nó; nói rõ bán kính hội tụ R.

a) $\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$

b) $(1+x+x^2+x^3)^{-3}$

c) $\frac{x\,\mathrm{sh}\,\theta}{x^2-2x\,\mathrm{ch}\,\theta+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

e) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

f) $(1+x)\ln(1+x)$

g) $\dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

h) $\ln(1+x+x^2)$

i) $\ln(x^2+px+q)$, $(p,q\in\mathbb{R}^2,\ p^2-4q>0)$

j) $\ln\left(1+\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

k) $\ln\dfrac{1-x}{1+x^2}$

l) $\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$

m) $\sin^3 x$

n) $\begin{cases}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 & \text{nếu} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{nếu} \quad x=0\end{cases}$

o) $\begin{cases}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 & \text{nếu} \quad x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{nếu} \quad x=0\end{cases}$

p) $\operatorname{Arctan}\dfrac{2(x+1)}{x-4}$

p) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\tan\alpha\right)$, $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

r) $(\operatorname{Arcsin}x)^2$

s) $e^{a\operatorname{Arccos}x}$, $a\in\mathbb{R}$

t) $e^{x\operatorname{ch}a}\operatorname{ch}(x\operatorname{sh}a)$ và $e^{x\operatorname{ch}a}\operatorname{sh}(x\operatorname{sh}a)$, $a\in\mathbb{R}$

u) $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$

v) $\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{e^t-1}{t}dt & \text{nếu} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{nếu} \quad x=0\end{cases}$

w) $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\operatorname{ch}t}{t}dt$ nếu $x\neq 0$ và được thác triển liên tục tại 0

x) $\displaystyle e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt$

y) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+x\sin^2 t)dt$

z) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}dt$

a') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{Arctan}(x\sin t)}{\sin t}dt$.

◊ **5.5.9** Tính tổng của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 2^{-n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3+1}{n!}(-1)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(6n+5)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}C_{2n}^n$.

◊ **5.5.10** Chứng minh rằng ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{nếu} \quad x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu} \quad x=0\end{cases}$$

thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$.

◊ **5.5.11** Khảo sát sự hội tụ và tính tổng của chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0} f_n$ trong đó:

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n + 2^{-n}x^{-n}.$$

◊ **5.5.12** Giải phương trình $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n = 0$ với ẩn $x\in\mathbb{R}$.

◊ **5.5.13** *a)* Với $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}(a^n+b^n)$.

b) Tính tổng trong trường hợp $a=x, b=-\frac{x}{1-x}$.

◊ **5.5.14** Tính cách và tổng (nếu có) của chuỗi số $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n(1+b^n)}{n}, \quad (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$.

◊ **5.5.15** Với $(\rho,\theta)\in]0;1[\times]-\pi;\pi[$, $z=\rho e^{i\theta}$, tính $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ (sử dụng bài tập 5.5.7,*t)*).

◊ **5.5.16** Với $(k,x)\in\mathbb{N}^*\times\left(\mathbb{R}-\{-1;1\}\right)$, tính $I_k(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\sin k\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\mathrm{d}\theta$ bằng cách sử dụng KTCLT(0) của $x\mapsto\frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ (xem bài tập 5.5.8, *d)* hay 5.5.7,*s)*).

◊ **5.5.17** Chứng minh: $\forall x\in]-1;1[, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}dt=\pi\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

◊ **5.5.18** Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\int_0^1 e^x\ln x\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.n!}$,

b) $\int_0^1\frac{(\ln x)^k}{1-x}\mathrm{d}x=(-1)^k k!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+1}}, \qquad k\in\mathbb{N}^*$,

c) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)}$.

◊ **5.5.19** Chứng minh rằng các KTCLT(0) của Arcsin và $x\mapsto\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ vẫn còn đúng tại -1 và 1.

◊ **5.5.20** *a)* Chứng minh rằng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \ln n x^n$ có bán kính 1. Ký hiệu S là tổng của nó.

b) Chứng minh: $\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$.

c) Từ đó suy ra: $S(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

d) Tính giới hạn vừa nói đó bằng cách sử dụng công thức Wallis (xem Tập 3, 3.3.7,4)):

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

◊ **5.5.21** Cho dãy thực $(a_n)_{n\geq 1}$ có giới hạn $a \neq 0$.

a) Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 1}\dfrac{a_n}{n}x^n$?

b) Ký hiệu $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}x^n$. Tính $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{S(x)}{\ln(1-x)}$ (sử dụng bài tập 5.1.14).

◊ **5.5.22** Cho dãy thực $(a_n)_{n\geq 0}$ có giới hạn a.

a) Hỏi bán kính của $\sum_{n\geq 0}\dfrac{a_n}{n!}x^n$?

b) Ký hiệu $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$. Tính $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}S(x)$ (sử dụng bài tập 5.1.15).

◊ **5.5.23** Chứng minh rằng với $k \in \mathbb{N}^*$ cố định: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

(sử dụng bài tập 5.1.14).

◊ **5.5.24** Chứng minh rằng: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{ex-\frac{1}{2}}$ (sử dụng bài tập 5.1.15).

◊ **5.5.25** *a)* Cho $(a,b) \in]0;2\pi[^2$; chứng minh rằng dãy $(I_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi $I_n = \displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\mathrm{d}t$, hội tụ và tính giới hạn của nó (sử dụng bổ đề Lebesgue, Tập 1, 6.4.4, ví dụ 2)). Từ đó suy ra rằng các chuỗi $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{ina}}{n}$ và $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{inb}}{n}$ có cùng tính cách.

b) Chứng minh rằng với mọi a $\in\ ]0;2\pi[$, chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{ina}}{n}$ hội tụ và tính tổng của nó (sử dụng $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$, xem 5.3.3, 4), Nhận xét).

◊ **5.5.26** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ có bán kính 1 và tổng S. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}$ hội tụ tuyệt đối thì S khả tích trên $[0;1[$ và:

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}.$$

◊ **5.5.27** Ta ký hiệu $f:\begin{array}{ccc}[0;1[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x}}\end{array}$, và với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n:[0;1[\to\mathbb{R}$ là tổng riêng thứ n của chuỗi *Taylor* của f tại 0, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}x^k$.

Chứng minh: $\int_0^1|f-S_n|\xrightarrow[n\infty]{}0$.

◊ **5.5.28** Cho a $\in\mathbb{C}$ sao cho $|a|<1$ và $f_a:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall z\in\mathbb{C},\ f_a(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{a^n z}-1).$$

Chứng minh rằng f_a ktdCLT(0), có bán kính vô tận và hãy lập KTCLT(0) đó.

◊ **5.5.29** Cho a $\in\mathbb{C}$ sao cho $|a|<1$. Chứng minh rằng ánh xạ $f_a:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{x+n}$ khai triển được thành chuỗi luỹ thừa tại 1 với bán kính 1.

◊ **5.5.30** Cho chuỗi phức $\sum_{n\geq 0}a_n$ hội tụ tuyệt đối và S là tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$.

Chứng minh: $\int_0^{+\infty}S(x)e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

◊ **5.5.31*** Cho dãy $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong $\mathbb{R}_+^*$ tăng nghiêm ngặt sao cho $\lambda_n\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$.

a) Khảo sát các sự hội tụ đơn và đều của chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}f_n$, trong đó:

$$f_n:\begin{array}{ccc}[0;+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (-1)^n e^{-\lambda_n x}\end{array}.$$

b) Ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, chứng minh rằng tích phân suy rộng $\int_{\to 0}^{\to +\infty} S(x)\mathrm{d}x$ hội tụ và:

$$\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

◊ **5.5.32*** Cho dãy phức $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho chuỗi $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ hội tụ. Ta giả sử:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$$

(hãy chứng minh sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n\geq 0} a_n^k$).

Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0$.

◊ **5.5.33*** Cho dãy phức $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$. Chứng minh:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

◊ **5.5.34*** Chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3)$, trong đó H_n là số điều hoà thứ n,

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ và ζ là hàm số Riemann, $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

◊ **5.5.35*** Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ có bán kính $R > 0$, có tổng S. Chứng minh rằng với mọi số phức z_0 sao cho $|z_0| < R$, S khai triển được thành chuỗi luỹ thừa tại z_0.

5.6 Các hàm số một biến phức thường gặp

5.6.1 Hàm mũ phức

◆ **Định nghĩa** Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ có bán kính vô tận, tổng của nó gọi là **hàm mũ phức** và được ký hiệu là **exp**. Vậy ta có:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \exp(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}.$$

Nhận xét: Định nghĩa trên bao hàm định nghĩa hàm mũ thực đã biết (xem Tập 2, 7.2, và Tập 4, 5.5.3, 1)).
Do đó ta cũng ký hiệu e^z thay cho $\exp(z)$.

◆ **Định lý 1** $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\ e^z e^{z'}=e^{z+z'}$.

Chứng minh:

Cho $(z, z')\in\mathbb{C}^2$. Các chuỗi số $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ và $\sum_{n\geq 0}\frac{z'^n}{n!}$ hội tụ tuyệt đối. Theo Tập 3, 3.4.2, 4), Định lý, chuỗi tích của chúng $\sum_{n\geq 0}w_n$, trong đó $w_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng $e^z e^{z'}$. Nhưng mặt khác:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k z'^{n-k}=\frac{1}{n!}(z+z')^n.$$

Vậy ta có $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=e^{z+z'}$ và cuối cùng: $\qquad e^z e^{z'}=e^{z+z'}$.

◆ **Hệ quả 1**

1) $\forall N\in\mathbb{N}^*,\forall z_1,\dots,z_N\in\mathbb{C},\ \prod_{k=1}^{N}e^{z_k}=e^{\sum_{k=1}^{N}z_k}$,

2) $\forall z\in\mathbb{C},\ \left(e^z\neq 0 \text{ và } \frac{1}{e^z}=e^{-z}\right)$,

3) $\forall n\in\mathbb{Z},\forall z\in\mathbb{C},\ (e^z)^n=e^{nz}$.

Nhận xét: Ở đây chúng ta không định nghĩa một cách tổng quát $(e^z)^{z'}$ khi $(z, z')\in\mathbb{C}^2$.

◆ **Mệnh đề 1** $\forall z \in \mathbb{C},\quad \overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$.

Chứng minh:

Theo Tập 3, 3.1.2, Hệ quả: $$\overline{e^{z}} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{\left(z^n\right)}}{n!} = e^{\bar{z}}.$$

◆ **Mệnh đề 2** $\forall z \in \mathbb{C},\ \left|e^{z}\right| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

Chứng minh:

$$\left|e^{z}\right|^2 = e^{z}\overline{e^{z}} = e^{z}e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re}(z)} = \left(e^{\operatorname{Re}(z)}\right)^2,$$

do đó được đẳng thức cần chứng minh vì $\left|e^{z}\right| > 0$ và $e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$.

◆ **Hệ quả 2** $\forall z \in \mathbb{C},\ \left(\left|e^{z}\right| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}\right)$.

◆ **Định lý 2** Ánh xạ $z \mapsto e^{z}$ là một đồng cấu toàn ánh, liên tục từ nhóm $(\mathbb{C},+)$ lên nhóm $\left(\mathbb{C}^{*},\times\right)$.

Chứng minh:

Ta đã thấy: $\forall z \in \mathbb{C},\quad e^{z} \neq 0$

Mặt khác, theo 5.4, Định lý 1, $z \mapsto e^{z}$ liên tục trên $\mathbb{C}$.

Chỉ còn cần chứng minh rằng $\varphi : \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{*}\\ z \mapsto e^{z}\end{array}$ là toàn ánh. Cho $z_0 \in \mathbb{C}^{*}$.

1) Giả sử $z_0 \notin \mathbb{R}_{-}$:

Ánh xạ $f : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{C}\\ t \mapsto 1-t+tz_0\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[0;1]$ và $\forall t \in [0;1], f(t) \neq 0$, nên ánh xạ $g : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{C}\\ t \mapsto \dfrac{f'(t)}{f(t)}\end{array}$ liên tục trên $[0;1]$ và ánh xạ $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ xác định bởi $\gamma(t) = \int_0^t g(u)\mathrm{d}u$ thuộc lớp C^1 trên $[0;1]$ và $\forall t \in [0;1],\quad \gamma'(t) = g(t)$. Ánh xạ $h : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{C}\\ t \mapsto f(t)e^{-\gamma(t)}\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $[0;1]$ và:

$$\forall t \in [0;1],\quad h'(t) = \left(f'(t) - f(t)\gamma'(t)\right)e^{-\gamma(t)} = 0.$$

Vậy h là hằng. Vì $h(0) = f(0) = 1$. Ta kết luận: $\forall t \in [0;1],\quad f(t) = e^{\gamma(t)}$.

Nói riêng: $z_0 = f(1) = e^{\gamma(1)}$.

2) Giả sử $z_0 \in \mathbb{R}_{-}^{*}$.

Theo 1), có $u \in \mathbb{C}$ sao cho $e^u = i$ và vậy $e^{2u} = (e^u)^2 = -1$. Vì $-z_0 \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ theo 1), có $z \in \mathbb{C}$ sao cho $-z_0 = e^z$. Khi đó: $+z_0 = -e^z = e^{z+2u}$.

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 3** Ánh xạ $\psi : t \mapsto e^{it}$ là một đồng cấu toàn ánh liên tục từ nhóm $(\mathbb{R},+)$ lên nhóm $(\mathbb{U},.)$ và có $a \in \mathbb{R}_+^*$ duy nhất sao cho $Ker(\psi) = a\mathbb{Z}$. Ta ký hiệu $\pi = \dfrac{a}{2}$.

Nhắc lại (xem Tập 1, 2.4.1) rằng $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Chứng minh:

- ψ liên tục vì $z \mapsto e^z$ liên tục trên $\mathbb{C}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ |\psi(t)| = |e^{it}| = 1$ (xem Hệ quả 2).
- Cho $\omega \in \mathbb{U}$. Theo Định lý 2, có $z \in \mathbb{C}$ để $\omega = e^z$. Vì $|\omega| = 1$, suy ra $z \in i\mathbb{R}$ (xem Hệ quả 2) và vậy có $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\omega = e^z = e^{it}$, điều đó chứng tỏ tính toàn ánh của ψ.
- Theo định nghĩa: $\mathrm{Ker}(\psi) = \psi^{-1}(\{1\}) = \{t \in \mathbb{R}; e^{it} = 1\}$ (xem tập 5, đại số). $\mathrm{Ker}(\psi)$ là một nhóm con của $(\mathbb{R}, +)$, đóng (vì ψ liên tục và $\{1\}$ đóng), khác $\{0\}$ vì với các ký hiệu của Định lý 2: $\varphi(4u) = e^{4u} = (e^u)^4 = i^4 = 1$.

Ta biết rằng khi đó (xem J-*M*. Monier, Bài tập, Giải tích MPSI, bài tập 1.13) có $a \in \mathbb{R}_+^*$ duy nhất sao cho $\mathrm{Ker}(\psi) = a\mathbb{Z}$.

◆ **Hệ quả 3** $\forall z \in \mathbb{C},\ \left(e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}\right)$.

Nhận xét: Khảo sát trên đây (Định lý 2 và Mệnh đề - Định nghĩa 3) cho một định nghĩa tường minh của π.

5.6.2 Hàm số lượng giác

◆ **Định nghĩa 1** Ta định nghĩa **cos** và **sin** trên $\mathbb{C}$ bởi: với mọi z thuộc $\mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Nhận xét: Các hàm số đó thác triển các hàm số cos và sin định nghĩa trước đây trên $\mathbb{R}$ (xem Tập 2, 7.8 và Tập 4, 5.5.3, 2)).

◆ **Mệnh đề**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right). \qquad \blacksquare$$

Ta chứng minh dễ dàng rằng:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} \cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

◆ **Định nghĩa 2**

1) Với $z \in \mathbb{C} - \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, ta ký hiệu $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$.

2) Với $z \in \mathbb{C} - \pi Z$, ta ký hiệu $\operatorname{cotan} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Nhận xét: Các hàm số đó thác triển các hàm số tan và cotan định nghĩa trước đây theo thứ tự trên $\mathbb{R} - \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ và $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

5.6.2 Bảng công thức các hàm số lượng giác

Độc giả dễ dàng nhận thấy rằng bảng công thức về các hàm số lượng giác một biến số thực (Tập 2, 7.8) phần lớn cũng đúng cho hàm số lượng giác biến số phức. Vậy ta có:

- $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{cases}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big) \\ \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big) \\ \cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big). \end{cases}$

- $\forall(p,q)\in\mathbb{C}^2,\ \begin{cases}\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q=2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}\\ \cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}\\ \cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p-q}{2}\sin\dfrac{p+q}{2}.\end{cases}$

- Ký hiệu $t=\tan\frac{z}{2}$, ta có: $\sin z=\frac{2t}{1+t^2}, \cos z=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan z=\frac{2t}{1-t^2}$

khi các phần tử đó xác định.

- $\forall z\in\mathbb{C},\ \begin{cases}\cos^2 z=\dfrac{1+\cos 2z}{2}\\ \sin^2 z=\dfrac{1-\cos 2z}{2}.\end{cases}$

- sin là hàm số 2π - tuần hoàn, lẻ và với mọi z thuộc $\mathbb{C}$:

$$\sin(\pi+z)=-\sin z,\qquad \sin(\pi-z)=\sin z$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=\cos z,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z.$$

- cos là hàm số 2π - tuần hoàn, chẵn và với mọi z thuộc $\mathbb{C}$:

$$\cos(\pi+z)=-\cos z,\qquad \cos(\pi-z)=-\cos z$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-\sin z,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin z.$$

- tan là hàm số π - tuần hoàn, lẻ và với mọi z thuộc $\mathbb{C}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-\mathrm{cotan}z,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\mathrm{cotan}z.$$ ■

Nhận xét: Các ánh xạ cos và sin không bị chặn trên $\mathbb{C}$ mặc dầu rằng

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \cos^2 z+\sin^2 z=1.$$

Chú ý rằng do cos$z$ và sin$z$ là những số phức nên $\cos^2 z$ và $\sin^2 z$ không buộc phải thực.

5.6.3 Hàm số hyperbolic

◆ **Định nghĩa 1** Ta định nghĩa ch và sh trên $\mathbb{C}$ bởi: với mọi z thuộc $\mathbb{C}$

$$\mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Nhận xét: Các hàm số đó thác triển các hàm số ch và sh định nghĩa trước đây trên $\mathbb{R}$ (xem Tập 2, 7.6).

◆ **Mệnh đề 1**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \mathrm{i}\,\mathrm{sh} z = \sin(\mathrm{i}z) \\ \mathrm{ch} z = \cos(\mathrm{i}z). \end{cases}$$ ■

Vậy một mặt, các hàm số phức ch, sh và mặt khác, các hàm số cos, sin có "*tác dụng kép*".

◆ **Mệnh đề 2**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(\mathrm{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \mathrm{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$ ■

Bảng các công thức về các hàm số hyperbolic

Theo Mệnh đề 1, ta suy ra bảng công thức này từ bảng công thức về các hàm số lượng giác bằng cách thay: cos bởi ch, sin bởi sh, tan bởi th. Chẳng hạn, từ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ suy ra:

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh} a \,\mathrm{ch} b - \mathrm{sh} b \,\mathrm{ch} a,$$

và từ: $\cos 2z = 1 - 2\sin^2 z$ suy ra: $\mathrm{ch} 2z = 1 + 2\mathrm{sh}^2 z$.

Bài tập

◊ **5.6.1** Tìm bán kính hội tụ và tổng của các chuỗi luỹ thừa:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n\theta}{n!} x^n,\ \sum_{n\geq 0} \frac{\sin n\theta}{n!} x^n \text{ với } \theta \in \mathbb{R} \text{ cố định.}$$

◊ **5.6.2** Lập KTCLT(0) của f:

a) $f(x) = e^x \cos x$

b) $f(x) = \sin x \,\mathrm{ch} x$

c) $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} \mathrm{d}\theta$.

◊ **5.6.3** Chứng minh rằng với mọi $(z, N) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$:

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leq e^{|z|} - \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{n!}.$$

◊ **5.6.4** Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + \mathrm{i}y$. Chứng minh:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \text{sh}^2 y = \text{ch}^2 y - \sin^2 x$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \text{sh}^2 y = \text{ch}^2 y - \cos^2 x .$$

◊ **5.6.5** Cho $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, $z = n + \dfrac{1}{2} + iy$. Chứng minh:

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{\text{ch}ay}{\text{ch}\pi y}.$$

◊ **5.6.6** Chứng minh rằng với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2$ sao cho $x + iy \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$:

$$\tan(x + iy) = \frac{\sin 2x + i\text{sh}2y}{\cos 2x + \text{ch}2y}.$$

◊ **5.6.7** Giải các phương trình ẩn $z \in \mathbb{C}$:

a) $\text{Re}(\sin z) = 0$ *b)* $\text{ch}z = \sin z$ *c)* $|\cos z| = |\sin z|$

Bổ sung

◊ **C 5.1 Số các kết hợp trong ngoặc**

Ký hiệu a_n là số các kết hợp trong ngoặc của một bộ n phần tử $X_1, ..., X_n$ của một tập hợp có trang bị một luật hợp thành trong.

n	0	1	2	3	4
các kết hợp trong ngoặc		(X_1)	(X_1X_2)	$(X_1X_2)X_3$ $X_1(X_2X_3)$	$((X_1X_2)X_3)X_4$, $(X_1(X_2X_3))X_4$, $(X_1X_2)(X_3X_4)$, $X_1((X_2X_3)X_4)$ $X_1((X_2X_3X_4))$
a_n	0	1	1	2	5

a) Chứng minh: $\forall n \geq 2,\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k}$

b) Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Trong b) này, giả sử bán kính R của chuỗi > 0 và ký hiệu S là tổng của nó. Chứng minh:

$$\forall x \in]-R;R[,\quad (S(x))^2 - S(x) + x = 0$$

c) *1)* Chứng minh rằng hàm số $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$ ktđCLT(0) và tìm KTCLT(0) của nó.

2) Từ đó suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{2} C_{2n-2}^{n-1}$.

Số a_n được gọi là *số Catalan* thứ $n-1$.

◊ **C 5. 2 Chuỗi Lambert**

Ta gọi **chuỗi Lambert** là mọi chuỗi hàm số $\sum_{n\geq 1}\left(z \mapsto a_n \frac{z^n}{1-z^n}\right)$ trong đó biến là z $(z \in \mathbb{C})$ và $(a_n)_{n\geq 1}$ là một dãy phức nào đó.

1) Cho $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$.

a) Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n\geq 1} a_n$ phân kỳ và ký hiệu R là bán kính của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ thì chuỗi Lambert $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ hội tụ tuyệt đối khi $|z| < R$ và phân kỳ khi $|z| > R$ và $|z| \neq 1$.

b) Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n\geq 1} a_n$ hội tụ thì chuỗi Lambert $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ hội tụ khi $|z| \neq 1$.

2) *a)* Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, $\sum_{p\geq 1} b_p z^p$ có bán kính 1 và tổng được ký hiệu theo thứ tự là A và B.

Chứng minh rằng với $\forall\ z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$, các chuỗi số $\sum_{n\geq 1} a_n B(z^n)$ và $\sum_{p\geq 1} b_p A(z^p)$ hội tụ và: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n B(z^n) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p A(z^p)$.

(xem thêm bài tập 5.2.5).

b) Từ đó suy ra: với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$ và với mọi x thuộc $]-1;1[$:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{1+z^n}$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(1-z^n)^2}$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(1+z^n)^2}$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \dfrac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{z^n} - 1)$.

c) Chứng minh rằng với mọi (α, z) thuộc $\mathbb{C}^2$ sao cho $|\alpha|<1$ và $|z|<1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha z^n}{1-\alpha z^n}.$$

3) *a)* Cho $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Với $N \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $A_n = \sum_{d|n} a_d$; vậy:

$$A_1 = a_1; A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_3, A_4 = a_1 + a_2 + a_4, \ldots$$

Ở đây ta giả sử chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ có bán kính ≥ 1.

Chứng minh rằng với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$, các chuỗi số $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$ và $\sum_{n\geq 0} A_n z^n$ hội tụ và: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n z^n$.

b) Từ đó suy ra rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$, mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_k(n) z^n,$$

trong đó $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, tổng các luỹ thừa bậc k của các ước số (≥ 1) của n.

Trường hợp riêng: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma(n)z^n$, trong đó $d(n)$ là số các ước số (≥ 1) của n và $\sigma(n)$ là tổng các ước số (≥ 1) của n.

4) *a) **Công thức nghịch đảo Möbius***

Xem thêm Tập 3, C 3. 3.

Ký hiệu $\mu:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}$ là hàm số Mobius xác định bởi:

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^N & \text{nếu } n \text{ là tích của } N \text{ số nguyên phân biệt từng cặp,}\\ 0 & \text{nếu không phải như thế.}\end{cases}$$

Vậy:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	...

α) Chứng minh:

- $\mu(p)=-1$ với mọi số nguyên tố p.
- $\mu(p^r)=0$ với mọi số nguyên tố p và mọi số nguyên $r\geq 2$.
- $\mu(mn)=\mu(m)\mu(n)$ với mọi cặp (m,n) thuộc $(\mathbb{N}^*)^2$ sao cho USCLN$(m,n)=1$

β) Ký hiệu $\varepsilon:\mathbb{N}^*\mapsto\mathbb{Z}$ là ánh xạ xác định bởi: $\varepsilon(n)=\begin{cases}1 & \text{nếu } n=1\\ 0 & \text{nếu } n\geq 2.\end{cases}$

Chứng minh: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{d|n}\mu(d)=\varepsilon(n)$.

(với $n\geq 2$, có thể sử dụng phân tích thành thừa số nguyên tố của n).

γ) Cho $(a_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, $(A_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Chứng minh:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*,A_n=\sum_{d|n}a_d\right)\Leftrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}^*,a_n=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)A_d\right).$$

b) Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1}A_nz^n$ (số hạng hằng bằng 0) có bán kính ≥ 1. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ký hiệu $a_n=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)A_d$. Chứng minh rằng với mọi $z\in\mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$, chuỗi Lambert $\sum_{n\geq 1}a_n\frac{z^n}{1-z^n}$ hội tụ tuyệt đối và: $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nz^n$.

c) Từ đó suy ra rằng với mọi $z\in\mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n\frac{z^n}{1-z^n}=z$, 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)\frac{z^n}{1-z^n}=\frac{z}{1-z}$

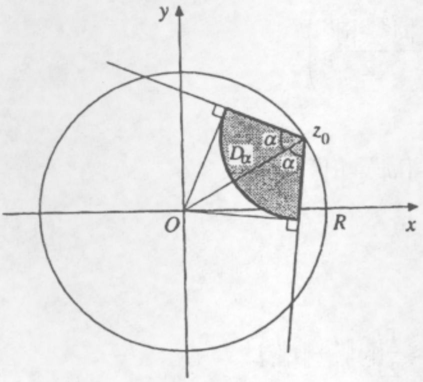
trong đó φ là chỉ biểu Euler.

(Sử dụng hệ thức $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$, xem Tập 5, bài tập 4.4.79 *a*))

◊ **C 5.3* Một ứng dụng của biến đổi Abel vào các chuỗi luỹ thừa**

Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ bán kính $R \in]0;+\infty[$, với tổng S và xét $z_0 \in \mathbb{C}$ sao cho:

$|z_0| = R$.



Với $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, ký hiệu D_α là tập các $z \in \mathbb{C}$ sao cho có $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ để:

$$\begin{cases} z_0 - z = \rho z_0 e^{i\theta} \\ \rho \leq \cos\alpha \\ |\theta| \leq \alpha. \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ hội tụ thì với mọi $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ đều trên D_α và ánh xạ $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ liên tục trên D_α (sử dụng biến đổi Abel, Tập 3, C3.7 ,*1)*).

Áp dụng:

a) Chứng minh rằng $A : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ liên tục trên $[-1; 1[$ và $A(-1) = -\ln 2$.

b) Chứng minh rằng $B : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ liên tục trên $[-1; 1[$ và $B(1) = \frac{\pi}{4}$.

Với hai ví dụ này, xem thêm 5.5.3 4) Nhận xét, và 5.5.3, 5), Nhận xét.

◊ **C 5.4 Các bất đẳng thức Clarkson và tính lồi đều của các không gian $\ell^p, p \in]1;+\infty[$**

Phần bổ sung C 5.4 này sử dụng phần bổ sung C 3.5 của Tập 3.

Cho $p \in]1;+\infty[$. Ký hiệu $q = \frac{p}{p-1}$; khi đó ta có $p \in]1;+\infty[$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Chứng minh: $\forall r \in [1;+\infty[, \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 \leq \frac{1}{2}(a^r + b^r).$$

2) Chứng minh rằng với mọi s thuộc $]0;1[$, ánh xạ $B_s : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1-s^2}{t} \end{array}$ giảm.

3)* Chứng minh rằng nếu $p \in]1;2]$ thì:

$$\forall t \in [0;1], \left(\frac{1+t}{2}\right)^q + \left(\frac{1-t}{2}\right)^q \leq \left(\frac{1+t^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

(có thể thực hiện đổi biến số $s = \dfrac{1-t}{1+t}$ và sử dụng các KTCLT(0)).

4) Cho $(u, v) \in \mathbb{C}^2$

a) Chứng minh rằng nếu $p \in]1;2]$ thì:

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^q + \left|\frac{u-v}{2}\right|^q \le \left(\frac{|u|^p + |v|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

b) Chứng minh rằng nếu $p \in [2;+\infty[$ thì:

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^q + \left|\frac{u-v}{2}\right|^q \le \frac{1}{2}\left(|u|^p + |v|^p\right).$$

5) Các bất đẳng thức Clarkson

Cho $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. Chứng minh:

a) Nếu $p \in [2;+\infty[$ thì:

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|_p^p \le \dfrac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right) \\ \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|_p^q \ge \left(\dfrac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)\right)^{q-1} \end{cases}.$$

b) Nếu $p \in]1;2]$ thì:

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|_p^q \le \left(\dfrac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)\right)^{q-1} \\ \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|_p^p \ge \dfrac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right). \end{cases}$$

Trường hợp riêng khi $p = 2$ (vậy $q = 2$), cả bốn bất đẳng thức đó trở thành đẳng thức bình hành: $\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)$.

(xem Tập 3, 1.6.2, Nhận xét và **C 3.6**).

6) Từ đó suy ra rằng $\mathbb{C}$ -kgvđc ℓ^p **lồi đều** tức là:

$$\forall \varepsilon \in]0;2], \exists \delta \in]0;1], \forall (x,y) \in (\ell^p)^2, \quad \left(\begin{cases} \|x\|_p = \|y\|_p = 1 \\ \|x-y\|_p \ge \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1-\delta\right).$$

7) Phải chăng ℓ^1 (theo thứ tự l^∞) là lồi đều?

Thư mục: Robert A.Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975, tr 34 - 38.

Chương 6

Chuỗi Fourier

Trong suốt chương 6, T chỉ một số thực > 0 mà thường sẽ là chu kỳ của các hàm số đang được xét; đặt $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, gọi nó là tần số. Trường hợp thường gặp nhất là $T = 2\pi$; có thể đưa về trường hợp đó bằng phép đổi biến số.

6.1 Đại cương

6.1.1 Tập hợp $\mathcal{CM}_T$

◆ **Ký hiệu** Ở đây ta ký hiệu $\mathcal{CM}_T$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$, T-tuần hoàn và liên tục từng khúc, còn $\mathcal{C}_T$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$, T - tuần hoàn và liên tục.

Nhận xét:

1) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc $\mathcal{CM}_T$ nếu và chỉ nếu:

$$\begin{cases} f \text{ là } T \text{ - tuần hoàn} \\ f|_{[0;T]} \text{ liên tục từng khúc .} \end{cases}$$

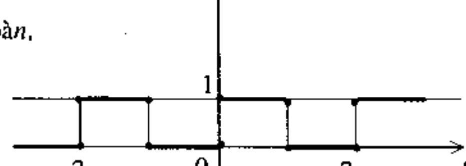
2) Ta có $\mathcal{C}_T \subset \mathcal{CM}_T$.

VÍ DỤ:

1) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-tuần hoàn,

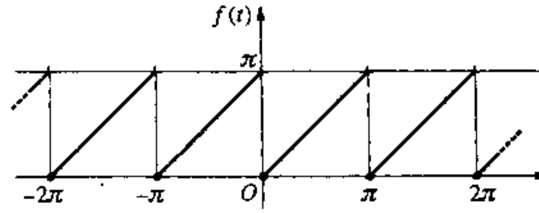
xác định bởi: $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } t \in [0;\pi[\\ 0 \text{ nếu } t \in [\pi;2\pi[\end{cases}$

là một phần tử của $\mathcal{CM}_{2\pi}$.



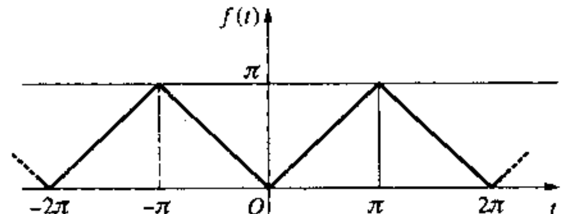
Lỗ châu mai

2) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, π- tuần hoàn,
xác định bởi: $f(t) = t$ nếu $t \in [0;\pi[$
là một phần tử của $\mathcal{CM}_\pi$.



Răng cưa không liên tục

3) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,
2π-tuần hoàn, xác định bởi:
$f(t) = |t|$ nếu $t \in [-\pi;\pi[$
là một phần tử của $\mathcal{C}_{2\pi}$.



Răng cưa liên tục

Ta có tức khắc Mệnh đề sau:

◆ **Mệnh đề 1** Với mọi $\alpha \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{CM}_T$, các ánh xạ :

$$\alpha f + g, fg, \overline{f}, \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f), |f|, \check{f}, \tau_a f \text{ thuộc } \mathcal{CM}_T.$$

Nhắc lại: $\check{f}: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(-t)\end{array}$ (xem Tập 1, 4.1.3), $\tau_a f: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t-a)\end{array}$ (xem C 4.2, III.2). ■

Nhận xét: $\mathcal{CM}_T$ là một $\mathbb{C}$-kgv với các phép toán quen thuộc.

◆ **Mệnh đề - Ký hiệu 2** Cho $f \in \mathcal{CM}_T$, với $a \in \mathbb{R}$, tích phân $\int_a^{a+T} f$

không phụ thuộc vào a; ta ký hiệu nó là $\int_{[T]} f$ hay $\int_{[T]} f(t)\mathrm{d}t$.

Chứng minh:

Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Ta có: $\int_b^{b+T} f = \int_b^a f + \int_a^{a+T} f + \int_{a+T}^{b+T} f$

và: $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t \underset{u=t-T}{=} \int_a^b f(u+T)\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$

vì f là T - tuần hoàn. Vậy $\int_b^{b+T} f = \int_a^{a+T} f$.

Nhận xét: Về thực hành, để tính $\int_{[T]} f$, ta để ý đến các tính chất đặc biệt có thể có của f. Chẳng hạn:

- Nếu f chẵn thì: $\int_{[T]} f = 2\int_0^{T/2} f$.
- Nếu f lẻ thì: $\int_{[T]} f = 0$.

6.1.2 Hệ số Fourier của một phần tử của $\mathcal{CM}_T$

◆ **Định nghĩa** Cho $f \in \mathcal{CM}_T$.

1) Với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, **hệ số (mũ) Fourier thứ n của** f là số phức, ký hiệu là $c_n(f)$, được xác định bởi:

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}dt}$$

2) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa các **hệ số (lượng giác)** Fourier **của** f, ký hiệu là $a_n(f)$ và $b_n(f)$, bởi:

$$\boxed{a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\cos n\omega t dt\ , \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\sin n\omega t dt}$$

Nhận xét:

1) Khi tình hình cho phép, ta dùng các ký hiệu đơn giản c_n, a_n, b_n, theo thứ tự thay cho $c_n(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$.

2) Với mọi f thuộc $\mathcal{CM}_T$, ta có $b_0(f) = 0$; vì thế thường người ta chỉ định nghĩa $b_n(f)$ cho $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Với mọi f thuộc $\mathcal{CM}_T$, $c_0(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)dt$ là giá trị trung bình của f trên một khoảng có độ dài T (xem Tập 1, 6.2.5, Định nghĩa).

4) Cho $f \in \mathcal{CM}_T$

- Nếu f chẵn thì: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt. \end{cases}$

- Nếu f lẻ thì: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t dt \end{cases}$ ■

◆ **Mệnh đề 1** Với mọi n, các ánh xạ $f \mapsto c_n(f)$, $f \mapsto a_n(f)$, $f \mapsto b_n(f)$ là những dạng $\mathbb{C}$-tuyến tính trên $\mathcal{CM}_T$.

Chứng minh:

Chẳng hạn, đối với c_n, ta có: với mọi $\alpha \in \mathbb{C}, f, g$ thuộc $\mathcal{CM}_T$:

$$c_n(\alpha f + g) = \frac{1}{T}\int_{[T]} (\alpha f(t) + g(t))e^{-in\omega t}dt$$

$$= \alpha\frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{[T]} g(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t = \alpha c_n(f) + c_n(g).$$ ■

Cho $f \in \mathcal{CM}_T$. hãy xác định các mối liên hệ có thể có giữa c_n với a_n và b_n

1) • $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t})\mathrm{d}t = c_n + c_{-n}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{T}\int_{[T]} f(t)(-e^{in\omega t} + e^{-in\omega t})\mathrm{d}t = \mathrm{i}(c_n - c_{-n})$

2) • $\forall n \in \mathbb{N}, c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)(\cos n\omega t - \mathrm{i}\sin n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)$

• $\forall n \in \mathbb{N}, c_{-n}(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{in\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)(\cos n\omega t + \mathrm{i}\sin n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n).$

Vậy, ta đã chứng minh:

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f \in \mathcal{CM}_T$; ta có:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_n = c_n + c_{-n} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n). \end{cases}$$

Nhận xét:

Với mọi $f \in \mathcal{CM}_T$, ta ký hiệu $\hat{f} : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ n \mapsto c_n(f) \end{array}$.

• Với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$ và mọi $f \in \mathcal{CM}_T$,

$$\left|\hat{f}(n)\right| = |c_n(f)| = \left|\frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{T}\int_{[T]}\left|f(t)e^{-in\omega t}\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

Với $f \in \mathcal{CM}_T$, ký hiệu $\|f\|_1 = \frac{1}{T}\int_{[T]}|f(t)|\mathrm{d}t$.

Ta vừa chứng minh rằng với mọi $f \in \mathcal{CM}_T$, $\hat{f}$ là bị chặn và: $\operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right| \le \|f\|_1$.

Vậy ta được: $\forall f \in \mathcal{CM}_T, \ \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$

• Xét ánh xạ $F : \begin{array}{l} C_T \to B(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \\ f \mapsto F(f) = \hat{f} \end{array}$

trong đó $B(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ là tập hợp các dãy phức, đánh chỉ số bởi $\mathbb{Z}$ và bị chặn. Theo các điều trên :

$$\forall f \in C_T, \ \|F(f)\|_\infty \le \|f\|_1.$$

Vì F là $\mathbb{C}$ - tuyến tính, suy ra F là ánh xạ liên tục từ $\left(C_T, \|\cdot\|_1\right)$ vào $\left(B(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\right)$ và $\|F\| \le 1$.

Cuối cùng, vì khi $f = 1$, ta có $\|F(f)\|_\infty = 1$, ta kết luận: $\|F\| = 1$. ■

Cho $f \in \mathcal{CM}_T$. Chúng ta hãy khảo sát các hệ số Fourier của $\overline{f}$, $\check{f}$, $\tau_a f$, f' theo các hệ số Fourier của f.

1) Các hệ số Fourier của $\overline{f}$

- Với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, ta có:

$$c_n(\overline{f}) = \frac{1}{T}\int_{[T]} \overline{f(t)} e^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t = \overline{\frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t} = \overline{c_{-n}(f)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}}$$

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$a_n(\overline{f}) = \frac{2}{T}\int_{[T]} \overline{f(t)}\cos n\omega t\mathrm{d}t = \overline{\frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t} = \overline{a_n(f)}$$

và cũng thế: $b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\quad a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)} \text{ và } b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}}$$

Nói riêng, khi $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ thì: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) \in \mathbb{R}$ và $b_n(f) \in \mathbb{R}$.

2) Các hệ số Fourier của $\check{f}$

- Với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, ta có:

$$c_n(\check{f}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(-t)e^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t \underset{[u=-t]}{=} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(u)e^{\mathrm{i}n\omega u}\mathrm{d}u = \overline{\frac{1}{T}\int_{[T]} \overline{f}(u)e^{-\mathrm{i}n\omega u}\mathrm{d}u} = \overline{c_n(\overline{f})}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\check{f}) = \overline{c_n(\overline{f})}}$$

Sử dụng 1) suy ra: $\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$.

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$a_n(\check{f}) = \frac{2}{T}\int_0^T f(-t)\cos n\omega t\mathrm{d}t \underset{[u=-t]}{=} \frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(u)\cos n\omega u\mathrm{d}u = a_n(f)$$

$$b_n(\check{f}) = \frac{2}{T}\int_0^T f(-t)\sin n\omega t\mathrm{d}t \underset{[u=-t]}{=} -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(u)\sin n\omega u\mathrm{d}u = -b_n(f)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\quad a_n(\check{f}) = a_n(f) \text{ và } b_n(\check{f}) = -b_n(f)}$$

Nói riêng:

- Khi f chẵn $\check{f} = f$, thì: $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(f) = 0$,
- Khi f lẻ, $\check{f} = -f$, thì: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$.

3) Các hệ số Fourier của một tịnh tiến

Cho $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t-a)\end{array}$.

- Với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, ta có:

$$c_n(\tau_a f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-a)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t \underset{[u=t-a]}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(u)e^{-in\omega(u+a)}\mathrm{d}u = e^{-in\omega a}c_n(f).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\tau_a f) = e^{-in\omega a}c_n(f)}$$

4) Các hệ số Fourier của đạo hàm

Cho f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T - tuần hoàn, liên tục trên $\mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$. Khi đó, f' có thể được thác triển thành một ánh xạ T - tuần hoàn, liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$, mà ta cũng ký hiệu là f'. Vậy $f' \in \mathcal{CM}_T$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, một phép tích phân từng phần cho:

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\Big[f(t)e^{-in\omega t}\Big]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(-in\omega t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{in\omega}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t = in\omega\, c_n(f).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f') = in\omega c_n(f)}$$

Bằng phép quy nạp đơn giản (trên k), ta suy ra rằng nếu f là T-tuần hoàn, thuộc lớp C^{k-1} trên $\mathbb{R}$, lớp C^k từng khúc trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\; c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f).$$

Nói riêng, với các giả thiết đó, vì $\left(c_n(f^{(k)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bị chặn và với mọi n thuộc $\mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \dfrac{1}{(in\omega)^k}c_n(f^{(k)})$, ta có:

$$c_n(f) = \underset{n\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

6.1.3 Chuỗi Fourier của một phần tử của $\mathcal{CM}_T$

◆ **Định nghĩa** Cho $f \in \mathcal{CM}_T$.

Ta gọi **chuỗi Fourier của** f là chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0} u_n(f)$,trong đó:

$u_0(f): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & c_0(f) \end{array}$, và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(f): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega t} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-in\omega t} \end{array}.$$

Với mọi $p \in \mathbb{N}$, tổng riêng thứ p của chuỗi Fourier của f là ánh xạ $S_p(f)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{-in\omega t}.$$

Cho $f \in \mathcal{CM}_T$, $p \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Hãy tính $S_p(f)(t)$ theo các hệ số lượng giác Fourier a_n, b_n của f:

$$S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-p}^{-1} c_n e^{in\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{p} c_n e^{in\omega t}$$

$$\underset{[m=-n]}{=} \sum_{m=1}^{p} c_{-m} e^{-im\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{p} c_n e^{in\omega t}$$

$$= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \mathrm{i} \left(\frac{e^{-in\omega t} - e^{in\omega t}}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

$$\boxed{S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{in\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)}$$

Bài tập

◊ **6.1.1** Cho $f \in \mathcal{CM}_T$, $N \in \mathbf{N}^*$. Hãy tính các hệ số (mũ) Fourier của các ánh xạ sau (kiểm nghiệm rằng các ánh xạ này nằm trong $\mathcal{CM}_T$) theo các hệ số (mũ) Fourier của f:

a) $g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & e^{iN\omega t} f(t) \end{array}$ *b)* $f_N : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & f(Nt) \end{array}$

c) $g_N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\dfrac{t}{N}+\dfrac{kT}{N}\right) \end{array}$.

◊ **6.1.2** Giả sử $f \in C_T$, $f \neq 0$ sao cho: $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{R}_+$.

Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(|a_n| < a_0 \text{ và } |b_n| < a_0\right)$.

◊ **6.1.3** Giả sử $f \in C_T$, $f \neq 0$, f lẻ sao cho $\forall t \in [0; T], f(t) \in \mathbb{R}_+$.

Chứng minh: $\forall n \in \mathbf{N} - \{0;1\}, |b_n| < nb_1$.

◊ **6.1.4** *a)* Chứng minh rằng với mọi f thuộc $\mathcal{CM}_{2\pi}$ và mọi $n \in \mathbf{N}^*$:

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left(f\left(t+\frac{2k\pi}{n}\right) - f\left(t+(2k+1)\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin nt dt .$$

b) Từ đó suy ra rằng nếu $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ sao cho $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ và $f|_{]0;2\pi[}$ giảm thì:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ b_n(f) \geq 0 .$$

◊ **6.1.5** Cho $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $h \in \mathbf{R}_+^*$, $f_h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ xác định bởi :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \ f_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(u)du .$$

Kiểm nghiệm rằng $f_h \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ và tính các hệ số (mũ) Fourier của f_h theo các hệ số (mũ) Fourier của f.

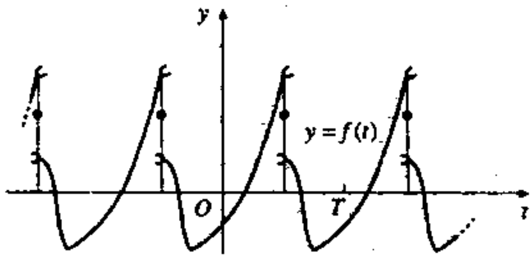
6.2 Cấu trúc tiền Hilbert

6.2.1 Không gian tiền Hilbert $\mathcal{D}_T$

◆ **Ký hiệu** Ta ký hiệu $\mathcal{D}_T$ là tập các ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T - tuần hoàn, liên tục từng khúc sao cho:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right).$$

Rõ ràng rằng C_T là một $\mathbb{C}$ - kgvc của $\mathcal{D}_T$ và $\mathcal{D}_T$ là một $\mathbb{C}$- kgvc của $\mathcal{CM}_T$.

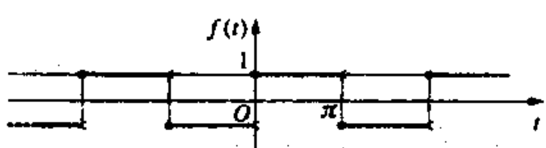


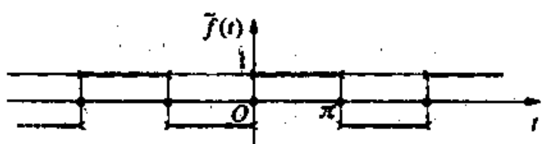
Ví dụ về biểu diễn đồ thị của một phần tử f của $\mathcal{D}_T$

◆ **Định nghĩa - Ký hiệu** Với mọi f thuộc $\mathcal{CM}_T$, ta gọi **chính quy hoá** của f, ký hiệu $\tilde{f}$, là ánh xạ $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right).$$

VÍ DỤ:





Với mọi f thuộc $\mathcal{CM}_T$, các tính chất sau là tức khắc:

1) $\tilde{f}$ trùng với f, trừ, trên mỗi chu kỳ, tại nhiều nhất một số hữu hạn điểm; nói riêng:
$$\int_{[T]} \tilde{f} = \int_{[T]} f.$$

2) $\tilde{f} \in \mathcal{D}_T$.

3) $\tilde{f} = f \Leftrightarrow f \in \mathcal{D}_T$.

4) $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$.

Rõ ràng rằng ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}_T & \to & \mathcal{CM}_T \\ f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$ là một phép chiếu của $\mathcal{CM}_T$, có ảnh là $\mathcal{D}_T$. ■

◆ **Mệnh đề**

Ánh xạ $(f,g) \mapsto (f \mid g) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{[T]} \overline{f(t)} g(t)\mathrm{d}t$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{D}_T$ cũng như trên $\mathcal{C}_T$.

Chứng minh:

• Nhắc lại (xem Tập 3, 1.6.1, Định nghĩa 1, 2) rằng $(\cdot \mid \cdot)$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{D}_T$ nếu và chỉ nếu:

1) $(\cdot \mid \cdot)$ là đối xứng Hermite: $\forall (f,g) \in (D_T)^2,\ (g \mid f) = \overline{(f \mid g)}$

2) $(\cdot \mid \cdot)$ tuyến tính đối với vị trí thứ hai:
$$\forall \lambda \in C, \forall (f, g_1, g_2) \in (D_T)^3,\ (f \mid g_1 + \lambda g_2) = (f \mid g_1) + \lambda (f \mid g_2),$$

3) $\forall f \in \mathcal{D}_T,\ (f \mid f) \geq 0$,

4) $\forall f \in \mathcal{D}_T, \big((f \mid f) = 0 \Rightarrow f = 0 \big)$.

• Ở đây, các tính chất 1), 2) 3) là tức khắc.

Giả sử $f \in \mathcal{D}_T$ sao cho $(f \mid f) = 0$. Khi đó, ta có: $\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$.

Vì $f \in \mathcal{D}_T$, f liên tục từng khúc, vậy có $m \in \mathbb{N}$, $(t_0, ..., t_m) \in [0;T]^{m+1}$ sao cho
$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T \\ \forall i \in \{0,...,m-1\},\ f \mid_{]t_i, t_{i+1}[} \text{ liên tục và có giới hạn tại } t_i^+ \text{ và } t_{i+1}^-. \end{cases}$$

Ta có: $$0 = \int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right).$$

Vậy $$\forall i \in \{0,...,m-1\},\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

rồi $$\forall i \in \{0,...,m-1\}, \forall t \in]t_i, t_{i+1}[,\ f(t) = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng f bằng 0 trên $[0;T]$, trừ có thể tại các t_i.

Nhưng do $f \in \mathcal{D}_T$: $$\forall i \in \{0,...,m\},\ f(t_i) = \frac{1}{2}\left(f(t_i^+) + f(t_i^-) \right) = 0$$

và cuối cùng $f = 0$.
Xem thêm Tập 1, bài tập 6.2.7. ■

Chuẩn ứng với tích vô hướng $(.|.)$ được ký hiệu ở đây là $\|.\|_2$ và vậy nó được xác định bởi:

$$\forall f \in \mathcal{D}_T,\ \|f\|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Nhận xét: Ký hiệu $\|f\|_2$ được dùng ở đây khác với ký hiệu đã thấy trong tập 3 bởi hệ số $\frac{1}{\sqrt{T}}$.

6.2.2 Họ trực chuẩn $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

◆ **Ký hiệu** Với $n \in \mathbb{Z}$, ta ký hiệu ở đây $e_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\mathrm{i} n\omega t}\end{array}$.

◆ **Mệnh đề 1** Họ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ là trực chuẩn trong $(\mathcal{D}_T, (.|.))$.

Chứng minh:
Trước hết, nhận xét rằng: $\forall n \in \mathbb{Z},\ e_n \in \mathcal{D}_T$.

Cho $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, ta có:

$$(e_p \mid e_q) = \frac{1}{T}\int_{[T]} e^{-\mathrm{i}p\omega t} e^{\mathrm{i}q\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\mathrm{i}(q-p)\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

- Nếu $p \neq q$ thì $(e_p \mid e_q) = \frac{1}{T}\frac{e^{\mathrm{i}(q-p)\omega T} - 1}{\mathrm{i}(q-p)\omega T} = 0$ vì $\omega T = 2\pi$ và $q - p \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $p = q$ thì $(e_p \mid e_q) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t = 1$.

◆ **Mệnh đề 2** $\forall f \in D_T, \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = (e_n \mid f)$.

Chứng minh:

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-\mathrm{i}n\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]} \overline{e_n(t)} f(t)\, \mathrm{d}t = (e_n \mid f).$$

Nhận xét:
Họ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ không phải là một cơ sở của $\mathcal{D}_T$ cũng như của $\mathcal{C}_T$. Thực vậy, nếu $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ là một cơ sở của $\mathcal{D}_T$ (hay của $\mathcal{C}_T$) thì mọi phần tử của $\mathcal{D}_T$ (hay của $\mathcal{C}_T$) được phân tích thành một tổ hợp tuyến tính hữu hạn của các $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vậy thuộc lớp C^1, nhưng $\mathcal{D}_T$ chứa những ánh xạ gián đoạn (chẳng hạn, "lỗ châu mai" xem 6.2.1,

ví dụ) và $\mathcal{C}_T$ chứa những ánh xạ không thuộc lớp C^1 (chẳng hạn, "răng cưa liên tục", xem 6.1.1, ví dụ 3)).

6.2.3 Định lý Parseval

Với mọi $p \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\mathcal{P}_p$ là kgvc của $\mathcal{D}_T$, gây bởi $(e_n)_{-p \le n \le p}$.

Cho $f \in \mathcal{D}_T$. Ký hiệu $S_p(f)$ là tổng riêng thứ p của chuỗi Fourier của f:

$$S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e_n .$$

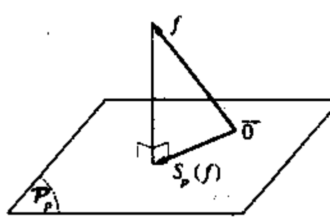
Vì $(e_n)_{-p \le n \le p}$ là trực chuẩn và $\dim(\mathcal{P}_p) = 2p+1$ nên $(e_n)_{-p \le n \le p}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{P}_p$. Theo định lý về phép chiếu trực giao (xem tập 3, 1.6.5, Định lý), f thừa nhận một hình chiếu trực giao lên $\mathcal{P}_p$ và hình chiếu này là $\sum_{n=-p}^{p} (e_n \mid f) e_n$, tức là $S_p(f)$.

◆ **Mệnh đề 1** Với mọi $p \in \mathbb{N}$ và mọi f thuộc $\mathcal{D}_T$, hình chiếu trực giao của f lên $\mathcal{P}_p$ là $S_p(f)$, tổng riêng thứ p của chuỗi Fourier của f. ■

Bây giờ, theo định lý Pythagore, ta có: $\begin{cases} \|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + \|f - S_p(f)\|_2^2 \\ d(f, P_p) = \|f - S_p(f)\|_2 \end{cases}$

Nói riêng, ta được **bất đẳng thức Bessel**:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \le \|f\|_2^2 ,$$



do $\|S_p(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2$.

Vậy ta có:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{p} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right) \le \|f\|_2^2 .$$

Điều đó chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n \ge 1} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right)$ có số hạng thực ≥ 0 là một chuỗi hội tụ và vậy:

$$c_n(f) \underset{n\infty}{\to} 0 \ \text{ và } \ c_{-n}(f) \underset{n\infty}{\to} 0. \qquad ■$$

◆ **Định lý** **(Định lý Parseval)**

$$\forall f \in \mathcal{D}_T\ ,\quad \|f - S_p(f)\|_2 \underset{p\infty}{\to} 0.$$

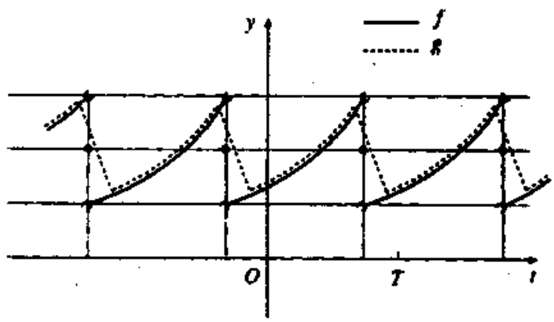
Ta nói $\left(S_p(f)\right)_{p\geq 0}$ hội tụ trung bình bình phương đến f.

Chứng minh:

Ký hiệu $\mathcal{P}$ là tập các đa thức lượng giác (thừa nhận T là chu kỳ), tức là kgvc của $\mathcal{D}_T$, gây bởi $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

1) **Trù mật của $\mathcal{P}$ trong $(\mathcal{D}_T,(.|.))$**

Cho $f \in \mathcal{D}_T$, $\varepsilon > 0$. Rõ ràng rằng có $g \in \mathcal{D}_T$, liên tục, sao cho $\|f-g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (thay đổi f quanh các điểm gián đoạn của nó).



Theo định lý thứ hai của Weierstrass, có một dãy đa thức lượng giác (những phần tử của $\mathcal{P}$) hội tụ đều đến g trên $\mathbb{R}$. Vậy, có $P \in \mathcal{P}$ sao cho $\|P-g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Vì $$\|P-g\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_{[T]}|P-g|^2 \leq \|P-g\|_\infty^2,$$

ta có $\|P-g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ và vậy $\|f-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_2 \leq \varepsilon$.

Điều đó chứng tỏ $\mathcal{P}$ trù mật trong $(\mathcal{D}_T,(.|.))$.

2) **Hội tụ của $\left(S_p(f)\right)_p$ đến f trong $(\mathcal{D}_T,(.|.))$**

Cho $\varepsilon > 0$, theo 1) có $P \in \mathcal{P}$ sao cho $\|f-P\|_2 \leq \varepsilon$.

Vì $\mathcal{P} = \bigcup_{p\in\mathbf{N}} \mathcal{P}_p$, có $N \in \mathbf{N}$ sao cho $P \in \mathcal{P}_N$.

Giả sử $p \in \mathbf{N}$ sao cho $p \geq N$. Vì $S_p(f)$ là hình chiếu trực giao của f lên $\mathcal{P}_p$, ta có:

$$\forall g \in \mathcal{P}_p,\quad \left(g \mid f - S_p(f)\right) = 0.$$

Nói riêng $\left(P - S_p(f) \mid f - S_p(f)\right) = 0$, từ đó:

$$\|f-P\|_2^2 = \|(f-S_p(f))-(P-S_p(f))\|_2^2 = \|f-S_p(f)\|_2^2 + \|P-S_p(f)\|_2^2 \geq \|f-S_p(f)\|_2^2$$

và vậy $\|f-S_p(f)\| \leq \varepsilon$.

Điều đó chứng tỏ $S_p(f) \xrightarrow[p\infty]{} f$ trong $\left(\mathcal{D}_T, (\cdot|\cdot)\right)$.

◆ **Hệ quả 1** **(Công thức Parseval)**

Cho $f \in \mathcal{D}_T$.

1) Chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1}\left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right)$ hội tụ và:

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right) = \frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

2) Nếu $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ thì chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ hội tụ và:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{T}\int_{[T]} (f(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

Chứng minh:

1) Theo định lý Parseval, $S_p(f) \xrightarrow[p\infty]{} f$ trong $\left(\mathcal{D}_T, (\cdot|\cdot)\right)$; vì $\|\cdot\|_2^2 : \begin{array}{l}\mathcal{D}_T \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \|f\|_2^2\end{array}$ liên tục suy ra: $\|S_p(f)\|_2^2 \xrightarrow[p\infty]{} \|f\|_2^2$.

Nhưng với mọi $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|S_p(f)\|_2^2 = \left\|\sum_{n=-p}^{p} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{p}\left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right)$$

và $\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$, từ đó có kết luận mong muốn.

2) Suy ra từ 1) do (xem 6.1.2, Mệnh đề 2) $c_0 = \frac{a_0}{2}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \left|\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\right|^2 + \left|\frac{1}{2}(a_n + ib_n)\right|^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2).$$

Nhận xét:

1) Với mọi $f \in \mathcal{D}_T$, theo công thức Parseval, do các số hạng nói đến đều ≥ 0, họ $\left(|c_n|^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ là khả tổng và:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right) = \frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Ta có thể ký hiệu $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ thay cho $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Vậy, với mọi f thuộc D_T: $\hat{f} = (c_n(f))_{n\in Z} \in l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

2) Cho $f \in \mathcal{CM}_T$, bằng cách áp dụng định lý Parseval hay một công thức Parseval cho $\bar{f}$ và chú ý rằng với mọi n các c_n, a_n, b_n của f và của $\bar{f}$ là như nhau, ta thấy rằng định lý Parseval hay công thức Parseval cũng áp dụng được cho f. ■

◆ **Hệ quả 2**

Ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_T & \to & B(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$ là một đơn ánh.

Chứng minh:

Do ánh xạ $\phi: \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_T & \to & B(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$, trong đó $\hat{f}: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & c_n(f) \end{array}$, là $\mathbb{C}$-tuyến tính, nên chỉ cần chứng tỏ $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Cho $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$, tức là $f \in \mathcal{D}_T$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = 0$.

Khi đó theo công thức Parseval ta có:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = 0, \text{ vậy } \|f\|_2^2 = 0, f = 0. \qquad ■$$

◆ **Mệnh đề 2** $\forall (f,g) \in (\mathcal{D}_T)^2,\ \sum_{n=-p}^{p} \overline{c_n(f)}c_n(g) \xrightarrow[p\infty]{} (f|g)$.

Chứng minh:

Cho $(f,g) \in (\mathcal{D}_T)^2$, $p \in \mathbb{N}$.

Ta chứng minh được (xem Tập 3, bài tập 1.6.1) rằng với mọi tích vô hướng $\langle . | . \rangle$ trên một $\mathbb{C}$-kgv E và với mọi x, y thuộc E, ký hiệu chuẩn ứng với $\langle . | . \rangle$ là $\| . \|$ thì ta có **đồng nhất thức phân cực**: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\|x + i^k y\|^2$.

Áp dụng điều đó vào tích vô hướng $(. | .)$ trên $\mathcal{D}_T$, ta được:

$$\sum_{n=-p}^{p} \overline{c_n(f)}c_n(g) = (S_p(f) \mid S_p(g)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\|S_p(f) + i^k S_p(g)\|_2^2$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\|S_p(f + i^k g)\|_2^2 \xrightarrow[p\infty]{} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\frac{1}{T}\int_{[T]} |f + i^k g|^2$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\|f + i^k g\|_2^2 = (f \mid g). \qquad ■$$

Nhận xét:

Ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_T & \to & l^2(\mathbf{Z},\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$ là một ánh xạ đẳng cự của các không gian tiền Hilbert.

Bài tập

◊ **6.2.1** Cho $N \in \mathbb{N}$, $(\gamma_{-N},\dots,\gamma_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

Kiểm nghiệm $f \in \mathcal{D}_T$ và tính các hệ số (mũ) Fourier của f.

◊ **6.2.2** Cho $f \in \mathcal{D}_T$ sao cho $c_0(f) = 0$. Ký hiệu $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \int_0^t f(u)du \end{array}$.

Chứng minh rằng chuỗi Fourier của g hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ (có thể sử dụng định lý về hội tụ chuẩn tắc, xem 6.3.1, Định lý).

6.3 Hội tụ từng điểm

6.3.1 Hội tụ chuẩn tắc

Cho $f \in \mathcal{C}_T$ thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$.

Ta đã thấy (xem 6.1.2 , 4)):

$$\begin{cases} f' \in \mathcal{CM}_T \\ \forall n \in \mathbf{Z},\ c_n(f') = \mathrm{i}n\omega c_n(f). \end{cases}$$

Từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |c_n(f)| = \dfrac{1}{n\omega}|c_n(f')|$.

Ký hiệu $u_o(f) = c_o(f)e_o$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(f) = c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$ (xem 6.1.3, Định nghĩa).

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có: $\|u_n(f)\|_\infty \le |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$.

Mặt khác, để ý rằng: $\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \alpha\beta \le \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$,

suy ra: $\forall n \in \mathbb{Z},\ |c_n(f)| \le \dfrac{1}{2\omega}\left(\dfrac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2\right)$,

rồi: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n(f)\|_\infty \le \dfrac{1}{2\omega}\left(\dfrac{2}{n^2} + |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2\right)$.

Vì $\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ và vì $\sum\limits_{n\ge1}\left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2\right)$ hội tụ (bất đẳng thức Bessel), suy ra rằng chuỗi Fourier $\sum\limits_{n\ge1} u_n(f)$ của f hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$, vậy hội tụ đều và đơn trên $\mathbb{R}$.

Ký hiệu $g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(f)$; hãy chứng minh: $g = f$.

Vì mỗi $u_n(f)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và vì $\sum\limits_{n\ge0} u_n(f)$ hội tụ trên $\mathbb{R}$ nên g là liên tục trên $\mathbb{R}$; mặt khác ta thấy tức khắc rằng g là T - tuần hoàn, vậy $g \in \mathcal{C}_T$.

Do $\left(S_p(f)\right)_{p\ge0}$ hội tụ đều đến g trên $\mathbb{R}$ nên $\left(S_p(f)\right)_{p\ge0}$ hội tụ trung bình bình phương đến g. Nhưng mặt khác (định lý Parseval), $\left(S_p(f)\right)_{p\ge0}$ hội tụ trung bình bình phương đến f trên $\mathbb{R}$, vậy $g = f$.

Tóm tắt việc khảo sát:

◆ **Định lý** Nếu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là T - tuần hoàn, liên tục, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ thì chuỗi Fourier của f hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ và có tổng là f.

6.3.2 Định lý Dirichlet

◆ **Định lý** Cho $f \in \mathcal{CM}_T$. Nếu f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ thì chuỗi Fourier của f hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ và có tổng là chính quy hoá $\tilde{f}$ của f. Vậy, với các giả thiết đó, với mọi t thuộc $\mathbb{R}$:

$$\boxed{c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}) = \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)}$$

hay còn là:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)}$$

Chứng minh: (ngoài khuôn khổ chương trình)

1) Bổ đề Lebesgue

(Ở đây là một tổng quát hóa một kết quả đã đạt được trong Tập 1, 6.4.4, ví dụ 2)); xem thêm Tập 4, bài tập 4.2.2).

Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \le b$, f: $[a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc. Khi đó:

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0 .$$

a) Tính chất đó là ngay tức khắc khi $f = 1$, vì :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda t}dt\right| = \left|\frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}\right| \le \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

b) Sử dụng hệ thức Chasles, suy ra từ đó rằng tính chất vẫn đúng khi f là hàm bậc thang trên $[a;b]$.

c) Cuối cùng, cho f:$[a;b] \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc, cho $\varepsilon > 0$. Theo Tập 3, 2.3.3, Định lý, có một ánh xạ bậc thang e: $[a;b] \to \mathbb{C}$ sao cho $\|f - e\|_\infty < \varepsilon$. Khi đó ta có:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \left|\int_a^b \left(f(t) - e(t)\right)e^{i\lambda t}dt\right| \le \int_a^b \|f(t) - e(t)\|dt \le (b-a)\varepsilon .$$

Mặt khác theo 1), b), có $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \left(\lambda \ge \lambda_0 \Rightarrow \left|\int_a^b e(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \varepsilon\right).$$

Vậy với mọi $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sao cho $\lambda \ge \lambda_0$, ta có:

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \left|\int_a^b \left(f(t) - e(t)\right)e^{i\lambda t}dt\right| + \left|\int_a^b e(t)e^{i\lambda t}dt\right| \le \left(1 + (b-a)\right)\varepsilon ,$$

nó chứng tỏ $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \underset{\lambda\to+\infty}{\to} 0$.

2) Cho $f \in \mathcal{D}_T$:

a) Với mọi (n, x) thuộc $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, ta có:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{T}\int_{[T]} f(u)e^{-ik\omega u}e^{ik\omega x}du = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(u)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(x-u)}du$$

$$\underset{v=x-u}{=} \frac{1}{T}\int_{[T]} f(x-v)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}dv \underset{s=-v}{=} \frac{1}{T}\int_{[T]} f(x+s)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega s}ds,$$

từ đó $$S_n(f)(x) = \frac{1}{T}\int_{[T]} \frac{f(x-v)+f(x+v)}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}dv.$$

b) Hạch Dirichlet

Với $n\in\mathbb{N}$, ánh xạ $D_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ xác định bởi $D_n(v) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}$ gọi là **hạch Dirichlet.**

Với mọi (n,v) thuộc $\mathbb{N}\times(\mathbb{R}-T\mathbb{Z})$: $D_n(v) = -1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ikwv} + e^{-ikwv}\right)$

$$= -1 + \frac{e^{i(n+1)wv}-1}{e^{inwv}-1} + \frac{e^{-i(n+1)wv}-1}{e^{-iwv}-1}$$

$$= -1 + e^{\frac{in\omega v}{2}}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\omega v}{\sin\frac{\omega v}{2}} + e^{-\frac{in\omega v}{2}}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\omega v}{\sin\frac{\omega v}{2}} = -1 + 2\frac{\cos\frac{n\omega v}{2}\sin\frac{n+1}{2}\omega v}{\sin\frac{\omega v}{2}}$$

$$= -1 + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega v + \sin\frac{\omega v}{2}}{\sin\frac{\omega v}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega v}{\sin\frac{\omega v}{2}}.$$

c) Với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta có:

$$\frac{1}{T}\int_{[T]} D_n(v)dv = \frac{1}{T}\sum_{k=-n}^{n}\int_{[T]} e^{ik\omega v}dv = \sum_{k=-n}^{n}(e_0 \mid e_k) = 1.$$

Vậy với mọi (n, x) thuộc $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, ta được:

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{T}\int_{[T]}\left(\frac{f(x-v)+f(x+v)}{2} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right)D_n(v)dv.$$

Xét $$g_x : v \mapsto \frac{(f(x+v)-f(x^+)) + (f(x-v)-f(x^-))}{2\sin\frac{\omega v}{2}}.$$

- g_x liên tục từng khúc trên $\left[-\frac{T}{2};0\right[$ và trên $\left]0;\frac{T}{2}\right]$ và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn.
- Vì f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ và

$$\frac{f(x+v)-f(x^+)}{v}\xrightarrow[v\to 0^+]{} f'(x^+) \text{ và } \frac{f(x-v)-f(x^-)}{v}\xrightarrow[v\to 0^+]{} -f'(x^+)$$

nên $\qquad g_x(v)\xrightarrow[v\to 0^+]{}\frac{1}{\omega}\left(f''(x^+)-f'(x^-)\right).$

Tương tự, $g_x(v)\xrightarrow[v\to 0^-]{}-\frac{1}{\omega}\left(f'(x^+)+f'(x^-)\right).$

Vậy, g_x liên tục từng khúc trên $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

Từ đó theo bổ đề Lebesgue:

$$S_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{T}\int_{[T]} g_x(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega v\,dv\xrightarrow[n\infty]{}0,$$

và cuối cùng: $\qquad S_n(f)(x)\xrightarrow[n\infty]{}f(x).$

Bài tập

◊ **6.3.1** Cho dãy phức $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sao cho dãy ánh xạ $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ xác định bởi:

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ik\omega t}$$

hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ đến một ánh xạ ký hiệu là f.

Chứng minh: *a)* $\quad f\in C_T$, $\qquad$ *b)* $\forall n\in\mathbf{Z},\ c_n(f)=\gamma_n$.

◊ **6.3.2** Cho dãy $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ với số hạng trong $\mathbf{R}_+^*$, sao cho $\varepsilon_n\xrightarrow[n\infty]{}0$.

Chứng minh rằng có f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục, 2π - tuần hoàn, sao cho: $\left\{n\in\mathbb{N},\ |a_n(f)|+|b_n(f)|\geq\varepsilon_n\right\}$ là vô hạn.

◊ **6.3.3'** Cho $f\in D_{2\pi}$.

a) Chứng minh:

$$\forall h\in\mathbf{R},\ \int_0^{2\pi}|f(t+h)-f(t-h)|^2\,dt=8\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^2 nh\left(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2\right).$$

*b)** Giả sử rằng có $(M,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ |f(u)-f(v)|\leq M|u-v|^\alpha.$$

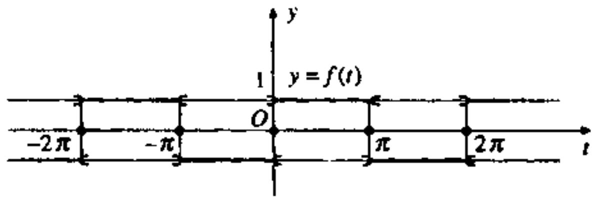
α) Chứng minh: $\sum_{N=N+1}^{2N} |c_n(f)|^2 = \underset{N\infty}{O}\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right).$

β) Suy ra rằng nếu $\alpha > \frac{1}{2}$ thì chuỗi Fourier của *f* hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ và có tổng là *f*.

6.4 Ví dụ

Chúng ta sẽ ứng dụng các kết quả trên đây vào một số ví dụ phần tử của $\mathcal{D}_T$ và từ đó suy ra tổng của những chuỗi đặc biệt.

VÍ DỤ 1: Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π - tuần hoàn, lẻ, sao cho: $\begin{cases}\forall t\in]0;\pi[, & f(t)=1\\ \forall n\in Z, & f(n)=0.\end{cases}$



- Rõ ràng rằng $t\in\mathcal{CM}_{2\pi}$. Vì f lẻ, ta có $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=0$ và:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=\frac{2}{T}\int_{[T]}f(t)\sin n\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Vậy: $$\forall p\in\mathbb{N},\left(b_{2p}=0,\ b_{2p+1}=\frac{4}{\pi(2p+1)}\right).$$

- Vì $f\in\mathcal{D}_{2\pi}$ và do f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$, ta có thể áp dụng Định lý Dirichlet (6.3.2); ta kết luận rằng chuỗi Fourier (thực) của f hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ và có tổng f. Từ đó:

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2p+1)}\sin(2p+1)t\ .$$

Nói riêng, khi thay t bằng $\frac{\pi}{2}$ thì: $1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}$, và vậy

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}=\frac{\pi}{4}}$$

Xem thêm 5.5.3, 5) Nhận xét.

- Vì $f\in\mathcal{D}_{2\pi}$, có thể áp dụng công thức Parvesal (6.2.3, Hệ quả 1); ta kết luận rằng chuỗi $\sum_{p\geq 0}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)}\right)^2$ hội tụ (vả lại ta đã biết điều này một cách đơn giản) và:

$$\frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)}\right)^2=\frac{1}{T}\int_{[T]}f(t)^2\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1dt=1,$$ từ đó:

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

Vì: $$\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

và vì $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},\ \sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p)^2},\ \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

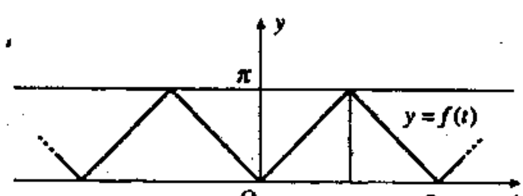
hội tụ nên ta suy ra: $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\frac{\pi^2}{8},$$

từ đó: $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Cuối cùng: $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{8},$$

nên: $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}}$$

VÍ DỤ 2: Cho f: $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π - tuần hoàn, chẵn, sao cho: $\forall t\in[0;\pi]$, $f(t)=t$.



- Rõ ràng rằng $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$ Vì f chẵn, ta có: $\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n=0$ và:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{2}{T}\int_{[T]}f(t)\cos n\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos nt\,dt.$$

Khi $n\geq 1$ thì bằng một phép lấy tích phân từng phần:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}dt\right)=\frac{2}{\pi n}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2},$$

và: $$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\,dt.$$

Vậy: $$\begin{cases} a_0 = \pi \text{ và } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = -\dfrac{4}{\pi(2p+1)^2} \end{cases}.$$

- Vì $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ và do f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$, ta có thể áp dụng Định lý Dirichlet (6.3.2); ta kết luận rằng chuỗi Fourier (thực) của f hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ và có tổng là f. Từ đó:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos(2p+1)t.$$

Nói riêng, khi thay t bằng 0: $$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2},$$

từ đó $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ (đã nhận được kết quả này trong ví dụ 1).

Nhận xét rằng do: $\displaystyle\forall p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Sup}_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos(2p+1)t\right| = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$

và do chuỗi số $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$ hội tụ nên chuỗi Fourier của f hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $\mathbb{R}$. Cũng có thể sử dụng định lý về sự hội tụ chuẩn tắc, 6.3.1, Định lý.

- Vì $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, có thể áp dụng công thức Parseval (6.2.3, Hệ quả 1); ta kết luận rằng chuỗi $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\right)^2$ hội tụ (vả lại, ta đã biết điều này một cách đơn giản) và: $$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]}(f(t))^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3},$$

từ đó: $$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Từ đó, cũng như trong ví dụ 1, suy ra:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{2^4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

và cuối cùng: $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}.$$

Bài tập

◊ **6.4.1** Cho $f : \underset{t \mapsto |\cos t|}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$.

a) Kiểm nghiệm $f \in \mathcal{CM}_\pi$ và tính các hệ số Fourier (thực) của f.

b) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi Fourier của f.

c) Từ đó suy ra tổng của các chuỗi sau:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

◊ **6.4.2** Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- tuần hoàn, lẻ, sao cho: $\forall t \in [0;\pi]$, $f(t) = \sin^2 t$.

a) Kiểm nghiệm $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ và tính các hệ số (lượng giác) Fourier của f.

b) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi Fourier của f.

c) Từ đó suy ra tổng của các chuỗi sau:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left((2n-1)(2n+1)(2n+3)\right)^2}.$$

◊ **6.4.3** Cho $(a,b) \in [0;\pi]^2$ sao cho $a \le b$ và $a + b \le \pi$, cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- tuần hoàn, liên tục, chẵn sao cho:

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in [0; b-a] \\ 2 & \text{nếu } t \in [a+b; \pi] \end{cases} \\ f \text{ là afin trên } [b-a; a+b] \end{cases}$$

a) Kiểm nghiệm $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ và tính các hệ số (lượng giác) Fourier của f.

b) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi Fourier của f.

c) Từ đó suy ra tổng của các chuỗi sau:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin an \sin bn}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 an \sin^2 bn}{n^4}.$$

Lời giải các bài tập 6.4.4. đến 6.4.7 sử dụng hệ thức $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *đã thấy ở trên.*

◊ **6.4.4** Tính $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(n(n+1)\right)^2}$.

◊ **6.4.5** Tính $\int_0^1 x \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

◊ **6.4.6** *a)* Chứng minh: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

b) Từ đó suy ra giá trị của các tích phân sau:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \mathrm{d}x.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x\,, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\mathrm{d}x\,.$$

◊ **6.4.7** Chứng minh: $\lim\limits_{n\infty}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}\right) = e^{-\frac{\pi^2}{6}}$.

(Sử dụng bài tập 10.1.3, Tập 2) và bài tập 6.4.6).

◊ **6.4.8*** Chứng minh: $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (t,N) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nt}{n}\right| \le M$.

◊ **6.4.9*** Cho $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t}{2\pi} - \mathrm{E}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\end{array}$.

Với mọi $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, tính $\int_0^{2\pi} f(pt)f(qt)\mathrm{d}t$.

◊ **6.4.10** Cho $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π - tuần hoàn sao cho:

$$\forall t \in [-\pi;\pi],\ f_\alpha(t) = \cos\alpha t\,.$$

a) Kiểm nghiệm $f_\alpha \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ và tính các hệ số (lượng giác) Fourier của f_α.

b) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi Fourier của f_α.

c) Từ đó suy ra:

α) $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{\pi^2n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \mathrm{cotan}x$,

β) $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}x}{\pi^2n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

◊ **6.4.11** Cho $r \in]-1;1[$, f_r, g_r: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_r(t) = \dfrac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2}\,, \\ g_r(t) = \dfrac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}\,. \end{cases}$$

a) Chứng minh: $\forall t \in \mathbb{R}, \left(f_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\cos nt,\ g_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin nt\right)$

b) Từ đó, sử dụng bài tập 6.3.1, suy ra các hệ số (lượng giác) Fourier của f_r và g_r.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, tính các giá trị của:

$$I_n(r) = \int_0^{2\pi} f_r(t)\cos nt\mathrm{d}t\,, \quad J_n(r) = \int_0^{2\pi} g_r(t)\sin nt\mathrm{d}t\,.$$

d) Ký hiệu: $F_r : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2)\end{array}$, $G_r : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{Arctan}\frac{r\sin t}{1 - r\cos t}\end{array}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, tính các giá trị của:

$$A_n(r) = \int_0^{2\pi} F_r(t)\cos nt\mathrm{d}t\,, \quad B_n(r) = \int_0^{2\pi} G_r(t)\sin nt\mathrm{d}t\,.$$

◊ **6.4.12 Công thức phần bù**

Chứng minh: $\forall x \in]0;1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ (sử dụng công thức Gauss, bài tập 4.1.38: $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\infty} \dfrac{n! n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$ và hệ thức suy ra từ bài tập 6.4.10: $\dfrac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim\limits_{n\infty} \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\left(\dfrac{x}{k}\right)^2\right)$).

◊ **6.4.13** *a)* Chứng minh: $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

(Sử dụng công thức phần bù, bài tập 6.4.12)

b) Từ đó suy ra:

α) $\forall a \in]0;+\infty[$, $\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + a\ln a - a$.

β) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in]0;+\infty[$, $\int_0^n \ln\Gamma(a+x)\mathrm{d}x$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(a+k)\ln(a+k) - na + \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

◊ **6.4.14** Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $I_n = \int_0^1 \big(\ln(\Gamma(x)\big)\cos 2\pi nx\mathrm{d}x$ và

$J_n = \int_0^1 \operatorname{cotan} \pi x \sin 2\pi nx\mathrm{d}x$. (Chứng minh rằng tồn tại các tích phân đó).

a) Thiết lập: $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{1}{4n}J_n$.(Sử dụng công thức phần bù, bài tập 6.4.12).

b) Chứng minh: $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = 1$, từ đó $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{1}{4n}$.

◊ **6.4.15** Ký hiệu: $\psi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

a) Chứng minh: $\forall a \in]0;+\infty[$, $\int_0^1 \psi(a+x)\mathrm{d}x = \ln a$.

b) Thiết lập: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi nx\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{2}$

(sử dụng bài tập 6.4.14).

Bổ sung

◊ C6. 1 Tích chập trong C_T

Ở đây ta ký hiệu C_T là tập các ánh xạ $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục và T - tuần hoàn, $T \in \mathbb{R}_+^*$ cố định.

Với $(f, g) \in (C_T)^2$, ta ký hiệu $f * g$ (gọi là *tích chập* của f với g) là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ xác định bởi: $\forall t \in \mathbb{R},\ (f * g)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)g(t-u)du$.

(Xem thêm tập 3, 2.3.12 1) ví dụ 1)).

1) a) Kiểm nghiệm rằng $*$ là một luật hợp thành trong trong C_T, tức là $\forall (f,g) \in (C_T)^2, f * g \in C_T$.

b) Chứng minh rằng $(C_T, +, \cdot, *)$ là một $\mathbb{C}$ - đại số giao hoán và kết hợp.

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ký hiệu $e_n : \begin{matrix}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{in\omega t}\end{matrix}$ (xem 6.2.2, Ký hiệu).

2) a) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}$, với mọi f, g thuộc C_T:

1) $c_n(f) = (f * e_n)(0)$

2) $e_n * e_n = e_n$

3) $f * e_n = c_n(f)e_n$

4) $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

b) Tìm lại tính chất kết hợp của $*$ (xem 1) *b)*).

c) Một ví dụ:

Cho f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π - tuần hoàn, chẵn, sao cho: $\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = t$,

α) Tính các hệ số mũ Fourier của f (xem thêm 6.4, Ví dụ 2).

β) Xác định $f * f$ (bởi tính chất chẵn, 2π- tuần hoàn và một công thức khi $t \in [0;\pi]$)

γ) Từ đó suy ra tổng của các chuỗi sau: $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^8}$.

3) a) Chứng minh rằng C_T không có phần tử trung hoà đối với $*$.

b) Có chăng các ước của không trong giả vành $(C_T, +, *)$, tức là các phần tử f thuộc C_T sao cho: $f \neq 0$ và $(\exists g \in C_T - \{0\},\ f * g = 0)$?

4) a) Giải phương trình $f * f = f$ với ẩn $f \in C_T$.

b) Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{C}^N$ sao cho $\alpha_1 \neq 0$, $P = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k X^k$. Với $f \in C_T$,

ký hiệu $P(f) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f^{[k]}$ trong đó $f^{[k]} = f * f * ... * f$ (k lần) (và $f^{[1]} = f$)

Giải phương trình $P(f) = 0$ với ẩn $f \in C_T$.

Chương 7

Phương trình vi phân
(Phần 2)

Phần 1 của phương trình vi phân đã được trình bày trong Tập 2, Chương 11.
$\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

Các khoảng của $\mathbb{R}$ được nói đến trong chương 7 này luôn được coi là không rỗng và không thu về một điểm.
E chỉ một $\mathbb{K}$ - không gian vectơ định chuẩn có số chiều hữu hạn, mà chuẩn được ký hiệu bởi $\|.\|$; trong thực hành thường $E = \mathbb{K}$.

7.1 Đại cương

7.1.1 Định nghĩa

◆ **Định nghĩa**

Cho
- $n \in \mathbb{N}^*$
- E, F là hai $\mathbb{K}$ - không gian vectơ định chuẩn có số chiều hữu hạn
- U là một bộ phận của $\mathbb{R} \times E^{n+1}$
- $g: U \to F$ là một ánh xạ.

Với mỗi khoảng I của $\mathbb{R}$, ta gọi là **nghiệm trên I của phương trình vi phân** (e) $\quad g(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

mọi ánh xạ $y: I \to E$ sao cho:

$$\begin{cases} y \text{ khả vi } n \text{ lần trên } I \\ \forall t \in I, (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in U \\ \forall t \in I, g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0. \end{cases}$$

Số nguyên n được gọi là **cấp** của phương trình vi phân (e).
Giải (e) là xác định tất cả các cặp (I, y), trong đó I là một khoảng và y là một nghiệm của (e) trên I.

Nếu $E = \mathbb{K}$, ta nói (e) là một phương trình vi phân vô hướng; nếu không, ta nói (e) là một phương trình vi phân **vectơ**.

Ta gọi là các **đường cong tích phân** của (e) các ảnh của các cung tham số hoá

$$I \to E^n$$
$$t \mapsto (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),$$

trong đó $y: I \to E$ là nghiệm của (e) trên I.

Ta sẽ sử dụng các chữ viết tắt PTVP để chỉ phương trình vi phân và ĐCTP để chỉ đường cong tích phân.

Nhận xét:

1) Thường tỏ ra tiện lợi khi ta dùng vẫn một chữ y để ký hiệu ánh xạ từ I vào E cũng như ảnh của một phần tử (sinh) t của I bởi ánh xạ này, nói cách khác coi y cũng như $y(t)$.

2) Trừ phi có các ngoại lệ, trường hợp tầm thường, một phương trình vi phân chỉ có một cấp.

3) Đối với một phương trình vi phân cấp 1 (e): $g(t, y, y') = 0$ các đường cong tích phân, theo định nghĩa, là ảnh của các cung tham số hoá

$$y: I \to E$$
$$t \mapsto y(t),$$

trong đó y là nghiệm của (e) trên I. ■

Thường sẽ thuận lợi hơn khi trong (e) ta biểu diễn $y^{(n)}(t)$ là một hàm của $t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$, nếu điều đó có thể thực hiện được. Để thực hiện điều này, ta có thể sử dụng định lý về các hàm ẩn (Tập 2, 12.6; và Tập 4, 8.4).

Như vậy, trong một số trường hợp việc nghiên cứu (e) có thể đưa về việc nghiên cứu phương trình vi phân **đã giải ra được** đối với đạo hàm cấp cao nhất (hay: **đã giải ra** $y^{(n)}$):

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

trong đó V là một bộ phận của $\mathbb{R} \times E^n$ và $f: V \to E$.

7.1.2 Lý thuyết về việc thay thế một phương trình vi phân cấp n bởi phương trình vi phân cấp 1

Ta sử dụng các ký hiệu trong 7.1.1.

Ở đây, ký hiệu $D^n(I,E)$ chỉ tập hợp các ánh xạ từ I vào E, n lần khả vi, và $D^1(I, E^n)$ chỉ tập hợp các ánh xạ từ I vào E^n, khả vi.

Xét ánh xạ θ từ $D^n(I,E)$ vào $D^1(I,E^n)$ sao cho với mỗi y thuộc $D^n(I,E)$ ứng với một ánh xạ $Y: I \to E^n$ xác định bởi:

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = (y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Rõ ràng với mỗi y thuộc $D^n(I,E)$:

$$Y \in D^1(I,E^n) \text{ và } \forall t \in I,\ Y'(t) = (y'(t), \ldots, y^{(n)}(t))$$

(Tập 3, 2.2.1). Hơn nữa, hiển nhiên θ là đơn ánh.

Mặt khác, xét $G: \mathbb{R} \times E^n \times E^n \to E^{n-1} \times F$ xác định bởi:

$\forall (t, (y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)) \in \mathbb{R} \times E^n \times E^n$,

$G(t, (y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)) = (y_2 - z_1, y_3 - z_2, \ldots, y_n - z_{n-1}, g(t, y_1, \ldots, y_n, z_n))$.

Ta có, với mỗi t của I:

$$G(t, Y(t), Y'(t)) = 0 \Leftrightarrow G(t, (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), (y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = y'(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t) \\ g(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^n(t)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(t, (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Như vậy, việc giải một PTVP cấp n, có nghiệm nhận giá trị trong E được đưa về việc giải PTVP cấp 1 mà nghiệm nhận giá trị trong E^n.

VÍ DỤ:

PTVP vô hướng cấp 2: $y'' - ty' + y = t^3$ (ẩn hàm là $y: I \to \mathbb{R}$, I là một khoảng của $\mathbb{R}$), nhờ sự biến đổi ẩn hàm $Y = (y, y')$ được đưa về một PTVP vectơ cấp 1:

$$G(t, Y(t), Y'(t)) = 0,$$

trong đó $\quad G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, (y_1, y_2), (z_1, z_2)) \mapsto (y_2 - z_1, z_2 - ty_2 + y_1 - t^3)$$

Nói cách khác, PTVP vô hướng cấp 2: $y'' - ty' + y = t^3$ chuyển thành PTVP vectơ cấp 1 $\begin{cases} z - y' = 0 \\ z' - tz + y - t^3 = 0 \end{cases}$, ẩn là (y, z). ■

Ta lưu ý rằng, theo phương pháp này, việc giảm cấp ở PTVP phải trả giá bằng việc tăng số chiều của không gian giá trị của các nghiệm.

7.1.3. Phương trình vi phân ôtônôm

Ở đây chúng ta quan tâm đến trường hợp thường gặp, đó là các phương trình vi phân (E) $x' = f(x)$, trong đó biến số (ký hiệu t, chỉ thời gian) không xuất hiện, một phương trình vi phân như thế được gọi là phương trình vi phân **ôtônôm** cấp 1. Trong vật lý, một hiện tượng có thể được lặp lại tại một thời điểm bất kỳ và bị chi phối bởi phương trình vi phân mà biến số là thời gian, thì phương trình vi phân đó là ôtônôm.

◆ **Định nghĩa 1**

Cho $\left|\begin{array}{l} E \text{ là một } \mathbb{R}\text{- không gian tuyến tính định chuẩn có số chiều hữu hạn} \\ U \text{ là một bộ phận mở của } E \\ f: U \to \mathbb{R} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \end{array}\right.$

với mỗi khoảng I của $\mathbb{R}$, ta gọi là **nghiệm trên I của phương trình vi phân ôtônôm**: (E) $x' = f(x)$

mọi ánh xạ $x: I \to E$ sao cho: $\begin{cases} x \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I \\ \forall t \in I, x(t) \in U \\ \forall t \in I, x'(t) = f(x(t)). \end{cases}$

Với các ký hiệu ở trên:

| U được gọi là **không gian pha**.
| Ta gọi bộ phận $x(I)$ của U là **quỹ đạo** của một nghiệm $x: I \to E$ của (E) trên I.

◆ **Mệnh đề** Nếu $x: I \to E$ là một nghiệm trên I của phương trình vi phân ôtônôm (E) $x' = f(x)$

thì với mỗi t_0 của $\mathbb{R}$, hàm tịnh tiến $\begin{array}{rcl} \tau_{t_0}x : \tau_{t_0}I & \to & E \\ t & \mapsto & x(t-t_0) \end{array}$ là nghiệm

của (E) trên $\tau_{t_0}I$.

Ta nhắc lại $\tau_{t_0}I = \{t \in \mathbb{R} \,;\, t - t_0 \in I\}$.

Chứng minh : Rõ ràng là $\tau_{t_0}x$ thuộc lớp C^1 trên $\tau_{t_0}I$ và:

$$\forall t \in \tau_{t_0}I,\ (\tau_{t_0}I)'(t) = x'(t-t_0) = \tau_{t_0}x'(t). \qquad \blacksquare$$

Trường hợp riêng, thường xảy ra khi $E = \mathbb{R}^2$ sẽ có định nghĩa sau.

◆ **Định nghĩa 2**

Cho $\left|\begin{array}{l} U \text{ là một bộ phận mở của } \mathbb{R}^2 \\ f, g: U \to \mathbb{R} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U. \end{array}\right.$

Với mỗi khoảng I của $\mathbb{R}$, ta gọi là **nghiệm trên I của hệ vi phân ôtônôm** (S) $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$

mọi cặp ánh xạ ($x: I \to \mathbb{R}$, $y: I \to \mathbb{R}$) sao cho:

$$\begin{cases} x \text{ và } y \text{ đều thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t), y(t)) \in U \\ \forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)). \end{cases} \end{cases}$$

Ta gọi là **điểm cân bằng** (hoặc **điểm tới hạn**) của một hệ thống vi phân ôtônôm: (S) $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$

mọi điểm (x_0, y_0) của U sao cho: $\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$

Trường hợp riêng, thường xảy ra khi $E = \mathbb{R}^2$ sẽ có định nghĩa sau.Ta có thể định nghĩa một cách tổng quát hơn khái niệm về **nghiệm trên I của phương trình vi phân ôtônôm cấp** n: $x^{(n)} = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$.
Trường hợp riêng, ta có định nghĩa sau:

◆ **Định nghĩa 3**

Cho | U: một bộ phận mở của $\mathbb{R}^2$
| f: $U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1
| I: một khoảng trên $\mathbb{R}$
| x: $I \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ.

Ta nói x là nghiệm trên I của **phương trình vi phân ôtônôm cấp 2**

(E) $x'' = f(x, x')$

nếu và chỉ nếu: $\begin{cases} x \text{ thuộc lớp } C^2 \text{ trên } I \\ \forall t \in I, \quad (x(t), x'(t)) \in U \\ \forall t \in I, \quad x''(t) = f(x(t), x'(t)). \end{cases}$

Bằng cách ký hiệu $y = x'$, thì rõ ràng rằng x là nghiệm của (E) $x'' = f(x, x')$ nếu và chỉ nếu (x, y) là nghiệm của

(S) $\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x,y). \end{cases}$

Điều này cho phép đưa một phương trình vi phân ôtônôm cấp 2 về một hệ vi phân ôtônôm cấp 1.

7.2 Định lý Cauchy - Lipschitz

7.2.1 Lý thuyết

Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E, f: U \to E$ là một ánh xạ liên tục. Ta xét phương trình cấp 1 đã giải ra y' : (E) $y' = f(t, y)$, trong đó ẩn hàm được ký hiệu là y.

Ta nhắc lại (7.1.1), nếu I là một khoảng của $\mathbb{R}$ thì ta gọi là nghiệm của (E) trên I mọi ánh xạ $y: I \to E$, khả vi trên I sao cho: $\begin{cases} \forall t \in I, & (t, y(t)) \in U \\ \forall t \in I, & y'(t) = f(t, y(t)). \end{cases}$

Nhận xét:

1) Nếu y là một nghiệm của (E) trên I thì, (do phép hợp hàm nên y' liên tục trên I), y thuộc lớp C^1 trên I.

2) Nếu f thuộc lớp C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) trên U và nếu y là một nghiệm của (E) trên I, thì y thuộc lớp C^{k+1} trên I, ta có điều này do lập luận bằng quy nạp theo k. ■

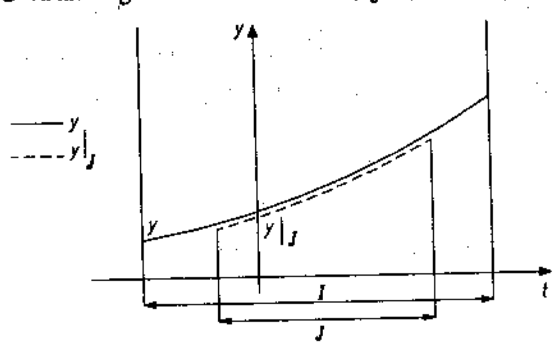
Xét tập $\mathcal{E}$ các cặp (I,y), trong đó I là một khoảng của $\mathbb{R}$ và y là một nghiệm của (E) trên I. Với $(t_0, y_0) \in U$, xét tập $\mathcal{E}_{t_0,y_0}$ các cặp phần tử (I,y) của $\mathcal{E}$ sao cho $t_0 \in I$ và $y(t_0) = y_0$.

Việc giải PTVP (E) (7.1.1) là việc xác định $\mathcal{E}$, vì vậy chúng ta sẽ nghiên cứu $\mathcal{E}_{t_0,y_0}$ với mỗi (t_0, y_0) của U.

1) Khảo sát sơ cấp về $\mathcal{E}$

- Quan hệ $\preccurlyeq$ được định nghĩa trong $\mathcal{E}$ bởi: $(I_1, y_1) \preceq (I_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 \subset I_2 \\ y_1 = y_2|_{I_1} \end{cases}$ (trong đó, $y_2|_{I_1}$ là thu hẹp của y_2 trên I_1) là một quan hệ thứ tự (không toàn phần, tiên nghiệm).

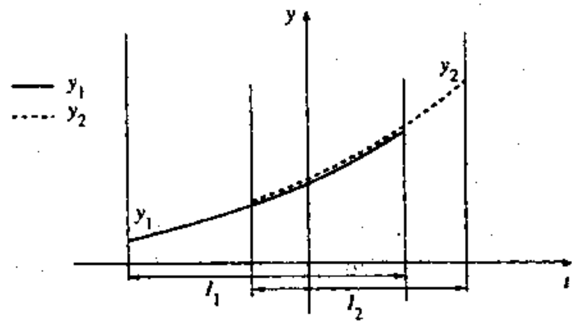
- Rõ ràng, nếu $(I,y) \in \mathcal{E}$ và khoảng I sao cho $J \subset I$ thì $(J, y|_J) \in \mathcal{E}$ và $(J, y|_J) \preccurlyeq (I, y)$.



- Cho (I_1, y_1), (I_2, y_2) hai phần tử của $\mathcal{E}$ sao cho : $\begin{cases} (I_1 \cap I_2)^\circ \neq \varnothing \\ \forall t \in I_1 \cap I_2, & y_1(t) = y_2(t). \end{cases}$

Ta ký hiệu $J = I_1 \cap I_2$ và $I = I_1 \cup I_2$, (là các khoảng) và $y: I \to E$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} \forall t \in I_1, & y(t) = y_1(t) \\ \forall t \in I_2, & y(t) = y_2(t). \end{cases}$$



Rõ ràng là $\begin{cases} (J, y|_J) \preccurlyeq (I_1, y_1) \preccurlyeq (I, y) \\ (J, y|_J) \preccurlyeq (I_2, y_2) \preccurlyeq (I, y). \end{cases}$

Chính xác hơn, trong tập hợp có thứ tự $(\mathcal{E}, \preccurlyeq)$ cặp phần tử (I_1, y_1) và (I_2, y_2) có một biên dưới và một biên trên là $(J, y|_J)$ và (I, y).

Nếu ta không giả sử $(I_1 \cap I_2)^0 \neq \varnothing$ thì $I_1 \cup I_2$ có thể không phải là một khoảng, hoặc là, nếu mút phải của I_1 là mút trái của I_2, thì có thể y không khả vi tại điểm đó.

2) Bài toán Cauchy

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một bộ phận của $\mathbb{R} \times E$, f: $U \to E$ là một ánh xạ liên tục, $(t_0, y_0) \in U$. Ta gọi là **nghiệm của bài toán Cauchy**

(C) $$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mọi cặp (I, y), trong đó I là một khoảng chứa t_0 và y: $I \to E$ là một nghiệm của (E) trên I sao cho $y(t_0) = y_0$.

Nhận xét:

1) Với các ký hiệu trên, ta cũng nói rằng y (thay cho (I, y)) là nghiệm của bài toán Cauchy (C).

2) Với các ký hiệu ở 7.2.1, tập hợp các nghiệm của bài toán Cauchy (C) là $\mathcal{E}_{t_0, y_0}$. ■

Các kết quả của *1)* cho thấy ích lợi của việc quan tâm đến các cặp (I, y) của $\mathcal{E}_{t_0, y_0}$ mà người ta không thể nới rộng y thành một nghiệm của bài toán Cauchy (C) trên một khoảng chứa trọn I, từ đó có định nghĩa sau.

◆ **Định nghĩa 2** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, $f: U \to E$ là một ánh xạ liên tục, $(t_0, y_0) \in U$. Ta gọi là **nghiệm cực đại của bài toán Cauchy** (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

mọi nghiệm (I, y) của (C) sao cho với bất kỳ (I_1, y_1) là nghiệm của (C) thoả mãn: $\begin{cases} I \subset I_1 \\ \forall t \in I, \quad y_1(t) = y(t) \end{cases}$

thì $I_1 = I$.

Nhận xét:

1) Các nghiệm cực đại của bài toán Cauchy(C) là các phần tử cực đại (nếu tồn tại) của tập hợp có thứ tự $(\mathcal{E}_{t_0,y_0}, \preccurlyeq)$.

2) Một cặp (I, y) là nghiệm cực đại của bài toán Cauchy (C) khi và chỉ khi (I, y) là nghiệm của (C) và không tồn tại nghiệm (I_1, y_1) của (C) sao cho

$$\begin{cases} I \underset{\neq}{\subset} I_1 \\ \forall t \in I, \quad y_1(t) = y(t). \end{cases}$$

3) Ánh xạ Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, $f: U \to E$ là một ánh xạ liên tục. Ta nói f **có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2** khi và chỉ khi, với (t_1, y_1) bất kỳ của U tồn tại một khoảng I_1 của $\mathbb{R}$ sao cho $t_1 \in \overset{o}{I_1}$, một lân cận V_1 của y_1 trong E, và $k_1 \in \mathbb{R}_+$ thoả mãn:

$$\forall (t, y_2, y_3) \in I_1 \times V_1 \times V_1, \quad \| f(t,y_2) - f(t, y_3)\| \le k_1 \| y_2 - y_3\|.$$

VÍ DỤ:

1) Ánh xạ $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t,y) \mapsto ty^2 \end{array}$ là Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2, bởi vì, với (t_1, y_1) bất kỳ thuộc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tồn tại $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k_1 > 0$ sao cho:

$$\forall (t, y_2, y_3) \in]t_1 - \alpha_1; t_1 + \alpha_1[\times]y_1 - \beta_1; y_1 + \beta_1[\times]y_1 - \beta_1; y_1 + \beta_1[,$$
$$|f(t, y_2) - f(t, y_3)| = |t|.|y_2^2 - y_3^2| = |t|\,|y_2 + y_3|\,|y_2 - y_3| \le k_1 \, |y_2 - y_3|,$$

ta thấy điều này, chẳng hạn với $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$. $k_1 = 2(|t_1| + 1)(|y_1| + 1)$.

2) Ánh xạ $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t,y) \mapsto \sqrt{|y|} \end{array}$ không có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2, vì với mọi khoảng I_1, mọi lân cận V_1 của 0 trong $\mathbb{R}$ và mọi $k_1 \in \mathbb{R}_+$ tồn tại $(t, y_2, y_3) \in I_1 \times V_1 \times V_1$ sao cho $\| f(t, y_2) - f(t, y_3)\| > k_1 \|y_2 - y_3\|$, ta thấy điều này khi lưu ý rằng với $y_2 > y_3 > 0$:

$$\frac{\sqrt{|y_2|} - \sqrt{|y_3|}}{y_2 - y_3} = \frac{1}{\sqrt{|y_2|} + \sqrt{|y_3|}} \xrightarrow[(y_2,\ y_3) \to (0^+,\ 0^+)]{} +\infty.$$

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, $f: U \to E$. Nếu f thuộc lớp C^1 trên U thì f là Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2.

Chứng minh:

Vì E có số chiều hữu hạn, ta có thể đưa về $E = \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) bằng cách tách phần thực và phần ảo khi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; $\mathbb{R}^p$ được trang bị một trong những chuẩn thông thường (xem Tập 3, 1.1.1 1), ví dụ I).

Cho $(t_1, y_1) \in U$; vì U mở, nên tồn tại $(\eta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho, đặt $I_1 = [t_1 - \eta; t_1 + \eta]$ và $V_1 = B_1(y_1, r)$ ta có $I_1 \times V_1 \subset U$.

Cho $(t, y_2, y_3) \in I_1 \times V_1 \times V_1$, ký hiệu $(\alpha_1, \ldots \alpha_p) = y_2$, $(\alpha_1 + h_1, \ldots, \alpha_p + h_p) = y_3$,

$$g: \quad V_1 \to F. \qquad y \mapsto f(t, y)$$

Thì: $f(t, y_3) - f(t, y_2) = g(\alpha_1 + h_1, \ldots, \alpha_p + h_p) - g((\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$

$$= (g(\alpha_1 + h_1, \alpha_2 + h_2 \ldots, \alpha_p + h_p) - g(\alpha_1, \alpha_2 + h_2, \ldots, \alpha_p + h_p))$$
$$+ \ldots + (g(\alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}, \alpha_p + h_p) - g(\alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}, \alpha_p)).$$

Theo bất đẳng thức số gia hữu hạn (Tập 3, 2.3.7, Định lý 1) ta có:

$$\|g(\alpha_1 + h_1, \alpha_2 + h_2 \ldots, \alpha_p + h_p) - (g(\alpha_1, \alpha_2 + h_2 \ldots, \alpha_p + h_p)\|$$
$$\leq |h_1| \sup_{x_1 \in [\alpha_1, \alpha_1 + h_1]} \|(D_1 g)(x_1, \alpha_2 + h_2 \ldots, \alpha_p + h_p)\| \leq |h_1| \sup_{y \in V_1} \|(D_1 g)(y)\|$$

Làm tương tự như vậy đối với các số hạng khác, ta có:

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_3)\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq p} \left(\sup_{y \in V_1} (\|D_i g)(y)\|) \right) \right) \|y_2 - y_3\|_1.$$

Vì f thuộc lớp C^1 trên miền compăc $I_1 \times V_1$ nên các đạo hàm riêng cấp một của f bị chặn trên đó. Từ đó ta có:

$\forall (t, y_2, y_3) \in I_1 \times V_1 \times V_1$,

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_3)\| \leq \max_{1 \leq i \leq p} \left(\sup_{(t,y) \in I_1 \times V_1} (\|(D_{i+1} f)(t, y)\|) \right) \|y_2 - y_3\|.$$

Vậy f là Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2.

4) Phát biểu định lý Cauchy - Lipschitz

◆ **Định lý (Định lý Cauchy - Lipschitz)**

Nếu U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, $f: U \to E$ là một ánh xạ Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục, $(t_0, y_0) \in U$ thì tồn tại một và chỉ một nghiệm cực đại của bài toán Cauchy

$$(C) \qquad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Hơn nữa:

- khoảng xác định của nghiệm cực đại này mở
- mọi nghiệm của (C) đều là thu hẹp của nghiệm cực đại này.

Nhận xét:
Trong vấn đề này (4) Phát biểu định lý Cauchy - Lipschitz, 6)*a)* Mệnh đề, 6)*b)* Mệnh đề, 6)*c)* Mệnh đề và định nghĩa, độc giả có thể thay thế điều kiện "f liên tục trên U và Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 trên U" bởi điều kiện mạnh hơn là: f thuộc lớp C^1 trên U.

5) Chứng minh định lý Cauchy - Lipschitz

Mục 5 này có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên.

a) Thay bài toán Cauchy bằng phương trình tích phân

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, f: $U \to E$ liên tục, $(t_0, y_0) \in U$, I là một khoảng của $\mathbb{R}$ chứa t_0, y: $I \to E$ là một ánh xạ liên tục.

Để (I, y) là nghiệm của bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$,

điều kiện cần và đủ là: (Γ) $\begin{cases} \forall t \in I, & (t, \ y(t)) \ \in U \\ \forall t \in I, & y(t) \ = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) \mathrm{d}u \end{cases}$.

Chứng minh:

1) Giả sử (I, y) là nghiệm của (C). Vì y và f đều liên tục do cách xây dựng, y' liên tục (vì $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$), nên (Tập 3, 2.3.6 1) Hệ quả 1):

$$\forall t \in I, \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(u)\mathrm{d}u = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u .$$

2) Đảo lại, nếu y thoả mãn (Γ) thì $y(t_0) = y_0$, y thuộc lớp C^1 trên I, và $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$ (theo Tập 3, 2.3.5 I) Mệnh đề).

Từ đây trở đi (đến hết mục 5), ta giả sử U là bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, f: $U \to E$ là một ánh xạ Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục, $(t_0, y_0) \in U$.

b) Sự tồn tại và duy nhất của bài toán Cauchy trên một số khoảng chứa t_0

1) Khái niệm hình trụ an toàn

Ta gọi là **hình trụ an toàn** của bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ mọi cặp (I, B), trong đó I là một khoảng bị chặn chứa t_0, B là một hình cầu đóng của E có tâm y_0, bán kính r (> 0) sao cho tồn tại $M \in \mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn : $\begin{cases} \forall t \in I, & |t - t_0| \leq \dfrac{r}{M} \\ \forall (t, y) \in I \times B, & \| f(t, y) \| \leq M \end{cases}$.

Nhận xét:
Cho (I_0, B_0) một hình trụ an toàn của (C) và B là một hình cầu đóng tâm y_0 và bị chứa trong B_0, khi đó với mọi khoảng bị chặn I thoả mãn $t_0 \in I \subset I_0$ và có chiều dài

đủ bé, (I, B) là một hình trụ an toàn của (C). Thật vậy, bằng cách ký hiệu bán kính của B_0 là r_0, thì tồn tại $M_0 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $\begin{cases} \forall t \in I_0, & |t - t_0| \le \dfrac{r_0}{M_0} \\ \forall (t, y) \in I_0 \times B_0, & \| f(t,y) \| \le M_0. \end{cases}$

Từ đó, nếu bán kính của I là $\le \dfrac{r}{M_0}$ (r là bán kính của B) thì:

$$\begin{cases} \forall t \in I, & |t - t_0| \le \dfrac{r}{M_0} \\ \forall (t, y) \in I \times B, & \| f(t,y) \| \le M_0. \end{cases}$$

2) Sự tồn tại hình trụ an toàn (I, B) đối với bài toán Cauchy (C) sao cho I là một khoảng mở mà trung điểm là t_0:

- Vì f có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2, nên tồn tại một khoảng mở I_1 có trung điểm t_0, một lân cận V_1 của y_0 trong E, và $k_1 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall (t, y, z) \in I_1 \times V_1 \times V_1, \quad \| f(t, y) - f(t, z) \| \le k_1 \| y - z \|$$

- Vì f liên tục tại (t_0, y_0) nên f bị chặn trong một lân cận của (t_0, y_0); do đó tồn tại một khoảng mở I_2 có tâm t_0, một hình cầu đóng B_0 của E có tâm y_0, và $M \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho

$$I_2 \subset I_1, B_0 \subset V_1, \ (\forall (t, y) \in I_2 \times B_0, \ \| f(t, y) \| \le M).$$

- Đặt r_0 là bán kính của B_0, khi đó tồn tại một khoảng mở của I_0 có trung điểm là t_0, bán kính $\le \dfrac{r_0}{M_0}$ và bị bao hàm trong I_2. Như vậy (I_0, B_0) là một hình trụ an toàn cho (C) và I_0 là một khoảng mở có trung điểm t_0. Hơn nữa, tồn tại $k_1 \in \mathbb{R}_+$ sao cho

$$\forall (t, y, z) \in I_0 \times B_0 \times B_0, \quad \| f(t, y) - f(t, z) \| \le k_1 \| y - z \|.$$

3) Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy(C) *trên một khoảng I có chiều dài khá bé và sao cho tồn tại B để (I, B) là một hình trụ an toàn của* (C).

Giả sử (I, B) là một hình trụ an toàn của (C) sao cho I có chiều dài $\le \dfrac{1}{k_1 + 1}$ (về sau sẽ thấy tác dụng của giả thiết này).

Theo 1) và 2), ta có thể đưa về trường hợp (I, B) thoả mãn

$$\forall (t, y, z) \in I \times B \times B, \quad \| f(t, y) - f(t, z) \| \le k_1 \| y - z \|$$

điều mà bây giờ ta giả sử được thoả mãn.

Ký hiệu $\mathcal{F}$ là tập các ánh xạ liên tục $y: I \to E$ sao cho $y(I) \subset B$ và $\mathcal{B}$ là tập các ánh xạ bị chặn từ I vào E. Ta biết rằng (xem Tập 3, 2.1.4 Mệnh đề 3) $(\mathcal{B}, \|.\|_\infty)$ là một $\mathbb{K}$ -không gian véctơ định chuẩn mà $\|.\|_\infty$ được định nghĩa như sau :

$$\forall y \in \mathcal{B}, \quad \| y \|_\infty = \sup_{t \in I} \| y(t) \|.$$

- Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{F}$ là bộ phận đủ của $\mathcal{B}$. Vì $\mathcal{B}$ là một hình cầu nên hiển nhiên là $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$.

Cho $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy Cauchy trong $\mathcal{F}$.

Theo điều kiện cần và đủ của Cauchy về sự hội tụ đều của dãy các ánh xạ nhận giá trị trong một không gian vectơ định chuẩn có số chiều hữu hạn (xem 4.1.1 Định lý) thì $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ trong $(\mathcal{B}, \|.\|_\infty)$ tới một phần tử, ký hiệu là y. Ta cũng có thể sử dụng tính đủ của $(\mathcal{B}, \|.\|\infty)$ (xem Tập 3, C.2.1).

Vì $y_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} y$ và mọi y_n liên tục trên I, nên y liên tục trên I (xem 4.1.3 Hệ quả I).

Cho $t \in I$. Dãy $(y_n(t))_{n \in \mathbf{N}}$ có các giá trị trong B, hội tụ tới $y(t)$ (xem 4.1.1, Mệnh đề 1), vì B đóng nên $y(t) \in B$. Điều này chứng tỏ rằng $y(I) \subset B$.

Như vậy $y \in \mathcal{F}$, và do đó $\mathcal{F}$ là một bộ phận đủ của $\mathcal{B}$.

- Ta xét với mỗi $y \in \mathcal{F}$ ánh xạ $\varphi(y)$ từ I vào E được định nghĩa bởi:

$$\forall t \in I, \quad (\varphi(y))(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u.$$

Để ngắn gọn, ta ký hiệu $\varphi(y)(t)$ thay cho $(\varphi(y))(t)$. Với mọi y thuộc $\mathcal{F}$, $\varphi(y)$ tồn tại và thuộc lớp C^1 trên I bởi vì $u \mapsto f(u, y(u))$ liên tục trên I, nên liên tục trên đoạn thẳng nối liền t_0 với t.

Hơn nữa, với mỗi t thuộc I: $\|\varphi(y)(t) - y_0\| = \|\varphi(y)(t) - \varphi(y)(t_0)\|$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)\mathrm{d}u \right\| \leq \int_{\mathrm{Min}(t_0,t)}^{\mathrm{Max}(t_0,t)} \| f(u, y(u)) \| \,\mathrm{d}u \leq M\,|t - t_0| \leq r.$$

Điều này chứng tỏ $\varphi(y)(I) \subset \mathcal{B}$.

Như vậy, ta đã định nghĩa một ánh xạ φ: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

$$y \mapsto \varphi(y)$$

- Chúng ta sẽ chứng minh rằng φ là ánh xạ co. Cho $(y, z) \in \mathcal{F}^2$. Ta có:

$\forall t \in I, \quad \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \leq k_1\|y(t) - z(t) \leq k_1\|y - z\|_\infty,$

từ đó :

$$\forall t \in I, \ \|\varphi(y)t - \varphi(z)t\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u - \int_{t_0}^{t} f(u, z(u))\mathrm{d}u \right\|$$

$$\leq \int_{\mathrm{Min}(t_0,t)}^{\mathrm{Max}(t_0,t)} \| f(u, y(u)) - f(u, y(u)) \| \,\mathrm{d}u \leq k_1 \, \| y - z \|_\infty \, | t - t_0 |.$$

Ký hiệu λ là chiều dài của I; ta có $\forall (y, z) \in \mathcal{F}^2$, $\| \varphi(y) - \varphi(z) \|_\infty \leq k_1 \lambda \| y - z \|_\infty$.

Vì $0 \leq k_1\lambda \leq \dfrac{k_1}{k_1 + 1} < 1$ nên φ là ánh xạ co.

Theo định lý về điểm bất động (Tập 3, 1.4.3 Định lý) φ có một và chỉ một điểm bất động, ký hiệu là y. Vậy tồn tại một ánh xạ liên tục duy nhất $y: I \to E$ sao cho

$$\forall t \in I, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du .$$

Theo *a)* Mệnh đề, tồn tại một ánh xạ khả vi duy nhất $y: I \to E$ sao cho

$$\begin{cases} \forall t \in I, & (t, y(t)) \in U \\ \forall t \in I, & y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Tóm lại, ta đã chứng minh rằng, đối với mọi hình trụ an toàn (I, B) sao cho I có độ dài khá bé, bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm mà tập xác định là I.

c) Tính duy nhất nghiệm (nếu có) của bài toán Cauchy trên toàn bộ khoảng chứa t_0

Giả sử I là một khoảng chứa t_0, y_1, y_2: $I \to E$ là hai nghiệm của bài toán Cauchy(C). Ta xét tập hợp

$$\Phi = \{t \in I;\ y_1(t) = y_2(t)\}$$

- Φ đóng trong I, vì Φ là ảnh ngược của khoảng đóng $\{0\}$ của E đối với ánh xạ liên tục $\begin{aligned} I &\to E \\ t &\mapsto y_1(t) - y_2(t) \end{aligned}$
- Ta sẽ chứng minh rằng Φ mở trong I.

Cho $t_1 \in \Phi$. Theo *b)*2) tồn tại một hình trụ an toàn (J, B) đối với bài toán Cauchy

$$(C_1) \qquad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sao cho J là một khoảng mở có trung điểm t_1. Khi đó $I \cap J$ là một khoảng không rỗng và không thu về một điểm (vì $t_1 \in I$ và J là một khoảng mở chứa t_1) bị chứa trong J; theo *b)*1) Chú ý, $(I \cap J, B)$ là một hình trụ an toàn đối với (C_1). Rõ ràng là tồn tại một khoảng mở L chứa t_1 và bị chứa trong J sao cho $(I \cap J, B)$ là một hình trụ an toàn đối với (C_1) và L có độ dài khá bé để áp dụng kết quả ở 3).

Theo *b)* 3) ta có $y_1|_{I \cap L} = y_2|_{I \cap L}$, từ đó $I \cap L \subset \Phi$. Vì $L \in v_{\mathbb{R}}(t_1)$, $I \cap L \in v_I(t_1)$, vậy Φ là mở trong I.

- $\Phi \neq \varnothing$ vì $t_1 \in \Phi$.

Như vậy, Φ là một bộ phận đóng, mở, không rỗng của I; vì I là liên thông bởi cung (xem Tập 3, 1.5.1), nên ta kết luận $\Phi = I$, nghĩa là $\forall t \in I$, $y_1(t) = y_2(t)$.

d) Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cực đại của bài toán Cauchy(C)

Với mỗi y thuộc $\mathcal{E}_{t_0, y_0}$ ta ký hiệu $D(y)$ là tập xuất phát của y ($D(y)$ là một khoảng chứa t_0).

Tập hợp $I = \bigcup_{y \in \mathcal{E}_{t_0,y_0}} D(y)$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$ (vì là hợp một họ các khoảng chứa t_0). Xét ánh xạ $z: I \to E$, định nghĩa như sau:

Với mỗi t thuộc I, tồn tại một $y \in \mathcal{E}_{t_0,y_0}$ sao cho $t \in D(y)$, và ta đặt $z(t) = y(t)$ (ta nói z đã nhận được, bằng cách dính các phần tử của họ $\mathcal{E}_{t_0,y_0}$ lại với nhau).

Định nghĩa này hợp lý vì theo *c)*

$$\forall\, (y_1, y_2) \in (\mathcal{E}_{t_0,y_0})^2, \quad y_1\big|_{D(y_1)\cap D(y_2)} = y_2\big|_{D(y_1)\cap D(y_2)}.$$

Theo *b)* và theo cấu tạo, z thuộc lớp C^1 trên I và:

$$\forall t \in I,\ z'(t) = f(t, z(t)).$$

Như vậy, (I, z) là nghiệm của bài toán Cauchy (C)

Ta sẽ chứng minh (I, z) là phần tử lớn nhất của tập hợp có thứ tự $(\mathcal{E}_{t_0,y_0}, \preccurlyeq)$ (ký hiệu ở 7.2.1 *I*).

Cho $(J, y) \in \mathcal{E}_{t_0,y_0}$, nghĩa là (J,y) là một nghiệm của bài toán Cauchy(C).

Theo định nghĩa của I, $D(y) \subset I$, và vì vậy, theo *c)* $z|_J = y$. Vậy: $\forall (J, y) \in \mathcal{E}_{t_0,y_0}$, $(J, y) \preccurlyeq (I, z)$.

Nói cách khác, mọi nghiệm của bài toán Cauchy(C) đều là thu hẹp của z.

Cuối cùng, nếu y: $J \to E$ là một nghiệm cực đại của bài toán Cauchy (C) thì $\begin{cases} J \subset I \\ z|_J = y \end{cases}$, từ đó do tính cực đại của z: $\quad J = I$ và $z = y$.

Điều này chứng tỏ nghiệm cực đại của bài toán Cauchy (C) là duy nhất.

e) Khoảng xác định của nghiệm cực đại của bài toán Cauchy (C) là khoảng mở

Ký hiệu $y_m: I \to E$ nghiệm cực đại của bài toán Cauchy(C) (sự tồn tại duy nhất của y_m vừa thu được ở *d)*). Giả sử rằng khoảng I không mở, khi đó I chứa một trong các điểm mút, chẳng hạn mút trái, ký hiệu a. Theo *b)* 3), tồn tại nghiệm (J, y) của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_m(a) \end{cases}$ sao cho J là một khoảng mở có trung điểm là a.

Việc dính y và y_m cho một khoảng I_1 chứa trọn I (vì I_1 là mở rộng của I về phía trái của *a)* và mọi ánh xạ y_1: $I_1 \to E$ được xác định bởi:

$$\forall t \in I_1, \quad y_1(t) = \begin{cases} y_m(t) \text{ nếu } t \in I_1 \\ y(t) \quad \text{nếu } t \in J. \end{cases}$$

Rõ ràng là (I_1, y_1) là nghiệm của bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ và y_1 là một nới rộng ngặt của y, điều này mâu thuẫn với định nghĩa của (I, y).

6) Các tính chất của các nghiệm cực đại của bài toán Cauchy

a) Tính chất của nghiệm cực đại tại mút của khoảng xác định mở

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E, f: U \to E$ có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục; $(t_0, y_0) \in U$, (I, y) là nghiệm cực đại của bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$,

$(\alpha, \beta) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ sao cho $I =]\alpha, \beta[$.

Ta giả sử $\{\alpha\} \times E \subset U$ (tương ứng $\{\beta\} \times E \subset U$).

Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ (tương ứng $\beta \in \mathbb{R}$) thì y không có giới hạn (hữu hạn nếu $E = \mathbb{R}$) tại α^+ (tương ứng β^-).

Chứng minh:

Giả sử $y(t) \xrightarrow[t \to \alpha^+]{} l \in E$.

Ánh xạ ỹ: $[\alpha, \beta[\to E$ định nghĩa bởi $\tilde{y}(t) = = \begin{cases} y(t) \text{ nếu } & t \in]\alpha; \beta[\\ l \quad \text{nếu} & t = \alpha \end{cases}$ liên tục trên $[\alpha, \beta[$. Hơn nữa $y'(t) = f(t, y(t)) \xrightarrow[t \to \alpha_+]{} f(\alpha, l)$, từ định lý "giới hạn của đạo hàm" ta suy ra $\tilde{y}$ thuộc lớp C^1 trên $[\alpha, \beta[$, và $\forall\, t \in [\alpha, \beta[$, $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$.

Như vậy, $([\alpha, \beta[, \tilde{y})$ là một nghiệm của bài toán Cauchy(C) và $]\alpha; \beta[\subsetneq [\alpha; \beta[$, điều này dẫn đến mâu thuẫn với tính chất cực đại của $(]\alpha, \beta[, y)$.

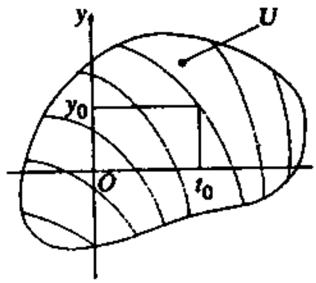
Nhận xét: Trong thực tế, mệnh đề được sử dụng trong trường hợp $E = \mathbb{R}$ dưới dạng:

Nếu $y:]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ là nghiệm cực đại của (C), nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ và nếu y là hàm tăng (tương ứng giảm) địa phương ở bên phải điểm α, thì y có tại α^+ giới hạn $-\infty$ (tương ứng $+\infty$) (xem Tập I, 4.2.4 Định lý)

b) Tính chất các đường cong tích phân

◆ **Mệnh đề** Giả sử U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E, f: U \to E$ có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục, thì các đồ thị của các nghiệm cực đại của bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, khi (t_0, y_0) vẽ nên U lập thành một phân hoạch của U.

Chứng minh:



1) Theo định lý Cauchy-Lipschitz (4) thì với bất kỳ $(t_0, y_0) \in U$, tồn tại một nghiệm cực đại (I, y) của (C), đồ thị của (I, y) hiển nhiên là chứa (t_0, y_0).

2) Cho Γ_1, Γ_2 là hai đồ thị của hai nghiệm cực đại (I, y_1), (I, y_2) của các bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$, $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_2) = y_2 \end{cases}$ sao cho $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$; vậy tồn tại $(t_3, y_3) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Vậy (I_1, y_1) và (I_2, y_2) đều là nghiệm của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_3) = y_3 \end{cases}$ theo 5)

c) $y_1\big|_{I_1 \cap I_2} = y_2\big|_{I_1 \cap I_2}$. Như đã thấy ở 5)e), việc dính y_1 và y_2 cho một nghiệm (I, y) của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$, từ đó (do tính cực đại của (I_1, y_1)) $I \subset I_1$, vậy $I_2 \subset I_1$. Tương tự $I_1 \subset I_2$ và $y_1 = y_2$.

c) Tính cực đại đối với hai điểm

◆ **Mệnh đề** Nếu U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, f: $U \to E$ có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục, $(t_0, y_0) \in U$, y_1 là nghiệm cực đại của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, I_1 là khoảng xác định của y_1, thì với mọi t_1 thuộc I_1, y_1 cũng là nghiệm cực đại của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1. \end{cases}$

Chứng minh:

Các đồ thị của y_1 và nghiệm cực đại y_2 của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$ có một điểm chung $(t_1, y_1(t_1))$, vậy theo *b)* Mệnh đề, chúng bằng nhau. ■

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E$, f: $U \to E$ có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục. Ta gọi là **các nghiệm cực đại của PTVP** $y' = f(t, y)$, các nghiệm cực đại của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ khi (t_0, y_0) vẽ nên U.

◆ **Định nghĩa 2** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times E, f: U \to E$ thuộc lớp C^1, x là một nghiệm cực đại của phương trình vi phân ôtônôm:

$$(E) \quad x' = f(x).$$

Ta gọi bộ phận $x(I)$ của U là **quỹ đạo** của x.
Ta gọi các quỹ đạo của các nghiệm cực đại của (E) là các **quỹ đạo** của (E).

7.2.2 Các ví dụ về sử dụng định lý Cauchy - Lipschitz

Định lý Cauchy - Lipschitz thường cho phép nghiên cứu một cách "đầy đủ" phương trình vi phân (nói chung không tuyến tính, xem Tập 2, 11.3) trong khi đó ở Chương 2, 11.3, ta mới chỉ thường nghiên cứu một cách "*không đầy đủ*" (ví dụ, khi chia cho y không biết y có triệt tiêu hay không).
Chúng ta sẽ trình bày một loạt ví dụ:

1) Một ví dụ về PTVP giải ra y', trong đó các nghiệm được biểu diễn bằng các hàm thông thường
2) Một ví dụ về PTVP giải ra y', trong đó các nghiệm không biểu diễn được bằng các hàm thông thường, và ở đó ta sẽ trình bầy một cách chính xác nhất về chiều biến thiên của nghiệm
3) Một ví dụ cùng loại với 2) nhưng không có chỉ dẫn trực tiếp về chiều biến thiên của các nghiệm
4) Một ví dụ về hệ vi phân ôtônôm. Biến ở đây được ký hiệu là x.

1) Giải PTVP (E) $y' - \frac{1}{x}y + \frac{e^x}{x}y^2 = 0$, **ẩn là** $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}^*_+$

a) Giải một cách "hình thức" không đầy đủ

Đây là phương trình Bernoulli (xem Tập 2, 11.3.4). Giả sử y: $I \to \mathbb{R}$ khác 0 tại mọi điểm, đặt $z = \frac{1}{y}$ ta sẽ có PTVP (F): $z' + \frac{1}{x}z - \frac{e^x}{x} = 0$.

PTVP (F) là một PTVP tuyến tính cấp 1 (xem Tập 2, 11.1.1). Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $xz' + z = 0$ là $z: x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (F) tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số (xem Tập 2, 11.1.3.3) sẽ giúp ta tìm được nghiệm tổng quát; đặt $z = \frac{\lambda}{x}$ với λ là một hàm chưa biết ta có $z' + \frac{1}{x}z - \frac{e^x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lambda' = e^x$. Nghiệm tổng quát của (F), trên mọi khoảng chứa trong $\mathbb{R}^*_+$ có dạng:

$$z: x \mapsto \frac{e^x + \lambda}{x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \text{ vậy } y: x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$$

Bằng phương pháp này, ta chỉ có được các nghiệm $y: I \to \mathbb{R}$ của (E) thoả mãn: $\forall x \in I, \ y(x) \neq 0$.

b) Nghiên cứu "đầy đủ"

Ta sẽ xác định tập $\mathcal{E}$ các cặp (I, y) trong đó I là một khoảng của $\mathbb{R}$ chứa trong $\mathbb{R}^*_+$ và y là một nghiệm của (E) trên I.

Ký hiệu $U = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ (là một bộ phận mở của $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) và $f : U \to \mathbb{R}$) được xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{y - e^x y^2}{x}.$$

Ánh xạ f thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở U, vậy (xem 3) Mệnh đề) có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 và liên tục.

Theo định lý Cauchy - Lipschitz (7.2.1.4) với mỗi (x_0, y_0) của U, bài toán Cauchy C_{x_0,y_0} $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một nghiệm cực đại duy nhất, và khoảng xác định của nghiệm cực đại này là khoảng mở.

Cho $(x_0, y_0) \in U$, nếu $y_0 = 0$, thì rõ ràng là ánh xạ $\underset{x \mapsto 0}{]0;+\infty[\to \mathbb{R}}$ là nghiệm cực đại của $C_{x_0\, y_0}$.

Giả sử $y_0 \neq 0$. Rõ ràng là tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ duy nhất sao cho ánh xạ $y : x \mapsto \dfrac{x}{e^x + \lambda}$ (tìm được ở *a)*), thỏa mãn $y(x_0) = y_0$; trị số λ này bằng $\dfrac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$.

Bây giờ ta tìm các khoảng (chứa trong $\mathbb{R}^*_+$) mà trên đó $x \mapsto \dfrac{x}{e^x + \dfrac{x_0}{y_0} - e^{x_0}}$ là nghiệm của (E). Việc giải phương trình $e^x + \dfrac{x_0}{y_0} - e^{x_0} = 0$ (ẩn là $x \in \mathbb{R}$) dẫn tới sự biện luận sau đây, trong đó ta ký hiệu $\lambda = \dfrac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$, φ: $\begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1} \end{array}$ và (γ) là đường cong biểu diễn φ.

α) Trường hợp $\lambda \geq -1$

Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{x}{e^x + \lambda}$ xác định trên $]0; +\infty[$ và là một nghiệm của (E) trên $]0; +\infty[$ (theo *a)*); vậy đó là nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0}.

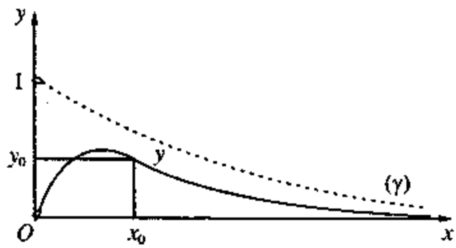
Ta xét dáng điệu của đường cong biểu diễn cực đại này y: $\begin{array}{l}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{e^x + \lambda} \end{array}$

Ta có: $\forall x \in]0; +\infty[,\ y'(x) = \dfrac{F(x)}{(e_x + \lambda)^2}$ với $F(x) = e^x + \lambda - xe^x$, và

$F'(x) = -xe^x < 0$.

Từ đó ta có thể biết sự biến thiên của y và dáng điệu của đường cong biểu diễn y.

x	0				$+\infty$
$F'(x)$			$-$		
$F(x)$	$1+\lambda$	$\searrow$ $+$	0	$\searrow$ $-$	$-\infty$
$y'(x)$	$\|\|$ $\frac{1}{1+\lambda}$	$+$	0	$-$	
$y(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$		$\searrow$	0



Nếu $\lambda = -1$, thì $y: x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

β) Trường hợp $\lambda < -1$

Hàm số $x \mapsto \dfrac{x}{e^x + \lambda}$ chỉ xác định trên $]0, +\infty[- \{\ln(-\lambda)\}$.

- Giả sử $y_0 > 0$.

Khi đó $\ln(-\lambda) < x_0$; ánh xạ $\begin{array}{l}]\ln(-\lambda); +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{e^x + \lambda} \end{array}$ là nghiệm của C_{x_0, y_0} và đó là nghiệm cực đại của C_{x_0, y_0} vì nó không thể thác triển về phía trái của $\ln(-\lambda)$, do

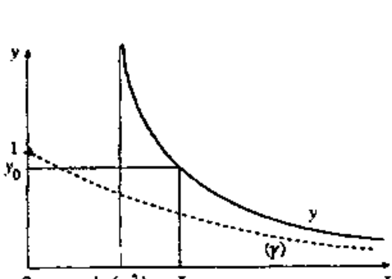
$$\frac{x}{e^x + \lambda} \xrightarrow[x \to \ln(-\lambda)^+]{} +\infty.$$

- Nếu $y_0 < 0$, cũng lập luận như trên, nghiệm cực đại của C_{x_0, y_0} là ánh xạ:

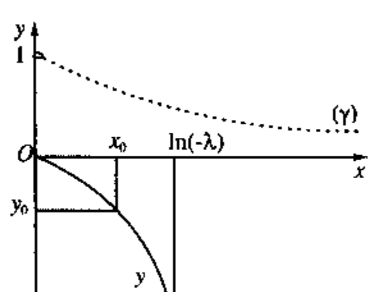
$$]0; \ln(-\lambda)[\to \mathbb{R}.$$

$$x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$$

Dáng điệu của đường cong biểu diễn nghiệm cực đại:

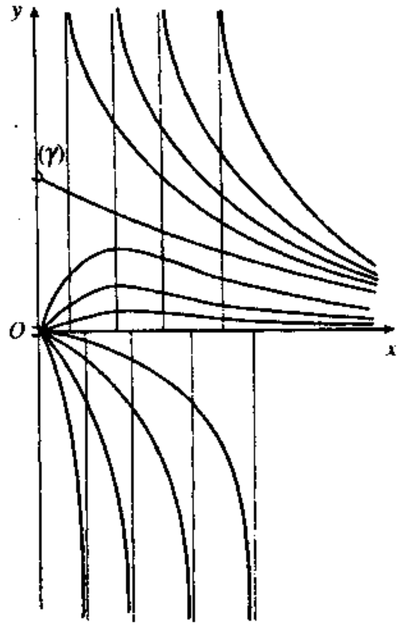


nếu $y_0 > 0$



nếu $y_0 < 0$

Ta tập hợp trên cùng một sơ đồ mấy đường cong tích phân biểu diễn các nghiệm cực đại:



2) Nghiên cứu định tính các nghiệm cực đại của PTVP (E) $y' = x^2 + y^2$, **ẩn là** y **nhận các giá trị thực.**

Đây là phương trình Riccati (xem Tập 2, 11.3.5), vì không một nghiệm nào của (E) có dạng tường minh nên ta không biểu diễn được nghiệm của (E) bằng các hàm thông thường (trái với ví dụ trên).

Xét $U = \mathbb{R}^2$ (là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^2$) và $f\colon U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Vì f thuộc lớp C^1 trên U nên f có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 (xem 7.2.1.3) và liên tục. Theo định lý Cauchy - Lipschitz (7.2.1.4), với mọi (x_0, y_0) thuộc $\mathbb{R}^2$, tồn tại một và chỉ một nghiệm cực đại của bài toán Cauchy C_{x_0,y_0} $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ và khoảng xác định của nghiệm cực đại này là khoảng mở.

Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ký hiệu $y\colon I \to \mathbb{R}$ là nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0} và chú ý y tăng trên I vì: $\forall x \in I, y'(x) = x^2 + (y(x))^2 \geq 0$.

Ta sẽ chứng minh I bị chặn.

- Giả sử I không bị chặn trên thì tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $[a; +\infty[\subset I$.

Vì $y' = x^2+y^2 \geq x^2$, $y'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, và từ đó suy ra dễ dàng

$$y(x) = \int_a^x y'(t)\mathrm{d}t + y(a) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty .$$

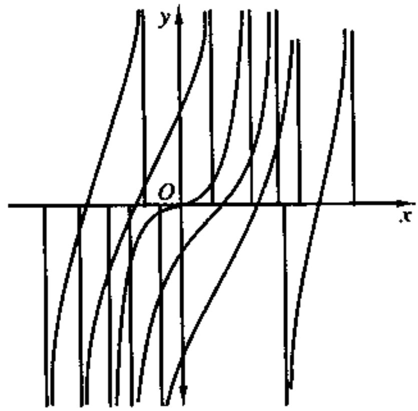
Đặc biệt là tồn tại $b \in \,]a; +\infty[$ sao cho : $\forall x \in [b; +\infty[$, $y(x) > 0$, với $x \geq b$, ta có:

$$\int_b^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2}dt = \int_b^x \frac{t^2 + (y(t))^2}{(y(t))^2}dt \geq \int_b^x dt = x - b \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

và $\quad \int_b^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2 dt} dt = \frac{1}{y(b)} - \frac{1}{y(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{y(b)}$, mâu thuẫn.

• Cũng như trên, ta chứng minh I bị chặn dưới. Như vậy, khoảng xác định của mỗi nghiệm cực đại là bị chặn.

Các đường cong tích phân biểu diễn các nghiệm cực đại có dáng điệu như sau.



3) Nghiên cứu định tính các nghiệm cực đại của PTVP (E) $y' = y^2 - x$, ẩn là y nhận giá trị thực

Đây cũng là một phương trình Riccati (xem Tập 2, 11.3.5) không có nghiệm hiển nhiên. Xét $U = \mathbb{R}^2$ (là một bộ phận mở trong $\mathbb{R}^2$) và $f: U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^2 - x$. Vì f thuộc lớp C^1 trên U, nên f có tính Lipschitz địa phương đối với vị trí thứ 2 (xem 7.2.1.3) Mệnh đề) và liên tục. Theo định lý Cauchy - Lipschitz (7.2.1.4), với mọi (x_0, y_0) thuộc $\mathbb{R}^2$, tồn tại một và chỉ một nghiệm cực đại của bài toán Cauchy C_{x_0,y_0} $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

và khoảng xác định của nghiệm cực đại này là khoảng mở.

Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, y là nghiệm cực đại của (C), $I =]\alpha; \beta[$ $((\alpha,\beta) \in (\mathbb{R})^2)$ là khoảng xác định của y.

Khảo sát các không điểm của y'

• Cho x_1 là một không điểm của y'(nếu nó tồn tại); khi đó $x_1 = (y(x_1))^2 - y'(x_1) = (y(x_1))^2 \geq 0$. Giả sử, chẳng hạn ($x_1 > 0$ và $y(x_1) > 0$), hai trường hợp khác ($x_1 > 0$; $y(x_1) < 0$), ($x_1 = 0$) làm tương tự.

Phương pháp 1:

Vì $\quad \begin{cases} \forall x \in I, \quad (y(x) - \sqrt{x})(y(x) + \sqrt{x}) = y'(x) \\ x \mapsto y(x) + \sqrt{x} \quad \text{liên tục trên } I \\ y(x_1) + \sqrt{x_1} = 2\sqrt{x_1} > 0, \end{cases}$

nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:

$$\begin{cases}]x_1 - \alpha;\ \ x_1 - \alpha[\ \subset I \\ \forall x \in\ ]x_1 - \alpha;\ \ x + \alpha[\ , \quad \begin{cases} y'(x) < 0 \Leftrightarrow y\ -\ \sqrt{x} < 0 \\ y'(x) = 0 \Leftrightarrow y\ -\ \sqrt{x} = 0. \\ y'(x) > 0 \Leftrightarrow y\ -\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tại lân cận x_1, ta có các khai triển hữu hạn tại 0 (KTHH(0)) sau (với biến là h, $h \to 0$):

$$\begin{cases} y(x_1 + h)\ =\ y(x_1)\ +\ hy'(x_1)\ \ +o(h)\ =\ \sqrt{x_1} + o(h) \\ \sqrt{x_1 + h}\ \ =\ \sqrt{x_1}\left(1 + \dfrac{h}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\ =\ \sqrt{x_1}\ \ +\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}\ \ +o(h), \end{cases}$$

từ đó $y(x_1 + h)\ -\ \sqrt{x_1 + h}\ \underset{h \to 0}{\sim}\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} h$.

Vậy tồn tại $\beta > 0$ sao cho: $\begin{cases}]x_1 - \beta;\ x_1 + \beta[\ \subset I \\ \forall x \in\ ]x_1 - \beta;\ x_1[, \quad y(x) - \sqrt{x} > 0 \\ \forall x \in\ ]x_1;\ x_1 + \beta[, \quad y(x) - \sqrt{x} < 0 \end{cases}$.

Ký hiệu $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta) > 0$, ta có: $\begin{cases}]x_1 - \eta,\ x_1 + \eta[\ \subset I \\ \forall x \in\ ]x_1 - \eta,\ x_1[, \quad y'(x) > 0 \\ \forall x \in\ ]x_1;\ x_1 + \eta[, \quad y'(x) < 0. \end{cases}$

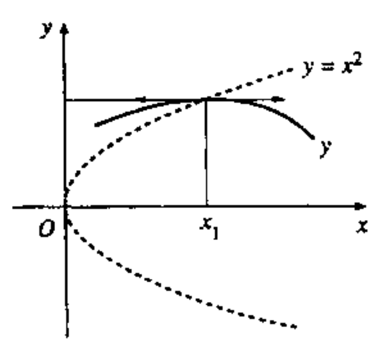
Phương pháp 2:

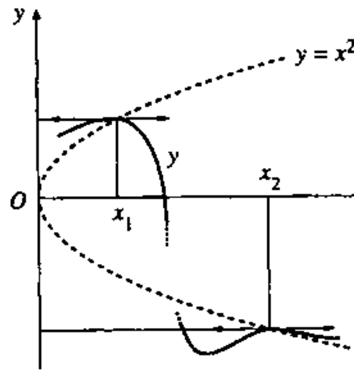
Vì y khả vi trên I và $y' = y^2 - x$, y thuộc lớp C^2 trên I (và cả C^∞ trên I) và $y'' = 2yy' - 1$. Đặc biệt là $y''(x_1) = -1 < 0$.

Vậy tồn tại $\gamma > 0$ sao cho: $\begin{cases}]x_1 - \gamma; x_1 + \gamma[\subset I \\ y' \text{ giảm ngặt trên }]x_1 - \gamma; x_1 + \gamma[\end{cases}$

Vì $y'(x_1) = 0$, nên ta có: $\begin{cases} \forall x \in\ ]x_1 - \gamma;\ x_1[, \quad y'(x) > 0 \\ \forall x \in\ ]x_1;\ x_1 + \gamma[, \quad y'(x) < 0. \end{cases}$

Điều này chứng tỏ rằng các không điểm của y' cô lập trong I.





- Giả sử y' có ít nhất 2 không điểm x_1, x_2:

$$\begin{cases} 0 \le x_1 < x_2 \\ x_1 \in I, \quad x_2 \in I \\ y'(x_1) = y'(x_2) = 0. \end{cases}$$

Theo sự khảo sát ở trên, $y'(x) < 0$ trên một lân cận bên phải của x_1 và $y'(x) > 0$ trên một lân cận bên trái điểm x_2. Theo định lý về các giá trị trung gian thì y' có ít nhất một không điểm trong $]\, x_1, x_2\, [$. Lặp lại, ta xây dựng được một dãy $(x_n)_{n\ge 1}$ các không điểm của y' trong $[x_1, x_2]$ gồm các số hạng khác nhau từng đôi một.

Vì $[x_1, x_2]$ compăc nên $(x_n)_{n\ge 1}$ có ít nhất nhất một điểm dính a trong $[x_1, x_2]$ (vậy $a \in$ I), tồn tại một cái trích σ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\ \infty]{} a$.

Vì $(\forall n \in \mathbb{N}),\ y'(x_{\sigma(n)}) = 0)$, và y′ liên tục, ta suy ra $y'(a) = 0$. Nhưng khi đó a lại là một không điểm của y' trong I, không cô lập, nên có mâu thuẫn.

Vậy y' chỉ có nhiều nhất một không điểm.

γ) **Trường hợp** $y_0^2 - x_0 < 0$

- *Khảo sát bên phải* x_0:

Nếu tồn tại $x_1 \in\,]x_0; +\infty[$ sao cho $y'(x_1) = 0$, thì $y'(x) > 0$ trên một lân cận bên trái của x_1; và $y'(x_0) < 0$, định lý các giá trị trung gian cho thấy y' triệt tiêu ít nhất một lần trong $]x_0, x_1[$, mâu thuẫn, vì y' có ít nhất 2 không điểm.

Áp dụng định lý về các giá trị trung gian, ta có:

$$(\forall x \in [x_0; +\infty[\cap I,\ \ y'(x)<0),$$

vậy y giảm ngặt trên $[x_0, \beta[$.

Nếu $\beta \in \mathbb{R}$, thì (xem 7.2.1.6), *a)* Mệnh đề) không tồn tại giới hạn của y tại β^-, vậy

$$y \xrightarrow[\beta^-]{} -\infty.$$

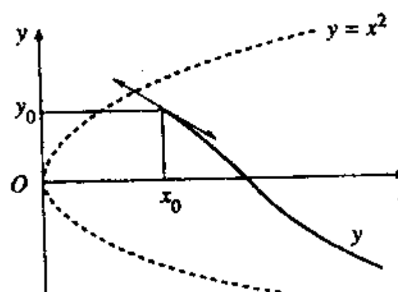
Nhưng $y'(x) = (y(x))^2 - x \xrightarrow[x\to\beta^-]{} +\infty$, mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ $\beta = +\infty$.

Vì y giảm trên $[x_0; +\infty]$ nên tại $+\infty$ có giới hạn hữu hạn hoặc $-\infty$.

Giả sử $y \xrightarrow[+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ khi đó :

$$y'(x) = y(x)^2 - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty,$$



vậy $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, mâu thuẫn.

Vậy $y \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$.

• *Khảo sát bên phải của x_0.*

Giả sử y' không triệt tiêu tại bất cứ điểm nào trên $[\alpha; x_0]$. Theo định lý về các giá trị trung gian, ta có:

$$(\forall\ x \in\ ]\alpha; x_0[,\ y'(x) < 0) \text{ do đó } (\forall\ x \in\ ]\alpha; x_0[,\ x = y(x)^2 - y'(x) > 0),$$

vậy $\alpha \geq 0$. Vì y giảm trên$]\alpha;x_0[$ và theo (7.2.1.6)*a)* Mệnh đề) ta suy ra $y \xrightarrow[\alpha+]{} +\infty$, và $y'(x) = y(x)^2 - x \xrightarrow[x\to\alpha+]{} +\infty$, mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ rằng y' triệt tiêu ít nhất tại một điểm của $]\alpha;x_0]$, vậy (theo sự khảo sát khi đầu), chỉ tại một điểm duy nhất, ký hiệu x_1, ta có $\alpha < x_1 < x_0$. Việc khảo sát các không điểm của y' cho thấy $\forall x \in\ ]\alpha; x_1[,\ \ y'(x) > 0$.

Giả sử $\alpha = -\infty$.

Ta có $y'(x) = y(x)^2 - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, và

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y(t)\mathrm{d}t - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty.$$

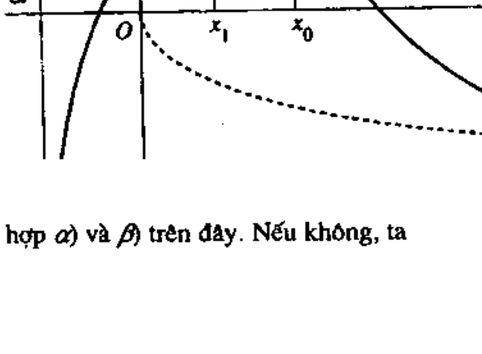
Vậy tồn tại $x_2 \in]-\infty;x_1[$ sao cho $\forall\ x \in\ ]-\infty;x_2]$, $y(x) < 0$. Ta có : $\forall x$ thuộc $]-\infty;x_2[$:

$$\int_{x}^{x_2} \frac{y'(t)}{(y(t))^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(x_2)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{1}{y(x_2)}$$

và $\displaystyle\int_{x}^{x_2} \frac{y'(t)}{(y(t))^2}\mathrm{d}t = \int_{x}^{x_2}\left(1 - \frac{t}{(y(t))^2}\right)\mathrm{d}t \geq \int_{x}^{x_2}\mathrm{d}t = x_2 - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ $\alpha \in \mathbf{R}$.

Theo 7.2.1 6) *a)* Mệnh đề,không tồn tại giới hạn hữu hạn tại α^+. Vì y tăng trên $]\alpha; x_1]$, nên ta kết luận $y \xrightarrow[\alpha+]{} -\infty$.



β) Trường hợp $y_0^2 - x_0 = 0$

Việc khảo sát tương tự đã làm ở trên, và các đường cong tích phân có cùng dáng điệu.

γ) Trường hợp $y_0^2 - x_0 > 0$

Một phần lập luận ở §α vẫn được sử dụng và chỉ ra: $\alpha \in \mathbf{R}$ và $\lim\limits_{\alpha+} y = -\infty$. Nếu tồn tại $x_1 \in I$ sao cho $y'(x_1) = 0$, ta lại gặp trường hợp *α)* và *β)* trên đây. Nếu không, ta có: $(\forall\ x \in I,\ y'(x) > 0)$, y tăng ngặt.

Giả sử $\beta = +\infty$.

Vì $(y(x))^2 = x + y'(x) > x$ và vì y tăng ngặt ta suy ra $y(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Vậy, tồn tại $x_3 \in]x_0; +\infty[$ sao cho: $\forall x \in [x_3; +\infty[$, $y(x) > 0$.

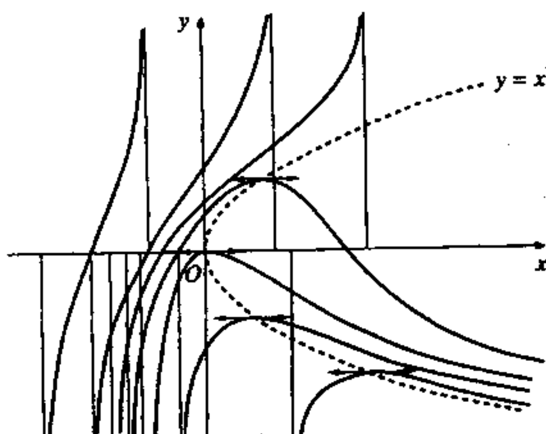
Với mọi $x \in [x_3; +\infty[$ ta có: $\displaystyle\int_{x_3}^{x} \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \frac{1}{y(x_3)} - \frac{1}{y(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{y(x_3)}$.

Nhưng mặt khác $x \in [x_3; +\infty[$, $y(x) = y(x_3) + \displaystyle\int_{x_3}^{x} y'(t)dt \geq y(x_3) + (x - x_3)y'(x_0)$.

Vậy $\dfrac{t}{(y(t))^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, từ đó ta dễ dàng suy ra:

$\displaystyle\int_{x_3}^{x} \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \int_{x_3}^{x} \left(1 - \frac{t}{(y(t))^2}\right) dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ $\beta \in \mathbb{R}$.



Dáng điệu mấy đường cong tích phân của các nghiệm cực đại của (E).

4) Khảo sát các nghiệm cực đại của hệ thống vi phân ôtônôm

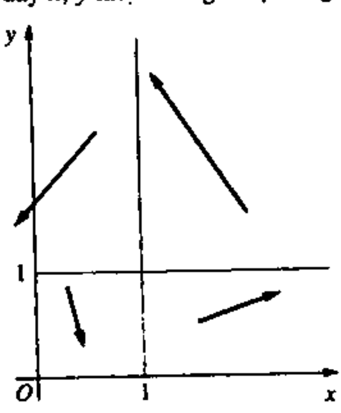
$$(S) \quad \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = (x-1)y. \end{cases}$$

Xét hệ thống vi phân ôtônôm (kiểu Volterra) (S) $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = (x-1)y \end{cases}$ được sử dụng trong việc mô hình hoá một hệ thống thú - mồi. Ở đây x, y nhận các giá trị trong $]0; +\infty[$.

Trước hết, ta nhận xét rằng (S) có một điểm cân bằng duy nhất (1,1) và cặp (1,1) (các ánh xạ hằng) là nghiệm của (S) trên $\mathbb{R}$.

Vì ánh xạ $\begin{array}{c} F:]0;+\infty[\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x(1-y), (x-1)y) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $]0; +\infty[^2$, định lý Cauchy - Lipschitz chỉ ra rằng, với bất kỳ $(x_0, y_0) \in]0; +\infty[^2$ tồn tại một và chỉ một quỹ đạo đi qua (x_0, y_0).

Vị trí điểm (x_0, y_0) đối với đường thẳng có phương trình $x = 1, y = 1$ của (phần tư) mặt



phẳng pha cho biết một vectơ tiếp xúc với quỹ đạo tại điểm đó. Nói cách khác, ta có thể sơ đồ hoá (nhờ các mũi tên) trường vectơ F.

Cho $(x_0, y_0) \in]0; +\infty[^2$; giả sử, chẳng hạn $x_0>1$ và $y_0>1$, và ký hiệu (x,y) là nghiệm cực đại của bài toán Cauchy tại (x_0, y_0), và I là khoảng xác định của nó (là khoảng mở).

Ký hiệu t_1 là mút phải của I ($t_1 \in]t_0; +\infty[$).

Ta sẽ chứng minh rằng quỹ đạo của (x, y) cắt đường thẳng $y=1$. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử :

$$\forall\, t \in [t_0, t_1[, \quad \begin{cases} x(t) \geq 1 \\ y(t) \leq 1. \end{cases}$$

Khi đó $\forall\, t \in [t_0, t_1[$, $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t)(1-y(t)) \geq 0 \\ y'(t) = (x(t)-1)\ y(t) \geq 0 \end{array}\right|$ vậy x và y đều tăng trên $[t_0, t_1[$.

Từ đó suy ra x có một giá trị giới hạn là λ_1 ($\lambda_1 \in [x_0; +\infty]$) tại t_1, và y có giới hạn μ_1 ($\mu_1 \in [y_0, 1]$) tại t_1.

Ta sẽ chứng minh $t_1 \neq +\infty$.

Ta có $\forall\, t \in [t_0, t_1[$, $y'(t) = (x(t)-1)\, y(t) \geq (x_0-1)y(t)$.

Ký hiệu z: $t \mapsto y(t)e^{-(x_0-1)t}$, ta suy ra

$$\forall\, t \in [t_0, t_1[, \quad z'(t) \geq 0.$$

Vậy $\qquad \forall\, t \in [t_0, t_1[. \quad z(t) \geq z(t_0),$

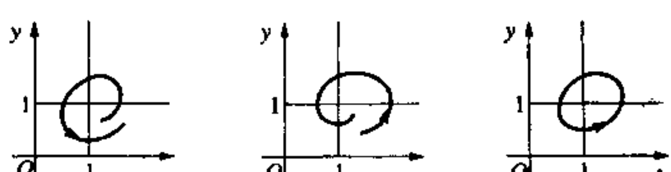
nghĩa là: $\qquad \forall t \in [t_0, t_1[, y(t) \geq z(t_0)e^{(x_0-1)t}.$

Vì $\forall\, t \in [t_0, t_1[$, $y(t) \leq 1$ nên ta có: $\forall\, t \in [t_0, t_1[, t \leq -\dfrac{\ln\ z(t_0)}{x_0-1}$, và vì vậy $t_1 \neq +\infty$.

Nếu $\lambda_1 \neq +\infty$, ta có thể bổ sung x và y do liên tục tại t_1 (bằng cách đặt $x(t_1) = \lambda_1$, $y(t_1) = \mu_1$) và khi ấy x' và y' có các giới hạn hữu hạn tại t_1 (tương ứng: $\lambda_1(1-\mu_1)$ và $(\lambda_1-1)\mu_1$), điều này mâu thuẫn với tính cực đại của (x, y). Vậy $\lambda_1 = +\infty$.

Nhưng khi đó $y' = (x-1)y \underset{t_1^-}{\longrightarrow} +\infty$, từ đó một cách cổ điển $y \underset{t_1}{\longrightarrow} +\infty$, mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ rằng quỹ đạo của (x, y) cắt đường thẳng $y=1$. Lập luận tương tự đối với các miền khác của U cho phép kết luận về dáng điệu sau đây của các quỹ đạo trong thời gian hữu hạn:



Mặt khác nếu (x, y) là nghiệm của (S) trên một khoảng I của $\mathbb{R}$ thì ta có

$$y'x(1-y) = x'y(x-1),$$

từ đó
$$\frac{1-y}{y}y' = \frac{x-1}{x}x'.$$

Lấy tích phân, rồi nâng lên luỹ thừa, ta có phương trình tọa độ của các quỹ đạo

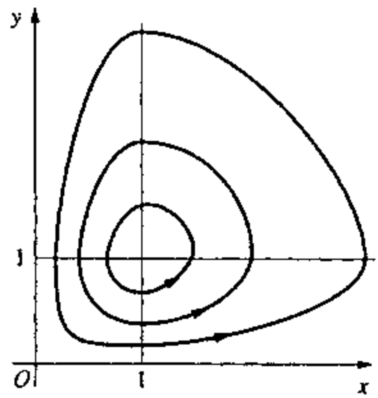
$$e^{x+y} = \lambda xy \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\psi: \;]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ sao cho
$u \mapsto \frac{e^u}{u}$

$$e^{x+y} = \lambda xy \Leftrightarrow \psi(x)\psi(y) = \lambda.$$

u	0		1		$-\infty$
$\psi'(y)$		$-$	0	$+$	
$\psi(y)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Vì với mọi (λ, x) cố định, phương trình $\psi(y) = \dfrac{\lambda}{\psi(x)}$ (ẩn là y) có nhiều nhất hai nghiệm và lưu ý đến việc khảo sát trước đây, mọi quỹ đạo buộc phải *đóng* và có dáng điệu như ở sơ đồ 3 phía trên.



Cho C là một quỹ đạo như vậy, giả sử tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

Xét số thực bé nhất $t_1 > t_0$ sao cho $\begin{cases} x(t_1) = x_0 \\ y(t_1) = y_0 \end{cases}$ và ký hiệu: $T = t_1 - t_0 > 0$.

Vì $(\tau_T x, \tau_T y)$ là nghiệm của bài toán Cauchy tại (x_0, y_0), áp dụng định lý Cauchy - Lipschitz, ta thu được

$(\tau_T x = x, \tau_T y = y)$, vậy $I = \mathbb{R}$ và x với y đều T- tuần hoàn.

Cuối cùng, tất cả các quỹ đạo đều đóng.
Dáng điệu các quỹ đạo, thu được bằng cách vẽ các đường đẳng mức của hàm số $(x, y) \mapsto \dfrac{e^{x+y}}{xy}$. Mỗi quỹ đạo đều đối xứng đối với đường phân giác thứ nhất.

Bài tập

◊ **7.2.1** Cho y là một nghiệm cực đại của $y' = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$. Chứng minh rằng khoảng xác định của y không bị chặn trên và $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

◊ **7.2.2** Giải các phương trình vi phân sau đây và vẽ dáng điệu các đường cong tích phân (biến là x, hàm chưa biết là y nhận các giá trị thực):

a) $xyy' - x^2 + y^2) = 0$ *b)* $x(x + 2y)y' - (x^2 + 2y + 3y^2) = 0$

c) $y' = \mathrm{ch}(x + y)$ *d)* $y' - y - y^2 = 0$

e) $xy' + y - xy^3 = 0$ *f)* $x^2 - xy + y^2 = 0$

g) $y' - \frac{y}{x} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0, x > 0$

h) $y'\sqrt{1+x^2} + 3y - y^2 - 2 = 0$

i) $y' + y + y^2 + 1 = 0$

j) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$

k) $y' - \ln y' - y = 0$

◊ **7.2.3** Xác định một (hoặc những) nghiệm cực đại của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^4 + y^4}{4x^3 y}, & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

trong đó ẩn y là biến thực.

◊ **7.2.4** Tìm tất cả các khoảng I và các bộ ba (x, y, z) là các ánh xạ từ I vào $\mathbb{R}$, khả vi sao cho:

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad z(t) \neq 0 \\ xy = z^2 \\ x'y' = z'^2 \end{cases}$$

◊ **7.2.5** Tìm tất cả các $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ và $f :]-\alpha;\alpha[\to \mathbb{R}$ liên tục, sao cho tồn tại một nguyên hàm F của f trên $]-\alpha; \alpha[$ thoả mãn :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) = (F(x))^2 + (F(-x))^2.$$

7.3 Hệ vi phân tuyến tính cấp 1

Ta nhắc lại là ký hiệu $\mathcal{L}(E)$ là chỉ tập hợp các tự đồng cấu của $\mathbb{K}$ - không gian vectơ E.

Vì E là một $\mathbb{K}$ - không gian vectơ định chuẩn có số chiều hữu hạn, nên mọi tự đồng cấu của E có tính liên tục (Tập 3, 1.3.2) Mệnh đề 1). $\mathbb{K}$ - không gian vectơ $\mathcal{L}(E)$ được trang bị chuẩn $|||\,.\,|||$ xác định bởi:

$$|||f||| = \operatorname*{Sup}_{x\in E-\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \quad \text{nếu } E \neq \{0\} \text{ (Tập 3, 1.2.6).}$$

7.3.1 Đại cương

◆ **Định nghĩa** Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, B: $I \to E$ là một ánh xạ liên tục, A: $I \to \mathcal{L}(E)$ là một ánh xạ liên tục. Ta gọi là **phương trình vi phân tuyến tính cấp 1**, PTVP : (E) $y'(t) = (A(t))(y(t)) + B(t)$, ẩn là một ánh xạ khả vi y: $J \to E$ mà J là một khoảng được chứa trong I, J bắt buộc có hay không tuỳ theo định nghĩa.

Với phương trình vi phân tuyến tính (E), ta liên kết phương trình vi phân

$$(\mathrm{E}_0):\quad y'(t) = (A(t))(y(t)).$$

(E) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính **có vế hai**.

(E_0) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính **không có vế hai** (hay **thuần nhất) tương ứng với** (E).

Nhận xét:

Với mỗi t của I, $A(t)$ là một ánh xạ tuyến tính từ E vào E. Vậy $(A(t))(y(t)) \in E$.
Để đơn giản, ta có thể ký hiệu $A(t).y(t)$ thay cho $(A(t))(y(t))$ mà ở các chỗ khác, ký hiệu này dùng để chỉ phép tính ma trận. ■

Thường gặp nhất, $E = \mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) và ta đồng nhất với mỗi t thuộc I, $A(t)$, $B(t)$, $y(t)$ với các ma trận tương ứng của chúng ứng với cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{K}^n$, cũng ký hiệu tương ứng là $A(t)$, $B(t)$, $y(t)$; Vậy $A(t) = \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $B(t) = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $y(t) = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Bằng cách ký hiệu $((a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n} = A(t)$, $((b_i(t))_{1\le i\le n} = B(t)$, $((y_i(t))_{1\le i\le n} = y(t)$ phương trình vi phân tuyến tính (E) được viết lại :

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ & \vdots & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

tức là $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\quad y'_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j(t) + b_i(t)$.

Hàng cuối cùng này được gọi là **hệ vi phân tuyến tính cấp 1**.

Theo Tập 3, 2.1.5, Mệnh đề 5) để A và B liên tục, điều kiện cần và đủ là với mỗi (i, j) thuộc $\{1, ..., n\}^2$ a_{ij} và b_i liên tục.
Khi tất cả các ánh xạ a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ đều là ánh xạ không đổi, thì ta nói đó là **hệ vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số không đổi** (xem tiếp 7.3.6).

Bài tập

◊ **7.3.1 Bài tập ôn tập § 11.1 Tập 2. phương trình vi phân tuyến tính vô hướng cấp 1**

Giải các PTVP sau (biến x, hàm ẩn là y: $I \to \mathbb{R}$, I là khoảng mở nào đó):

a) $y' - y\ln x - e^{x\ln x} = 0$

b) $(1+x^2)\,y' + xy - 1 = 0$

c) $(e^x + e^{2x})y' + (2e^x + e^{2x})y + 1 = 0$

d) $xy' + 2y - \dfrac{2}{1+x^2} = 0$

e) $2xy' + y - \dfrac{1}{1+x} = 0$

f) $2x^2\,y' + y - 1 = 0$

g) $x(x+1)y' - y + 1 = 0$

h) $(x^2 - 4)y' + 2xy + 6x = 0$

i) $|x|\,y' + (x-1)y - x^2 = 0$

j) $|x(x-1)|\,y' + (y - x) = 0$

k) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$

l) $(e^{-x} - \cos x)\,y' + (\sin x - \cos x)y - 1 = 0$

◊ **7.3.2** Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ y: $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ duy nhất sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in\,]0;+\infty[, \quad xy'(x) - (2x^2+1)y(x) - x^2 = 0 \\ y \text{ có một giới hạn hữu hạn tại } +\infty \end{cases}$$

và biểu diễn $y(x)$ bằng một tích phân.

◊ **7.3.3** Cho $\alpha \in\,]1; +\infty[$ và phương trình vi phân (E_α) $y' - y = x^\alpha$, ẩn $y :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng với mọi λ thuộc $\mathbb{R}$, tồn tại một và chỉ một f_λ của (E_α) trên $]0; +\infty[$ sao cho $e^{-x} f_\lambda(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \lambda$.

b) Biện luận theo số thực λ về sự tồn tại của một số thực $x>0$ sao cho $f'_\lambda(x) = 0$.

◊ **7.3.4** Tìm tất cả các ánh xạ f: $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho:

$$\forall\, (x, y) \in\,]0; +\infty[^2, \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) - f(x).$$

◊ **7.3.5*** *a)* Cho $\alpha \in \mathbb{C}$ sao cho $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^1, giả sử rằng $f' + \alpha f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Chứng minh $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

b) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^n, D là toán tử đạo hàm (D: $\varphi \mapsto \varphi'$), $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ bậc n, chuẩn hoá, mà các không điểm có phần thực < 0; ta giả sử $(P(D))(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Chứng minh $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Ví dụ: Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^2 và nếu $f'' + f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$, thì $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

7.3.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy trên toàn khoảng I

◆ **Định lý (Định lý Cauchy - Lipschitz tuyến tính)**

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $A: I \to \mathcal{L}(E)$ liên tục, $B: I \to E$ liên tục, $(t_0, y_0) \in I \times E$. Bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

có một và chỉ một nghiệm trên I, và mọi nghiệm của (C) là thu hẹp của nghiệm đó trên I.

Chứng minh : (có thể bỏ qua khi đọc lần đầu):

1) Sự tồn tại

Ta sẽ xây dựng một nghiệm của (C) trên I, như giới hạn của một dãy hàm $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều địa phương.

Xét $z_0: I \to E$ và với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n: I \to E$ xác định bởi hệ truy hồi

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall t \in I,\quad z_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)z_n(s) + B(s))ds$$

(như đã chứng minh trong định lý Cauchy - Lipschitz, 7.2.1.5).

Trước hết, chú ý rằng, một phép truy hồi đơn giản chỉ ra là mỗi z_n đều được xác định và liên tục trên I.

- Cho K là một khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$ được chứa trong I và chứa điểm t_0, λ là độ dài của K. Vì ánh xạ $A : I \xrightarrow[t\mapsto A(t)]{} \mathcal{L}(E)$ liên tục nếu A bị chặn trên K, vậy tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho $\forall t \in K$, $|||A(t)||| \le M$.

Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và mọi $t \in K$:

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (A(s)z_n(s) - A(s)z_{n-1}(s))ds \right\| \le \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} \| A(s)(z_n(s) - z_{n-1}(s)) \| ds \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} ||| A(s) ||| \,.\, \| z_n(s) - z_{n-1}(s) \| ds \right| \\
&\le M \left| \int_{t_0}^{t} \left\| z_n(s) - z_{n-1}(s) \right\| ds \right|.
\end{aligned}$$

Đặt $M_1 = \operatorname*{Sup}_{s\in K} \left\| z_1(s) - z_0(s) \right\|$, nó tồn tại vì $z_1 - z_0$ liên tục trên bộ phận compăc K.

Phép truy hồi đơn giản cho thấy: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in K$,

$\|z_{n+1}(s)-z_n(s)\| \le \dfrac{M^n M_1}{n!}|t-t_0|^n \le \dfrac{(\lambda M)^n M_1}{n\ !}$. Vì dãy số $\sum_{n\ge 0}\dfrac{(\lambda M)^n}{n\ !}$ hội tụ nên dãy các ánh xạ $\sum_{n\ge 0}(z_{n+1}-z_n)$ hội tụ theo chuẩn. Vì các z_n nhận các giá trị trong một không gian vectơ tuyến tính định chuẩn có số chiều hữu hạn nên dãy các ánh xạ $\sum_{n\ge 0}(z_{n+1}-z_n)$ hội tụ đều trên K (4.3.1 Định lý 2). Vì đó là một dãy lồng nhau nên suy ra $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên K.

Như vậy, ta đã chứng minh $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều địa phương trên I, vậy hội tụ đơn giản trên I đến một ánh xạ, ký hiệu là z.

- Vì $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều địa phương tới z trên I và vì mỗi z_n liên tục trên I nên z liên tục trên I (4.3.3, Hệ quả 2). Với các ký hiệu ở trên, ta có, với mỗi n của $\mathbb{N}$ và mỗi t thuộc K:

$$\begin{aligned}\|A(t)z_n(t)+B(t)) &- (A(t)z(t)+B(t)\| \\ &= \|A(t)(z_n(t)-z(t))\| \le \|A(t)\|.\|z_n(t)-z(t)\| \\ &\le M\|(z_n-z)|_K\|_\infty .\end{aligned}$$

Vì $\|(z_n-z)|_K\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$, suy ra dãy $(t\mapsto A(t)z_n(t)+B(t))_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên K tới $t\mapsto A(t)z(t)+B(t)$.

Theo (4.3.4 Định lý) ta suy ra, với mọi t thuộc I :

$$\int_{t_0}^{t}(A(s)z_n(s)+B(s))\mathrm{d}s \xrightarrow[n\,\infty]{} \int_{t_0}^{t}(A(s)z(s)+B(s))\mathrm{d}s .$$

Nhưng mặt khác, với mọi t thuộc I:

$$\int_{t_0}^{t}(A(s)z_n(s)+B(s))\mathrm{d}s = z_{n+1}(t)-y_0 \xrightarrow[n\,\infty]{} z(t)-y_0 .$$

Từ đó : $\forall t\in I, \quad z(t) = y_0+\int_{t_0}^{t}(A(s)z(s)+B(s))\mathrm{d}s$.

- Vì ánh xạ $t\mapsto \int_{t_0}^{t}(A(s)z(s)+B(s))\mathrm{d}s$ thuộc lớp C^1 trên I và đạo hàm là $t\mapsto A(t)z(t)+B(t)$ nên ta kết luận z khả vi trên I và $\forall t\in I, z'(t)=A(t)z(t)+B(t)$

Như vậy, z là nghiệm của bài toán Cauchy(C) và z được xác định trên I.

2) Sự duy nhất

Ký hiệu z là nghiệm của (E) trên I được xác định như điểm 1) ở trên, cho y là một nghiệm của bài toán Cauchy (C), ta ký hiệu I_1, là khoảng xác định của y và

$$\delta:\ \begin{array}{l} I_1\to E \\ t\mapsto y(t)-z(t)\end{array}$$

Khi đó với mọi t_1 thuộc I_1: $\delta(t_1) = y(t_1) - z(t_1) = \int_{t_0}^{t_1}(y'(t) - z'(t))\mathrm{d}t$

$$= \int_{t_0}^{t_1} A(t)(y(t) - z(t))\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} A(t)\delta(t)\mathrm{d}t.$$

Ta chứng minh bằng truy hồi theo n;

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall t_1 \in I_1,\ \|\delta(t_1)\| \le \frac{1}{n!} M^n (\sup_{u\in(t_0,t_1)} \|\delta(u)\|)|t_1 - t_0|^n.$$

- Với $n = 0$ tính chất đó là tầm thường.
- Giả sử tính chất đó đúng với n thuộc $\mathbb{N}$, cho $t_1 \in I_1$ và giả sử chẳng hạn $t_0 \le t_1$

(trường hợp $t_1 \le t_0$ làm tương tự). Ta có:

$$\|\delta(t_1)\| = \left\|\int_{t_0}^{t_1} A(t)\delta(t)\mathrm{d}t\right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \|A(t)\|\|\delta(t)\|\mathrm{d}t.$$

Theo giả thiết truy hồi, với mọi t thuộc $[t_0; t_1]$ ta có :

$$\|\delta(t)\| \le \frac{1}{n!} M^n (\sup_{u\in(t_0,t)} \|\delta(u)\|)(t_1 - t_0)^n \le \frac{1}{n!} M^n (\sup_{u\in(t_0,t_1)} \|\delta(u)\|)(t_1 - t_0)^n.$$

Từ đó:

$$\|\delta(t_1)\| \le \int_{t_0}^{t_1} M \frac{1}{n!} M^n (\sup_{u\in(t_0,t_1)} \|\delta(u)\|)(t - t_0)^n\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} M^{n+1} (\sup_{u\in(t_0,t_1)} \|\delta(u)\|)(t_1 - t_0)^{n+1},$$

điều đó chứng minh tính chất đó đúng đối với $n + 1$.

Cho $n \to \infty$, ta thu được $\delta(t)=0$, điều đó chứng tỏ $y = z|_{I_1}$.

Như vậy, mọi nghiệm của (C) đều là thu hẹp của z. Trường hợp đặc biệt, nếu y là nghiệm của (C) và y_1 được xác định trên I thì $| y_1 - z|_I = z$ ■.

Điều này chứng tỏ tính duy nhất nghiệm của (C) trên I.

Nhận xét :

1) Định lý trên có thể được suy ra từ việc chứng minh định lý Cauchy - Lipschitz (7.2.1 5) nhưng phải làm thích hợp khi I là một khoảng không mở (vì khi đó $I \times E$ không mở trong $\mathbb{R} \times E$).

2) Ta vừa thấy rằng mọi nghiệm cực đại của bài toán Cauchy(C) đều được xác định trên I. Vì lý do trên trong phần tiếp của §7.3 này ta chỉ chú ý đến các nghiệm của (E) trên I.

Trong các §7.3.3 đến §7.3.5, ta giữ nguyên các ký hiệu ở 7.3.1 Định nghĩa; tức là I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $A: I \to \mathcal{L}(E)$ liên tục, $B: I \to E$ liên tục.

Ta ký hiệu:

- $\mathcal{S}_0$ là tập hợp tất cả các nghiệm của (E_0): $y' = Ay$ trên I
- $\mathcal{S}$ là tập hợp tất cả các nghiệm của (E) : $y' = Ay + B$ trên I.

7.3.3 Cấu trúc của $\mathcal{S}_0$ và $\mathcal{S}$

◆ **Mệnh đề 1**

Với bất kỳ t_0 thuộc I, ánh xạ $\theta_{t_0} : \underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S} \to E}$ là song ánh.

Chứng minh:

1) Với mọi y_0 thuộc E, theo định lý Cauchy - Lipschitz tuyến tính (7.3.2 Định lý) tồn tại $y \in \mathcal{S}$ sao cho $y(t_0) = y_0$, vậy θ_{t_0} là toàn ánh.

2) Cho $y, z \in \mathcal{S}$ sao cho $y(t_0) = z(t_0)$, thì y và z đều là nghiệm của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = Ay + B \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ trên I, theo (7.3.2 Định lý) $y = z$, vậy θ_{t_0} là đơn ánh. ■

◆ **Mệnh đề 2**

1) Tập hợp $\mathcal{S}_0$ các nghiệm của (E_0) là một $\mathbb{K}$ - không gian vectơ, cùng số chiều với E và ánh xạ $\underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S} \to E}$ là một đẳng cấu của $\mathbb{K}$- không gian vectơ.

2) Tập hợp $\mathcal{S}$ các nghiệm của (E) là một $\mathbb{K}$- không gian afin có phương $\mathcal{S}_0$, và ánh xạ $\underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S} \to E}$ là một đẳng cấu của các không gian afin (E được trang bị cấu trúc afin chính tắc liên kết với cấu trúc vectơ của E).

Chứng minh:

1) • $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$ vì $0 \in \mathcal{S}_0$

• Cho $\lambda \in \mathbb{K}$, $y, z \in \mathcal{S}_0$; ta có:

$$(y + \lambda z)' = y' + \lambda z' = Ay + \lambda Az = A(y + \lambda z).$$

• Rõ ràng là $\varphi_{t_0} : \underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S} \to E}$ là tuyến tính, và ta đã thấy (Mệnh đề 1) rằng φ_{t_0} là song ánh.

2) • $\mathcal{S} \neq \varnothing$ vì $\theta_{t_0} : \underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S} \to E}$ là song ánh và $E \neq \varnothing$.

• Cho $\lambda \in \mathbb{K}$; $y, z \in \mathcal{S}$; ta có:

$$(y + \lambda(z - y))' = y' + \lambda(z' - y') = Ay + B + \lambda A(z - y) = A(y|\lambda(z - y)) + B$$

• Rõ ràng là $\theta_{t_0} : \underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S} \to E}$ là afin và ánh xạ tuyến tính liên kết là: $\varphi_{t_0} : \underset{y \mapsto y(t_0)}{\mathcal{S}_0 \to E}$ vì :

$$\forall (y, z) \in \mathcal{S}^2, \theta_{t_0}(y) - \theta_{t_0}(z) = y(t_0) - z(t_0) = (y - z)(t_0) = \varphi_{t_0}(y - z).$$

Và theo Mệnh đề 1, θ_{t_0} là song ánh. ■

Nói cách khác: **nghiệm tổng quát** của (E) là tổng của một **nghiệm riêng** của (E) và **nghiệm tổng quát** của (E_0). Như vậy, ta thấy rằng việc giải (E) dẫn tới việc giải (E_0) và việc xác định ít nhất một nghiệm của (E).

7.3.4 Giải (E_0)

Ký hiệu $n = \dim(E)$.

1) Vì $\mathcal{S}_0$ là một $\mathbb{K}$ - không gian vectơ có số chiều n, nên nếu ta chọn một họ độc lập $(y_1, ..., y_n)$ gồm n phần tử của $\mathcal{S}_0$, thì nghiệm tổng quát của (E_0) là một tổ hợp tuyến tính của $y_1, ..., y_n$ nghĩa là: $\mathcal{S}_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i;\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \notin \mathbb{K}^n \right\}$.

VÍ DỤ:

Giải hệ vi phân: (E_0) $\begin{cases} x' = \dfrac{tx - y}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{x = ty}{1+t^2} \end{cases}$, ẩn là (x, y): $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Ta chú ý rằng Y_1: $t \mapsto (1,t)$ và Y_2: $t \mapsto (t,-1)$ là các nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$ và lập thành một họ độc lập. Vậy, tập hợp các nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$ là:

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\lambda + \mu t, \lambda t - \mu) \end{matrix};\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Phương pháp tổng quát

Cho $p \in \{1, ..., n-1\}$. *Giả sử* đã biết các gnhiệm $y_1, ..., y_p$ của (E_0) trên I lập thành một họ độc lập và *giả sử* tồn tại $e_{p+1}, ..., e_n \in E$ sao cho với mọi t thuộc I, $(y_1(t), ..., y_p(t), e_{p+1}, ..., e_n)$ lập thành một cở sở của E. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một nghiệm y của (E_0) trên I có dạng $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$ (trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_n$: $I \to \mathbb{K}$ là các ánh xạ cần tìm, khả vi trên I) sao cho $(y_1, ..., y_p, y)$ là một họ độc lập.

Vì $(e_{p+1}, ..., e_n)$ là độc lập trong E, nên theo định nghĩa về cở sở không đầy đủ, tồn tại $e_1, ..., e_p \in E$ sao cho $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của E. Với $t \in I$ ta xét các thành phần của các $y_i(t)$ $(1 \le i \le p)$ và của $A(t)$:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., p\}, & y_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ki}(t) e_k \\ \forall j \in \{1, ..., n\}, & A(t) e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(t) e_k, \end{cases}$$

trong đó các η_{ki} (tương ứng a_{kj}) là các ánh xạ đã biết và khả vi (tương ứng, liên tục).

Ta có: $(\forall\, t \in I,\ y'(t) = A(t).y(t))$

$$\Leftrightarrow (\forall\, t \in I,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(t) y'_i(t) + \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i(t) y_i(t) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda'_i(t) e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_j(t) A(t) y_i(t) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i(t) A(t) e_i\ )$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \forall k \in \{1,\dots,p\}, \forall t \in I,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda'_i(t)\eta_{ki}(t) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i(t) a_{ki}(t) \\ \forall k \in \{p+1,\dots,n\}, \forall t \in I,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda'_i(t)\eta_{ki}(t) + \lambda'_k(t) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i(t) a_{ki}(t). \end{array}\right.$$

Trong p phương trình đầu, có thể biểu diễn $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p$ bằng hàm của $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, vì ma trận tác động lên các $\lambda'_i(t)$ $(1 \le i \le p)$ là khả đảo, có định thức bằng $\det_B((y_1(t), \dots, y_p(t), e_{p+1}, \dots, e_n)$. Thay các biểu thức của $\lambda'_1, \dots, \lambda'_i$ rút ra từ p phương trình đầu vào $(n - p)$ phương trình sau, ta thu được một hệ vi phân ẩn là $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$, có $n - p$ phương trình (và $n - p < n$).

Giả sử ta có thể tìm được một nghiệm $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \neq 0$ của hệ vi phân này, ta suy ra được $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p$ rồi $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ bằng cách lấy nguyên hàm, và như vậy có một nghiệm y của (E_0). Vì $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \neq 0$, nên rõ ràng là $(y_1, \dots, y_p, y)$ độc lập.

Lặp lại các phương pháp trên (nếu có thể) ta thu được một cơ sở của $\mathcal{S}_0$.

Trong thực hành, thường $n = 2$, $p = 1$ và việc khảo sát lý thuết ở trên trở nên đơn giản một cách rõ rệt.

VÍ DỤ:

Giải hệ phương trình vi phân: $(E_0)\ \begin{cases} x'(t) = -x(t)\tan t + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t)\tan t \end{cases}$,

ẩn là (x, y): $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\ \to \mathbb{R}$.

Một nghiệm hiển nhiên được cho bởi $(x(t) = 1, y(t) = \tan t)$.

Vì $\forall t \in I$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tan t & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nên ta tìm một nghiệm (x, y) của (E_0) dưới dạng

$(x(t), y(t)) = \lambda(t)(1, \tan t) + \mu(t)\,(0,1)$,

nghĩa là: $\begin{cases} x(t) = \lambda(t) \\ y(t) = \lambda(t)\tan t + \mu(t) \end{cases}$.

Thay vào (E_0) ta có : $\begin{cases} \lambda'(t) = \mu(t) \\ \mu(t) = 0 \end{cases}$,

chẳng hạn, nếu ta đặt $\lambda(t) = t$, $\mu(t) = 1$. Khi đó (x, y): $t \mapsto (t, 1 + t.\tan t)$ là nghiệm của (E_0) và lập với nghiệm có được từ đầu $t \mapsto (1, \tan t)$ một hệ độc lập.

Cuối cùng: $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + \mu t,\ \ \lambda \tan t + \mu(1 + t.\tan t)) \end{cases};\ \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

7.3.5 Giải (E)

Ta đã thấy rằng (xem 7.3.3), để giải (E), thì điều kiện đủ là giải (E_0) và tìm một nghiệm riêng của (E). Giả sử ta đã giải được (E_0).

1) Có thể xảy ra là (E) có một nghiệm riêng là y_1, khi đó $\mathcal{S} = \{y_1 + y_0;\ y_0 \in \mathcal{S}_0\}$.

VÍ DỤ:

Giải hệ vi phân (E) $\begin{cases} (1+t^2)x' = tx - y - t \\ (1+t^2)y' = x + ty - 1 \end{cases}$, ẩn (x, y): $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Ta đã giải hệ không có vế hai:

$$(E_0) \quad \begin{cases} (1+t^2)x' = tx - y \\ (1+t^2)y' = x + ty \end{cases}$$

(xem 7.3.4, Ví dụ). Mặt khác, khi tìm một nghiệm (x, y) của (E), sao cho x và y là hàm đa thức có bậc ≤ 1, ta thấy $(x, y) \mapsto (0, 1)$ là nghiệm của (E). Vậy:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (1 + \lambda + \mu t,\ \ \lambda t - \mu) \end{cases};\ \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Phương pháp tổng quát: phương pháp biến thiên hằng số

Ký hiệu $(y_1, ..., y_n)$ là một cơ sở của $\mathcal{S}_0$.

◆ **Mệnh đề** Đối với mỗi ánh xạ $z : I \to E$, tồn tại $(u_1, ..., u_n) \in (\mathbb{K}^I)^n$ duy nhất sao cho $z = \sum_{i=1}^{n} u_i y_i$, hơn nữa, nếu z thuộc lớp C^0 (tương ứng C^1) trên I, thì $u_1, ..., u_n$ cũng thuộc lớp C^0 (tương ứng C^1) trên I.

Chứng minh:

Đặt $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của E; $z_1, ..., z_n$: $I \to \mathbb{K}$ là các hàm thành phần của z đối với $\mathcal{B}$: $\forall t \in I,\quad z(t) = \sum_{i=1}^{n} z_i(t) e_i$.

Ký hiệu $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$, $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$; $W(t)$ là ma trận của $(y_1(t), ..., y_n(t))$ đối với cơ sở $\mathcal{B}$; $W(t)$ được gọi là **ma trận Wronsky** của $(y_1, ..., y_n)$. Khi đó đối với mỗi t thuộc I:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) y_i(t) \Leftrightarrow Z(t) = W(t).U(t).$$

Đối với mỗi t thuộc I, vì ánh xạ $y \mapsto y(t)$ là một đẳng cấu của $\mathcal{S}_0$ trên E và $(y_1, ..., y_n)$ là một cơ sở của $\mathcal{S}_0$, nên $(y_1(t),..., y_n(t))$ là một cơ sở của E, và vì vậy $W(t) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

Do đó ta có : $$z = \sum_{i=1}^{n} u_i y_i \Leftrightarrow (\forall t \in I, \quad U(t) = W(t)^{-1}.Z(t)),$$

điều đó chứng tỏ tính tuyến tính và duy nhất của các ánh xạ $u_1, ..., u_n$.

Hơn nữa, $u_1(t), ..., u_n(t)$ được biểu diễn dưới dạng tổng của các tích các phần tử của $(W(t))^{-1}$ và của $Z(t)$. Vậy $u_1, ..., u_n$ đều thuộc lớp C^0 (tương ứng C^1) khi $z_1, ..., z_n$ đều thuộc lớp C^0 (tương ứng C^1), vì các hệ số của $(W(t))^{-1}$ đều thuộc lớp C^1.

◆ **Định lý (Phương pháp biến thiên hằng số)**

Giả sử đã biết một cơ sở $(y_1, ..., y_n)$ thuộc $\mathcal{S}_0$.

Khi đó tồn tại ít nhất một nghiệm y của (E) có dạng $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$,

trong đó các $\lambda_i (1 \le i \le n)$ là ánh xạ $I \to \mathbb{K}$ thuộc lớp C^1.

Chứng minh:

Theo Mệnh đề trên, tồn tại $u_1, ..., u_n: I \to \mathbb{K}$ liên tục sao cho $B = \sum_{i=1}^{n} u_i y_i$. Ta tìm một nghiệm của E dưới dạng $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, trong đó các $\lambda_i: I \to \mathbb{K}$ giả sử là khả vi.

Ta có: $$y' = Ay + B \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda y'_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A y_i + B$$
$$\Leftrightarrow (\forall i \in \{1,...,n\}, \ \lambda'_i = u_i).$$

Lấy nguyên hàm của các u_i là đủ để kết luận.

Nhận xét:

1) Trong thực tế, thường không phải phân tích $\mathcal{B}$ theo các y_i.

2) Phương pháp biến thiên hằng số không chỉ cho một nghiệm của (E) mà cho tất cả các nghiệm của (E).

VÍ DỤ :

Giải hệ vi phân: (E) $\begin{cases}(t^2+1)x' = tx-y+2t \\ (t^2+1)y' = x+ty-1\end{cases}$, ẩn (x, y): $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Ta đã giải được hệ không có vế hai tương ứng (xem 7.3.4, Ví dụ). Một cơ sở của S là: $((t \mapsto (1, t)), (t \mapsto (t, -1)))$. Theo phương pháp biến thiên hằng số, ta tìm nghiệm của E dưới dạng: $(x(t), y(t)) = \lambda(t)(1, t) + \mu(t)(t, -1)$,

nghĩa là: $\begin{cases}x(t) = \lambda(t)+t\mu(t) \\ y(t) = t\lambda(t)-\mu(t).\end{cases}$

Thay vào (E), ta có: $\begin{cases}(t^2+1)(\lambda'(t)+t\mu'(t)) = 2t \\ (t^2+1)(t\lambda'(t)-\mu'(t)) = -1.\end{cases}$

Giải hệ hai phương trình hai ẩn này, ta được:

$$\lambda'(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}, \quad \mu'(t) = \frac{2t^2+1}{2(t^2+1)^2}.$$

Nhờ phép tính các nguyên hàm, ta có thể lấy :

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2(t^2+1)}, \quad \mu'(t) = \frac{3}{2}\mathrm{Arctan}\, t - \frac{1}{2(t^2+1)}.$$

Như vậy, ta thu được một nghiệm riêng của (E): $\begin{cases}x(t) = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\,\mathrm{Arctan}\, t \\ y(t) = -\frac{3}{2}\mathrm{Arctan}\, t\end{cases}$, từ đó

có nghiệm tổng quát của (E): $\begin{cases}x(t) = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\,\mathrm{Arctan}\, t+\lambda+\mu t \\ y(t) = -\frac{3}{2}t\,\mathrm{Arctan}\, t+\lambda t-\mu\end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

7.3.6 Hệ vi phân tuyến tính cấp 1 hệ số hằng số

Bây giờ ta xét phương trình vi phân tuyến tính (E) $X'(t) = AX(t)+B(t)$,
trong đó $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ và $B: I \to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ liên tục và: (E_0) $X'(t) = AX(t)$

là hệ vi phân không vế hai.
Trong §7.3.6 này ta sẽ cần đến vài kết qủa của đại số tuyến tính (xem các Tập 5 và 6). Trước hết, ta xét trường hợp A có thể chéo hoá, sau đó nếu A không thể chéo hoá thì bằng cách sử dụng $\mathbb{C}$ ta có thể sử dụng một phép chéo hoá. Cuối cùng, ta sẽ nghiên cứu một cách vắn tắt khái niệm hàm mũ ma trận.

1) Trường hợp A khả chéo

a) Giải ($\mathbf{E}_0$)

Ta ký hiệu $\mathbf{D}_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận chéo có hệ số trong $\mathbb{K}$. Vì A khả chéo trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, nên tồn tại $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\in \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$ (trong đó $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ là các trị riêng của A) và $P\in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ (mà các cột lập thành một cơ sở gồm các vectơ riêng của A tương ứng với $\lambda_1,\dots,\lambda_n$) sao cho $A = PDP^{-1}$. Khi đó:

$$(\mathrm{E}_0) \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

Ký hiệu $Y = P^{-1}X$. Vì P không đổi (nghĩa là không phụ thuộc t) nên ta có (xem Tập 3, 2.2.7, Mệnh đề): $Y' = P^{-1}X'$. Vậy $(\mathrm{E}_0) \Leftrightarrow Y' = DY$.

Bằng cách ký hiệu $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=Y$, ta có: $(\mathrm{E}_0) \Leftrightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},\ \ y'_i=\lambda_i y_i$

$$\Leftrightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},\ \ \exists c_i\in\mathbb{K},\ \forall t\in I,\ y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}.$$

Trở lại với $X(t)$, ký hiệu $V_1,\dots,V_n$ là các cột của P:

$$X = PY = (V_1|\dots|V_n)\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_n t}\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}V_i.$$

Tóm lại :

◆ **Định lý** Cho $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ khả chéo. Nghiệm tổng quát của (E_0): $X' = AX$ (ẩn là $X\colon I\to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) được xác định bởi:

$$\forall\, t\in I,\ \ X(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}V_i,$$

trong đó: $\begin{cases}\lambda_1,\dots,\lambda_n & \text{là các trị riêng của } A\\ V_1,\dots,V_n & \text{là các vectơ riêng của } A \text{ ứng với } \lambda_1,\dots,\lambda_n\\ c_1,\dots,c_n\in\mathbb{K} & \text{bất kỳ.}\end{cases}$

Nhận xét:

1) Việc tính P^{-1} là không cần đối với việc giải (E_0).

2) Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ và nếu $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ là khả chéo trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ mà không khả chéo trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, thì theo phương pháp trên ta có các nghiệm của (E) nhận các giá trị phức rồi từ đó ta suy ra nghiệm nhận giá trị thực.

VÍ DỤ:

Giải $X' = AX$, với:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ẩn $X : \mathbb{R} \to \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Ta tính đa thức đặc trưng của A, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2+1)$. Ma trận vuông A, cấp 4, có 4 giá trị riêng phức $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ phân biệt, vậy nó khả chéo trong $M_4(\mathbb{C})$. Ta tính các vectơ riêng tương ứng

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Theo định lý trên, ta suy ra nghiệm tổng quát nhận giá trị trong $\mathbb{C}$:

$$\forall t \in \mathbf{R},\ X(t) = \sum_{k=1}^{4} c_k e^{\lambda_k t} V_k = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it} \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 i e^{it} - c_4 i e^{-it} \end{pmatrix}, (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{C}^4.$$

Các nghiệm nhận giá trị thực thu được bằng các lấy c_1, c_2 thực và c_3, c_4 là hai số phức liên hợp. Ta có:

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + \alpha\cos t + \beta\sin t \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ -\alpha\sin t + \beta\cos t \end{pmatrix}, (c_1, c_2, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 .$$

***b) Giải* (E)**

Theo 7.3.3, ta tìm một nghiệm riêng của (E) là đủ.

α) có thể (E) có một nghiệm hiển nhiên.

VÍ DỤ:

Hệ vi phân:
$$\begin{cases} x' = x + y - z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = -x + y + z - 1 \end{cases}$$

có một nghiệm hiển nhiên ($x = 1$, $y = 1$, $z = 1$).

β) **Nguyên lý chồng chất nghiệm**

Ta giả sử $B = B_1 + ... + B_N$, trong đó, $B_1, ..., B_N: I \to E$ liên tục và "đơn giản hơn" B. Nếu với mỗi $i \in \{1, ..., N\}$ ta biết một nghiệm X_i của hệ vi phân $X' = AX + B_i$ thì $\sum_{i=1}^{N} X_i$ là nghiệm của $X' = AX + B$. Điều này được suy ra một cách tầm thường từ tính tuyến tính của : $\quad X \mapsto X' - AX$.

γ) **Trường hợp vế hai là một hàm mũ-đa thức vectơ**

Giả sử tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$, $m_1, ..., m_N \in \mathbb{K}$, $p_1, ..., p_N \in \mathbb{K}[X]$, $U_1, ..., U_N \in E$ sao cho:

$\forall t \in I, \quad B(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{m_k t} P_k(t) U_k$ (ta nói B là một **hàm mũ-đa thức vectơ**, điều này mở rộng khái niệm hàm mũ-đa thức định nghĩa trong Tập 2, 11.2.1.

Với mỗi k thuộc $\{1, ..., N\}$ ta xét hệ vi phân

$(\mathrm{E}_k) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t) + e^{m_k t} P_k(t) U_k$.

Ta thực hiện phép biến đổi hàm xác định bởi

$$\forall t \in I, \quad Z(t) = e^{-m_k t} X(t) ,$$

$Z: I \to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ là ẩn mới; X là nghiệm của (E_k) trên I khi và chỉ khi Z là nghiệm của (F_k) trên I, trong đó $\quad (F_k) \qquad \forall t \in I, \ Z'(t) = (A - m_k I_n)Z(t) + P_k(t)U_k$.

Bằng cách chéo hoá A (ký hiệu ở α)) và đặt $W = P^{-1}Z$, dẫn ta tới việc giải:

$$\forall t \in I, \ W'(t) = (D - m_k \mathrm{I}_n)W(t) + P_k(t)P^{-1}U_k.$$

Sau đó, ký hiệu: $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = W$ và $\begin{pmatrix} p_{k1}(t) \\ \vdots \\ p_{kn}(t) \end{pmatrix} = P_k(t)P^{-1}U_k$, ta có :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \ \forall t \in I, \ w'_i(t) = (\lambda_i - m_k)w_i(t) + p_{ki}(t).$$

- Trong thực tế, ta giải từng phương trình trong các phương trình tuyến tính vô hướng cấp 1 vừa thu được, từ đó ta được các w_i $(1 \le i \le n)$, rồi tìm Z nhờ có $Z = PW$. Cuối cùng, áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm (xem *β)*).
- Ta tiếp tục nghiên cứu lý thuyết phương trình vi phân vô hướng cấp 1:

$$\forall t \in I, \ w'_i(t) = (\lambda_i - m_k)w_i(t) + p_{ki}(t)$$

có ít nhất 1 nghiệm đa thức có bậc : $\begin{cases} \deg(p_{ki}) & \text{nếu} \quad m_k \ne \lambda_i \\ 1 + \deg(p_{ki}) & \text{nếu} \quad m_k = \lambda_i \end{cases}$.

Từ đó suy ra rằng (E) có ít nhất một nghiệm mũ - đa thức vectơ

$X : t \mapsto \sum_{k=1}^{N} e^{m_k t} Q_k(t) U_k$, trong đó $U_1, ..., U_N \in E$ và với mỗi k thuộc $\{1, ..., N\}$, Q_k là một đa thức có bậc:

$$\leq \begin{cases} \underset{1\leq i\leq N}{\operatorname{Max}}(\deg P_i) & \text{nếu} \quad m_k \neq \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \\ 1+\underset{1\leq i\leq N}{\operatorname{Max}}(\deg P_i) & \text{nếu} \quad m_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A), \end{cases}$$

trong đó $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ chỉ phổ của $\mathbb{K}$ trong A, nghĩa là tập hợp các giá trị riêng của A trong $\mathbb{K}$.

VÍ DỤ:

Giải: $\begin{cases} x' = 3x-2y-4z+te^t-t \\ y' = -2x+3y+2z+te^t-2t+2 \\ z' = 3x-3y-4z-1 \end{cases}$, ẩn $(x, y, z): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; ta tính được đa thức đặc trưng χ_A của A và được

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Ma trận A vuông cấp 3 có 3 trị riêng phân biệt $(-1, 1, 2)$ vậy có thể chéo hoá trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Ta tính các vectơ riêng tương ứng và được, chẳng hạn, theo thứ tự là $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Thế thì: $A = PDP^{-1}$, trong đó:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $Y = P^{-1}X$, $B(t) = \begin{pmatrix} te^t-1 \\ te^t-2t+2 \\ -1 \end{pmatrix}$, từ đó :

$$X' = AX+B \Leftrightarrow Y' = DY+P^{-1}B.$$

Sau đó, ký hiệu $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, ta có $Y' = DY+P^{-1}B \Leftrightarrow \begin{cases} u' = -u-t \\ v' = v+te^t \\ w' = 2w+t-1 \end{cases}$.

Giải 3 phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 này ta được:

$$\begin{cases} u(t) = -t+1+Ae^{-t} \\ v(t) = (\frac{1}{2}t^2+B)e^t \\ w(t) = -\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+Ce^{2t} \end{cases}, \qquad (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$$

Vì $X = PY$, nên ta kết luận:

$$\begin{cases} x(t) = -t+1+\frac{1}{2}t^2e^t+Ae^{-t}+Be^t \\ y(t) = t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2e^t+Be^t-2Ce^{2t} \\ z(t) = -\frac{3}{2}t+\frac{5}{4}+Ae^{-t}+Ce^{2t} \end{cases}$$

δ) Phương pháp biến thiên hằng số (xem 7.3.5, 2) chắc chắn là có thể áp dụng được, ta có thể sử dụng nó khi B không phải là hàm mũ-đa thức vectơ.

2) Trường hợp A khả tam giác

Ta nhắc lại là (Tập 6) mọi ma trận thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ đều khả tam giác. Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ta sử dụng phép tam giác hoá A trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Giải $(\mathbf{E}_0)$

Ta ký hiệu $\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận tam giác trên có hệ số trong $\mathbb{K}$. Vì A khả tam giác, nên tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ và $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ sao cho $A = PTP^{-1}$.

Ta sử dụng phép tính đã thực hiện trong trường hợp A khả chéo (1)*a*)) bằng cách thay D bởi T

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY \qquad \text{trong đó } Y = P^{-1}X.$$

Ký hiệu: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$ và $\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} = T$,

ta được $Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = t_{11}y_1+\ldots+ t_{1n}y_n \\ y_2' = t_{22}y_2+\ldots+ t_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = t_{nn}y_n. \end{cases}$

Ta giải hệ vi phân này "*từng bậc*" và bắt đầu từ phương trình cuối.

VÍ DỤ:

Giải: $\begin{cases} x' = 5x-3y-4z \\ y' = -x+y-2z \\ z' = x-3y \end{cases}$, ẩn là $(x, y, z): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; ta tính được đa thức đặc trưng của A:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2,$$

vậy các trị riêng của A là -2 (đơn) và 4 (kép).

Ta tìm các không gian con riêng; không gian con riêng (KGCR) tương ứng với 4 có số chiều là 1, được cảm sinh bởi $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. KGCR ứng với -2 được cảm sinh bởi

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Như vậy A không khả chéo.

Ta sẽ xác định một vectơ $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ và một số μ sao cho $AV_2 = 4V_2 + \mu V_1$. Vì

$AV_2 = 4V_2 + \mu V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 3\beta - 4\gamma = \mu \\ -\alpha - 3\beta - 2\gamma = -\mu \\ \alpha - 3\beta - 4\gamma = \mu \end{cases}$, nên ta có thể chọn $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ và $\mu = 2$.

Vậy $A = PDP^{-1}$, trong đó: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Bằng cách đặt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ và $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ ta có:

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 4u + 2v \\ v' = 4v \\ w' = -2w \end{cases}$$

Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 vô hướng nói trên cho ta:

$$w(t) = Ce^{-2t}, \qquad v(t) = Be^{4t}, \qquad u(t) = (2Bt + A)e^{4t}, (A, B, C) \in \mathbb{R}^3.$$

Sau đó $X = PY$, từ đó: $\begin{cases} x(t) = (2Bt + A + B)e^{4t} + Ce^{-2t} \\ y(t) = (-2Bt - A + B)e^{4t} + Ce^{-2t} \\ z(t) = (2Bt + A - B)e^{4t} + Ce^{-2t}. \end{cases}$

b) Giải **(E)**

Các phương pháp được sử dụng ở 1), *b)* vẫn còn hiệu lực. Điều kiện về bậc thu được ở 1), *a)*, γ) được thay thế bởi:

$$\deg(Q_k) \le \begin{cases} \underset{1\le i\le N}{\mathrm{Max}}(\deg P_i) & \text{nếu} \quad m_k \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \\ n_k + \underset{1\le i\le N}{\mathrm{Max}}(\deg P_i) & \text{nếu} \quad m_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A), \end{cases}$$

ở đây, trường hợp $m_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, n_k là bậc bội của trị riêng m_k của A.

3) Sử dụng ánh xạ mũ ma trận

Đại số $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ ở đây được trang bị một chuẩn $\|.\|$ của đại số (ta biết rằng tồn tại ít nhất là một, Tập 3, 1.2.6) nghĩa là một chuẩn $\|.\|$ trên không gian vectơ $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho:

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2, \qquad \|A.B\| \le \|A\|.\|B\|$$

Bằng phép quy nạp đơn giản có thể chỉ ra rằng :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}^*, \|A^k\| \le \|A\|^k$$

◆ **Mệnh đề 1** Chuỗi các ánh xạ $\sum_{k\ge 0} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto \dfrac{1}{k!}A^k \end{pmatrix}$ hội tụ theo chuẩn trên mọi bộ phận bị chặn trên của $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Chứng minh:

Cho X là một bộ phận bị chặn của $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$; tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho $\|A\| < M$. Khi đó ta có:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall A \in X, \quad \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| \le \frac{1}{k!}\|A\|^k \le \frac{M^k}{k!}.$$

Vì chuỗi số $\sum_{k\ge 0} \frac{M^k}{k!}$ hội dụ, nên chuỗi các ánh xạ $\sum_{k\ge 0}\left(A \mapsto \frac{1}{k!}A^k\right)$ hội tụ theo chuẩn trên X (xem 4.2.1, Định nghĩa 5).

◆ **Định nghĩa** Ta gọi là ánh xạ **mũ** và ký hiệu là exp ánh xạ $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ vào $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ được xác định bởi

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k .$$

Nhận xét:

1) $\exp(0) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$

2) Rõ ràng là, nếu $n = 1$ và nếu coi một ma trận thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ trùng với phần tử duy nhất của nó thì ta trở lại hàm mũ thực hay phức đã được định nghĩa trước (Tập 2, 7.2; Tập 4, 5.6.1, Định nghĩa). Vậy ta có thể ký hiệu e^A thay cho $\exp(A)$ với $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

◆ **Mệnh đề 2** $\forall(A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})^2,\ (AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A)$.

Chứng minh:

Lặp lại cách chứng minh hệ thức $e^{z+z'} = e^z e^{z'} = e^{z'} e^z$ đối với $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ là đủ (5.6.1, Định lý 1).

◆ **Hệ quả**

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}),\ (e^A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{và} \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}).$$

◆ **Mệnh đề 3**

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}),\ e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P.$$

Chứng minh:

Với mọi N thuộc $\mathbb{N}$ ta có :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)P.$$

Từ đó, cho $N \to +\infty$ và chú ý rằng $M \mapsto P^{-1}MP$ liên tục trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$:

$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

◆ **Mệnh đề 4** Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ và I là một khoảng của $\mathbb{R}$.

Ánh xạ: $\varphi : \underset{t \mapsto e^{tA}}{I \to \mathbf{M}_n(\mathbb{K})}$ thuộc lớp C^1 trên I và:

$$\forall t \in I, \qquad \varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A.$$

Chứng minh:

Với $k \in \mathbb{N}$, đặt $f_k : \underset{t \mapsto \frac{t^k}{k!}A^k}{I \to \mathbf{M}_n(\mathbb{K})}$.

Theo Mệnh đề 1, $\sum_{k \geq 0} f_k$ hội tụ đều địa phương trên I, hơn nữa, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, f_k thuộc lớp C^1 trên I và :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} f_k'(t) = \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = Af_{k-1}(t) = f_{k-1}(t)A & \text{nếu} \quad k \geq 1 \\ f_0'(t) = 0. \end{cases}$$

Theo Mệnh đề 1, $\sum\limits_{k\geq 0} f'_k$ hội tụ đều địa phương trên I. Theo 4.2.5, Hệ quả ta suy ra

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ thuộc lớp C^1 trên I và $\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f'_k$, nghĩa là φ thuộc lớp C^1 trên I và:

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A.$$

◆ **Định lý** Giả sử I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $B: I \to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ liên tục. Một nghiệm của (E) $X' = AX + B$ trên I, với $t_0 \in I$ cố định bất kỳ, là $t \mapsto e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds$.

Chứng minh:

Ánh xạ $X: \begin{array}{l} I \to \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I (theo Mệnh đề trên) và với mọi t thuộc I:

$$X'(t) = Ae^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds + e^{tA}e^{-tA}B(t) = AX(t) + B(t).$$

7.3.7 Hệ vi phân ôtônôm tuyến tính

Cho $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Xét **hệ vi phân ôtônôm tuyến tính**

$$(S) = \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \text{ ẩn là } x, y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ và với $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, việc giải (S) trở thành việc giải phương trình vi phân ôtônôm tuyến tính: $X' = AX$

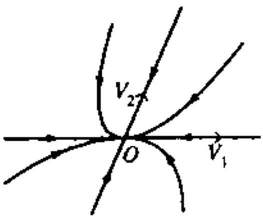
Để nghiên cứu, ta xét các trị riêng λ_1, λ_2 (trong $\mathbb{C}$) của A.

Trường hợp 1: $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

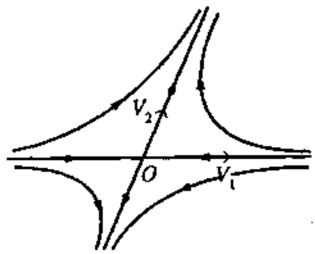
Trong trường hợp này A khả chéo trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{K})$; tồn tại $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{K})$ sao cho, nếu đặt $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, thì ta có $A = PDP^{-1}$, ký hiệu V_1, V_2 là các cột của P, nghiệm tổng quát của (E) trên $\mathbb{R}$ được cho bởi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 \qquad \text{với } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

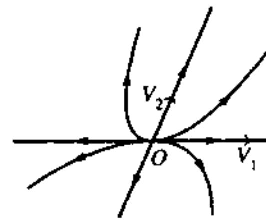
Trong hệ quy chiếu (O, V_1, V_2) các quỹ đạo có dáng điệu như sau:



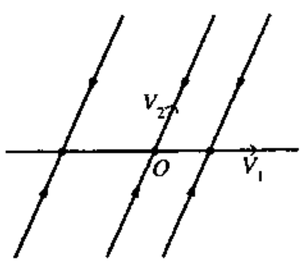
$\lambda_1 < 0$ và $\lambda_2 < 0$
nút không suy biến
ổn định
O là điểm hút



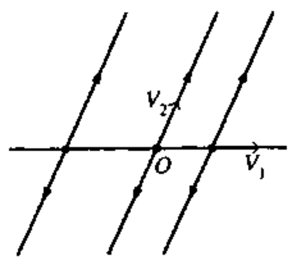
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
yên ngựa (không ổn định)



$0 < \lambda_1$ và $0 < \lambda_2$
nút không suy biến
không ổn định
O là điểm đẩy



$\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 < 0$



$\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 > 0$

Trường hợp 2: $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$.

Khi đó ta có $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Ma trận A khả chéo trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$; tồn tại P thuộc $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ sao cho khi đặt $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ta có $A = PDP^{-1}$. Ký hiệu V_1, V_2 là các cột của P, $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ với $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Khi đó ta có $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}$. Xét $Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; rõ ràng Q khả đảo và $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

Ký hiệu: $\quad B = Q^{-1}DQ$ và $R = PQ$, ta có:

$$A = PDP^{-1} = PQBQ^{-1}P^{-1} = RBR^{-1}$$

$$R = \begin{pmatrix} \alpha + \overline{\alpha} & i(\alpha - \overline{\alpha}) \\ \beta + \overline{\beta} & i(\beta - \overline{\beta}) \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1 + \overline{\lambda_1} & i(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) \\ -i(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) & \lambda_1 + \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_1) & -\mathrm{Im}(\lambda_1) \\ \mathrm{Im}(\lambda_1) & \mathrm{Re}(\lambda_1) \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $u = \mathrm{Re}(\lambda_1)$, $v = \mathrm{Im}(\lambda_1)$, U_1, U_2 là các cột của $\mathbb{R}$, ξ, ζ được xác định bởi :

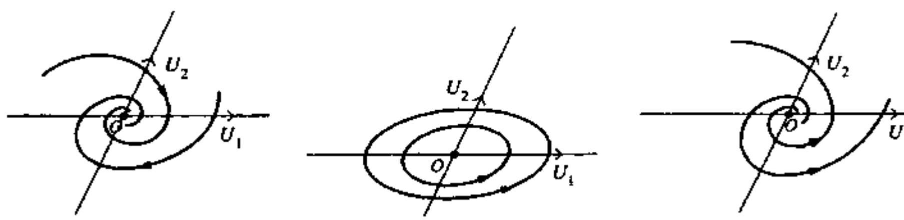
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Mọi cặp (x, y) là nghiệm của (S) trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu cặp liên kết (ξ, ζ), bởi việc thay đổi cơ sở, là nghiệm trên $\mathbb{R}$ của : $\begin{cases} \xi' = u\xi - v\varsigma \\ \varsigma' = v\xi + u\varsigma \end{cases}$.

Cuối cùng, ký hiệu $z = \xi + i\zeta$, hệ trên dẫn tới $z' = \lambda_1 z$, mà nghiệm tổng quát là:

$$z : t \mapsto z_0 e^{\lambda_1 t} \qquad (z_0 \in \mathbb{C}).$$

Như vậy, các quỹ đạo là các đường xoắn ốc lôgarit (nếu $\mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$), hoặc các đường elip (nếu $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$).



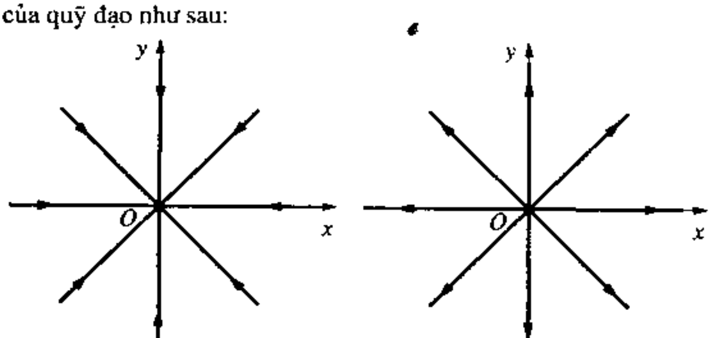
$\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ Tiêu điểm ổn định, O là điểm hút

$\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$

$\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ Tiêu điểm không ổn định O là điểm đẩy

Trường hợp 3: $\lambda_1 = \lambda_2$ và A khả chéo trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Trong trường hợp này, $A = \lambda_1 I_2$ và nghiệm tổng quát được cho bởi : $\begin{cases} x : t \mapsto x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y : t \mapsto y_0 e^{\lambda_1 t} \end{cases}$.

Rõ ràng là nếu $\lambda_1 = 0$ thì các quỹ đạo chỉ là các tập hợp chứa một điểm.
Dáng điệu của quỹ đạo như sau:



$\lambda_1 < 0$ nút ổn định, O là điểm hút

$\lambda_1 > 0$ nút không ổn định, O là điểm đẩy

Trường hợp 4: $\lambda_1 = \lambda_2$ và A không khả chéo trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

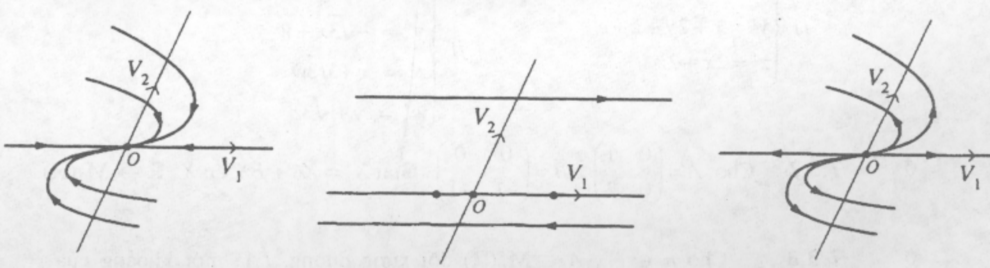
Trong trường hợp này, A khả tam giác trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Tồn tại $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ sao cho, bằng cách đặt $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ta có $A = PTP^{-1}$.

Ký hiệu $\begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}$ là cột được xác định bởi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}$, việc giải (E) dẫn đến việc giải $\begin{pmatrix} \xi' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$, nghĩa là $\begin{cases} \xi' = \lambda_1\xi - \zeta \\ \zeta' = \lambda_1\xi \end{cases}$,

mà nghiệm tổng quát được xác định bởi:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \xi(t) = (\xi_0 + \zeta_0 t)e^{\lambda_1 t} \\ \zeta(t) = \xi_0 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \qquad (\xi_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Ký hiệu V_1, V_2 là các cột của P, dáng điệu của quỹ đạo trong hệ quy chiếu (O,V_1,V_2) như sau:

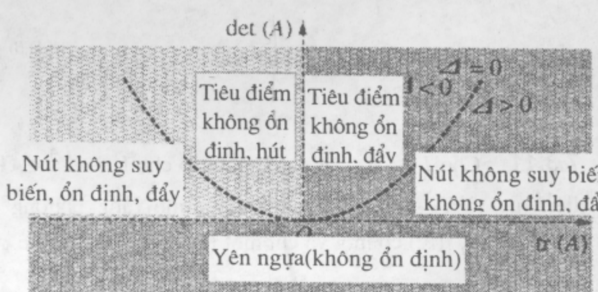


$\lambda_1 < 0$
nút suy biến ổn định
O là điểm hút

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_1 > 0$
nút suy biến không ổn định
O là điểm đẩy

Ta có thể tóm tắt một phần các kết quả trên bởi sơ đồ:



Bài tập

◊ **7.3.6** Giải các hệ thống vi phân sau đây (biến t, ẩn x, y, ... nhận giá trị thực)

a) $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 4t + 1 \\ y' = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = x + my + at \\ y' = -mx + y + bt \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

$(m, a, b) \in \mathbb{R}^3$

e) $\begin{cases} x' = x - y + e^{2t} \\ y' = x + 3y + t \end{cases}$ f) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y - e^{-t} \end{cases}$

g) $\begin{cases} x' = 4x - y - z + t \\ y' = x + 2y - z + 2t \\ z' = x - y + 2z - t \end{cases}$ h) $\begin{cases} x' = 3x - 5y - 18z + 25t + 45 \\ y' = -2x + 6z - 4t - 12 \\ z' = 2x - 2y - 9z + 11t + 23 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x' = 3x + y - z + 1 \\ y' = x + 2y + z + e^t \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$ j) $\begin{cases} x' = -\sqrt{3}y + z \\ y' = -\sqrt{3}x + w \\ z' = x + \sqrt{3}w \\ w' = y + \sqrt{3}z \end{cases}$

◊ **7.3.7** Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Giải $X' = XA + BX$ ẩn $X : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

◊ **7.3.8** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ đối xứng dương, I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $X : \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ khả vi sao cho $X' = AX$. Chứng minh rằng $t \mapsto \|X(t)\|_2$ tăng trên I, ở đây $\|V\|_2 = ({}^tV.V)^{\frac{1}{2}}$ với mọi V thuộc $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

◊ **7.3.9** Tính e^{tA} với $t \in \mathbb{R}$ và $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◊ **7.3.10** Cho $(A,B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2$ sao cho: $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA}.e^{tB}$.
Chứng minh: $AB = BA$.

◊ **7.3.11** Cho $T \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho $\mathrm{I}_n - e^{TA} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ liên tục và T - tuần hoàn. Chứng minh rằng phương trình $X' = AX + B$, ẩn $X : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ có một và chỉ một nghiệm T-tuần hoàn.

7.4 Phương trình vi phân tuyến tính vô hướng cấp 2

7.4.1 Đại cương

Giả sử I là một khoảng của $\mathbb{R}$, a, b, g: $I \to \mathbb{K}$ là các ánh xạ liên tục. Ta xét các phương trình vi phân tuyến tính vô hướng cấp 2 chuẩn hoá:

$$(\mathrm{E}) \qquad x'' + ax' + bx = g$$

$$(\mathrm{E}_0) \qquad x'' + ax' + bx = 0,$$

ẩn x: $I \to \mathbb{K}$ khả vi 2 lần.

Ta ký hiệu $\mathcal{S}$ (tương ứng $\mathcal{S}_0$) là tập hợp các nghiệm của (E) (tương ứng (E_0)) trên I.

◆ **Định lý** **(Định lý Cauchy - Lipschitz tuyến tính)**:
Với bất kỳ (t_0, x_0, x_1) thuộc $I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, tồn tại một và chỉ một nghiệm của (E) $x'' + ax' + bx = g$ sao cho $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$

Chứng minh:
Ta đưa việc nghiên cứu (E) về việc nghiên cứu hệ vi phân cấp 1 (7.1.2)

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + g. \end{cases}$$

Theo định lý Cauchy - Lipschitz tuyến tính (7.3.2 Định lý) tồn tại một nghiệm duy nhất x của (E) sao cho $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$.

◆ **Mệnh đề 1**

1) $\mathcal{S}_0$ là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ có số chiều là 2, và ánh xạ $\underset{x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))}{\mathcal{S}_0 \to \mathbb{K}^2}$ với $t_0 \in I$ cố định là một đẳng cấu của $\mathbb{K}$- kgv.

2) $\mathcal{S}$ là một $\mathbb{K}$-không gian afin có số chiều là 2, có phương $\mathcal{S}_0$ và ánh xạ $\underset{x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))}{\mathcal{S}_0 \to \mathbb{K}^2}$, với $t_0 \in I$ cố định là một đẳng cấu của $\mathbb{K}$-không gian afin.

Chứng minh:
Suy ra từ 7.3.3, Mệnh đề 2, nhờ cách đưa về một hệ vi phân cấp 1:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases} \quad \text{(tương ứng } \begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + g \end{cases}\text{)}.$$ ■

Như ở 7.3.3, nghiệm tổng quát của (E) là tổng một nghiệm riêng của (E) và nghiệm tổng quát của (E_0). Vì thế ta thấy rằng việc giải (E) dẫn đến việc giải (E_0) và xác định ít nhất một nghiệm của (E).

WRONSKIEN

◆ **Định nghĩa** Cho x_1, x_2: $I \to \mathbb{K}$ là hai ánh xạ khả vi trên I. Ta gọi là **Wronskien** của (x_1, x_2) ánh xạ W_{x_1, x_2}: $I \to \mathbb{K}$ xác định như sau:

$$\forall t \in I,\ W_{x_1,x_2}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

◆ **Mệnh đề 2** Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của (E_0) trên I thì:

1) W_{x_1, x_2} khả vi trên I và $W'_{x_1, x_2} + a\, W_{x_1, x_2} = 0$

2) (x_1, x_2) độc lập $\Leftrightarrow W_{x_1, x_2} \neq 0 \Leftrightarrow (\forall\, t_0 \in I, W_{x_1, x_2}(t_0) \neq 0)$.

Chứng minh:

1) $W'_{x_1, x_2} = (x_1x'_2 - x'_1x_2)' = x_1x''_2 - x''_1x_2$
$= x_1(-ax''_2 - bx_2) + (ax'_1 + bx_1)x_2 = -aW_{x_1,x_2}$.

2) • Ký hiệu A là một nguyên hàm của a trên I, tồn tại $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho:

$\forall t \in I, \quad W_{x_1,x_2}(t) = \lambda e^{-A(t)}$,

từ đó $W_{x_1, x_2} = 0 \Leftrightarrow (\exists\, t_0 \in I, W_{x_1,x_2}(t_0) = 0)$.

• Nếu x_1, x_2 phụ thuộc, chẳng hạn $x_1 \neq 0$, thì tìm được $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho

$x_2 = \lambda x_1$, từ đó: $\quad W_{x_1,x_2} = x_1(\lambda x_1)' - x'_1(\lambda x_1) = 0$.

• Ngược lại, giả sử $W_{x_1,x_2} = 0$ và $x_1 \neq 0$ thì tồn tại $t_0 \in I$ sao cho $x_1(t_0) \neq 0$. Xét $x = x_1(t_0)x_2 - x_2(t_0)x_1$; rõ ràng là x là nghiệm của (E) trên I và $x(t_0) = 0$ và $x'(t_0) = W_{x_1,x_2}(t_0) = 0$. Theo định lý Cauchy - Lipschitz tuyến tính (7.3.2, Định lý) ta suy ra $x = 0$, vậy (x_1, x_2) phụ thuộc.

Nhận xét:
Wronskien của (x_1, x_2), trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (E_0) trên I, cũng là định thức của ma trận Wronskien $((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$ theo định nghĩa ở 7.3.5.

7.4.2 Giải (E_0)

1) Vì $\mathcal{S}_0$ là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ có số chiều là 2, nên nếu ta biết một hệ độc lập (x_1, x_2) gồm hai phần tử của S_0 thì $S_0 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

VÍ DỤ:

Giải phương trình vi phân (E$_0$) $x''-\dfrac{2t}{1+t^2}x'+\dfrac{2t}{1+t^2}x = 0$ ẩn x: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Để tiện hơn, ta viết (E$_0$) dưới dạng tương đương:

$$(1 + t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0.$$

Ta thấy rằng tồn tại một nghiệm đa thức (khác 0). Ký hiệu n là bậc của x, $x(t)=a_n t^n + ... + a_0$ với $a_n \in \mathbb{K}^*$, $a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{K}$, các hạng tử có bậc $> n$ của $(1+ t^2)x'' - 2tx' + 2x$ đều bằng 0 và hệ số của hạng tử có bậc n là $(n(n-1) - 2n + 2)a_n$, từ đó $n^2 - 3n + 2 = 0$, vậy $n \in \{1, 2\}$.

Cho $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ và x: $t \mapsto \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Ta có:

$$(\forall t \in \mathbb{R}, (1 + t^2)x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R}, 2\alpha(1 + t^2) - 2t(2\alpha t + \beta) + 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \gamma = -\alpha.$$

Các ánh xạ đa thức $x_1 : \underset{t \mapsto t}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ và $x_2 : \underset{t \mapsto t^2 - 1}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ là các nghiệm của (E$_0$) trên $\mathbb{R}$ và lập thành một họ độc lập, vậy :

$$S_0 = \left\{ \underset{t \mapsto \alpha(t^2-1)+\beta t}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Phương pháp Lagrange

Giả sử ta đã biết được một nghiệm x_1 của (E$_0$) trên I sao cho : $\forall\, t \in I$, $x_1(t) \neq 0$. Ta đưa ra một nghiệm (x_1, x'_1) của hệ vi phân (S$_0$) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay. \end{cases}$

Vì $\left(\forall t \in I, \begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_2(t) & 1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$, nên theo 7.3.4.2) ta tìm một nghiệm thứ 2 của (S_0) dưới dạng :

$$(x_2, y_2) = \lambda_1(x_1, x'_1) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 x'_1 + \lambda_2),$$

trong đó λ_1, λ_2: $I \to \mathbb{K}$ là các ánh xạ chưa biết.

Điều này trở về việc tìm x_2 của (E$_0$) có dạng $x_2 = \lambda x_1$ với λ là một hàm chưa biết.

Ta có : $x''_2 + ax'_2 + bx_2 = \lambda'' x_1 + \lambda'(2x'_1 + ax_1)$.

Vậy x_2 là một nghiệm của (E$_0$) khi và chỉ khi λ là nghiệm của :

$$\lambda'' x_1 + \lambda'(2x'_1 + ax_1) = 0.$$

Vì $(\forall t \in I,\ x_1(t) \neq 0)$, phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 chuẩn hoá $\mu' + \dfrac{2x'_1 + ax_1}{x_1}\mu = 0$ (ẩn là μ) có ít nhất một nghiệm μ khác 0 (Tập 2, 11.1.2, Định lý), và lấy một nguyên hàm của μ làm λ ta có một nghiệm $x_2 = \lambda x_1$ của (E$_0$) thoả mãn điều kiện (x_1, x_2) độc lập.

Từ đó cuối cùng ta có: $S_0 = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2;\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

VÍ DỤ:

Giải phương trình vi phân: $(E_0)\ (t^2+1)x'' - 2x = 0$, ẩn $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Với phương pháp đã sử dụng trong ví dụ ở 1) ta thấy $x_1: t \mapsto t^2 + 1$ là một nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$. Vì $(\forall t \in \mathbb{R}, t^2+1 \neq 0)$, ta tìm một nghiệm thứ hai x_2 của (E_0) dưới dạng $x_2 = \lambda x_1$, $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, là một hàm chưa biết. Với mọi t thuộc $\mathbb{R}^2$, ta có:

$$\begin{array}{l|l} -2 & x_2(t) = \lambda(t)(t^2+1) \\ 0 & x_2'(t) = 2\lambda(t)t + \lambda'(t)(t^2+1) \\ t^2+1 & x_2''(t) = 2\lambda(t) + 4\lambda'(t) + \lambda''(t)(t^2+1) \\ \hline \end{array}$$

từ đó $$(t^2+1)\,x_2''(t) - 2x_2(t) = 4t(t^2+1)\lambda'(t) + (t^2+1)^2\lambda''(t).$$

Vậy ta có : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t^2+1)\lambda''(t) + 4t\lambda'(t) = 0$.

Một nghiệm riêng λ' (khác 0) được xác định bởi:

$$\lambda'(t) = \exp\left(-\int \frac{4t}{t^2+1} dt\right) = \frac{1}{(t^2+1)^2},$$

từ đó: $$\lambda(t) = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}(\text{Arctan}t + \frac{t}{t^2+1}),$$

và $$x_2(t) = \frac{t^2+1}{2}\text{Arctan}t + \frac{t}{2}.$$

Cuối cùng, nghiệm tổng quát của (E_0) trên $\mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$x(t) = \alpha(t^2+1) + \beta((t^2+1)\text{Arctan}t + t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$ ■

Nhận xét:

Nếu ta không biết một nghiệm riêng tường minh của (E_0) (khác 0) thì ta không thể giải (E_0) một cách tường minh bằng các hàm thông thường.

3) Trường hợp các hệ số không đổi

Ta nói rằng (E_0) $x'' + ax' + bx = 0$ có các hệ số không đổi nếu a, b là các phần tử cố định của $\mathbb{K}$. Trường hợp này đã được giải quyết ở Tập 2, 11.2.2, Định lý.

7.4.3 Giải (E)

Theo 7.4.1, ta tìm một nghiệm riêng của (E) sau khi đã giải (E_0) là đủ.

Ký hiệu (x_1, x_2), một cơ sở của S_0.

1) Có thể xảy ra là (E) có một nghiệm hiển nhiên, hoặc nghiệm "dưới dạng đơn giản" ξ. Khi đó: $\mathcal{S} = \{\xi + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

Ví dụ:

Giải PTVP : (E) $t^3x'' + tx' - x = 1,$ ẩn là x: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$.

- PTVP (E_0) $t^3x'' + tx' - x = 0$ có một nghiệm hiển nhiên $x_1 : t \mapsto t$. Theo 7.4.2.2) ta tìm một nghiệm x của (E_0) dưới dạng $x(t) = \lambda(t)t$. Ta có:

$$t^4\lambda''(t) + (2t^3 + t^2)\lambda'(t) = 0,$$

từ đó $$\lambda'(t) = \exp\left(-\int \frac{2t+1}{t^2}\,dt\right) = \frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}},$$

và $$\lambda(t) = \int \frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}\,dt = -e^{\frac{1}{t}},$$ và từ đó $x(t) = -te^{\frac{1}{t}}$.

Vì vậy, nghiệm tổng quát của (E_0) trên $]0; +\infty[$ được cho bởi:

$$x(t) = \alpha t + \beta t e^{\frac{1}{t}} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

- Phương trình vi phân (E) có một nghiệm hiển nhiên : $t \mapsto -1$.

Cuối cùng: $$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -1 + \alpha t + \beta t e^{\frac{1}{t}} \end{array} ;\quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Phương pháp tổng quát: phương pháp biến thiên hằng số

Ta áp dụng các kết quả ở 7.3.5.2) vào hệ vi phân: (S) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + g. \end{cases}$

Ta đưa ra một cơ sở (x_1, x_2) của $\mathcal{S}_0$, từ đó có một cơ sở $((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$ của không gian các nghiệm của $(\mathcal{S}_0)$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay. \end{cases}$

Ta tìm một nghiệm (x, y) của (S) dưới dạng $(x, y) = \lambda_1(x_1, x'_1) + \lambda_2(x_2, x'_2)$, trong đó $\lambda_1, \lambda_2 : I \to \mathbb{K}$ là các hàm chưa biết.

Điều này trở lại : $\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \end{cases}.$

Vì $x' = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' = (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2) + (\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2)$ nên ta có: $(\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2) = 0$.
Thay vào (E) :

$$x'' + ax' + bx = g \Leftrightarrow \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g.$$

Việc giải hệ hai phương trình $\begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0 \\ \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g \end{cases}$ cho biết λ'_1, λ'_2, từ đó λ_1, λ_2 bằng các phép tính nguyên hàm, rồi $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Tóm lại: Ta tìm một nghiệm x của (E) dưới dạng $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) : I \to \mathbb{K}$ với điều kiện $\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0$.

VÍ DỤ:

1) Biểu diễn các nghiệm của PTVP (E) : $x'' + \omega^2 x = g$ (trong đó $w \in \mathbb{R}_+^*$ và $g: I \to \mathbb{K}$ là liên tục) dưới dạng tích phân của g.

Một cơ sở của $\mathbb{K}$ -không gian vectơ S_0 các nghiệm của (E_0) $x'' + \omega^2 x = g$ trên I là (x_1, x_2) với $x_1: t \mapsto \cos\omega t$, $x_2: t \mapsto \sin\omega t$.

Theo phương pháp biến thiên hằng số, ta tìm một nghiệm x của (E) dưới dạng

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1, \lambda_2: I \to \mathbb{K}$

với điều kiện $\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0$. Ta được:

$$\begin{cases} \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0 \\ \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = g \end{cases} \Leftrightarrow \left(\forall t \in I, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\dfrac{1}{\omega} g(t) \sin\omega t \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{1}{\omega} g(t) \cos\omega t \end{cases} \right).$$

Giả sử $t_0 \in I$ bất kỳ, một nghiệm riêng x của (E) trên I được xác định bởi :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\omega}\left(\int_{t_0}^{t} g(u) \sin\omega u du \right) \cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(\int_{t_0}^{t} g(u) \cos\omega u du \right) \sin\omega t \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{t} g(u) \sin(\omega(t-u)) du. \end{aligned}$$

2) Giải PTVP (E) $(t^2-3)x'' - 4tx' + 6x = \dfrac{(t^2-3)^3}{t}$ trên $I =]\sqrt{3}; +\infty[$.

- Cũng như trong ví dụ ở 7.4.2.1) việc tìm nghiệm đa thức có thể có của (E_0) làm xuất hiện các nghiệm $x_1 \mapsto t^3 + 9t$ và $x_2: t \mapsto t^2+1$, từ đó:

$$S_0 = \left\{ \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda(t^3+9t) + \mu(t^2+1) \end{matrix} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Phương pháp biến thiên hằng số chỉ ra việc tìm một nghiệm x của (E) dưới dạng:

$$x(t) = \lambda(t)(t^3 + 9t) + \mu(t)(t^2+1)$$

với điều kiện $\lambda'(t)(t^3 + 9t) + \mu'(t)(t^2+1) = 0$.

Ta được:
$$\begin{cases} \lambda'(t)(t^3+9t) + \mu'(t)(t^2+1) = 0 \\ \lambda'(t)(3t^2+9) + \mu'(t)2t = \dfrac{(t^2-3)^2}{t} \end{cases}.$$

Việc giải hệ hai phương trình hai ẩn $(\lambda'(t), \mu'(t))$ này cho ta: $\lambda'(t) = t + \dfrac{1}{t}$,

$\mu'(t) = -(t^2+9)$, vậy ta có thể chọn : $\lambda(t) = \dfrac{t^2}{2} + \ln t$, $\mu(t) = -\dfrac{t^3}{3} - 9t$.

Cuối cùng là:

$$S = \left\{ \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (t^3+9t)\ln t + \dfrac{t}{6}(t^4 - 29t^2 - 54) + \lambda(t^3+9t) + \mu(t^2+1) \end{matrix} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

7.4.4 Vấn đề về các mối nối

Vấn đề này đã được đề cập đối với các PTVP tuyến tính vô hướng cấp 1 trong Tập 2, 11.1.1 và 11.1.3

Xét PTVP không chuẩn hoá

(e) $\quad \alpha(t)x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = G(t),$

trong đó $\alpha, A, B, G: I \to \mathbb{K}$ liên tục.

Để đơn giản, ta giả sử α triệt tiêu tại một và chỉ một điểm t_0 của I và $t_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Ta giải (e) trên mỗi khoảng $I_1 =]-\infty;t_0[\cap I$ và $I_2 =]t_0;+\infty[\cap I$ (vì trên mỗi khoảng này, có thể chuẩn hoá (e)); sau đó ta sẽ tìm cách, nếu có thể, "nối" tại t_0 các nghiệm đã thu được, bằng sự liên tục, hoặc bằng tính khả vi cấp 1, cấp 2.

Theo 7.4.1, Mệnh đề 1, tập hợp $\mathcal{S}_0(I_1)$ (tương ứng $\mathcal{S}_0(I_2)$) các nghiệm của

(e_0) $\quad \alpha(t)x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$

trên I_1 (tương ứng I_2) là một $\mathbb{K}$ - kgv có số chiều là 2. Từ đó suy ra rằng tập hợp.

$\mathcal{S}_0(I - \{t_0\})$ các ánh xạ x: $I - \{t_0\} \to \mathbb{K}$ hai lần khả vi trên $I - \{t_0\}$ và sao cho:

$$\forall\, t \in I - \{t_0\}, \quad \alpha(t)x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$$

là một $\mathbb{K}$ - kgv có số chiều là 4, đẳng cấu với $S_0(I_1)\times S_0(I_2)$.

Vì tập hợp $S_0(I)$ các nghiệm của (e_0) trên I là một $\mathbb{K}$ - không gian vectơ và ánh xạ

$\underset{x \mapsto x|_{I-\{t_0\}}}{\mathcal{S}_0(I) \to \mathcal{S}_0(I - \{t_0\})}$ là tuyến tính đơn ánh, suy ra :

$$\dim(\mathcal{S}_0(I)) \leq \dim(\mathcal{S}_0(I - \{t_0\}) = 4.$$

Độc giả sẽ tự khẳng định bằng các ví dụ (xem bài tập 7.4.1) rằng $\mathcal{S}_0(I)$ có thể có số chiều là 0, 1, 2, 3, 4.

Cũng như vậy, tập hợp $\mathcal{S}(I)$ các nghiệm của (e) trên I có thể là $\varnothing$ hoặc một không gian afin có số chiều 0, 1, 2, 3, 4.

VÍ DỤ :

Giải PTVP: (e_0) $(2t + 1)x'' + (4t - 2)x' - 8x = 0$, ẩn là x nhận các giá trị thực trên mọi khoảng mở của $\mathbb{R}$.

- *Giải PTVP chuẩn hoá:*(E_0) $\qquad x'' + \dfrac{4t-2}{2t+1}x' - \dfrac{8}{2t+1}x = 0$

trên $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ và trên $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Dù sao ta cũng viết (E_0) dưới dạng (e_0) cho đơn giản hơn (ở đây $2t + 1 \neq 0$). Việc tìm một nghiệm đa thức có thể có; trong ví dụ này, ta có:

$$x_1 : t \mapsto 4t^2+1 \qquad \text{là nghiệm của } (e_0).$$

Việc tìm một nghiệm có thể có dưới dạng $t \mapsto e^{\alpha t}$, trong ví dụ này dẫn đến: x_2: $t \mapsto e^{-2t}$ là nghiệm của (e_0) (ta có thể tìm được x_2 bằng cách bắt đầu từ x_1 và áp dụng phương pháp biến thiên hằng số).

Như vậy, nếu $-\frac{1}{2} \notin I$ thì tập hợp $S_0(I)$ các nghiệm của (e_0) trên I là

$$S_0(I) = \left\{\begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda(4t^2+1) + \mu e^{-2t}\end{matrix} ;\quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- *Khảo sát mối nối tại* $-\frac{1}{2}$

Cho I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ sao cho $-\frac{1}{2} \in I$.

Xét $x: I - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$x(t) = \begin{cases} \lambda_1(4t^2+1) + \mu_1 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t < -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4t^2+1) + \mu_2 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

trong đó $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$.

Tồn tại mối nối, liên tục tại $-\frac{1}{2}$ (nghĩa là x có một giới hạn hữu hạn tại $-\frac{1}{2}$) khi và chỉ khi $2\lambda_1 + \mu_1 e = 2\lambda_2 + \mu_2 e$ (1).

Giả thiết rằng điều kiện (1) đã được thực hiện và xét ánh xạ $I \to \mathbb{K}$ cũng ký hiệu là x, xác định bởi:

$$x(t) = \begin{cases} \lambda_1(4t^2+1) + \mu_1 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t < -\frac{1}{2} \\ 2\lambda_1 + \mu_1 e & \text{nếu} \quad t = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4t^2+1) + \mu_2 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ánh xạ x khả vi trên (ít nhất là) $I - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, và:

$$x'(t) = \begin{cases} 8\lambda_1 t - 2\mu_1 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t < -\frac{1}{2} \\ 8\lambda_2 t - 2\mu_2 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Tồn tại mối nối khả vi tại $-\frac{1}{2}$ (nghĩa là x khả vi tại $-\frac{1}{2}$) khi và chỉ khi :

$-4\lambda_1 - 2\mu_1 e = -4\lambda_2 - 2\mu_2 e$ (2).

Giả sử rằng điều kiện (2) đã được thực hiện (trong ví dụ này, điều kiện (2) đồng nhất với điều kiện (1)).

Ánh xạ x khả vi 2 lần trên (ít nhất là) $I - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, và

$$x''(t) = \begin{cases} 8\lambda_1 + 4\mu_1 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t < -\dfrac{1}{2} \\ 8\lambda_2 + 4\mu_2 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t > -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Tồn tại mối nối khả vi 2 lần tại $-\frac{1}{2}$ (nghĩa là x khả vi 2 lần tại $-\frac{1}{2}$) khi và chỉ khi:

$$8\lambda_1 + 4\mu_1 e = 8\lambda_2 + 4\mu_2 e.$$

Trong ví dụ này ta lại tìm thấy điều kiện (1).
Cuối cùng:

$$\mathcal{S}_0(I) = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \lambda_1(4t^2+1) + \mu_1 e^{-2t} & \text{nếu} \quad t \le \dfrac{1}{2} \\ \lambda_2(4t^2+1) + \left(\dfrac{2}{e}(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1\right)e^{-2t} & \text{nếu } t \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array} ; (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Đặc biệt là: $\dim(\mathcal{S}_0(I)) = 3$.

7.4.5 Sử dụng chuỗi luỹ thừa

Cũng như trong các ví dụ trước, ta đã tìm các nghiệm đa thức có thể có, có thể thuận lợi nếu tìm các nghiệm có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa.
Để thuận tiện, vì biến của mỗi chuỗi luỹ thừa thường được ký hiệu là x nên ở đây ta cũng ký hiệu biến là x và hàm chưa biết là y.

VÍ DỤ:
Xác định các nghiệm của $\quad (E_0) \;\; y'' - xy = 0$
có thể khai triển được thành chuỗi luỹ thừa (tại 0) (KTTCLT(0)).
1) Giả sử tồn tại $r \in]0; +\infty[$ sao cho (E_0) có trên $]-r; r[$ một nghiệm y

có bán kính hội tụ $R \ge r$; $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Theo 5.4, Định lý 2, y thuộc lớp C^∞ trên $]-r; r[$ và

$$\forall x \in]-r; r[, \quad \left(y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right)..$$

Từ đó với mọi x thuộc $]-r; r[$:

$$\begin{aligned} y''(x) - xy(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \end{aligned}$$

$$= 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n .$$

Theo tính duy nhất của việc KTTCLT(0) của hàm không, ta suy ra y là nghiệm của (E_0) trên $]-r; r[$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases}.$$

2) Đảo lại, cho $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $a_2 = 0$, $(a_n)_{n \geq 3}$ xác định bởi quan hệ truy hồi trên :

$$\forall n \geq 3 \quad a_n = \frac{a_{n-3}}{(n-1)n}.$$

Đặc biệt : $\forall\ p \in \mathbb{N}, a_{3p+2} = 0$.

Quy tắc d'Alembert đối với chuỗi số (Tập 3, 3.2.4.3) chỉ ra rằng, với bất kỳ x thuộc $\mathbb{R}$, các chuỗi $\sum_{p\geq 0} a_{3p}x^{3p}$, $\sum_{p\geq 0} a_{3p+1}x^{3p+1}$ hội tụ (nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_1 = 0$ thì sự hội tụ là hiển nhiên). Điều này suy ra chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ có bán kính hội tụ là ∞.

Theo 1) tổng y của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$.

3) Ta xét riêng các tổng y_1, y_2 của các chuỗi luỹ thừa thu được bằng cách lấy tổng $(a_0 = 1, a_1 = 0)$, $(a_0 = 0, a_1 = 1)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1(x) = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{3p}}{(2.3)(5.6)...((3p-1)3p)} \\ y_2(x) = x + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{3p+1}}{(3.4)(6.7)...(3p(3p+1))} \end{cases}.$$

Theo sự nghiên cứu ở trên, y_1 và y_2 là các nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$, rõ ràng là (y_1, y_2) độc lập, (y_1, y_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$ - không gian vectơ các nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$. ■

Trong ví dụ trên, mọi nghiệm của (E_0) trên $\mathbb{R}$ KTTCLT(0) (và có bán kính hội tụ là vô cùng). Độc giả sẽ gặp các ví dụ (bài tập 7.4.2), trong đó không phải tất cả các nghiệm của (E_0) hoặc của (E) đều có thể KTTCLT(0).

Nhận xét:

1) Phương pháp được minh hoạ ở ví dụ trên có thể sử dụng được khi các hệ số α, A, B của PTVP (E) $ax'' + Ax' + Bx = G$ là các đa thức và G có thể KTTCLT(0). Trong các trường hợp khác, phương pháp vẫn có thể có kết quả, nhưng cách tính toán có thể sẽ phức tạp do việc nhân các chuỗi luỹ thừa gây ra.

2) Trong nhiều trường hợp, ta có thể tìm các nghiệm KTTCLT(0) đối với các PTVP tuyến tính cấp 1 vô hướng, hoặc tổng quát hơn ngay cả với các PTVP phi tuyến. Các phép tính trong trường hợp cuối này thường phức tạp.

Bài tập

◊ **7.4.1** Giải các PTVP tuyến tính cấp 2 sau đây (biến t, hàm chưa biết x nhận giá trị thực) trên toàn bộ khoảng mở I của $\mathbb{R}$:

a) $x''+(4e^t-1)x' + 4e^{2t}x = 0$ (đổi biến $u = e^t$).

b) $x''+ x' - e^{-2t} x = \text{ch}t + 3\text{sh}t$ (đổi biến $u = e^{-t}$).

c) $(t^2+1)^2x'' + 2t(t^2+1)x' + x = (t^2+1)^2$ (đổi biến $u = \text{Arctan}t$).

d) $(1+ t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$, $a > 0$ cố định (tìm cách đổi biến $u = \varphi(t)$ để đưa về một PTVP tuyến tính hệ số không đổi).

e) $x''\cos t + x'\sin t + x \cos^3 t = 0$ trên $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

f) $(1 - t^2)x'' - tx' +9x = 0$ trên $]-1;1[$, biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

g) $x'' + x'\tan t + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\tan^2 t\right)x = 0$ trên $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_2 = tx_1$ và $x_1 \neq 0$.

h) $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$ (tìm các nghiệm đa thức).

i) $(1 - t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0$ (tìm các nghiệm đa thức).

j) $(t -1)x'' - (t+1)x' + 2x = 0$ (tìm các nghiệm đa thức hoặc có dạng $t \mapsto e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$)).

k) $t(t+1)x'' - 2tx' + 2x = 0$ (tìm một nghiệm đa thức khác 0).

l) $tx'' + (t -2)x' - 3x = 0$ (tìm một nghiệm đa thức khác 0; biểu diễn nghiệm tổng quát nhờ ký hiệu nguyên hàm).

m) $(t^2+1)x'' + (3t+1)x' + x = 0$ (đổi hàm chưa biết $y = (1+t)x$).

n) $t^2x''+tx'-(t^2 +\frac{1}{4})x = 0$ (đổi hàm chưa biết $y = x\sqrt{|t|}$).

o) $(1 - \cos 4t)x'' + 2x'\sin 4t - 8x = 0$ (biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1.x_2 = 1$).

p) $tx'' - x' + t^3x = 0$ (biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$).

q) $t^2x''+ 4tx'+(2 - t^2)x = 1$ (đổi hàm chưa biết $y = t^2x$)).

r) $t^2(1- t)x'' + t(t -1)x' + x = t^2$ (tìm một nghiệm đa thức của phương trình vi phân không có hoặc có vế hai).

s) $t^2x'' - 3tx' + 4x = t^3$ (xem Tập 2, bài tập 11.2.6, PTVP Euler).

t) $\begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ -4\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = 0$.

◊ **7.4.2** Tìm các nghiệm KTTCLT(0) của các PTVP sau (biến x, hàm chưa biết y nhận giá trị thực):

a) $2xy'' + y' - y = 0.$

b) $4x(1-x)y'' + 2(1-3x)y' - y = 0.$

c) $x(1-x)y'' + (\lambda - 3x)y' - y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ cố định; tìm tổng các chuỗi luỹ thừa thu được trong trường hợp $\lambda = 1$.

◊ **7.4.3** Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số không đổi sau đây (biến x, hàm chưa biết y nhận giá trị thực) :

a) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9}{x} + \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$ trên $\mathbb{R}_+^*$

b) $y'' + y = \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| + \left|x + \dfrac{\pi}{2}\right|$ trên $\mathbb{R}$.

c) $y'' - 3y' + 2y = xe^{|x|}$ trên $\mathbb{R}$.

d) $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{e^x}{\mathrm{ch}^2 x}$ trên $\mathbb{R}$.

e) $y'' + y = \mathrm{cotan}x$ trên $]0; \pi[$.

f) $y'' - y = \ln x$ trên $\mathbb{R}_+^*$ (biểu diễn y nhờ ký hiệu nguyên hàm).

g) $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{2x+1}{x^2}e^x$ trên $\mathbb{R}_+^*$.

◊ **7.4.4** Giải các bài toán Cauchy sau đây:

a) $\begin{cases} y'' + y = \left|x^2 - \pi^2\right| \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y''' + 2y'' + y' + 2y = -2e^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$.

◊ **7.4.5** Giải: $(y''' + y')\cos x - (y'' + y)\sin x = 0.$

◊ **7.4.6** Chứng minh rằng với mọi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ cố định, PTVP $y'' - y = a|x| + b$ có trên $\mathbb{R}$ một và chỉ một nghiệm mà đồ thị (C) có tiệm cận tại $-\infty$ và $+\infty$; hãy tìm nghiệm đó.

◊ **7.4.7** Tìm tất cả các cặp (f, g) các ánh xạ liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \int_0^x f = x - 1 + g(x) \\ \int_0^x g = x - 1 + f(x). \end{cases}$$

◊ **7.4.8** Cho $a, \omega \in \mathbb{R}_+^*$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục. Xác định các nghiệm y của $y'' + \omega^2 y = f$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $y(0) = y(a) = 0$.

◊ **7.4.9** Cho $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là T - tuần hoàn. Chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để (E) $y'' + \omega^2 y = f$ có ít nhất một nghiệm $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T - tuần hoàn là:

$$\int_0^T f(t)\cos\omega t dt = \int_0^T f(t)\sin\omega t dt = 0,$$

và trong trường hợp này tất cả các nghiệm của (E) đều T- tuần hoàn.

◊ **7.4.10** Cho $P \in \mathbb{K}[X]$. Chứng minh rằng PTVP $y'' + y = P(x)$ có trên $\mathbb{R}$ một và chỉ một nghiệm đa thức, đó là: $$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^{2n}P}{dx^{2n}}(x).$$

◊ **7.4.11** Tìm tất cả các bộ ba (f, g, h) các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} h \text{ liên tục} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = g(x).h(y). \end{cases}$$

◊ **7.4.12*** Cho $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ đơn điệu, thuộc lớp C^1, có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$. Ta ký hiệu: (E) $y'' + y = f$.

a) Chứng minh rằng mọi nghiệm của (E) trên $\mathbb{R}_+$ đều bị chặn.

b) Chứng minh rằng (E) có một và chỉ một nghiệm y_1 có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$, hãy tìm y_1.

◊ **7.4.13*** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$.

*a)** Cho $a, b: I \to \mathbb{C}$ liên tục, ta xét PTVP :

(E) $y'' + ay' + by = 0$, ẩn $y : I \to \mathbb{C}$.

Giả sử y_1, y_2 là 2 nghiệm của (E) trên I, lập thành một họ độc lập. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, họ $(y_1^p, y_2^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+q=n}$ độc lập.

b) Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f_1, f_2: I \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^2 sao cho (f_1, f_2) độc lập. Ta có thể kết luận họ $(f_1^p, f_2^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+q=n}$ độc lập được không?

c) Cho a, b, c : $I \to \mathbb{C}$ liên tục, (E) $y''' + ay'' + by' + cy = 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ $y_1, y_2, y_3 : I \to \mathbb{C}$ là ba nghiệm của (E) lập thành một họ độc lập. Có thể khẳng định rằng họ $\left(y_1^p, y_2^q, y_3^r\right)_{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3}$ là độc lập không ?

◊ **7.4.14*** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1. Xét PTVP:

(E) $y'' - fy = 0$, ẩn $y: I \to \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại a, b, c: $I \to \mathbb{R}$ liên tục, sao cho với mỗi nghiệm y của (E) trên I, $Y = y^2$ là nghiệm trên I của (F) $Y''' = aY'' + bY' + cY$, và tính a, b, c.

b) Chứng minh rằng, với tất cả các nghiệm y, z của (E) trên I, yz là nghiệm của (F) trên I.

*c)** Chứng minh rằng, nếu (y_1, y_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$- kgv các nghiệm của (E) trên I, thì (y_1^2, y_1y_2, y_2^2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$- kgv các nghiệm của (F) trên I và:

$$W_{y_1^2, y_1y_2, y_2^2} = 2(W_{y_1,y_2})^3,$$

trong đó: $W_{y_1,y_2} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$ và $W_{Y_1,Y_2,Y_3} = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 \\ Y''_1 & Y''_2 & Y''_3 \end{vmatrix}$ là các Wronskien.

◊ **7.4.15***

a) Cho a, b: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1; ta xét PTVP

(E) $y'' + ay' + by = 0$, ẩn y: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$.

Cho y_1 là một nghiệm của (E) trên I sao cho ($\forall x \in [0;+\infty[$, $y_1(x) \neq 0$), $x_0 \in [0;+\infty[$, A và y_2:$[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t, \quad y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-A(t)}}{(y_1(t))^2}\mathrm{d}t \ .$$

Chứng minh rằng (y_1, y_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$-kgv các nghiệm của (E) trên $[0;+\infty[$.

*b)** Cho u: $[0;+\infty[\to]0;+\infty[$ thuộc lớp C^2, v: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi:

$$(\forall x \in]0;+\infty[, \quad v(x) = u(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(u(t))^2}),$$

$\alpha \in]0;+\infty[$, ω: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ liên tục, được xác định bởi:

$$(\forall x \in]0;+\infty[, \quad \omega(x) = v(x)\int_\alpha^x \frac{\mathrm{d}t}{(v(t))^2})$$

(ta sẽ chỉ ra rằng có thể thác triển ω liên tục tại 0).

Chứng minh rằng tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\omega = \lambda u + \mu v$ và tính (λ, μ) .

◊ **7.4.16*** Cho $T \in \mathbb{R}_+^*$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-tuần hoàn và liên tục sao cho : $(\forall x \in \mathbb{R}, p(x) < 0)$.

Chứng minh rằng nghiệm T-tuần hoàn duy nhất của $y'' + py = 0$ trên $\mathbb{R}$ là 0.

◊ **7.4.17*** Cho $T \in \mathbb{R}_+^*$, p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-tuần hoàn và liên tục, (y_1, y_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$ - kgv các nghiệm của $y'' + py = 0$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \begin{cases} y_1(x+T) = ay_1(x) + by_2(x) \\ y_2(x+T) = cy_1(x) + dy_2(x) \end{cases} \\ ad - bc = 1. \end{cases}$$

◊ **7.4.18*** Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, a, b: $I \to \mathbb{R}$ liên tục, y là một nghiệm khác 0 của $y'' + ay' + by = 0$ trên I. Chứng minh rằng các không điểm của y là các điểm cô lập trong I.

◊ **7.4.19*** *a)** Cho I một khoảng của $\mathbb{R}$, p_1, p_2: $I \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $p_2 \geq p_1$,

$y_1 : I \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần sao cho $y''_1 + p_1 y_1 = 0$ và $y_1 \neq 0$,

$y_2 : I \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần sao cho $y''_2 + p_2 y_2 = 0$.

Chứng minh rằng giữa hai không điểm (phân biệt) của y_1, tồn tại ít nhất một không điểm của y_2 (ta có thể sử dụng bài tập 7.4.18).

b) Cho I là một khoảng trên $\mathbb{R}$, $p : I \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho tồn tại $m \in \mathbb{R}_+^*$ thoả mãn $p \geq m$, $y : I \to \mathbb{R}$ là nghiệm của $y'' + py = 0$ trên I. Chứng minh rằng y có vô số không điểm trong I.

c) Cho y là một nghiệm khác 0 của $y'' + e^{|x|}y = 0$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của y là $\leq \pi$.

Chương 8

Hàm nhiều biến thực

(phần 2)

Phần 1 về các hàm nhiều biến thực đã được trình bày trong Tập 2, Chương 12. Để tiện lợi cho độc giả, nhiều định nghĩa và tính chất được nhắc lại ở đây.

Trong toàn bộ chương 8 này, E, F, G dùng để chỉ các $\mathbb{R}$- kgv định chuẩn hữu hạn chiều, các chuẩn được ký hiệu là $\|.\|_E$, $\|.\|_F$, $\|.\|_G$ hoặc $\|.\|$ nếu không gây ra sự nhầm lẫn. Trong thực tế, ta thường có $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$ ($p, n \in \mathbb{N}^*$) được trang bị các chuẩn tiêu chuẩn (xem Tập 3, 1.1.1 1) Ví dụ 1).

Bài tập

Những bài tập về xét giới hạn, tính liên tục của các hàm nhiều biến thực (xem Tập 2,12.2)

◊ **8.0.1** Khảo sát sự tồn tại và tính giá trị (nếu có) của giới hạn tại (0, 0) của các hàm f sau đây, được cho bởi $f(x, y)$:

a) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ *b)* $\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

c) $\dfrac{x^4y^3}{x^6+y^8}$ *d)* $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$

e) $\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ *f)* $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$.

◊ **8.0.2** Xác định tập các điểm liên tục của các ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sau đây:

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad xy = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad |x| \le |y| \\ y^2 & \text{nếu} \quad |x| > |y| \end{cases}$ *c)* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^4-y^2)^2}{x^6} & \text{nếu} \quad |y| < x^2 \\ 0 & \text{nếu} \quad |y| \ge x^2. \end{cases}$

◊ **8.0.3** Hàm $f : (x,y,u,v) \mapsto \dfrac{x^3+y^3-u^3-v^3}{x^2+y^2-u^2-v^2}$ có giới hạn tại (0, 0, 0, 0) không ?

◊ **8.0.4** Cho f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $F : \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x)+g(y)\end{array}$. Chứng minh rằng F liên tục trên $\mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi f và g liên tục trên $\mathbb{R}$.

◊ **8.0.5*** Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho, với (x_0, y_0) bất kỳ thuộc $\mathbb{R}^2$, các ánh xạ riêng $f(x_0,*)$ và $f(*,y_0)$ đơn điệu và liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

◊ **8.0.6*** Cho f: $[0; 1]^2 \to \mathbb{R}$ liên tục, g, h: $[0; 1] \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} \forall x \in [0;1], & g(x) = \operatorname*{Inf}_{y\in[0;1]} f(x,y) \\ \forall y \in [0;1], & h(y) = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} f(x,y) \end{cases}$$

(chứng minh g và h tồn tại).

a) Chứng minh rằng g và h liên tục trên [0; 1].

b) Ký hiệu $\alpha = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} g(x)$, $\beta = \operatorname*{Inf}_{y\in[0;1]} h(y)$ (ta sẽ chứng minh sự tồn tại α và β).

α) Chứng minh $\alpha \le \beta$.

β) Xác lập: $\alpha = \beta \Leftrightarrow (\exists\ (x_0, y_0) \in [0;1]^2, \quad \forall (x,y) \in [0;1]^2, f(x,y_0) \le f(x_0,y))$.

◊ **8.0.7*** Cho $(k, k') \in [0;1]^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, k-Lipschitz, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, k'-Lipschitz, $F : \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+g(y), y+f(x))\end{array}$. Chứng minh rằng F là song ánh.

8.1 Đạo hàm riêng cấp 1

8.1.1 Định nghĩa

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một bộ phận mở của E, $f: U \to F$, $a \in U$, $v \in E - \{0\}$. Ta nói f có **đạo hàm cấp 1 tại** a **theo** v khi và chỉ khi ánh xạ φ_v: $t \mapsto f(a + tv)$, xác định tại lân cận 0 trong $\mathbb{R}$, khả vi tại 0.

Nếu điều kiện đó được thoả mãn, ta gọi phần tử $\varphi'_v(0)$ của F tức là

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(a+tv)-f(a))$$

là đạo hàm cấp 1 của f tại a theo v và ký hiệu là $D_v f(a)$.
Như vậy, với điều kiện tồn tại thì:

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(a+tv)-f(a)\big).$$ ■

Trường hợp thường xảy ra nhất là $E = \mathbb{R}^p$ và v là một vectơ của cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$. Từ đó ta có định nghĩa sau:

◆ **Định nghĩa 2** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $f: U \to \mathbb{R}^n$, $a \in U$, $j \in \{1, ..., p\}$. Ta nói f có **đạo hàm riêng tại** a **đối với vị trí thứ** j (hoặc: f **khả vi tại** a **đối với vị trí thứ** j) khi và chỉ khi f có đạo hàm cấp 1 tại a theo e_j, trong đó e_j là vectơ thứ j của cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$: $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 đứng ở vị trí thứ j).

Nếu điều kiện đó được thoả mãn, ta gọi là **đạo hàm riêng cấp 1 của** f **tại** a **đối với vị trí thứ** j, và ký hiệu là $D_j f(a)$.

Như vậy, với điều kiện tồn tại thì :

$$D_j f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(a+te_j)-f(a)) = (f(a_1,...a_{j-1},\cdot,a_{j+1},...,a_p))'(a_j),$$

với $(a_1, ..., a_p) = a$ và $f(a_1, ..., a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, ..., a_p)$ là ánh xạ riêng thứ j của f tại a, xác định bởi

$$f(a_1, ..., a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, ..., a_p): x_j \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_p)$$

(xem Tập 2, 12.3.1.1).

◆ **Ký hiệu** Thường ánh xạ f được cho bởi ảnh của một phần tử đặc trưng của U, chẳng hạn $f: \begin{array}{c} U \to F \\ (x_1,...x_p) \mapsto f(x_1,...x_p) \end{array}$.

Nếu f tại a có đạo hàm riêng cấp 1 đối với vị trí thứ j thì ta ký hiệu nó bằng một trong các dạng sau:

$$D_j f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad f'_{x_j}(a).$$

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của E, f: $E \to \mathbb{R}^n$, $a \in U$.

Ta ký hiệu $f_1, ..., f_n$ là các ánh xạ thành phần của f xác định bởi:

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)).$$

Cho $j \in \{1, ..., p\}$. Để f có đạo hàm riêng cấp 1 tại a đối với vị trí thứ j, điều kiện cần và đủ là $f_1, ..., f_n$ có các đạo hàm riêng cấp 1 đối với vị trí thứ j. Hơn nữa, trong trường hợp này:

$$\mathrm{D}_j f(a) = (\mathrm{D}_j f_1(a), ..., \mathrm{D}_j f_n(a)).$$

Chứng minh :

Ký hiệu $(a_1,...,a_p) = a$, theo Tập 3, 2.2.1, Mệnh đề 1, ánh xạ $f(a_1,..., a_{j-1},., a_{j+1},..., a_p)$ khả vi tại a_j khi và chỉ khi các ánh xạ thành phần là các $f_i(a_1,..., a_{j-1},., a_{j+1}, ..., a_p)$, $1 \le i \le n$, có tính chất đó.

Nhận xét :

Mệnh đề trên cho phép đưa về việc nghiên cứu các hàm có giá trị trong $\mathbb{R}$.

◆ **Định nghĩa 3** Cho U là một bộ phận mở trong $\mathbb{R}^p$, f: $U \to F$.

Ta gọi p hàm $\mathrm{D}_j f$: $a \mapsto \mathrm{D}_j f(a)$, $1 \le j \le p$ là các **đạo hàm riêng cấp 1**.

Ta cũng ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ hay f'_{x_j} thay cho $\mathrm{D}_j f$.

Nhận xét :

Mỗi $\mathrm{D}_j f$ $(1 \le j \le p)$ được xác định trên một bộ phận của U. Ví dụ, nếu $f: \underset{(x,y)\mapsto(y,|x|)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ thì $\mathrm{D}_1 f$ được xác định trên $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\mathrm{D}_1 f : (x,y) \mapsto \begin{cases} (0,1) & \text{nếu} \quad x > 0 \\ (0,-1) & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases},$$

và $\mathrm{D}_2 f$ được xác định trên $\mathbb{R}^2$, $\quad \mathrm{D}_2 f : (x,y) \mapsto (1,0)$.

8.1.2 Ánh xạ thuộc lớp C^1 trên một miền mở

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, f: $U \to F$. Ta nói f **thuộc lớp C^1 trên** U nếu và chỉ nếu:

$$\begin{cases} \bullet \ f \text{ có các đạo hàm riêng cấp 1 đối với mọi} \\ \quad \text{vị trí tại tất cả các điểm của } U \\ \bullet \ D_1 f, ..., D_p f \text{ liên tục trên } U. \end{cases}$$

Tổng quát hơn, cho U là một bộ phận của E, f: $U \to F$. Giả sử tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ của E sao cho:

$$\begin{cases} \bullet \text{ với bất kỳ } j \in \{1,\dots,p\} \text{ và với mọi } a \text{ thuộc } U, f \text{ có đạo hàm cấp 1 tại } a \text{ theo } e_j, \text{ ký hiệu là } \mathrm{D}_{e_j} f(a) \\ \bullet \text{ với bất kỳ } j \in \{1,\dots,p\} \text{ ánh xạ } \mathrm{D}_{e_j} f \text{ liên tục trên } U, \end{cases}$$

ta chứng minh rằng, tính chất trên vẫn đúng với mọi cơ sở của B' trên E, và ta nói f thuộc lớp C^1 trên U.

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, f: $U \to \mathbb{R}^n$ thuộc lớp C^1 trên U, $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$.
Ký hiệu $U_0 = \{h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p;\ a + h = (a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) \in U\}$.

Tồn tại một ánh xạ ε: $U_0 \to \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \|h\| \varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \end{cases}$$

Khi đó ta nói f có một **khai triển hữu hạn đến cấp 1 tại** a (viết tắt: KTHH$_1(a)$).

Chứng minh:
Theo Tập 2, 12.3.2.1 Định lý mỗi hàm thành phần f_i của f $(1 \le i \le n)$ có một KTHH$_1(a)$:

$$\begin{cases} \{ f_i(a+h) = f_i(a) + \sum h_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_j}(a) + \| h \| \, \varepsilon_i(h) \\ \varepsilon_i(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra kết luận, ký hiệu ε: $h \mapsto (\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_n(h))$. ■

Kết luận của mệnh đề trên có thể viết dưới dạng:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|).$$

◆ **Hệ quả** Nếu f thuộc lớp C^1 trên một bộ phận mở U của $\mathbb{R}^p$ thì f liên tục trên U.

Chứng minh:
Theo mệnh đề trên:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|) \xrightarrow[h \to 0]{} f(a).$$

8.1.3 Vi phân của một ánh xạ thuộc lớp C^1

1) Đại cương

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $a \in U, f\colon U \to \mathbb{R}^n$ thuộc lớp C^1 trên U. Ta gọi là **vi phân của** f **tại** a (hay: **ánh xạ tuyến tính tiếp xúc với** f **tại** a), ánh xạ tuyến tính ký hiệu $d_a f$ xác định bởi:

$$d_a f: \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ h=(h_1,\dots h_n) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{array}.$$

Định nghĩa này khái quát hoá định nghĩa ở Tập 2, 12.3.2.1.

◆ **Mệnh đề** Mọi ánh xạ tuyến tính $\varphi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ đều thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^p$ và: $\quad \forall a \in \mathbb{R}^p,\ \mathrm{d}_a\varphi = \varphi.$

Chứng minh:

Ký hiệu $(e_1, \dots, e_p)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$, và $a \in U$. Khi đó $\forall j \in \{1, \dots, p\}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{t}(\varphi(a+te_j) - \varphi(a)) = \varphi(e_j),$$

vậy φ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại a và $\mathrm{D}_j\varphi(a) = \varphi(e_j)$. Từ đó, với mọi $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$(d_a\varphi)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j D_j\varphi(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \varphi(h),$$

vậy $d_a\varphi = \varphi$. ■

Các chú ý đối với các công thức trong Tập 2 cũng có giá trị ở đây.

Với $j \in \{1, \dots, p\}$ phép chiếu thứ j $\mathrm{pr}_j : \begin{array}{c}\mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_p) \mapsto x_j\end{array}$ được ký hiệu, một cách lạm dụng là x_j, từ đó: $\quad \mathrm{d}_a\mathrm{pr}_j = \mathrm{d}_a x_j : \begin{array}{c}\mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ (h_1,\dots,h_p) \mapsto h_j\end{array}$.

Vì vi phân $\mathrm{d}_a x_j$ không phụ thuộc a nên được ký hiệu là $\mathrm{d}x_j$.

Nếu $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ thuộc lớp C^1 trên U thì ta có:

$$\boxed{\forall a \in U, \quad \mathrm{d}_a f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_j .}$$

◆ **Định nghĩa 2** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $a \in U, f\colon U \to \mathbb{R}^n$ thuộc lớp C^1 trên U. Ta gọi ma trận của $\mathrm{d}_a f$ tương ứng với các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$ và $\mathbb{R}^n$ là **ma trận Jacobi của** f **tại** a và ký hiệu là $\mathrm{J}_f(a)$. ■

Ký hiệu $f_1, ..., f_n$ là các hàm thành phần của f:

$$\forall x \in U,\ f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó: $$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

◆ **Định nghĩa 3** Với các giả thiết và các ký hiệu của định nghĩa trên và nếu $n = p$, ta gọi định thức của ma trận Jacobi của f tại a là **(định thức) Jacobien của f tại a.**

2) Các phép toán

◆ **Định lý (Hợp các ánh xạ thuộc lớp C^1)**

Giả sử $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, U (tương ứng V) là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^q$ (tương ứng $\mathbb{R}^n$), $f: U \to \mathbb{R}^p$, $g: V \to \mathbb{R}^n$ sao cho $f(U) \subset V$.

Nếu f thuộc lớp C^1 trên U và g thuộc lớp C^1 trên V thì $g \circ f$ thuộc lớp C^1 trên U và:

$$\forall a \in U,\quad \begin{cases} \mathrm{d}_a(g \circ f) = (\mathrm{d}_{f(a)}g) \circ (\mathrm{d}_a f) \\ J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a) \end{cases}.$$

Ta đã ký hiệu ở đây một cách lạm dụng $g \circ f$ để chỉ ánh xạ $\underset{x\mapsto g(f(x))}{U \to \mathbb{R}^n}$.

Chứng minh :

- Cho $a \in U$; ký hiệu $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^q;\ a + h \in U\}$ và $V_0 = \{k \in \mathbb{R}^p; f(a)+k \in V\}$.

Vì f thuộc lớp C^1 trên U nên theo (8.1.2, Mệnh đề) tồn tại $\varepsilon_1: U_0 \to \mathbb{R}^p$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall h \in U_0,\quad f(a+h) = f(a) + (d_a f)(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \end{cases}$$

Tương tự, vì g thuộc lớp C^1 trên V nên tồn tại $\varepsilon_2: V_0 \to \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\begin{cases} \forall k \in V_0,\quad g(f(a)+k) = g(f(a)) + (d_{f(a)}g)(k) + \|k\|\,\varepsilon_2(k) \\ \varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0. \end{cases}$$

Với mọi $h \in U_0$, ta có: $(d_a f)(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h) = f(a + h) - f(a) \in V_0$.

Từ đó ta suy ra, bằng cách sử dụng tính tuyến tính của $\mathrm{d}_{f(a)}g$:

$$\forall h \in U_0,\ g(f(a + h)) = g(f(a) + ((d_a f)(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)))$$

$$= g(f(a)) + (\mathrm{d}_{f(a)}g) \circ (\mathrm{d}_a f)(h) + \alpha(h),$$

trong đó:

$$\alpha(h) = \| h \| (\mathrm{d}_{f(a)}g(\varepsilon_1(h)) + \| \mathrm{d}_a(f)(h) + \| h \| \varepsilon_1(h) \| \varepsilon_2(((\mathrm{d}_a f)(h) + \| h \| \varepsilon_1(h))).$$

Đặt $L = (\mathrm{d}_{f(a)}g) \circ (\mathrm{d}_a f)$; L là tuyến tính.

Vì $\mathrm{d}_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ và $\mathrm{d}_{f(a)}g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ nên tồn tại $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ sao cho

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbf{R}^q, & \|(d_a f)(h)\| \le A\|h\| \\ \forall k \in \mathbf{R}^p, & \|(d_{f(a)}g)(k)\| \le B\|k\| \end{cases}$$

(xem Tập 3, 1.3.2 Mệnh đề 1).

Vì thế ta có :

$$\begin{cases} \|(d_{f(a)}g)(\varepsilon_1(h))\| \le B\|\varepsilon_1(h)\| \\ \|(d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\| \le \|h\|(A + \|\varepsilon_1(h)\|). \end{cases}$$

Mặt khác, do các ánh xạ liên tục nên: $\varepsilon_2\left((d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Điều này chứng tỏ α có dạng $\alpha(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ mà $\varepsilon\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$ thoả mãn $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Như vậy, ta được :

$$\begin{cases} (g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \end{cases}$$

- Với bất kỳ $j \in \{1, ..., p\}$ ta có:

$$\frac{1}{t}(((g \circ f)(a + te_j) - (g \circ f)(a))) = L(e_j) + \frac{|t|}{t}\|e_j\|\varepsilon(te_j) \xrightarrow[\substack{t\to 0 \\ t\in\mathbf{R}}]{} L(e_j).$$

Điều này chỉ ra rằng $g \circ f$ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại mọi điểm a của U và:

$$\forall j \in \{1, ..., p\}, \qquad (\mathrm{D}_j(g \circ f))(a) = L(e_j).$$

Ký hiệu $f_1, ..., f_p$ là các thành phần của f và $g_1, ..., g_n$ là các thành phần của g, và $(g \circ f)_1, ..., (g \circ f)_n$ là các thành phần của $g \circ f$. Với mọi j của $\{1, ..., p\}$ và với ký hiệu theo các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n$, ta có:

$$L(e_j) = (\mathrm{d}_{f(a)}g) \circ (\mathrm{d}_a f)(e_j) = (\mathrm{d}_{f(a)}g)\left(\sum_{k=1}^{p} \mathrm{D}_j f_k(a) e_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{D}_j f_k(a)(\mathrm{d}_{f(a)}g)(e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \mathrm{D}_j f_k(a)\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_k g_i(f(a)) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} \mathrm{D}_k g_i(f(a)) \mathrm{D}_j f_k(a)\right) e_i.$$

Mặt khác do : $\qquad L(e_j) = \sum_{i=1}^{n} D_j(g \circ f)_i(a) e_i$,

ta suy ra:

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., q\},\ D_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^{p} D_k g_i(f(a) D_j f_k(a).$$

• Kết quả trên cho thấy rằng các đạo hàm riêng cấp 1 của $g \circ f$ biểu diễn bởi các tổng của các tích và các hợp của f với các đạo hàm riêng cấp 1 của f và g; từ đó suy ra là các đạo hàm riêng cấp 1 của $g \circ f$ liên tục trên U và vì vậy $g \circ f$ thuộc lớp C^1 trên U.

• Bằng cách chuyển sang ma trận trong các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, ta thu được: $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$ và vì vậy: $d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f)$.

VÍ DỤ :

Cho f: $(x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \in \mathbb{R}^2$ và g: $(u, v) \mapsto g(u, v) \in \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên các miền mở thích hợp. Vậy $g \circ f$ thuộc lớp C^1 và ký hiệu $M = (x, y, z)$:

$$\left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(M), \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(M), \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(M)\right) = J_{g \circ f}(M)$$
$$= J_g\big(f_1(M), f_2(M)\big) J_f(M)$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\big(f_1(M), f_2(M)\big), \frac{\partial g}{\partial v}\big(f_1(M), f_2(M)\big)\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(M) \end{pmatrix},$$

theo đó, chẳng hạn:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial u}\big(f_1(M), f_2(M)\big)\frac{\partial f_1}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(f_1(M), f_2(M)\big)\frac{\partial f_2}{\partial x}(M).$$

Để đơn giản, thường người ta không viết tại điểm *"tại đó ta xét"* mà dùng lẫn lộn u (vị trí, biến), f_1 (hàm), $f_1(x, y, z)$ (thực) để có công thức sau:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, λ: $U \to \mathbb{R}$, f, g: $U \to \mathbb{R}^n$. Nếu λ, f, g đều thuộc lớp C^1 trên U, thì $\lambda f + g$ thuộc lớp C^1 trên U.

Chứng minh:

Ánh xạ $\lambda f + g$ là hợp thành của $U \underset{x \mapsto (\lambda(x), f(x), g(x))}{\longrightarrow} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \underset{(t, u, v) \mapsto tu + v}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ đều thuộc lớp C^1 .

Nhận xét:

Tập hợp $C^1(U)$ các ánh xạ từ U vào $\mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 là một đại số với các luật thông thường (luật thứ 3 là phép nhân).

3) Gradient của một ánh xạ thuộc lớp C^1 trên một miền mở của không gian Euclide

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa** Cho $(E, <\cdot\,,\cdot>)$ là một không gian vectơ Euclide, U là một bộ phận mở của E, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U. Với mỗi a của U tồn tại một và chỉ một phần tử của E, gọi là **gradient của f tại a** và ký hiệu là $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(a)$, sao cho:

$$\forall h \in E, \quad <\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(a), h> = (\mathrm{d}_a f)(h) \quad .$$

Chứng minh:

1) Ta sẽ xây dựng (độc lập với f) một đẳng cấu từ E vào đối ngẫu E^* của E. Với mọi x thuộc E xét $\varphi_x : \underset{y \mapsto <x,y>}{E \to \mathbb{R}}$.

Rõ ràng là với bất kỳ x của E, φ_x tuyến tính:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (y,z) \in E^2,\ \varphi_x(\lambda y + z) = <x, \lambda y + z> = \lambda <x,y> + <x, z> = \lambda \varphi_x(y) + \varphi_x(z)$.

Do đó ta có thể xét ánh xạ $\theta : \underset{x \mapsto \varphi_x}{E \to E^*}$.

• θ là tuyến tính, vì: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x_1, x_2 \in E,\ \forall y \in E$

$$\varphi_{\lambda_{x_1+x_2}}(y) = <\lambda x_1 + x_2, y> = \lambda <x_1, y> + <x_2, y>$$
$$= \lambda \varphi_{x_1}(y) + \varphi_{x_2}(y) = (\lambda \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2})(y).$$

• θ là đơn ánh vì, nếu $x \in E$ sao cho $\varphi_x = 0$ thì $\|x\|^2 = <x, x> = \varphi_x(x) = 0$, nên $x = 0$. Vì E và E^* đều hữu hạn chiều và cùng có số chiều bằng nhau nên θ là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ - kgv (xem thêm Tập 3, Chương 1.4.7, một sự nghiên cứu tương tự).

2) Cho $a \in U$; vì $d_a f \in E^*$ nên theo 1) tồn tại $\omega \in E$ duy nhất sao cho:

$$\forall h \in E,\ <\omega, h> = (d_a f)(h).$$

◆ **Mệnh đề** Xét $\mathbb{R}^p$ được trang bị cơ sở chính tắc $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ và tích vô hướng chính tắc của nó:

$$((x_1, ..., x_p), (y_1, ..., y_p)) \mapsto \sum_{j=1}^{p} x_j y_j \,.$$

Cho U là một miền mở trên $\mathbb{R}^p$, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U. Ta có:

$$\forall a \in U, \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(e_j)\,.$$

Chứng minh:

Với $a \in U$ cố định, với bất kỳ $h = (h_1, ..., h_p)$ của $\mathbb{R}^p$ ta có (xem 1)):

$$(d_a f)(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = <\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j, h>,$$

từ đó, theo tính duy nhất của $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)e_j = \overrightarrow{\text{grad}}f(a)$.

Bài tập

◊ **8.1.1** Đối với ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sau đây, nghiên cứu tính liên tục của f, sự tồn tại, và sự liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1 của f:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} x \sin\dfrac{y}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x} & \text{nếu} \quad y \neq 0 \quad \text{hoặc} \quad x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$d)\ f(x,y) = \text{Max}\big(|x|,|y|\big)$$

$$e)\ f(x,y) = \text{Max}(x^2, y^2).$$

◊ **8.1.2** Cho $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$, sao cho $\varphi(0) = 0$ và $\varphi'(0) \neq 0$ và f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\varphi(y) - y\varphi(x)}{x^2 + y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0.0). \end{cases}$$

Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nhưng không thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

◊ **8.1.3*** Cho I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I^2 \to \mathbb{R}$ liên tục, $F: I^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad F(x,y) = \int_a^x \left(\int_a^y f(u,v)\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u .$$

Chứng minh rằng F thuộc lớp C^1 trên I^2 và tính các đạo hàm riêng cấp 1 của F.

◊ **8.1.4*** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f'(0)$ tồn tại và $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)\mathrm{d}t & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ (y-1)f(0) & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng F thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

b) Xác định f sao cho, với mỗi y của $\mathbb{R}$, $F(x,y)$ độc lập với x.

◊ **8.1.5*** Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi trên $\mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{nếu} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{nếu} \quad x = y. \end{cases}$$

Chứng minh rằng g liên tục trên $\mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

8.1.4 Tính khả vi

§ 8.1.4 này có thể dành cho lần đọc thứ hai. Vấn đề là ở đây, khái niệm vi phân được định nghĩa trong khuôn khổ tổng quát hơn đối với trường hợp các ánh xạ thuộc lớp C^1 đã xét ở 8.1.3.

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở của E, $a \in U$, $f: U \to F$. Ta nói f **khả vi tại** a nếu và chỉ nếu tồn tại $L_a \in \mathcal{L}(E,F)$ sao cho khi ký hiệu $U_0 \in \{h \in E, a+h \in U\}$ thì :

$$\forall h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|).$$

Ta nói f **khả vi** trên U nếu và chỉ nếu f khả vi tại mọi điểm a thuộc U.

Ta nhắc lại là $\mathcal{L}(E, F)$ chỉ tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ E vào F.

Nhận xét 1:
Định nghĩa trên có thể dễ dàng mở rộng cho trường hợp mà số chiều của E hoặc F không hữu hạn, bằng cách thay $\mathcal{L}(E, F)$ bởi $\mathcal{LC}(E, F)$, tập hợp các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F (xem Tập 3, 1.2.6 và Tập 4, Ví dụ 8.1.10 và 8.1.11).

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Với các ký hiệu của định nghĩa trên, nếu f khả vi tại a thì L_a duy nhất. Ánh xạ L_a được gọi là **vi phân của** f **tại** a (hoặc: **ánh xạ tuyến tính tiếp xúc với** f **tại** a) và được ký hiệu bởi d_af.

Chứng minh:
Giả sử hai ánh xạ tuyến tính L_a, M_a đều thoả mãn. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|) \\ f(a+h) = f(a) + M_a(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|) \end{cases},$$

từ đó: $\quad (L_a - M_a)(h) = \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$.

Cho $v \in E - \{0\}$. Với $t \in \mathbb{R}$, ta có: $t(L_a - M_a)(v) = (L_a - M_a)(tv) = \underset{t\to 0}{o}(|t|)$.

từ đó $(L_a - M_a)(v) = \underset{t\to 0}{o}(1)$, $(L_a - M_a)(v) = 0$ vì $(L_a - M_a)(v)$ không phụ thuộc t,

và cuối cùng: $L_a = M_a$. ■

Nếu f khả vi tại a thì ta có: $\quad f(a+h) = f(a) + (d_a f)(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$.

◆ **Định lý 1**
Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a.

Chứng minh:
Vì $\mathrm{d}_a f$ tuyến tính và liên tục (vì E có số chiều hữu hạn) nên ta có

$(\mathrm{d}_a f)(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,

và vì vậy $\quad f(a+h) = f(a) + (d_a f)(h) + o(\|h\|) \xrightarrow[h\to 0]{} f(a)$.

◆ **Định lý 2** Cho U là một bộ phận mở của E, $a \in U$, f: $U \to F$. Nếu f khả vi tại a, thì với mọi v thuộc $E - \{0\}$, f có đạo hàm tại a theo v.

Chứng minh:
Vì f khả vi tại a nên: $\quad f(a+h) = f(a) + (\mathrm{d}_a f)(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$.

Đặc biệt đối với mọi $t \in \mathbb{R}^*$ (sao cho $a + tv \in U$):

$$\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) = \frac{1}{t}\left((\mathrm{d}_a f)(tv) + \underset{t\to 0}{o}(\|tv\|)\right) = (\mathrm{d}_a f)(v) + \underset{t\to 0}{o}(1) \underset{t\to 0}{\to} (\mathrm{d}_a f)(v),$$

vậy f có đạo hàm tại a theo v, và $(D_v f)(a) = (d_a f)(v)$.

◆ **Hệ quả** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, f: $U \to F$. Nếu f khả vi tại a thì f có đạo hàm riêng cấp 1 tại a và:

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (\mathrm{d}_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Chứng minh:

Theo định lý 2, f có đạo hàm riêng cấp 1 tại a và $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (\mathrm{d}_a f)(e_j)$,

trong đó $(e_1, \dots, e_p)$ là cơ sở chính tắc cua $\mathbb{R}^p$.

Từ đó ta suy ra:

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (\mathrm{d}_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j (\mathrm{d}_a f)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Nhận xét 2 :
Có thể có hàm f: $U \to F$ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại a, nhưng không khả vi tại a.

Ví dụ như $f:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } xy \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } xy = 0 \end{cases}\end{array}$ có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (0,0) và

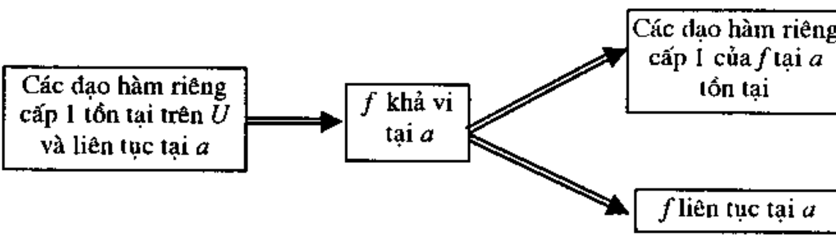
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (vì $f(.,0)=1$ và $f(0,.)=1$) và không khả vi tại (0,0) vì f không liên tục tại (0,0). Xem bài tập 8.1.9.

◆ **Định lý 3** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $a \in U, f: U \to F$.

Nếu $\begin{cases} f \text{ có các đạo hàm riêng cấp 1 trên } U \\ \text{các đạo hàm riêng cấp 1 của } f \text{ liên tục tại } a \end{cases}$

thì f khả vi tại a.

Chứng minh:
Về cơ bản chứng minh giống như chứng minh Mệnh đề 8.1.2. Ta có thể tóm tắt ba định lý trên cho $f: U \to F$, với U là một miền mở của $\mathbb{R}^p$ và $a \in U$,



Nhờ các ví dụ, độc giả có thể dễ dàng nhận thấy là các mệnh đề đảo của các mệnh đề trên đều sai.

◆ **Mệnh đề 2** Cho U là một bộ phận mở của E, $f: U \to F$ khả vi trên U. Để f thuộc lớp C^1 trên U, điều kiện cần và đủ là ánh xạ $\begin{array}{l} U \to \mathcal{L}(E,F) \\ a \mapsto \mathrm{d}_a f \end{array}$ liên tục.

$\mathcal{L}(E,F)$ ở đây được trang bị một chuẩn nào đó, vì E và F có số chiều hữu hạn nên $\mathcal{L}(E,F)$ cũng có số chiều hữu hạn.

Chứng minh:
Giả sử $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$, trường hợp tổng quát cũng đưa về trường hợp này bằng cách lựa chọn các cơ sở.
Chỉ cần chú ý rằng, để ánh xạ $\begin{array}{l} U \to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ a \mapsto J_f(a) \end{array}$ liên tục, điều kiện cần và đủ là với mỗi j thuộc $\{1, ..., p\}$, $D_j f$ liên tục tại a.
Mệnh đề 2 nói trên xác nhận khái niệm *"khả vi liên tục"* đôi khi dùng thay cho: thuộc lớp C^1.

◆ **Định lý 4** Cho U (tương ứng V) là một bộ phận mở của E (tương ứng F), $f: U \to F$, $g: V \to G$. sao cho $f(U) \subset V$ và $a \in U$.

Nếu $\begin{cases} f \text{ khả vi tại } a \\ g \text{ khả vi tại } f(a) \end{cases}$,

thì $g \circ f$ khả vi tại a và: $\mathrm{d}_a(g \circ f) = (\mathrm{d}_{f(a)}g) \circ (\mathrm{d}_a f)$.

Chứng minh:
Về cơ bản chứng minh như chứng minh Định lý ở 8.1.3 2).

Bài tập

◊ **8.1.6** Xét không gian vectơ Euclide thông thường $\mathbb{R}^3$.

Cho $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} & \mapsto & \frac{\vec{x}-\vec{a}}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^2} \end{array}$. Chứng minh rằng tồn tại $f: \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\} \to \mathbb{R}^3$ thuộc lớp C^1 sao cho $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$. Hãy tìm f.

◊ **8.1.7** Cho $n, k \in \mathbb{N}^*$, f_k: $\begin{array}{c} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_n\mathbb{R} \\ X \mapsto X^k \end{array}$. Chứng minh rằng f_k khả vi trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, tính vi phân của nó tại mọi điểm.

◊ **8.1.8** Chứng minh rằng f: $\begin{array}{c} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A \end{array}$ khả vi trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, hãy tính vi phân của nó tại mọi điểm.

◊ **8.1.9** Cho f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng f liên tục tại (0,0).
b) Thiết lập biểu thức chứng tỏ rằng, với mọi v thuộc $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$, f có đạo hàm cấp 1 tại (0,0) theo v.
c) Chứng minh rằng f không khả vi tại (0,0).

◊ **8.1.10*** Cho E là $\mathbb{R}$ - kgv định chuẩn của các dãy số thực $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn, trong đó $\|\cdot\|_\infty$ định nghĩa bởi $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$, φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và f: $E \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\varphi(x_n)$$

(chứng minh sự tồn tại của $f(x)$).
Chứng minh rằng f khả vi (xem chú ý 1) trên E và tính vi phân của nó tại mọi điểm trên E.

◊ **8.1.11*** Cho $E = C([0;1], \mathbb{R})$ được trang bị $\|.\|_\infty$ xác định bởi $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$,

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, $\Phi: E \to \mathbb{R}$ xác được định bởi:

$$\forall f \in E, \qquad \Phi(f) = \int_0^1 \varphi_0 f \qquad \text{(ta sẽ chứng minh sự tồn tại của } \Phi(f)).$$

Chứng minh rằng f khả vi (xem chú ý 1) trên E, và tính vi phân của nó tại mọi điểm trên E.

◊ **8.1.12*** Cho E là một không gian vectơ Euclide, F là một bộ phận đóng không rỗng của E, $f: \underset{x\mapsto d(x,F)}{E \to \mathbb{R}}$

a) Chứng minh rằng $\forall x \in E, \exists\, y \in F,\ f(x) = \|x - y\|$.

b) Cho $x \in E$, giả sử f khả vi tại x và $\overrightarrow{\text{grad}} f(x) \neq \vec{0}$.

α) Chứng minh : $x \notin F$.

β) Chứng minh : $\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$, với mọi y của F sao cho $f(x) = \|x - y\|$.

γ) Thử lại rằng : $\exists!\, y \in F,\ f(x) = \|x - y\|$.

8.1.5 Bất đẳng thức về số gia hữu hạn

Ta nhắc lại, với $(x,y) \in E^2$, đoạn có các mút x và y, ký hiệu là $[x;y]$, là bộ phận của E được định nghĩa bởi $[x;y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y; \lambda \in [0;1]\}$.

◆ **Định lý (Bất đẳng thức về số gia hữu hạn)**

Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U^2$ sao cho $[a; b] \subset U$,

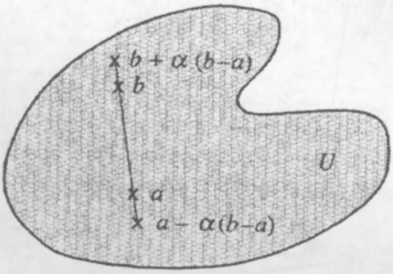
$f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U, $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall x \in [a;b], \quad \sum_{j=1}^{p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \le M .$$

Khi đó : $$\|f(b) - f(a)\| \le M \|b-a\|_\infty$$

với $|b-a|_\infty = \operatorname*{Max}_{1\le j\le p} |b_j - a_j|$, $\quad a = (a_1, ..., a_p);\ b = (b_1, ..., b_p)$.

Chứng minh:



Vì $[a;b] \subset U$ và U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, nên tồn tại $\alpha \in]0;+\infty[$ sao cho:

$\forall t \in]-\alpha; 1+\alpha[$, $a + t(b-a) \in U$

Ánh xạ $\varphi: \begin{array}{l}]-\alpha;1+\alpha[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a+t(b-a)) \end{array}$ thuộc lớp C^1 vì là hợp các ánh xạ thuộc lớp C^1(xem Định lý). Theo định lý về số gia hữu hạn (Tập 1, 5.2.5) hoặc bất đẳng thức về số gia hữu hạn của hàm một biến thực (Tập 3, 2.3.7 Định lý), ta có:

$$|f(b) - f(a)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \le \sup_{t\in[0;1]} |\varphi'(t)| .$$

Và, bằng cách ký hiệu $h = b - a = (h_1, ..., h_p)$ ta có:

$$\forall t \in [0;1], \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th) .$$

Từ đó: $$\sup_{t\in[0;1]} |\varphi'(t)| \le \left(\operatorname*{Max}_{1\le j\le p} |h_j| \right) \sum_{j=1}^{p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th) \right| \le \|h\|_\infty M .$$

Nhận xét:

1) Sự tồn tại của M được bảo đảm (vì f thuộc lớp C^1 trên V) dù phải thay thế U bởi một bộ phận mở bị chặn V sao cho: $[a;b] \subset V \subset \overline{V} \subset U$, vì các đạo hàm riêng cấp 1 của f liên tục trên miền đóng $\overline{V}$ của $\mathbb{R}^p$ (xem Tập 3, 1.3.1 Mệnh đề 5 và 1.3.2, Định lý 2).

2) Ta có thể thay đồng thời $\|.\|_\infty$ trên $\mathbb{R}^p$ và điều kiện bị chặn trên của các đạo hàm riêng cấp một bởi $\|.\|_1$ trên $\mathbb{R}^p$ và điều kiện:

$$\forall x \in [a;b], \quad \underset{1\le j\le p}{\text{Max}}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \le M .$$ ■

Ta nhắc lại là, một bộ phận C của một $\mathbb{R}$- kgv có tính lồi khi và chỉ khi:

$$\forall (x,y) \in C^2, \quad [x;y] \subset C.$$

◆ **Hệ quả 1** Cho U là một bộ phận mở lồi của $\mathbb{R}^p$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U, $M \in \mathbb{R}$ sao cho $\quad \forall x \in U, \quad \sum_{j=1}^{p}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \le M .$

Khi đó f có tính M -Lipschitz, nghĩa là:

$$\forall (x,y) \in U^2, \ | \ f(x)-f(y) \ | \le M\|x-y\|_\infty .$$

◆ **Hệ quả 2** Cho U là một bộ phận mở lồi của $\mathbb{R}^p$, $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\overline{U}$ và thuộc lớp C^1 trên U, $M \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in U, \quad \sum_{j=1}^{p}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \le M .$$

Khi đó f có tính M-Lipschitz (trên $\overline{U}$).

Chứng minh:

Theo hệ quả 1: $\forall (x,y) \in U^2, \ | \ f(x)-f(y) \ | \le M\|x-y\|_\infty$. Do tính liên tục của f trên $\overline{U}$ và U trù mật trong $\overline{U}$, ta suy ra :

$\forall (x,y) \in \left(\overline{U}\right)^2, \ | \ f(x)-f(y) \ | \le M\|x-y\|_\infty .$ ■

Hệ quả 3 sau đây không thuộc chương trình.

◆ **Hệ quả 3** Cho U là một bộ phận mở, liên thông của $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U. Để f không đổi trên U, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall j \in \{1,..., p\}, \quad \forall x \in U, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 .$$

Khái niệm về một bộ phận liên thông của một không gian vectơ định chuẩn đã được định nghĩa ở Tập 3, 1.5.2, Định nghĩa.

Chứng minh:

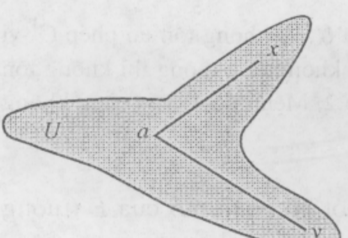
Nếu f không đổi trên U thì rõ ràng là các đạo hàm riêng cấp1 đều bằng không trên U.
Ngược lại, giả sử rằng các đạo hàm riêng cấp 1 đều bằng 0 trên U.
Giả sử $a \in U$, xét $C = \{x \in U, f(x) = f(a)\} = f^{-1}(\{f(a)\})$.

1) $C \neq \varnothing$ vì $a \in C$.

2) C đóng trong U vì ($\{f(a)\}$) đóng trong f và f liên tục (xem Tập 3, 1.2.2.2) Mệnh đề).

3) Ta sẽ chứng minh rằng C mở trong U.

Cho $x \in C$. Vì $C \subset U$ và U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$ nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x;r) \subset U$. Với mọi y thuộc $B(x,r)$, đoạn $[x;y]$ bị chứa trong $B(x,r)$ do đó, trong U.
Theo bất đẳng thức về số gia hữu hạn ta suy ra $f(y) = f(x)$ từ đó $y \in C$.
Điều đó chứng tỏ rằng C là mở trong E, tức là trong U (vì U là một bộ phận mở trong E).
Cuối cùng, C là một bộ phận mở và đóng không rỗng của miền liên thông U, từ đó (xem Tập 3, 1.5.1) $C = U$ và vì vậy f không đổi trên U.



Nhận xét 3:
Nếu bộ phận mở U là hình sao, tức là nếu tồn tại $a \in U$ sao cho $(\forall x \in U, [a; x] \subset U)$, thì chứng minh trên sẽ đơn giản, vì với mọi (x, y) thuộc U^2 theo bất đẳng thức về số gia hữu hạn, $f(x) = f(a)$ và $f(y) = f(a)$, vậy $f(x) = f(y)$.

Bài tập

◊ **8.1.13** Cho ABC là một tam giác trong mặt phẳng Euclide sao cho A, B, C khác nhau từng đôi một; $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Hãy rút gọn :

$$\operatorname{Arccos}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \operatorname{Arccos}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \operatorname{Arccos}\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

◊ **8.1.14*** Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thuộc lớp C^2 sao cho với mọi (x,y) của $\mathbb{R}^2$ $d_{(x,y)}f$ là một phép quay trong $\mathbb{R}^2$. Chứng minh rằng f là một phép quay afin của $\mathbb{R}^2$.

8.1.6 C^1 vi phôi

◆ **Định nghĩa** Cho U (tương ứng V) là một bộ phận mở của E (tương ứng F): $\phi : U \to V$. Ta nói ϕ là một C^1-**vi phôi** (**từ** U **lên** V) khi và chỉ

khi: $\begin{cases} \phi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ \phi \text{ là song ánh} \\ \phi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } V. \end{cases}$

VÍ DỤ :

Cho U là một bộ phận mở của E, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ là một song ánh thì $\phi : \begin{array}{c} U \to (U) \\ x \mapsto \varphi(x) \end{array}$ là một C^1-vi phôi từ U lên $\varphi(U)$.

Chẳng hạn $\phi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array}$ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$.

Nhận xét:

1) • Với mọi bộ phận mở U của E, Id_U là C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$.

• Nếu ϕ: $U \to V$ là một C^1-vi phôi và nếu ψ: $V \to W$ là một C^1-vi phôi thì $\psi \circ \phi$ là một C^1-vi phôi .

• Nếu ϕ: $U \to V$ là một C^1-vi phôi từ U lên V thì ϕ^{-1} là một C^1-vi phôi từ V lên U.

Từ đó rút ra là tập hợp các C^1-vi phôi từ U vào chính nó lập thành một nhóm với luật hợp.

2) Có thể xảy ra là, với hai bộ phận mở của U, V, không tồn tại phép C^1-vi phôi từ U lên V; chẳng hạn nếu U liên thông và V không liên thông thì không tồn tại các phép đồng phôi từ U lên V (xem Tập 3, 1.5.2, Mệnh đề 4) vậy càng không thể tồn tại phép C^1-vi phôi từ U lên V.

◆ **Mệnh đề** Cho U (tương ứng V) là một bộ phận mở của E (tương ứng F) $\phi : U \to V$ là một ánh xạ. Nếu ϕ là một C^1-vi phôi thì:

- $\dim(E) = \dim(F)$.
- Với mọi a thuộc U, $\mathrm{d}_a\phi$ là một đẳng cấu từ E lên F và

$$(\mathrm{d}_a\phi)^{-1} = \mathrm{d}_{\phi(a)}\phi^{-1}.$$

Chứng minh:

Theo 8.1.3.2) Định lý:

$$\begin{cases}\left(\mathrm{d}_{\phi(a)}\phi^{-1}\right)\circ\left(\mathrm{d}_a\phi\right)=\mathrm{d}_a\left(\phi^{-1}\circ\phi\right)=\mathrm{d}_a\left(\mathrm{Id}_U\right)=\mathrm{Id}_E\\ \left(\mathrm{d}_a\phi\right)\circ\left(\mathrm{d}_{\phi(a)}\phi^{-1}\right)=\mathrm{d}_{\phi(a)}\left(\phi^{-1}\circ\phi\right)=\mathrm{d}_a\left(\mathrm{Id}_V\right)=\mathrm{Id}_F.\end{cases}$$

Như vậy, $\mathrm{d}_a\phi$ và $\mathrm{d}_{\phi(a)}\phi^{-1}$ là các đẳng cấu ngược nhau, vậy $\dim(E) = \dim(F)$.

◆ **Định lý (Định lý đảo địa phương)**

Cho U là một bộ phận mở của E, ϕ: $U \to F$ thuộc lớp C^1, $a \in U$. Nếu $\mathrm{d}_a\phi$ là song ánh thì:

- $\dim(E) = \dim(F)$.
- Tồn tại một lân cận mở V của a trong E sao cho ϕ là một C^1-vi phôi từ V lên $\phi(V)$.

Phần kết luận thứ 2 của định lý có nghĩa cụ thể hơn như sau:
Tồn tại một lân cận mở V của a trong E sao cho $\phi(V)$ là một lân cận mở của $\phi(a)$ trong E và cái thu hẹp $\bar{\phi}: \begin{array}{c} V \to \phi(V) \\ x \mapsto \phi(x)\end{array}$ là C^1-vi phôi từ V lên $\phi(V)$.

Chứng minh (có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên):
Bằng cách trang bị cho E và F các cơ sở, rõ ràng là ta có thể đưa về các trường hợp $E = \mathbb{R}^p$ và $F = \mathbb{R}^n$ với các cơ sở chính tắc của chúng và chuẩn $\|\cdot\|_\infty$.

Vì $\mathrm{d}_a\phi$: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ là tuyến tính song ánh nên ta suy ra $p = n$.

1) Rút gọn về một trường hợp đặc biệt

a) Ta sẽ chứng minh rằng có thể đưa về trường hợp $\mathrm{d}_a\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Ký hiệu : $T = \mathrm{d}_a\phi \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.

T^{-1} tồn tại và $T^{-1} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, vậy $\mathrm{d}\phi_{(a)}T^{-1} = T^{-1}$ (xem 8.1.3.1) Mệnh đề). Từ đó suy ra $T^{-1}\circ\phi$ thuộc lớp C^1 trên U và :

$$\mathrm{d}_a(T^{-1}\circ\phi) = (\mathrm{d}_{\phi(a)}T^{-1})\circ(\mathrm{d}_a\phi) = T^{-1}\circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Nếu định lý đã được chứng minh với $T^{-1}\circ\phi$, thì tồn tại một lân cận mở V của a trong E sao cho $T^{-1}\circ\phi$ là một C^1-vi phôi từ V lên $(T^{-1}\circ\phi)(V)$; khi đó rõ ràng rằng ϕ là một C^1-vi phôi từ V lên $\phi(V)$ vì $\phi = T\circ(T^{-1}\circ\phi)$ và T là một C^1-vi phôi từ $(T^{-1}\circ\phi)(V)$ lên $\phi(V)$ (xem nhận xét 1).

b) Ta sẽ chứng minh rằng cũng có thể đưa về trường hợp $a = 0$ và $\phi(a) = 0$.

Xét ψ: $h \to \phi(a+h) - \phi(a)$ thuộc lớp C^1 trên $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^n;\ a+h \in U\}$ vì

$d_0\psi = d_a\phi$ nên $d_0\psi$ là song ánh.

Nếu định lý được chứng minh đối với ψ, thì tồn tại một lân cận mở V_0 của a trong $\mathbb{R}^n$ sao cho ψ là một C^1- vi phôi từ V_0 lên $\psi(V_0)$. Rõ ràng là khi ấy ϕ là một C^1-vi phôi từ $V=\{x \in \mathbb{R}^n;\ x-a \in V_0\}$ lên $\phi(V)=\{y \in \mathbb{R}^n;\ y-\phi(a) \in \psi(V_0)\}$.

Điều này chứng tỏ rằng ta có thể đưa về trường hợp (thuận lợi hơn) $a=0$, $\phi(a)=0$, $d_a\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

2) Xây dựng một song ánh

- Ánh xạ $g: \underset{x \mapsto x-\phi(x)}{U \to \mathbb{R}^n}$ thuộc lớp C^1 trên U và $d_0 g = 0$. Ký hiệu $g_1, \ldots, g_n$ là

các ánh xạ thành phần của g: $\forall x \in U$, $g(x)=(g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Vì g thuộc lớp C^1 trên U và vì : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = 0$ nên tồn tại $r>0$ sao cho :

$$\begin{cases} B'(0,r) \subset U \\ \forall x \in B'(0,r),\quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \le \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$$

Theo Hệ quả 2 với mọi x thuộc $B'(0,r)$ ta có:

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |g_i(x)| = |g_i(x)-g_i(0)| \le n\frac{1}{2n}\|x\|_\infty \le \frac{r}{2},$$

từ đó: $$\|g(x)\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |g_i(x)| \le \frac{r}{2}.$$

Điều này chứng tỏ rằng: $\forall x \in B'(0,r),\ g(x) \in B'(0;\frac{r}{2})$.

- Cho $y \in B'(0;\frac{r}{2})$, xét $g_y: \underset{x \mapsto y+g(x)}{U \to \mathbb{R}^n}$ với mọi x thuộc $B'(0,r)$ ta có:

$$\|g_y(x)\|_\infty = \|y+g(x)\|_\infty \le \|y\|_\infty + \|g(x)\|_\infty \le \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r.$$

Như vậy: $\forall x \in B'(0;r);\ g_y(x) \in B'(0;r)$.

Với mọi (x_1,x_2) thuộc $(B'(0;r))^2$, ta có:

$$\|g_y(x_1)-g_y(x_2)\|_\infty = \|g(x_1)-g(x_2)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|_\infty$$

theo Hệ quả 2 như ở trên.

Điều này chứng tỏ rằng ánh xạ $h_y: \underset{x \mapsto g_y(x)}{B'(0;r) \to B'(0;r)}$ là ánh xạ co. Vì $B'(0;r)$ đủ (vì đóng trong không gian vectơ định chuẩn hữu hạn chiều, xem Tập 3, 1.4.2, Hệ quả), định lý điểm bất động (Tập 3, 1.4.3 Định lý) chỉ ra rằng h_y có một và chỉ một điểm bất động. Vì $h_y(x) = x \Leftrightarrow y = \phi(x)$ nên ta kết luận:

$$\forall y \in B'(0;\frac{r}{2}) \quad \exists! x \in B'(0;r), \phi(x) = y .$$

Như vậy, $\phi^{-1}\left(B'(0;\frac{r}{2})\right) \subset B'(0;r)$ và ánh xạ

$$\phi_1 : \phi^{-1}\left(B'(0;\frac{r}{2})\right) \underset{x \mapsto \phi(x)}{\rightarrow} B'(0;\frac{r}{2})$$

là một song ánh.

3) Các tính chất của ϕ_1^{-1}

***a)* Liên tục:**

Cho $(x_1, x_2) \in (B'(0; r))^2$. Ta có:

$$\|x_1 - x_2\| = \|(\phi(x_1) + g(x_1)) - (\phi(x_2) + g(x_2))\|$$

$$\leq \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

từ đó: $$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|$$

Như vậy, với mọi $(y_1, y_2) \in \left(B'(0;\frac{r}{2})\right)^2$:

$$\|\phi_1^{-1}(y_1) - \phi_1^{-1}(y_2)\| \leq 2\left\|\phi\left(\phi_1^{-1}(y_1)\right) - \phi\left(\phi_1^{-1}(y_2)\right)\right\| = 2\|y_1 - y_2\| .$$

Điều đó chứng tỏ rằng ϕ_1^{-1} là 2–Lipschitz, nên liên tục .

***b)* Tính khả vi**

Ta sẽ thấy ϕ_1^{-1} thuộc lớp C^1 trên một lân cận của 0.

Vì ϕ thuộc lớp C^1 trên U, ánh xạ : $x \mapsto \det(J_\phi(x))$ thuộc lớp C^0 trên U.

Vì $\det(J_\phi(x) = \det(\mathrm{I}_n) = 1 \neq 0$, nên tồn tại $r_1 > 0$ sao cho:

$$\forall x \in B'(0;r_1), \quad \det(J_\phi(x)) \neq 0.$$

Thay r ở phần trên bởi $\mathrm{Min}(r, r_1)$, ta có thể giả sử:

$$\forall x \in B'(0;r), \ \mathrm{d}_x\phi \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$$

Mặt khác, ánh xạ $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^n) \underset{\varphi \mapsto \varphi^{-1}}{\rightarrow} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ liên tục (thực vậy, chuyển qua ma trận cơ sở chính tắc, các hạng tử của ma trận φ^{-1} được biểu thị bằng thương, tổng, tích các hạng tử của ma trận của φ).

Từ đó rút ra, do phép hợp, rằng ánh xạ $B'(0; r) \xrightarrow[x \mapsto (\mathrm{d}_x\phi)^{-1}]{} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ liên tục trên bộ phận đóng bị chặn $B'(0;r)$ của không gian vectơ định chuẩn $\mathbb{R}^n$ hữu hạn chiều.

Theo Tập 3, 1.3.2, Mệnh đề 1, tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall\, x \in B'(0;r),\ |||\, (\mathrm{d}_x\phi)^{-1}\, |||\ \leq M$$

(trong đó, với $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $|||\varphi||| = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbf{R}^n-\{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}$ (xem Tập 3, 1.2.6, Ký hiệu).

Cho $y_0, y \in B'(0;\frac{r}{2})$, $x_0 = \varphi_1^{-1}(y_0)$, $x = \phi^{-1}(\mathrm{y})$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\left\|\phi_1^{-1}(y)-\phi_1^{-1}(y_0)-(\mathrm{d}_{x_0}\phi)^{-1}(y-y_0)\right\| &= \left\|x-x_0-(\mathrm{d}_{x_0}\phi)^{-1}\left(\phi(x)-\phi(x_0)\right)\right\|\\ &= \left\|(\mathrm{d}_{x_0}\phi)^{-1}\left((\mathrm{d}_{x_0}\phi)(x-x_0)-(\phi(x)-\phi(x_0))\right)\right\|\\ &\leq M\left\|\phi(x)-\phi(x_0)-(\mathrm{d}_{x_0}\phi)(x-x_0)\right\|.\end{aligned}$$

Vì ϕ thuộc lớp C^1 trên U, nên ta có:

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (\mathrm{d}_{x_0}\phi)(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left(\|x-x_0\|_\infty\right).$$

Mặt khác ϕ^{-1} là 2–Lipschitz nên $\|x-x_0\|_\infty \leq 2\|y-y_0\|_\infty$. Từ đó suy ra:

$$\phi(x)-\phi(x_0)-(\mathrm{d}_{x_0}\phi)(x-x_0) = \underset{y\to y_0}{o}\left(\|y-y_0\|_\infty\right).$$

Vì thế φ_1^{-1} khả vi tại y_0, do đó tại mọi điểm của $B(0;\ \frac{r}{2})$.

c) **Lớp** C^1

Bằng cách ký hiệu $V = \phi_1^{-1}(B(0;\ \frac{r}{2}))$, và $\phi_2 : \begin{matrix}V \to \phi(V)\\ x\mapsto\phi(x)\end{matrix}$, ϕ_2 thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở của V, song ánh, ϕ_2^{-1} khả vi trên $\phi(V)$= $(B(0;\ \frac{r}{2}))$, và :

$$\forall x\in V,\quad \left(\mathrm{d}_{\phi(x)}\phi_2^{-1}\right)\circ\left(\mathrm{d}_x\phi\right) = \mathrm{d}_x(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Điều này chỉ ra rằng, bằng cách chuyển qua các ma trận Jacobi, các đạo hàm riêng cấp 1 của ϕ_2^{-1} được biểu diễn bằng thương (với mẫu khác 0), tổng, tích, các đạo hàm riêng cấp 1 của ϕ nên đều liên tục. Cuối cùng, ϕ_2^{-1} thuộc lớp C^1 trên $\phi(V)$ và ϕ_2 là một C^1- vi phôi từ V lên $\phi(V)$.

◆ **Hệ quả** Cho U (tương ứng V) là một bộ phận mở của E (tương ứng F), $\phi: U \to V$.

$$\text{Nếu} \begin{cases} \phi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ \phi \text{ là song ánh} \\ \text{Với mọi } a \text{ thuộc } U,\ d_a\phi \text{ là một song ánh từ } E \text{ lên } F \end{cases}$$

$$\text{thì:} \begin{cases} \dim(E) = \dim(F) \\ \phi \text{ là một } C^1\text{-vi phôi từ } U \text{ lên } V. \end{cases}$$

Chứng minh:

Cho $b \in V$. Theo định lý đảo địa phương, áp dụng tại $a = \phi^{-1}(b)$, tồn tại một lân cận U_1 của a trong E, chứa trong U, sao cho ϕ là một C^1-vi phôi từ U_1 lên $\phi(U_1)$. Vậy $\phi(U_1)$ là một lân cận mở của b trong F, và ϕ^{-1} thuộc lớp C^1 trên $\phi(U_1)$.

Vì ϕ^{-1} thuộc lớp C^1 trên miền lân cận của mọi điểm của V, từ đó suy ra dễ dàng rằng ϕ^{-1} thuộc lớp C^1 trên V.

Nhận xét:

Hệ quả trên có ích, nhất là trong trường hợp ϕ^{-1} khó "*biểu diễn*" hoặc không biểu diễn được.

VÍ DỤ:

1) **Đổi biến afin**

Nếu $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là afin song ánh, thì ϕ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^n$ lên $\mathbb{R}^n$; thật vậy, ϕ thuộc lớp C^1 song ánh và, bằng cách ký hiệu $\vec{\phi}$ là ánh xạ tuyến tính tương ứng với ϕ (xác định bởi: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\phi}(x) = \phi(x) - \phi(0)$), ta có:

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}_a\phi = \vec{\phi} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n).$$

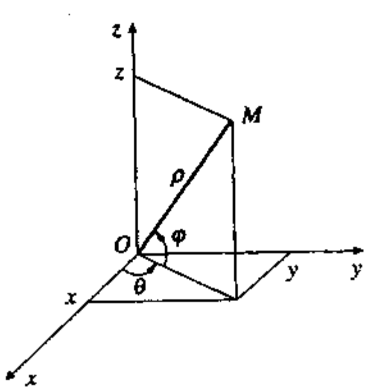
Ví dụ: $\phi: \underset{(x,y) \mapsto (3+x+y,\, 2-x+y)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ là C^1- vi phôi.

Ta cũng có thể đơn giản lưu ý rằng ϕ và ϕ^{-1} đều là afin và song ánh.

2) Chuyển sang toạ độ cầu

Cho $U =]-\pi;\pi[\ \times\ ]0;+\infty[\ \times\ ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

$V = \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$.



Ta chứng minh dễ dàng rằng ánh xạ: ϕ. $U \to V$ xác định bởi

$$\phi(\theta,\rho,\varphi) = (\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$$

thuộc lớp C^1 và song ánh.

Hơn nữa, với mọi (θ, ρ, φ) thuộc U ta có:

$$\det\left(J_\phi(\theta,\rho,\varphi)\right) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\cos\varphi \neq 0$$

Theo hệ quả trên ϕ là một C^1- vi phôi từ U lên V.

Bài tập

◊ **8.1.15** Cho ϕ: $\underset{(x,y,z)\mapsto(x+y^2,y+z^2,z+x^2)}{\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3}$. Chứng minh rằng tồn tại $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(1,1,1)$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(2,2,2)$ sao cho $\phi(U) = V$ và rằng ϕ_1 : $\underset{(x,y,z)\mapsto\phi(x,y,z)}{U \to V}$ là một C^1-vi phôi từ U lên V; tính ma trận Jacobi của ϕ_1^{-1} tại (2,2,2).

◊ **8.1.16** Chứng minh rằng ϕ: $\underset{(x,y)\mapsto(e^x-e^y,x+y)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$.

◊ **8.1.17** Chứng minh rằng ϕ: $\underset{(x,y)\mapsto(x^3+3xe^y,y-x^2)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$.

◊ **8.1.18** Chứng minh rằng ϕ: $\underset{(x,y)\mapsto(e^x\cos y,\ e^x\sin y)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ là đơn ánh địa phương (nghĩa là: với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2$ tồn tại $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(x,y)$ sao cho $\phi|_U$: $\underset{(x,y)\mapsto\phi(x,y)}{U \to \mathbb{R}^2}$ là đơn ánh), nhưng không phải là đơn ánh.

◊ **8.1.19** Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x,y) = \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}, (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})\right).$$

a) Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên U^2, và tính Jacobien của f tại mọi điểm (x,y) của $\mathbb{R}^2$.

b) *α)* Xác định $f(\mathbb{R}^2)$.

β) f có phải là một C^1- vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $f(\mathbb{R}^2)$ không?

◊ **8.1.20** Với $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, ta ký hiệu $f_{a,b}$: $\underset{(x,y)\mapsto(x+a\sin y,y+b\sin x)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$.

a) Chứng minh rằng, với mọi $(a,b) \in \mathbb{R}^2, f_{a,b}$ là toàn ánh.

b) Tìm điều kiện cần và đủ để $f_{a,b}$ là đơn ánh.

c) Tìm điều kiện cần và đủ để $f_{a,b}$ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$.

◊ **8.1.21** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ và $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \phi(x,y) = (f(x), y - xf(x))$.

Chứng minh rằng ϕ là một C^1–vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

8.1.7 Ví dụ về giải phương trình đạo hàm riêng cấp 1

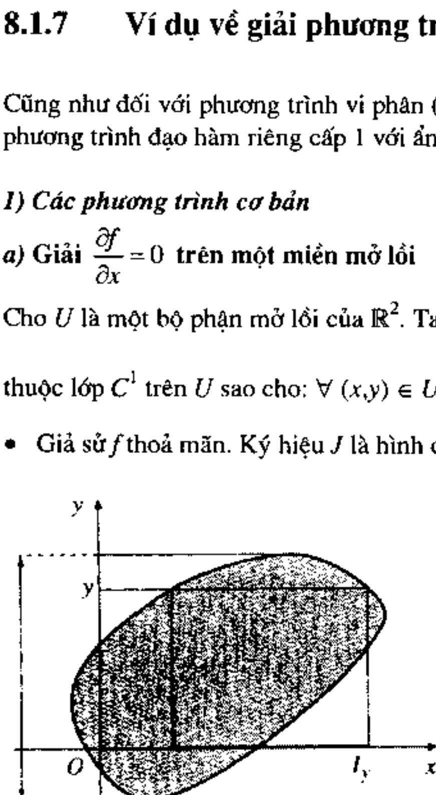
Cũng như đối với phương trình vi phân (chương 7) ở đây chúng ta quan tâm tới các phương trình đạo hàm riêng cấp 1 với ẩn là một hàm nhiều biến nhận giá trị thực.

1) Các phương trình cơ bản

***a)* Giải $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ trên một miền mở lồi**

Cho U là một bộ phận mở lồi của $\mathbb{R}^2$. Ta muốn xác định tất cả các ánh xạ f: $U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U sao cho: $\forall\, (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.

- Giả sử f thoả mãn. Ký hiệu J là hình chiếu thứ 2 của U, nghĩa là:



$J = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ (x,y) \in U\}$.

Vì U mở nên J cũng mở. Cho $y \in J$. Vì U lồi nên tập hợp $\{x \in \mathbb{R}; (x,y) \in U\}$ là một khoảng được ký hiệu là I_y.

Ta có:

$$\forall x \in I_y,\ \ \left(f(.,y)'\right)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\,.$$

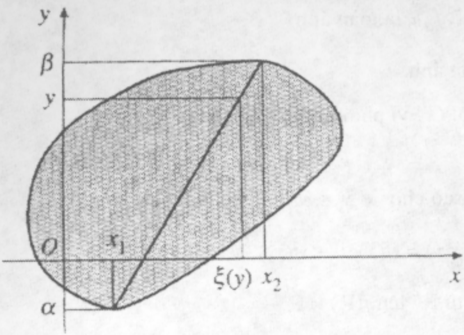
Vậy, tồn tại một số thực duy nhất, ký hiệu $A(y)$, sao cho

$$\forall\, x \in I_y,\ \ (f(.,y))(x) = A(y).$$

Như vậy : $\forall (x,y) \in U, f(x,y) = A(y)$.

Cuối cùng, cần chứng minh rằng A thuộc lớp C^1 trên J.

Trong trường hợp J bị chặn, $J =]\alpha,\beta[$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, tồn tại $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x_1,\alpha) \in \overline{U}$ và $(x_2,\beta) \in \overline{U}$; ký hiệu ξ: $J \to \mathbb{R}$ là ánh xạ mà với y thuộc J đặt



tương ứng với số thực $\xi(y)$ sao cho $(\xi(y),y)$ thuộc đoạn thẳng nối liền (x_1,α) và (x_2,β).

Rõ ràng ξ thuộc lớp C^1, vì $\forall\ y \in J$, $A(y) = f(\xi(y),y)$ nên A thuộc lớp C^1 trên J. Độc giả tiến hành tương tự với lập luận trên để chứng minh cho trường hợp J không bị chặn.

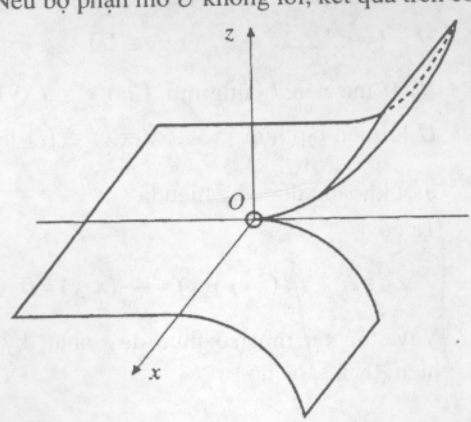
• Đảo lại, hiển nhiên là với mọi ánh xạ A: $J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên J, ánh xạ $f: \begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto A(y) \end{array}$ là thuộc lớp C^1 trên U và thoả mãn phương trình đạo hàm riêng cấp 1 (PTĐHR1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Tóm lại:

Nếu U là một bộ phận mở lồi của $\mathbb{R}^2$, các nghiệm $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 của PTĐHR1 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ là các ánh xạ $f: \begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto A(y) \end{array}$, mà A: $J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 và J là hình chiếu thứ 2 của U.

Đương nhiên là ta có các kết quả tương tự đối với PTĐHR1 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, cũng như các kết quả tương tự đối với trường hợp nhiều (≥ 3) biến.

Nếu bộ phận mở U không lồi, kết quả trên có thể sai, như trong ví dụ sau:



Xét $U = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$ và f: $U \to \mathbb{R}$ được xác định bởi :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad y < 0 \\ -y^2 & \text{nếu} \quad (x > 0 \text{ và } y \geq 0) \\ y^2 & \text{nếu} \quad (x < 0 \text{ và } y \geq 0) \end{cases}$$

Rõ ràng là f thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở (hình sao) U và thoả mãn

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 .$$

Trong khi đó không tồn tại ánh xạ $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall\ (x,y) \in U, \quad f(x,y) = A(y), \text{ bởi vì chẳng hạn } f(1,1) \neq f(-1,1).$$

b) Giải $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g$ **trên một pave mở**

Cho I, J là hai khoảng mở không rỗng trong $\mathbb{R}$, $U = I \times J$; g: $U \to \mathbb{R}$ liên tục. Ta muốn xác định các ánh xạ $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y).$$

- Giả sử f thoả mãn. Với bất kỳ y thuộc J, ta có:

$\forall x \in I, \big(f(.,y)\big)'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$, từ đó :

$$\forall x \in I, (f(.,y))(x) = (f(.,y)(x_0) + \int_{x_0}^{x} (f(.,y))'(t)\mathrm{d}t = f(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} g(t,y)\mathrm{d}t,$$

trong đó $x_0 \in I$ là cố định bất kỳ.

Vậy f có dạng $f: (x,y) \mapsto A(y) + \int_{x_0}^{x} g(t,y)\mathrm{d}t$, trong đó $x_0 \in I$ và A: $J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên J.

- Đảo lại, với mọi $x_0 \in I$ và mọi ánh xạ A: $J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên J ánh xạ $f: \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto A(y) + \int_{x_0}^{x} g(t,y)\mathrm{d}t \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên U và có:

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$$

bằng cách sử dụng các tích phân coi như hàm của cận trên (xem Tập 1, 6.4.1, Hệ quả 1) và định lý về đạo hàm dưới dấu $\int$ (xem Tập 3, 2.3.12.2) Định lý).

Như vậy, nghiệm tổng quát của PTĐHR1: $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ (f không biết, g đã cho) thu được bằng cách lấy nguyên hàm g theo x rồi cộng với một hàm bất kỳ thuộc lớp C^1 có biến là y. Kết quả trên được mở rộng dễ dàng cho trường hợp nhiều (≥ 3) biến.

VÍ DỤ:

Nghiệm tổng quát của PTĐHR1: $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$ trên $\mathbb{R}^2$ (ở đây f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 là ẩn) là $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^3}{3} + xy^2 + A(y) \end{array}$, trong đó A: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

2) Các PTĐHR1 khác

Trong bài toán tổng quát sẽ chỉ ra một cách đổi biến (từ đó có sự biến đổi của hàm chưa biết) cho phép đưa về các phương trình cơ bản ở 1). Thường thì dẫn đến việc phải tìm các đạo hàm riêng cấp 1 của một hàm hợp (xem 8.1.3.2) Định lý).

VÍ DỤ :

Tìm tất cả các ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ thoả mãn:

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y\,,$$

bằng cách đổi biến $X = x$; $Y = x + 2y$.

Ánh xạ $\phi : (x,y) \mapsto (x, x + 2y)$ rõ ràng là một C^1- vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$ (xem 8.1.6, Ví dụ 1). Đặt f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F = f \circ \phi^{-1}$ ta có:

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = F(x, x+2y),$$

hay là $\quad (x,y) \overset{\phi}{\mapsto} (x, x+2y) \overset{F}{\mapsto} F(x, x+2y) \;=\; f(x,y)\,.$

Hơn nữa, F thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

Theo 8.1.3.2) Định lý ta có (với các ký hiệu lạm dụng cổ điển):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X}.\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}.\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X} + \dfrac{\partial F}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial X}.\dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}.\dfrac{\partial Y}{\partial y} = 2\dfrac{\partial F}{\partial Y}. \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra f là nghiệm trên $\mathbb{R}^2$ của $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 y$ khi và chỉ khi F là nghiệm trên $\mathbb{R}^2$ của: $\qquad 2\dfrac{\partial F}{\partial X} = \dfrac{1}{2}X^2(Y - X)\,.$

Theo 1) nghiệm tổng quát của F được cho bởi:

$$F(X,Y) \;=\; -\frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{12}X^3 Y + A(Y)\,,$$

trong đó A: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ thuộc lớp C^1.

Nghiệm tổng quát của PTĐHR1 cần xét là:

$$f : (x,y) \;\mapsto\; \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{16}x^3 y + A(x + 2y)\,,$$

trong đó A: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm bất kỳ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét:

Ký hiệu ϕ: $(x,y) \mapsto (X,Y)$ là phép biến đổi đưa ra, f là hàm chưa biết, và $F = f\circ\phi^{-1}$, thường ta phải thay thế vào PTĐHR1 của bài toán các đạo hàm riêng cấp 1 của f tính theo các đạo hàm riêng cấp 1 của F và ta sẽ sử dụng đạo hàm riêng cấp 1 của hàm hợp dưới dạng :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X}.\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}.\dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial X}.\dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}.\dfrac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases}$$

Bài tập

◊ **8.1.22** Giải các PTĐHR1 sau đây, ẩn là f: $U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở của U được chỉ ra nhờ phép biến đổi cho biết:

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}$, $\quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$

c) $(x+y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y\}$, $\begin{cases} u = x^2 - 2xy - y^2 \\ v = y \end{cases}$

d) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy^2$, $\quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$

e) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = af$ $\quad a \in \mathbb{R}$ cố định,

$U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ bằng cách chuyển sang toạ độ cực

f) $2x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y(1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$, $y = \dfrac{u}{v}$, $v > 0$.

◊ **8.1.23** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(A_1, ..., A_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $A_1 \neq 0$, (E) PTĐHR1:

$$\text{(E)} \quad \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

trong đó: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm chưa biết, giả sử thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng, tồn tại $M(m_{ij})_{ij} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ sao cho phép đổi biến xác định bởi:

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ \ X_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$$

đưa (E) về PTĐHR1 (F) $\dfrac{\partial F}{\partial X_i} = 0$, trong đó ta ký hiệu

$F(X_1, ...X_n) = f(x_1, ..., x_n)$.

Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của (E) trên $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ: Giải PTĐHR 1 $\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} + 3\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$,

trong đó f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^3$ là hàm chưa biết.

8.2 Đạo hàm riêng cấp cao

8.2.1. Định nghĩa

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $f: U \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$

$(i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., p\}^k$

1) Cho $a \in U$, ta nói là f có **đạo hàm riêng cấp k tại a đối với các vị trí $i_1, ..., i_k$ liên tiếp** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \bullet \dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right), \ \dots \ , \dfrac{\partial}{\partial x_{i_k -1}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_k -2}}\left(\dots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\dots\right)\right) \\ \text{tồn tại trên một lân cận của } a \\ \bullet \dfrac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_k -1}}\left(\dots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\dots\right)\right)(a) \ \text{ tồn tại.} \end{cases}$$

Trong trường hợp này, phần tử $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\dots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\dots\right).(a)$ của $\mathbb{R}^n$ được

ký hiệu là $D_{i_1 \dots i_k} \ f(a)$ hay $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)$ hay $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(a)$ và

được gọi là **đạo hàm riêng cấp k của f tại a đối với các vị trí $i_1, ..., i_k$ liên tiếp.**

2) Ánh xạ $a \mapsto D_{i_1 \dots i_k} \ f(a)$ (đã được định nghĩa trên một bộ phận của U) được gọi là **ánh xạ đạo hàm riêng cấp k của f đối với các vị trí $i_1, ..., i_k$ liên tiếp** và được ký hiệu bởi $D_{i_1, \dots i_k} \ f$ hay

$\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ hay $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$.

8.2.2 Ánh xạ thuộc lớp C^k trên một miền mở

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $f: U \to \mathbb{R}^n$.

1) Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Ta nói f **thuộc lớp** C^k trên U khi và chỉ khi f có các

đạo hàm riêng liên tiếp trên U đến cấp k đối với mọi vị trí và nếu các đạo hàm riêng liên tiếp này đều liên tục trên U.

2) Ta nói f **thuộc lớp** C^∞ trên U khi và chỉ khi f có các đạo hàm riêng liên tiếp trên U đến mọi cấp và nếu các đạo hàm riêng liên tiếp này liên tục trên U.

Nhận xét:

1) Nếu f thuộc lớp C^k trên U, thì đối với mọi m của $\mathbb{N}$ sao cho $m \le k$, f thuộc lớp C^m trên U.

2) Để f thuộc lớp C^∞ trên U, điều kiện cần và đủ là f thuộc lớp C^k trên U với bất kỳ k thuộc $\mathbb{N}^*$.

◆ **Mệnh đề** Cho $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $\lambda: U \to \mathbb{R}$ $f, g: U \to \mathbb{R}^n$. Nếu λ, f, g đều thuộc lớp C^k trên U thì $\lambda f + g$ thuộc lớp C^k trên U.

Chứng minh:

Lập luận tương tự như trong chứng minh Mệnh đề 1 ở 12.4.2 Tập 2, bằng quy nạp.
Tính chất trên đã đúng với $k = 1$ (xem 8.1.3.2) Mệnh đề). Giả sử nó đúng với một k thuộc $\mathbb{N}^*$ và giả sử $\lambda: U \to \mathbb{R}$; $f, g: U \to \mathbb{R}^n$ thuộc lớp C^{k+1} trên U.

Thế thì (trường hợp $k = 1$) $\lambda f + g$ thuộc lớp C^1 trên U và các đạo hàm riêng cấp 1 của $\lambda f + g$ được biểu diễn bằng tích và tổng của λ, f, g và các đạo hàm riêng cấp 1 của λ, f, g.

Vì λ, f, g và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng đều thuộc lớp C^k trên U, vậy $\lambda f + g$ thuộc lớp C^{k+1} trên U.

Trường hợp $k = +\infty$ được suy ra từ kết quả đối với $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi k.

Trường hợp riêng, nếu như các hàm thành phần của f là các hàm đa thức, thì f thuộc lớp C^∞ ; ví dụ như :

$$f: \begin{array}{c}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto ((x^2y+z^2, xyz^3-x^2)\end{array} \quad \text{thuộc lớp } C^\infty \text{ trên } \mathbb{R}^3.$$

Nhận xét:

Tập hợp $C^k(U)$ các ánh xạ từ U vào $\mathbb{R}$ thuộc lớp C^k trên U là một đại số với các luật thông thường (luật thứ 3 là phép nhân).

◆ **Định lý** Cho U (tương ứng V) là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^q$ (tương ứng $\mathbb{R}^p$), $f: U \to \mathbb{R}^p$; $g: V \to \mathbb{R}^n$ sao cho $f(U) \subset V$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Nếu f và g đều thuộc lớp C^k tương ứng trên U và V thì $g \circ f$ thuộc lớp C^k trên U.

Chứng minh : (có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên):

Lập luận tương tự như trong chứng minh Mệnh đề 2 của 12.4.2 Tập 2.

Trường hợp $k = 1$ đã được nghiên cứu ở (8.1.3.2) Định lý). Giả sử $k \geq 2$

Như vậy $g \circ f$ thuộc lớp C^1 (trường hợp $k = 1$) và các đạo hàm riêng cấp 1 của $g_o f$ được biểu diễn bởi tổng, tích, hợp của f và các đạo hàm riêng cấp 1 của f và g (xem 8.1.3.2) Định lý). Vì f và các đạo hàm riêng của f và g đều thuộc lớp C^{k-1} nên suy ra (xem mệnh đề trên) là các đạo hàm riêng cấp 1 của $g \circ f$ thuộc lớp C^{k-1}, vậy $g \circ f$ thuộc lớp C^k.

Trường hợp $k = +\infty$ được suy ra từ kết quả ứng với $k \in \mathbb{N}^*$ với mọi k.

8.2.3 Đổi thứ tự lấy đạo hàm

◆ **Định lý** (**Định lý Schwarz**)

Cho U, một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, f: $U \to \mathbb{R}^n$, $a \in U$, $(i, j) \in \{1, ..., p\}^2$.

$$\text{Nếu } \begin{cases} f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ f''_{x_i x_j} \text{ và } f''_{x_j x_i} \text{ tồn tại trên } U \\ f''_{x_i x_j} \text{ và } f''_{x_j x_i} \text{ liên tục tại } a \end{cases}, \quad \text{thì } f''_{x_i x_j}(a) = f''_{x_j x_i}(a).$$

Chứng minh:

Chỉ cần áp dụng định lý Schwarz cho một hàm từ một tập mở của $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}$ (xem Tập 2, 12.4.3 Định lý) đối với các hàm thành phần của

$$(x_i, x_j) \mapsto (f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ... a_p),$$

trong đó ta đã ký hiệu $(a_1, ..., a_p) = a$ và giả sử chẳng hạn $i < j$.

◆ **Hệ quả** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, f: $U \to \mathbb{R}^n$ thuộc lớp C^k trên U. Với mọi N thuộc $\{2, ..., k\}$, mọi $(i_1, ..., i_N)$ thuộc $\{1, ..., p\}^N$ và mọi hoán vị σ của $\{1, ..., N\}$, ta có:

$$f^{(N)}_{x_{i_1} \cdots x_{i_N}} = f^{(N)}_{x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(N)}}}.$$

Nói cách khác, nếu f thuộc lớp C^k, trong phép tính các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k, thì thứ tự lấy đạo hàm là không quan trọng.

Bài tập

◊ **8.2.1** Cho f: $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, xác định bởi :

$$f(x,y,z) = \text{Arctan}\left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$ Chứng minh rằng f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^3$

và tính $\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}$.

Ta nhắc lại (xem Tập 2, 12.8.1, Định nghĩa, bài tập 12.8.2) rằng, với $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, ta gọi là **Laplacien** của f và ký hiệu là Δf ánh xạ $\Delta f: U \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\Delta f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$; ta nói f có **tính điều hoà trên** U khi và chỉ khi f thuộc lớp C^2 trên U và $\Delta f = 0$.

◊ **8.2.2** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \left(i \neq j \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} + a_{ji} = 0 \\ a_{ii} = a_{jj} \end{cases} \right),$$

U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^3 trên U và điều hoà trên U,

$F = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Chứng minh rằng F có tính điều hoà trên U.

Ví dụ: 1) $F = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 2) $n = 2$, $F = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$.

◊ **8.2.3** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, U là một bộ phận mở trên $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$.

a) Giả sử f thuộc lớp C^3 và điều hoà. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ là điều hoà (xem cả bài 8.2.2).

b) Giả sử f thuộc lớp C^4 và điều hoà và ký hiệu $R = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Chứng minh rằng $\Delta(Rf)$ là điều hòa.

◊ **8.2.4** Xác định tất cả các ánh xạ φ: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 sao cho ánh xạ $f: (x,y,z) \mapsto \varphi(\frac{x^2+y^2}{z^2})$ có tính điều hoà trên $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \neq 0 \text{ và } z \neq 0\}$.

◊ **8.2.5** Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

b) Chứng minh rằng $f''_{xy}(0,0)$ và $f''_{yx}(0,0)$ tồn tại và bằng nhau.

c) Chứng minh rằng f''_{xy} và f''_{yx} đều không liên tục tại (0,0).

◊ **8.2.6** Xác định lớp chính xác của các ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sau đây:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+(y-x^2)^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^{x^2}-1)(e^{y^2}-1)}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d) $f(x,y) = x.\varphi(y)+y.\varphi(x)$, trong đó $\varphi: t \mapsto \begin{cases} t^4 \sin\dfrac{1}{t} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$.

◊ **8.2.7** Chứng minh rằng $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x-e^y}{x-y} & \text{nếu } x \neq y \\ e^x & \text{nếu } x = y \end{cases} \end{array}$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^2$.

◊ **8.2.8** Xác định lớp hàm của $f: \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[^2 \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y} & \text{nếu} \quad x \neq y \\ \cos^3 x & \text{nếu} \quad x = y \end{cases}.$$

◊ **8.2.9*** Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2y^2}}}{e^{-\frac{1}{x^4}} + e^{-\frac{1}{y^4}}} & \text{nếu} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad xy = 0 \end{cases}.$$

*a)** Chứng minh rằng f có các đạo hàm riêng liên tiếp đến tất cả các cấp với tất cả các vị trí tại (0,0).
b) Chứng minh rằng f không liên tục tại (0,0).

◊ **8.2.10*** Khảo sát sự hội tụ của dãy ánh xạ $\sum_{n\geq 1} f_n$ sau đây và xác định lớp hàm của tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$: *a)* $f_n: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{-n(x^2+y^2)} \end{array}$ *b)* $f_n: \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{1+n^x}{1+n^y} \end{array}$.

8.2.4 C^k-vi phôi

◆ **Định nghĩa** Cho $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, U (tương ứng V) là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$ (tương ứng $\mathbb{R}^n$). Ta nói rằng ϕ là một **C^k-vi phôi (từ U lên V)**

khi và chỉ khi: $\begin{cases} \phi \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } U \\ \phi \text{ là song ánh} \\ \phi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } V. \end{cases}$

Định nghĩa này tổng quát hoá định nghĩa ở 8.1.6.

Nhận xét:
Các chú ý ở 8.1.6 vẫn đúng ở đây bằng cách thay C^1 bằng C^k.

◆ **Định lý** Cho U (tương ứng V) là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$ (tương ứng $\mathbb{R}^n$) $\phi : U \to V$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Nếu $\left|\begin{cases} \phi \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } U \\ \phi \text{ là song ánh} \\ \text{Với bất kỳ } a \in U, \mathrm{d}_a\phi \text{ là một song ánh từ } \mathbb{R}^p \text{ lên } \mathbb{R}^n \end{cases}\right|,$

thì $n = p$ và ϕ là một C^k–vi phôi từ U lên V.

Chứng minh:
Theo (8.1.6 Hệ quả) ϕ là một C^1-vi phôi từ U lên V, vì $\mathrm{d}\phi_{(a)}\phi^{-1} = (\mathrm{d}_a\phi)^{-1}$ nên các đạo hàm thành phần của các đạo hàm riêng cấp 1 của ϕ^{-1} biểu diễn được bằng các tổng của các tích và các hợp của ϕ và các đạo hàm riêng cấp 1 của ϕ. Vì ϕ thuộc lớp C^k nên suy ra (xem 8.2.3) là các hàm thành phần của các đạo hàm riêng cấp 1 của ϕ^{-1} thuộc lớp C^{k-1}, vậy ϕ^{-1} thuộc lớp C^k.

Nhận xét:
Định lý trên có ích nhất là trong trường hợp ϕ^{-1} khó biểu diễn hoặc không biểu diễn được.

Bài tập

◊ **8.2.11** Cho $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x > 0,\, x + y > 0\}$, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x+y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}).$$

a) Xác định $f(U)$.

b) Chứng minh rằng f là một C^∞-vi phôi từ U lên $f(U)$.

◊ **8.2.12** Cho $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y^2\}$, $f: U \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y) = (x, xy - \frac{y^3}{3}).$$

a) Xác định $f(U)$.

b) Chứng minh rằng f là một C^∞-vi phôi từ U lên $f(U)$.

8.2.5 Ví dụ về giải phương trình đạo hàm riêng cấp ≥ 2

Tương tự như ở 8.1.7, ở đây chúng ta quan tâm tới các phương trình đạo hàm riêng cấp ≥ 2, mà ẩn là một hàm nhiều biến và nhận các giá trị thực.

1) Các phương trình cơ bản

a) Giải $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g$ trên một pave mở

Cho I, J là hai khoảng mở không rỗng, $U = I \times J$, $g: U \to \mathbb{R}$ liên tục. Theo 8.1.7 1)b) nghiệm tổng quát của $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = g$ (trong đó $f_1: U \to \mathbb{R}$ là ẩn, thuộc lớp C^1 trên U) có được bằng cách *"lấy nguyên hàm của g theo x"* rồi cộng với một hàm bất kỳ thuộc lớp C^1 có biến là y.

Rồi nghiệm tổng quát của $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1$ cũng thu được theo cùng phương pháp.

Như vậy, ta sẽ có $f(x,y) = G_1(x,y) + A(y)x + B(y)$, trong đó G_1 thu được bằng cách "lấy nguyên hàm của g hai lần theo biến x", và trong đó A, B là các hàm bất kỳ thuộc lớp C^2 trên J.

VÍ DỤ:

Tìm tất cả các ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 sao cho $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy$.

Trước hết ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2}{2} y + A(y)$, A: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1; tiếp đó :

$f(x,y) = \dfrac{x^3}{6} y + xA(y) + B(y)$, A, B: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bất kỳ thuộc lớp C^2.

b) Giải $\dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = h$ trên một pave mở

Cũng như ở trrên, ta có $f(x,y) = H_1(x,y) + A(x) + B(y)$, trong đó H_1 thu được bằng cách "lấy nguyên hàm của h theo x rồi theo y" và A, B bất kỳ thuộc lớp C^2.

VÍ DỤ: Giải $\dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = 0$, trong đó f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là ẩn, thuộc lớp C^2.

Nghiệm tổng quát là $f : \underset{(x,y) \mapsto A(x)+B(y)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ trong đó $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

2) Các PTĐHR khác

Trong bài toán tổng quát sẽ chỉ ra một cách đổi biến (từ đó có sự biến đổi của hàm chưa biết) cho phép đưa về trường hợp 1). Thường dẫn tới việc tách các đạo hàm riêng liên tiếp của một hàm hợp.

VÍ DỤ:

1) Tìm tất cả các ánh xạ $f: \underset{(x,t)\mapsto f(x,t)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ sao cho:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, (trong đó $c > 0$ cố định); bằng cách đổi biến: $X = x + ct; Y = x - ct$.

Ánh xạ $\phi: (x,t) \mapsto (x + ct, x - ct)$ là một C^2-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$ (xem 8.2.4 Định lý).

Ký hiệu f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F = f \circ \phi^{-1}$, ta có:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,t) = F(x + ct, x - ct)$$

hoặc là:
$$(x,t) \overset{\phi}{\mapsto} (x + ct,\ x - ct) \overset{F}{\mapsto} F(x + ct,\ x - ct) = f(x,t).$$

Hơn nữa, F thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$.

Theo 8.1.3.2) Định lý ta có, với các ký hiệu lạm dụng cổ điển:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X}\cdot\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}\cdot\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X} + \dfrac{\partial F}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial X}\cdot\dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}\cdot\dfrac{\partial Y}{\partial y} = c\dfrac{\partial F}{\partial X} - c\dfrac{\partial F}{\partial Y} \end{cases}$$

Tiếp theo, vẫn theo 8.1.3.2) Định lý và sử dụng định lý Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, \end{aligned}$$

và cũng như vậy : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2} - 2c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} + c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial Y^2}$.

Do đó f là nghiệm trên $\mathbb{R}^2$ của PTĐHR2 nêu trên khi và chỉ khi F là nghiệm trên $\mathbb{R}^2$

của $\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0$.

Ta thấy (1)*h*)) rằng nghiệm tổng quát của $\dfrac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0$ trên $\mathbb{R}^2$ là F:$(X,Y) \mapsto A(X) + B(Y)$,

trong đó A, B: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

Cuối cùng, nghiệm tổng quát của PTĐHR2 đã cho là: $f: \underset{(x,t)\mapsto A(x+ct)+B(x-ct)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ trong

đó A, B: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cũng thuộc lớp C^2.

2) Tìm tất cả các ánh xạ $f:\ U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 thoả mãn:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

bằng cách đổi biến $u = x$; $v = \dfrac{y}{x}$.

Ánh xạ $\phi: \underset{(x,y)\mapsto(x,\frac{y}{x})}{U \to U}$ rõ ràng là một song ánh, có ánh xạ ngược $\phi^{-1}: \underset{(u,v)\mapsto(u,uv)}{U \to U}$.

Vì hơn nữa, ϕ và ϕ^{-1} đều thuộc lớp C^2 trên U nên ϕ là một C^2-vi phôi từ U lên U.
Ký hiệu $f: U \to \mathbb{R}$, $F = f\circ\phi^{-1}$, ta có:

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = F(x, \frac{y}{x}).$$

Hơn nữa, F thuộc lớp C^2 trên U khi và chỉ khi f thuộc lớp C^2 trên U. Với các ký hiệu lạm dụng cổ điển, ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial v}. \end{cases}$$

Muốn tính các đạo hàm riêng cấp 2, ta có thể, theo ví dụ trên, giữ nguyên x, y trong các biểu thức cho $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, hoặc nếu có thể, biểu diễn x, y thành các hàm của u, v.

Trong ví dụ này, cả hai cách đều có thể thực hiện. Ta thu được nhờ định lý Schawrz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right) + \dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{y}{x^2}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Vậy f là nghiệm trên U của PTĐHR2 đã cho khi và chỉ khi F là nghiệm trên U của $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$ sau khi giản ước.

Nghiệm tổng quát trên U của $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$ theo 1) *a)* là

F: $(u,v) \mapsto A(v)u + B(v)$, trong đó $A, B: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đều thuộc lớp C^2.

Nghiệm tổng quát của PTĐHR2 đã cho là:

$$f : (x,y) \mapsto A(\frac{y}{x})x + B(\frac{y}{x}),$$

trong đó A, B: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Xem Chương 8.1 (hàm đẳng cấp).

Bài tập

◊ **8.2.13** Giải các PTĐHR2 sau đây. ẩn $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên bộ phận mở U với phép đổi biến đã cho sẵn:

a) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\quad U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln y \end{cases}$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} - 4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x^2 + y \end{cases}$.

◊ **8.2.14** Ta xét PTĐHR2:

(E) $\quad r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2) = 0$,

trong đó $\quad p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

$f: U_\alpha \to \mathbb{R}$ là ẩn thuộc lớp C^2 trên $U_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > \alpha^2\}$; $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ cố định.

Tìm các nghiệm của (E) dưới dạng $f(x,y) = \varphi(\rho)$ với $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $\varphi:]\alpha;+\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

8.3 Cực trị của các hàm số nhiều biến thực

8.3.1 Định nghĩa

Ở đây ta vẫn sử dụng các định nghĩa trong Tập 2.12.5

◆ **Định nghĩa** Giả sử $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, $a \in X, f : X \to \mathbb{R}$

1) Ta nói f **có cực đại địa phương tại** a khi và chỉ khi:

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \forall x \in X \cap V, f(x) \le f(a)$$

2) Ta nói f **có cực tiểu địa phương tại** a khi và chỉ khi:

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \forall x \in X \cap V, f(x) \ge f(a)$$

3) Ta nói f **có cực đại địa phương ngặt tại** a khi và chỉ khi:

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \forall x \in (X \cap V) - \{a\}, f(x) < f(a)$$

4) Ta nói f **có cực tiểu địa phương ngặt tại** a khi và chỉ khi:

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \forall x \in (X \cap V) - \{a\}, f(x) > f(a)$$

5) Ta nói f **có cực trị địa phương tại** a khi và chỉ khi f có cực đại địa phương tại a hoặc cực tiểu địa phương tại a.

6) Ta nói f **có cực trị địa phương ngặt tại** a khi và chỉ khi f có cực đại địa phương ngặt tại a hoặc cực tiểu địa phương ngặt tại a.

8.3.2 Khảo sát nhờ đạo hàm cấp 1

Ở đây ta cũng sử dụng kết quả đã có trong Tập 2, 12.5.2

◆ **Định lý** Cho $U \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, $a \in U, f : U \to \mathbb{R}$.

Nếu $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ U \text{ là một tập mở của } \mathbb{R}^p \\ \bullet\ f \text{ có một cực trị địa phương tại } a \\ \bullet\ \text{các đạo hàm riêng cấp 1 của } f \text{ tại } a \text{ tồn tại} \end{array}\right|$,

thì : $\quad \forall j \in \{1, ..., p\},\ f'_{x_j}(a) = 0$.

Chứng minh :

Để chứng minh chỉ cần chú ý rằng mỗi ánh xạ riêng $f(a_1, ..., a_{j-1}, ., a_{j+1}, ..., a_p)$ của f tại a (trong đó ký hiệu $(a_1, ..., a_p) = a$) được xác định trên một lân cận của a_j, có cực trị địa phương tại a_j và khả vi tại a_j thì (xem Tập 1, 5.3.2, Định lý):

$$f'_{x_j}(a) = (f(a_1,...,a_{j-1},.,a_{j+1},...,a_p))'(a_j) = 0.$$

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở trên $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$.

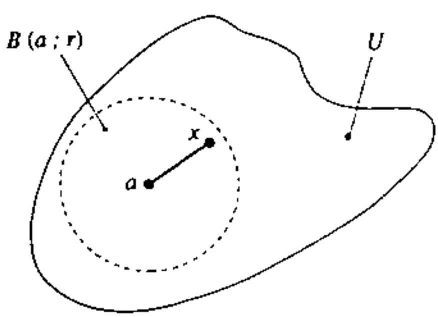
Ta gọi a là **điểm tới hạn của** (hoặc **đối với**) f nếu và chỉ nếu các đạo hàm riêng cấp 1 của f tại a tồn tại và đều bằng 0.

Định lý trên chỉ ra rằng, nếu f có các đạo hàm riêng cấp 1 trên U, thì các điểm tại đó f có cực trị địa phương là các điểm tới hạn của f.
Vì lý do trên, trong thực tế, người ta tiến hành giải p phương trình p ẩn $(x_1, ..., x_p)$:
$\forall j \in \{1,...,p\},\ f'_{x_j}(x_1,...,x_p) = 0$.

8.3.3 Khảo sát nhờ đạo hàm cấp 2

1) Định lý Taylor–Young đến đạo hàm cấp 2 đối với một hàm số thuộc lớp C^2

Trong lần đọc đầu tiên, ta có thể đọc ngay phát biểu định lý.



Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Khi đó tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a;r) \subset U$. Cho $x \in B(a;r)$; ký hiệu $(a_1,...,a_p) = a$, $(h_1,...,h_p) = h = x-a$ và xét $\varphi: \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a+th)\end{array}$.

• Rõ ràng là φ thuộc lớp C^2 trên $[0;1]$ mặc dù Định lý 8.2.2 không áp dụng được ($[0;1]$ không phải là bộ phận mở trong $\mathbb{R}$); thay $[0;1]$ bởi $[-\delta;1+\delta]$ với $\delta > 0$ thích hợp, là đủ để chứng minh như khi chứng minh bất đẳng thức về số gia hữu hạn (8.1.5 Định lý).
Theo định lý về đạo hàm hàm hợp 8.1.3.2) Định lý):

$$\forall t \in [0;1], \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}(a+th),$$

và : $$\forall t \in [0;1], \quad \varphi''(t) = \sum_{1 \le i,j \le p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a+th).$$

Áp dụng công thức Taylor với số dư tích phân (xem Tập 1, 6.4.5 Định lý) đối với φ

ta có: $$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt,$$

nghĩa là: $$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}(a) + \sum_{1 \le i,j \le p} h_i h_j \int_0^1 (1-t) f''_{x_i x_j}(a+th)dt.$$

Xét ánh xạ α: $B(a;r) \to \mathbb{R}$, xác định bởi:

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}(a) - \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a) \ .$$

Cho ε > 0 cố định. Vì các đạo hàm riêng cấp 2 của f liên tục tại a, nên tồn tại η∈]0; r[sao cho với mọi x thuộc U:

$$\|x' - a\|_\infty < \eta \Rightarrow \left(\forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \ \ \left|f''_{x_i x_j}(x') - f''_{x_i x_j}(a)\right| < \varepsilon\right).$$

Cho $x \in U$ sao cho $\|x' - a\|_\infty < \eta$. Với mọi (i,j) thuộc $\{1, ..., p\}^2$ ta có:

$$\left|\int_0^1 (1-t) f''_{x_i x_j}(a+th)\mathrm{d}t - \frac{1}{2} f''_{x_i x_j}(a)\right| = \left|\int_0^1 (1-t)\left(f''_{x_i x_j}(a+th) - f''_{x_i x_j}(a)\right)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le \int_0^1 (1-t)\left|f''_{x_i x_j}(a+th) - f''_{x_i x_j}(a)\right|\mathrm{d}t \ \le \ \varepsilon \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t \ = \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó suy ra $|\alpha(x)| \le \displaystyle\sum_{1 \le i,j \le p} |h_i h_j| \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon p^2}{2} \|h\|_\infty^2$ và ta kết luận:

$$\alpha(x) = \underset{x \to a}{o}\left(\|x - a\|^2\right).$$

Ta đã chứng minh định lý sau đây.

◆ **Định lý (Định lý Taylor-Yoyng đến đạo hàm cấp 2 đối với một hàm số thuộc lớp C^2)**

Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $a \in U, f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

Ta có:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a) + \underset{h \to 0}{o}\left(\|h\|^2\right),$$

trong đó ký hiệu $(h_1, ..., h_p) = h$.

Nhận xét:

1) Ta có thể phát biểu định lý trên như sau: Nếu f thuộc lớp C^2 tại lân cận a thì f có một khai triển hữu hạn đến cấp 2 tại a, mà bộ phận chính là:

$$f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a),$$

trong đó, ký hiệu $h_j = x_j - a_j$, với $1 \le j \le p$.

2) Ta có thể chứng minh một cách tổng quát hơn (bằng cách sử dụng phép quy nạp cùng với cách làm ở trên) rằng, nếu $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^k trên một bộ phận mở của U chứa a, thì:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}\left(\sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}\right)^{(m)}(a) + \underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|^k\right),$$

trong đó $\left(\sum_{j=1}^{p} h_j f'_{x_j}\right)^{(m)}$, được gọi là **luỹ thừa tượng trưng**, dùng để chỉ :

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le p} h_{i_1}\dots h_{i_m} f^{(m)}_{x_{i_1}\dots x_{i_m}}.$$

2) Áp dụng để khảo sát cực trị địa phương của hàm số nhiều biến thực

a) Trường hợp nhiều biến

Trong lần đọc đầu, ta có thể đọc thẳng vào b). Ở đây, ta dùng từ vựng và các tính chất của dạng toàn phương (xem Tập 6, Đại số).

◆ **Định lý** Giả sử U một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, $a \in U$ là một điểm tới hạn của f.

Ký hiệu Q là dạng toàn phương định nghĩa trên $\mathbb{R}^p$ bởi

$$\forall\, h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p,\ Q(h) = \sum_{1\le i,j\le p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a).$$

1) Nếu Q xác định dương và không suy biến thì f có cực tiểu địa phương ngặt tại a.

2) Nếu Q xác định âm và không suy biến thì f có cực đại địa phương ngặt tại a.

3) Nếu Q không xác định dương và cũng không xác định âm, thì f không có cực trị địa phương tại a.

Chứng minh:

Theo định lý Taylor-Young đến đạo hàm cấp 2 (xem 1) và vì a là một điểm tới hạn của f nên ta có:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^2).$$

1) Giả sử Q xác định dương và không suy biến. Ánh xạ $h \to \sqrt{Q(h)}$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^p$.

Vì mọi chuẩn trên $\mathbb{R}^p$ đều tương đương (xem Tập 3, 1.3.2 Định lý 1) nên tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$ sao cho : $\forall\, h \in \mathbb{R}^p,\ \alpha\|h\| \le \sqrt{Q(h)} \le \beta\|h\|$.

Từ đó suy ra tồn tại $\eta>0$ sao cho :

$$\begin{cases} B(a;\eta) \subset U \\ \forall h \in \mathbb{R}^p - \{0\}, \quad \left(\|h\| < \eta \Rightarrow f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{4}Q(h) > 0\right). \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ rằng f có cực tiểu địa phương tại a.

2) Việc khảo sát trường hợp Q xác định âm, không suy biến suy ra từ 1) áp dụng vào $-f$ thay cho f.

3) Giả sử Q không xác định dương và không xác định âm. Khi ấy, tồn tại $x', x'' \in \mathbb{R}^p$ sao cho $Q(x')<0$ và $Q(x'')>0$. Khi đó, ta có, với $\lambda \in \mathbb{R}$ trong một lân cận của 0:

$$\begin{cases} f(a+\lambda x') - f(a) = \lambda^2 Q(x') + \underset{\lambda\to 0}{o}(\lambda^2) \underset{\lambda\to 0}{\sim} \lambda^2 Q(x') \\ f(a+\lambda x'') - f(a) = \lambda^2 Q(x'') + \underset{\lambda\to 0}{o}(\lambda^2) \underset{\lambda\to 0}{\sim} \lambda^2 Q(x''), \end{cases}$$

điều đó chứng tỏ rằng, trên toàn bộ lân cận của a, f nhận các giá trị $< f(a)$ và các giá trị $> f(a)$. Như vậy f không có cực trị địa phương tại a.

Nhận xét:

Nếu Q xác định dương suy biến, hoặc xác định âm suy biến, thì các giả thiết trên không cho phép kết luận về sự tồn tại của cực trị địa phương tại a. *Ví dụ:*

- $f : \underset{(x,y)\mapsto x^2}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ có cực tiểu địa phương tại (0,0) và dạng toàn phương

$$Q : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2 f''_{x^2}(0,0) + 2h_1h_2 f''_{xy}(0,0) + h_2^2 f''_{y^2}(0,0) = 2h_1^2$$

là dạng xác định dương suy biến.

- $f : \underset{(x,y)\mapsto x^3}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ không có cực trị địa phương tại (0,0) ,

$$\left(\text{vì: } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x,0) = x^3 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x,0) = x^3 < 0 \end{cases} \right)$$

và dạng toàn phương:

$$Q : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2 f''_{x^2}(0,0) + 2h_1h_2 f''_{xy}(0,0) + h_2^2 f''_{y^2}(0,0) = 0$$

là xác định dương suy biến.

Để có thể áp dụng định lý trên, có lợi nếu thực hiện phép phân tích Gauss đối với Q (xem Tập 6, 5.1.5 và bài tập 8.3.2).

◆ **Định nghĩa** Giả sử U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên U, $a \in U$, Q là dạng toàn phương:

$$Q : (h_1, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{1\le i,j\le p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a).$$

Ma trận H của Q trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$, $H = (f''_{x_i x_j}(a))_{1\le i,j\le p}$ được gọi là **Hessian của f tại a**.

Rõ ràng là H đối xứng thực (theo Định lý Schawrz) cho nên (xem Tập 6, 4.4.3) H là khả chéo trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Theo giáo trình Đại số (Tập 6, 4.4.3) nếu ký hiệu $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H)$ là phổ (thực) của H thì ta có :

Q suy biến $\Leftrightarrow \det(H) = 0$

Q xác định dương $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_+$

Q xác định âm $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_-$

Q xác định dương và không suy biến $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}^*_+$

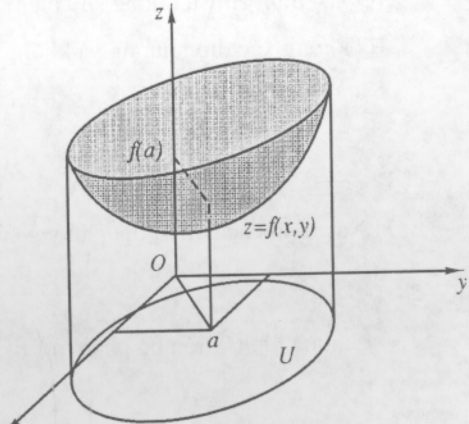
Q xác định âm và không suy biến $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}^*_-$

b) Trường hợp hàm hai biến thực

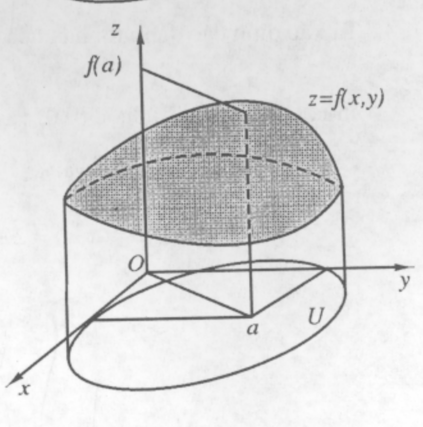
◆ **Định lý** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên U, $a \in U$ là một điểm tới hạn của f.

Ta ký hiệu $r = f''_{x^2}(a)$, $s = f''_{xy}(a)$, $t = f''_{y^2}(a)$ (ký hiệu Monge)

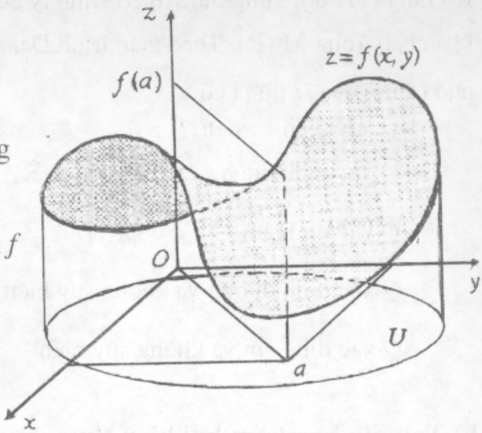
1) Nếu $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases}$ thì f có cực tiểu địa phương ngặt tại a.



2) Nếu $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{cases}$ thì f có cực đại địa phương ngặt tại a.



3) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì f không có cực trị địa phương tại a. Trong trường hợp này, ta nói f có một điểm đèo (hoặc điểm yên ngựa) tại a.



Chứng minh:

Xét dạng toàn phương Q: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, xác định bởi:

$$\forall\,(h,k) \in \mathbb{R}^2,\ Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2.$$

Theo Tập 6 (Đại số) ta có:

(Q xác định dương và không suy biến) $\Leftrightarrow$ ($s^2 - rt < 0$ và $r > 0$)

(Q xác định âm và không suy biến) $\Leftrightarrow$ ($s^2 - rt < 0$ và $r < 0$)

(Q không xác định dương và không xác định âm) $\Leftrightarrow$ ($s^2 - rt > 0$).

Sau đó ta áp dụng Định lý 2), *a)*).

VÍ DỤ:

1) Xác định các cực trị địa phương của $f: \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3\end{array}$

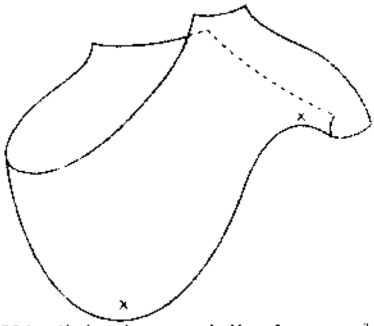
- f thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở $\mathbb{R}^2$ và: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + y + \dfrac{3}{4}x^2 \\ f'_y(x,y) = x + 2y \end{cases}$

Ta xác định các điểm tới hạn của f bằng cách giải: $\begin{cases} 2x + y + \dfrac{3}{4}x^2 = 0 \\ x + 2y = 0, \end{cases}$

ẩn là $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ta được $(0,0)$ và $(-2,1)$.

- f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(f''_{x^2}(x,y) = 2 + \frac{3}{2}x, f''_{xy}(x,y) = 1, f''_{y^2}(x,y) = 2 \right).$$



Tại (0,0): $r = 2$, $s = 1$, $t = 2$, từ đó: $s^2 - 2t = -3 < 0$ và $r = 2 > 0$, vậy f có một cực tiểu ngặt tại (0,0).
Tại (−2,1): $r = -1$, $s = 1$, $t = 2$. Từ đó $s^2 - 2t > 0$, vậy f không có cực trị tại (−2,1).

2) Xác định các cực trị địa phương của $f: \underset{(x,y)\mapsto \sin^2 x - \mathrm{sh}^2 y}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$.

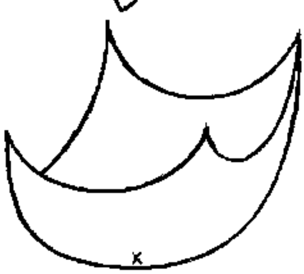
- f thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở $\mathbb{R}^2$ và: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f'_x(x,y) = \sin 2x \\ f'_y(x,y) = -\mathrm{sh} 2y \end{cases}$.

  Các điểm tới hạn của f là các điểm $\left(n\dfrac{\pi}{2};0\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và:

  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(f''_{x^2}(x,y) = 2\cos 2x, f''_{xy}(x,y) = 0, f''_{y^2}(x,y) = -2\mathrm{ch} 2y)$.

Tại $\left(n\dfrac{\pi}{2};0\right), n \in \mathbb{Z}$ ta có $r = 2\cos n\pi$, $s = 0$, $t = -2$, từ đó $s^2 - rt = 4\cos n\pi$. Nếu n chẵn thì $s^2 - rt > 0$, vậy f không có cực trị địa phương tại $\left(n\dfrac{\pi}{2};0\right)$. Nếu n lẻ thì $s^2 - rt < 0$ và $r = -2 < 0$, vậy f tại $\left(n\dfrac{\pi}{2};0\right)$ có cực đại địa phương ngặt.

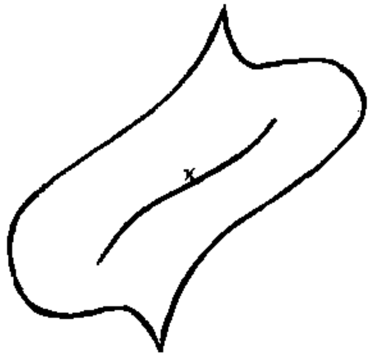


3) Ánh xạ $f: \underset{(x,y)\mapsto x^4+y^4}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ có một và chỉ một điểm tới hạn (0,0) tại đó $s^2 - rt = 0$ (vì $r = s = t = 0$).

Vì $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0),$$

f có cực tiểu địa phương ngặt tại (0,0).



4) Ánh xạ $f: \underset{(x,y)\mapsto x^3+y^3}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ có một và chỉ một điểm tới hạn là $(0,0)$, tại đó $s^2 - rt = 0$.

Vì $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x,0) = x^3 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, & f(x,0) = x^3 < 0 \end{cases}$ nên f không có cực trị địa phương tại (0,0). ■

Ta sẽ thấy trong Tập 7 (Hình học) là việc khảo sát các vị trí tương đối, địa phương của một mặt cong và mặt phẳng tiếp xúc tại một điểm.

8.3.4. Cực trị toàn cục

◆ **Định nghĩa** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, $a \in X$, $f: X \to \mathbb{R}$.

1) Ta nói f **có tại** a **cực đại toàn cục** khi và chỉ khi:

$$\forall x \in X, f(x) \le f(a).$$

2) Ta nói f **có tại** a **cực tiểu toàn cục** khi và chỉ khi:

$$\forall x \in X, f(x) \ge f(a).$$

3) Ta nói f **có tại** a **cực trị toàn cục** khi và chỉ khi f có tại a cực đại toàn cục hay cực tiểu toàn cục.

Nhận xét:

Rõ ràng là, nếu f có tại a cực đại (tương ứng cực tiểu) toàn cục thì f có tại a cực đại (tương ứng cực tiểu) địa phương.

◆ **Mệnh đề** Cho $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nghĩa là:

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}^p, \left(\|x\| \ge B \Rightarrow f(x) > A\right).$$

Khi đó f có cực tiểu toàn cục.

Chứng minh:

Cho $x_0 \in \mathbb{R}^p$. Theo giả thiết, $\exists B \in \left]\|x_0\|; +\infty\right[$ sao cho

$\forall x \in \mathbb{R}^p, \left(\|x\| \ge B \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)\right)$.

Ánh xạ f liên tục trên bộ phận đóng bị chặn $B'(0;B)$ của không gian vectơ định chuẩn $\mathbb{R}^p$, nên tồn tại $a \in B'(0;B)$ sao cho $f(a) = \operatorname*{Inf}_{x\in B'(0;B)} f(x)$. Vì $x_0 \in B'(0;B)$ nên $f(a) \le f(x_0)$. Vì vậy ta có $f(a) = \operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}^p} f(x)$, do đó f có cực tiểu toàn cục tại a.

Bài tập

◊ **8.3.1** Lập $KTHH_2(1,0)$ của f: $(x,y) \mapsto x^y$.

◊ **8.3.2** Xác định các cực trị địa phương và toàn cục của các ánh xạ f sau đây, giả thiết cho biết tập hợp xuất phát và ảnh $f(x,y)$ hoặc $f(x,y,z)$ của (x,y) hoặc (x,y,z):

a) $\mathbb{R}^2$, $y^2 - 3x^2y + 2x^4$ *b)* $(\mathbb{R}^*)^2$, $4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

c) $\mathbb{R}^2$, $(y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$ *d)* $\mathbb{R}^2$, $x^3 + y^3 - 9xy + 27$

e) $\mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 - (x^4 + y^4)$ *f)* $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $x\ln y - y\ln x$

g) $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{1}{2}x^2y^2 - \lambda xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $\lambda > 0$ cố định

h) $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 4}{x^2 + y^2 + 2x + 4}$ *i)* $\mathbb{R}^3$, $\dfrac{x^2}{2} + xyz - y - z$

◊ **8.3.3** Cho f: $[0;1]^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} \quad \text{nếu } (x,y) \neq (1,1),\ f(1,1) = 0.$$

a) Chứng minh rằng f liên tục trên $[0;1]^2$.

b) Xác định $\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in[0;1]^2} f(x,y)$.

◊ **8.3.4** Với $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, xác định các cực trị toàn cục của $f: \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)$.

8.4 Hàm ẩn

Vấn đề ở đây là tổng quát hoá các kết quả đã đạt được ở Tập 2, 12.6. Mục 8.4 này có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên.

◆ **Định lý (Định lý về hàm ẩn)**

Cho $p, n \in \mathbb{N}^*$, U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $A = (a,b) \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ, $f_1, ..., f_n$ là các thành phần của f: $\forall x \in U$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$.

Giả sử: $\begin{cases} \bullet\ f(A) = 0 \\ \bullet\ f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ \bullet\ \left(\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}\right)(A)\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}). \end{cases}$

Khi đó tồn tại một lân cận mở v của a trong $\mathbb{R}^p$, và một lân cận mở w của b trong $\mathbb{R}^n$ sao cho:

$$\begin{cases} \bullet\ v \times w \subset U \\ \bullet\ \text{Tồn tại một ánh xạ duy nhất } \varphi : v \to w \text{ sao cho:} \\ \qquad\qquad \forall x \in v,\quad f(x,\varphi(x)) = 0 \\ \bullet\ \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } v \end{cases}$$

Hơn nữa, tồn tại một lân cận v' của a trong $\mathbb{R}^p$, chứa trong v sao cho, với mọi $x = (x_1, ..., x_n)$ thuộc v':

$$J_\varphi(x_1,\dots,x_p) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(x,\varphi(x)) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(x,\varphi(x)) \\ \dots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(x,\varphi(x)) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(x,\varphi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,\varphi(x)) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(x,\varphi(x)) \\ \dots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x,\varphi(x)) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(x,\varphi(x)) \end{pmatrix}$$

Chứng minh : (có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên)

Xét $\phi : \underset{(x,y)\mapsto(x,f(x,y))}{U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n}$. Rõ ràng là ϕ thuộc lớp C^1 trên U (do phép hợp) và ma trận Jacobi của f tại (a,b) là:

$$J_\phi(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(A) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(A) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(A) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(A) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(A) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(A) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(A) \end{pmatrix}.$$

Theo giả thiết ta có: $\det(J_\phi(a,b)) = \det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(A)\right)_{1\le i,j\le n}\right) \neq 0$, điều chứng tỏ

rằng $d_{(a,b)}\phi$ là song ánh.
Theo định lý đảo địa phương (8.1.6 Định lý), tồn tại một lân cận mở u của (a,b) trong $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ sao cho $\phi(u)$ là một lân cận mở của $(a,0)$ trong $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ và ϕ là một C^1-vi phôi từ u lên $\phi(u)$.
Tiếp đó tồn tại một lân cận mở v_1 của a trong $\mathbb{R}^p$ và một lân cận mở w của b trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $v_1 \times w \subset u$. Khi đó, ánh xạ $\phi_1 : \underset{(x,y)\mapsto\phi(x,y)}{v_1 \times w \to \phi(v_1 \times w)}$ là một C^1-vi phôi từ $v_1 \times w$ lên $\phi\left(v_1 \times w\right)$. Vì $\phi\left(v_1 \times w\right)$ là một lân cận của $\phi(a,b)$ (= $(a, 0)$) trong $\mathbb{R}^n$, nên tồn tại một lân cận mở v của a trong $\mathbb{R}^p$ sao cho $v \times \{0\} \subset \phi\left(v_1 \times w\right)$. Do đó $\forall x \in v,\quad (x,0) \in \phi\left(v_1 \times w\right)$ và phương trình $f(x,y) = 0$, ẩn $y \in w$ có một và chỉ một nghiệm, đó là $\phi_1^{-1}(x,0)$.
Điều này chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của φ, hơn nữa, φ được xác định bởi:

$$\forall x \in v,\quad (x,\varphi(x)) = \phi_1^{-1}(x,0)$$

và vì thế φ thuộc lớp C^1 trên v.

- Ánh xạ $\delta : x \to \det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(x,\varphi(x))\right)_{1\le i,j\le n}\right)$ liên tục trên v và $\delta(a) \neq 0$ theo giả thiết.

Vì vậy tồn tại một lân cận v' của a trong $\mathbb{R}^p$, chứa trong v sao cho

$$\forall x \in v',\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(x,\varphi(x))\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Mặt khác, f và φ thuộc lớp C^1 và ($\forall\, x \in v,\ \ f(x, \varphi(x)) = 0$); ta suy ra bằng cách lấy đạo hàm và ký hiệu $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ là các ánh xạ thành phần của φ:

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \forall j \in \{1,\ldots,p\},\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_{p+k}}(x,\varphi(x))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0,$$

nghĩa là:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,\varphi(x)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x,\varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x,\varphi(x)) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(x,\varphi(x)) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(x,\varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(x,\varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(x,\varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(x,\varphi(x)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix} = 0,$$

sử dụng phép nghịch đảo ma trận thì từ đó thu được kết quả mong muốn.

Kết luận của định lý về hàm ẩn có thể phát biểu một cách ngắn gọn dưới dạng: $x_{p+1}, \dots, x_{p+n}$, tại lân cận A, là các hàm ẩn thuộc lớp C^1 của $x_1, \dots, x_p$.

Nhận xét:

1) Nếu $p = n = 1$ ta trở lại định lý về hàm ẩn đối với hai biến thực phụ thuộc nhau theo một quan hệ đã xét trong Tập 2, 12.6.2.

2) Nếu $p = 1$ và $n = 2$, định lý về hàm ẩn có dạng sau:

Cho U là một bộ phận mở trong $\mathbb{R}^3$, $A = (a,b,c) \in U$, $f, g: U \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ.

$$\text{Giả sử } \begin{cases} \bullet\ f(A) = g(A) = 0 \\ \bullet\ f, g \text{ đều thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ \bullet\ \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(A) & \frac{\partial f}{\partial z}(A) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(A) & \frac{\partial g}{\partial z}(A) \end{vmatrix} \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó tồn tại một lân cận mở của a trong $\mathbb{R}$ và các lân cận mở w_1, w_2 của b, c tương ứng trong $\mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} \bullet\ v \times w_1 \times w_2 \subset U. \\ \bullet\ \text{Tồn tại một cặp duy nhất các ánh xạ } \varphi: v \to w_1,\ \psi: v \to w_2 \text{ sao cho} \\ \quad \forall x \in v,\ f(x, \varphi(x), \psi(x)) = g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ \bullet\ \varphi, \psi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } v. \end{cases}$$

Hơn nữa, tồn tại một lân cận v' của a trong $\mathbb{R}$, chứa trong v sao cho với bất kỳ $x \in v'$:

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x),\psi(x)) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,\varphi(x),\psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x),\psi(x)) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,\varphi(x),\psi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) \end{pmatrix}.$$

Kết quả này minh hoạ bằng hình học như sau: Với các giả thiết đã cho, đường cong có hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$, tại lân cận của A có một biểu diễn tham số thuộc lớp C^1 là $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$.

Bài tập

8.4.1. Chứng minh rằng quan hệ sau đây xác định y là hàm ẩn của x tại lân cận cặp (a,b) được xác định, và lập khai triển hữu hạn đến cấp 2 lân cận a của hàm ẩn: $\varphi: x \mapsto y$

a) $\ln(1+x+y)-x^2+y^2=0$, $(0,0)$ *b)* $\cos y - x\sin y - x^3 = 0$, $(1,0)$

c) $x^2\ln y - y^2\ln x = 0$, $(1,1)$ *d)* $e^{x+y}-x^2+2xy^2-2-\ln(3+x+3y)=0$, $(1,-1)$.

8.5 Các dạng vi phân

Ở đây chúng ta sẽ tổng quát hoá các định nghĩa và kết quả đã được trình bày trong Tập 2, 2.7.

8.5.1 Định nghĩa

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở trong $\mathbb{R}^p$. Ta gọi mọi ánh xạ $\omega: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ sao cho tồn tại p ánh xạ $A_1, ..., A_p: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U thoả mãn:

$$\forall (x_1,...x_p) \in U, \quad \omega(x_1,...x_p) = \sum_{j=1}^{p} A_j(x_1,...x_p)dx_j$$

là **dạng vi phân** trên U.

Các ánh xạ $A_1, ..., A_p$ được gọi là **hệ số** của dạng vi phân w.

Ta nhắc lại (xem 8.1.3 1) rằng $dx_1,...,dx_p$ là các ánh xạ chiếu của $\mathbb{R}^p$ vào $\mathbb{R}$, nghĩa là:

$$\forall j \in \{1, ..., p\}, \forall h = (h_1, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p, (dx_j)(h) = h_j.$$

8.5.2 Dạng vi phân chính xác

◆ **Định nghĩa** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, ω là một dạng vi phân trên U. Ta gọi ω là **chính xác** trên U (hoặc: ω **có các nguyên hàm trên** U) khi và chỉ khi tồn tại $F: U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên U sao cho:

$$\forall (x_1,...,x_p) \in U, \quad d_{(x_1,...,x_p)}F = \omega(x_1,...,x_p).$$

Một ánh xạ F như vậy, nếu tồn tại, được gọi là **một nguyên hàm của ω trên U**.

Nếu sử dụng các hệ số $A_1, ..., A_p$ của ω:

$$\forall (x_1,...,x_p) \in U, \quad \omega(x_1,...,x_p) = \sum_{j=1}^{p} A_j(x_1,...,x_p)dx_j,$$

thì quan hệ $d_{(x_1,...,x_p)}F = \omega(x_1,...,x_p)$ tương đương với :

$$\forall j \in \{1,...,p\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1,...,x_p) = A_j(x_1,...,x_p).$$

VÍ DỤ:

Dạng vi phân $\omega : (x_1,\dots,x_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} x_j dx_j$ là chính xác trên $\mathbb{R}^p$ và có (ít nhất) tương tự như nguyên hàm trên $\mathbb{R}^p$, $F : (x_1,\dots,x_p) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} x_j^2$.

◆ **Mệnh đề** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$ và ω là một dạng vi phân trên U. Nếu U có tính liên thông và ω chính xác thì theo định nghĩa, ω có ít nhất một nguyên hàm F trên U và tập hợp các nguyên hàm của ω trên U là $\{F + \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Chứng minh:

Giả sử U liên thông, ω chính xác và $F_1, F_2 : U \to \mathbb{R}$ hai nguyên hàm của ω trên U.

Vậy, F_1, F_2 thuộc lớp C^1 trên U và:

$$\forall j \in \{1,\dots,p\},\quad \frac{\partial}{\partial x_j}(F_1 - F_2) = 0.$$

Theo 8.1.5 Hệ quả 3, suy ra $F_1 - F_2$ không đổi.

8.5.3 Dạng vi phân đóng

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, ω là một dạng vi phân trên U, $A_1, \dots, A_p$ là các hệ số của ω. Ta nói ω **đóng trên** U khi và chỉ khi:

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

◆ **Định lý 1** Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$, ω là một dạng vi phân trên U. Nếu ω chính xác trên U thì ω đóng trên U.

Chứng minh:

Ký hiệu $A_1, \dots, A_p$ là các hệ số của ω, tồn tại $F : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho

$$\forall j \in \{1,\dots,p\},\quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = A_j.$$

Vì $A_1, \dots, A_p$ thuộc lớp C^1 trên U nên F thuộc lớp C^2 trên U và do đó theo định lý Schawrz (8.2.3 Định lý) :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}. \quad \blacksquare$$

◆ **Định nghĩa 2** Cho $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$.

1) Cho $A \in X$; ta nói X **sao hoá đối với** A khi và chỉ khi

$$\forall M \in X, \quad [AM] \subset X,$$

trong đó $[AM]$ chỉ đoạn thẳng nối liền A và M, nghĩa là

$$[AM] = \{P \in \mathbb{R}^p;\ \exists\ \lambda \in [0;1],\ \overline{AP} = \lambda \overline{AM}\ \}.$$

2) Ta nói X là **sao hoá** khi và chỉ khi $\exists\ A \in X$ sao cho X sao hoá đối với A.

◆ **Định lý 2** **(Định lý Poincaré)**

Cho U là một bộ phận mở của $\mathbb{R}^p$ và ω là một dạng vi phân trên U.

Nếu U sao hoá và nếu ω đóng trên U thì ω chính xác trên U.

Chứng minh (có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên):

Ký hiệu $A_1, \ldots, A_p$, là các hệ số của ω : $\quad \forall x \in U,\ \omega(x) = \sum_{j=1}^{p} A_j(x)\mathrm{d}x_j$

và $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$ sao cho U sao hoá đối với a.

Xét $F: U \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in U, \quad F(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{p} (x_j - a_j) A_j(a + t(x-a))\mathrm{d}t\,.$$

Ta sẽ chứng minh rằng F là một nguyên hàm của ω trên U.

Vì ánh xạ $(t, x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} (x_j - a_j) A_j(a + t(x-a))$ liên tục trên $[0;1] \times U$ và có các đạo hàm riêng cấp 1 đối với $x_1, \ldots, x_p$ liên tục trên $[0;1] \times U$, định lý về đạo hàm dưới dấu $\int_0^1$ (xem Tập 3, 2.13.12.2) Định lý) chứng tỏ các ánh xạ riêng của F đều thuộc lớp C^1 và: $\quad \forall\ i \in \{1, \ldots, p\}, \forall\ x \in (x_1, \ldots, x_p) \in U,$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \left(A_i\big(a + t(x-a)\big) + \sum_{j=1}^{p} (x_j - a_j) t \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big) \right) \mathrm{d}t\,.$$

Vì ω đóng trên U và bằng cách sử dụng tích phân từng phần, ta có: với mọi i thuộc $\{1, \ldots, p\}$ và $x = (x_1, \ldots, x_p)$ của U :

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{p} (x_j - a_j) t \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big) \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{p} (x_j - a_j) t \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\big(a + t(x-a)\big) \right) \mathrm{d}t$$

$$= \left[tA_i(a+t(x-a))\right]_0^1 - \int_0^1 A_i(a+t(x-a))\mathrm{d}t = A_i(x) - \int_0^1 A_i(a+t(x-a))\mathrm{d}t$$

và vì vậy $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$.

Như vậy, F là một nguyên hàm của ω trên U và ω chính xác trên U.

Bài tập

Về các bước khảo sát một dạng vi phân, xem Tập 2. 12.7.4.

◊ **8.5.1** Khảo sát các dạng vi phân sau, có 2 biến: ω có phải là đóng không? có chính xác không? Nếu có thì hãy tìm các nguyên hàm của ω ; nếu ω không đóng, thì tìm một thừa số tích phân $\varphi : (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ sao cho $\omega_1 : (x,y) \mapsto \varphi(x,y)\,\omega(x,y)$ là đóng; ω_1 có chính xác không? Nếu có thì tìm các nguyên hàm của ω_1.

a) $\dfrac{2x\tan y}{(1+x^2)^2}dx - \dfrac{1+\tan^2 y}{1+x^2}dy$

b) $\left(x\ln(x^2+y^2)-y\right)dx + \left(y\ln(x^2+y^2)-x\right)dy$

c) $\left(\cos(x+y) + \sin(x+y)\right)dx + \cos(x+y)dy$, $\varphi(x,y)$ chỉ phụ thuộc x

d) $y(1-xy)dx + (y-x)dy$, $\varphi(x,y)$ chỉ phụ thuộc y

e) $(x^2+y^2+2x)dx + 2ydy$, $\varphi(x,y)$ chỉ phụ thuộc x

f) $2x(y-1)dx - (x^2-1)dy$, $\varphi(x,y)$ chỉ phụ thuộc x.

◊ **8.5.2** *a)* Khảo sát dạng vi phân ω xác định bởi:

$\omega(x,y) = \dfrac{y+\ln x-1}{y}dx + \dfrac{x\ln x}{y^2}dy$ bằng cách tìm một thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x.

b) Từ đó suy ra nghiệm trên $]1;+\infty[$ của phương trình vi phân :

$$xy'\ln x - y(1-\ln x) + y^2 = 0.$$

◊ **8.5.3** Tìm một ánh xạ Q: $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho dạng vi phân ω xác định bởi $\omega(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + Q(x,y)dy$ là chính xác trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ và sau đó tìm một nguyên hàm của ω trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

◊ **8.5.4** Chứng minh rằng dạng vi phân ω xác định bởi :

$$\omega(x,y,z) = \frac{x^2-yz}{z(x+y)(x+z)}dx + \frac{y^2-zx}{y(y+z)(y+x)}dy + \frac{z^2-xy}{z(z+x)(z+y)}dz$$

là chính xác trên $\mathbb{R}^3$ và tính các nguyên hàm của nó.

Bổ sung

C8.1 Hàm đẳng cấp

• Ta gọi mọi bộ phận C của $\mathbb{R}^p$ sao cho:

$$\forall x \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda x \in C$$ là **nón** (hoặc **nón dương**) của $\mathbb{R}^p$.

Độc giả có thể gặp các thay đổi của định nghĩa này, ví dụ:

$$\forall x \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in C.$$

• Cho C là một nón của $\mathbb{R}^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ. Ta nói f có tính chất α **-đẳng cấp** (hoặc α **- đẳng cấp dương**) khi và chỉ khi:

$$\forall x \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x),$$

ở đây cũng vậy, độc giả có thể gặp các thay đổi của định nghĩa này, ví dụ (nếu $\alpha \in \mathbb{N}$) :

$$\forall x \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x).$$

Rõ ràng là, nếu $f \neq 0$ và nếu f là α - đẳng cấp và α' - đẳng cấp thì $\alpha = \alpha'$. Nếu $f \neq 0$ và f có tính α-đẳng cấp thì α được gọi là **cấp** của f.

Một ánh xạ $f : C \to \mathbb{R}$ được gọi là **đẳng cấp** khi và chỉ khi tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho f là α-đẳng cấp.

1) *Ví dụ:*

Kiểm tra tính đẳng cấp của các ánh xạ sau đây và hãy xác định cấp của chúng :

a) $f : \begin{array}{l} C \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sqrt{y-x} \end{array}$, trong đó $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y-x \geq 0\}$

b) $f : \begin{array}{l} C \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2} \end{array}$, trong đó $C = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c) $f : \begin{array}{l} C \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } xy = 0 \\ 0 & \text{nếu } xy \neq 0 \end{cases} \end{array}$, trong đó $C = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

2) *a) Điều kiện Euler:*

Giả sử C là một nón mở của $\mathbb{R}^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 trên C.

Chứng minh rằng f là α-đẳng cấp khi và chỉ khi:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^{p} x_i f'_{x_i}(x) = \alpha f(x).$$

Vì mục đích này, ta có thể nghiên cứu $\varphi : \lambda \mapsto f(\lambda x)$ với $x \in C$ cố định.

b) Giả sử C là một nón mở của $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Chứng minh rằng nếu f có tính α-đẳng cấp thì:

$$\forall (x,y) \in C, \quad x^2 f''_{x^2}(x,y) + 2xy f''_{xy}(x,y) + y^2 f''_{y^2}(x,y) = \alpha(\alpha - 1) f(x,y).$$

Chương 9

Bổ sung về phép tính tích phân
(Phần 2)

Chương này dành cho sinh viên PT, PT* .
Trong Tập 2 (chương 13) ta đã nghiên cứu tích phân đường, tích phân kép, tích phân bội 3 và các khối lượng, tâm quán tính, mômen quán tính đối với các dây, tấm phẳng, vật rắn.
Vấn đề ở đây là xét một cách ngắn gọn các bài toán tương tự đối với các tấm ghềnh (và các tấm phẳng trong không gian).
Việc nghiên cứu được đặt ra trong một không gian afin Euclide có định hướng $\mathcal{E}_3$ có số chiều là 3, được trang bị có thể là một hệ quy chiếu trực chuẩn trực tiếp $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\ )$, các trục được gọi là $(x'x)$, $(y'y)$, $(z'z)$. Thường ta đồng nhất $\mathcal{E}_3$ và $\mathbb{R}^3$ bằng cách trang bị cho $\mathbb{R}^3$ tích vô hướng thông thường và cơ sở chính tắc.

Có thể tiện lợi nếu ta đồng nhất một phần tử của $\mathcal{E}_3$ (tương ứng $\mathbb{R}^3$) với một cột các thành phần của nó trong cơ sở $(\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\ )$ (tương ứng, cơ sở chính tắc).

9.1 Tích phân mặt

9.1.1 Ánh xạ thuộc lớp C^1

Vấn đề ở đây là mở rộng khái niệm lớp C^1 đối với các ánh xạ được xác định trên một bộ phận không nhất thiết phải mở của $\mathbb{R}^q$ (xem 8.1.2, Định nghĩa 1).

◆ **Định nghĩa** Giả sử $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$; D là một bộ phận của $\mathbb{R}^q$. Ánh xạ $F: D \to \mathbb{R}^p$ được gọi là **thuộc lớp C^1** trên D khi và chỉ khi tồn tại một bộ phận mở U của $\mathbb{R}^q$ và một ánh xạ $\widetilde{F} : U \to \mathbb{R}^p$ sao cho :

$$\begin{cases} D \subset U \\ \forall x \in D,\quad \widetilde{F}(x) = F(x) \\ \widetilde{F} \quad \text{thuộc lớp} \quad C^1 \quad \text{trên bộ phận mở } U \text{ của } \mathbb{R}^q \end{cases}$$

■

Nói cách khác, F thuộc lớp C^1 trên D khi và chỉ khi F có một mở rộng ($\widetilde{F}$) thuộc lớp C^1 trên một bộ phận mở (U) chứa D.

9.1.2 Mặt

Ở đây ta không nêu lên một khó khăn nào về khái niệm mặt (xem cả Tập hình học).

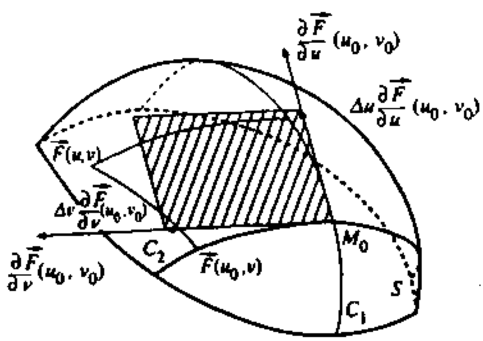
Một **lớp tham số hoá** là một ánh xạ $F: D \to \mathbb{R}^3$ trong đó D là một bộ phận của $\mathbb{R}^2$.

Mặt S là ảnh của một lớp tham số hoá : $S = \{F(u,v);\ (u,v) \in D\}$.

Ta nói rằng F là **một biểu diễn tham số của** S.

Để nhắc lại là F nhận các giá trị trong $\mathbb{R}^3$, có thể tiện lợi nếu ký hiệu $\overrightarrow{F}(u,v)$ hoặc $\overrightarrow{F(u,v)}$ thay cho $F(u,v)$.

Khái niệm yếu tố diện tích



Giả sử $\overrightarrow{F}: D \to \mathbb{R}^3$ là một lớp tham số hóa thuộc lớp C^1,

$$S = \{\overrightarrow{F}(u,v);\ (u,v) \in D\},$$

$(u_0,v_0) \in D$, $M_0 \in \overrightarrow{F}(u_0,v_0)$

Ký hiệu C_1 (tương ứng C_2) là đường cong vẽ trên S bằng cách cố định $v = v_0$ (tương ứng $u = u_0$), nghĩa là:

$$C_1 = \{\overrightarrow{F}(u,v_0) : u \in \mathbb{R},\ (u,v_0) \in D\}$$

$$C_2 = \{\overrightarrow{F}(u_0,v) : v \in \mathbb{R},\ (u_0,v) \in D\}.$$

Giả sử họ $\left(\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0),\ \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ là độc lập.

Vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại M_0 với C_1 (tương ứng C_2) là $\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0)$ (tương ứng $\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)$) (xem Tập hình học).

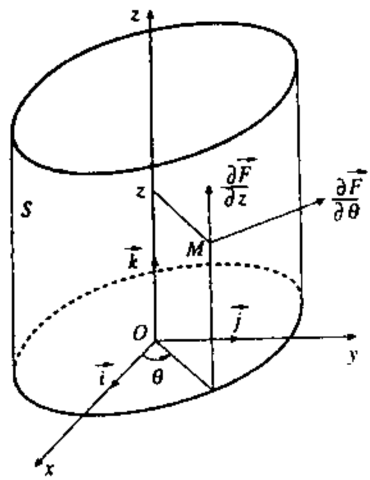
Cho $(u,v) \in D$, $\Delta u = u - u_0$; $\Delta v = v - v_0$; $M = \overrightarrow{F}(u,v)$ và xét một miếng của S, "giống như" một hình bình hành có các đỉnh là $\overrightarrow{F}(u_0,v_0)$, $\overrightarrow{F}(u_0,v)$, $\overrightarrow{F}(u,v_0)$, $\overrightarrow{F}(u,v)$.

Nếu Δu và Δv đều "bé" ta có thể co miếng này của S trùng với hình bình hành có đỉnh là M_0 và tạo nên bởi các vectơ $\Delta u\ \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0)$ và $\Delta v\ \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)$. Diện tích của hình bình hành này là $\left\|\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)\right\|\Delta u\Delta v$.

"Biểu thức" $\left\|\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}(u,v)\right\| du dv$ được gọi là **yếu tố diện tích** của S và thường được ký hiệu là dS.

VÍ DỤ:

1) Yếu tố diện tích trên một hình trụ tròn xoay



Một biểu diễn tham số của hình trụ tròn xoay S có trục $(z'z)$ và bán kính là r là

$$\vec{F}: \quad \underset{(\theta,z)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta,z)}{D \to \mathbb{R}^3},$$

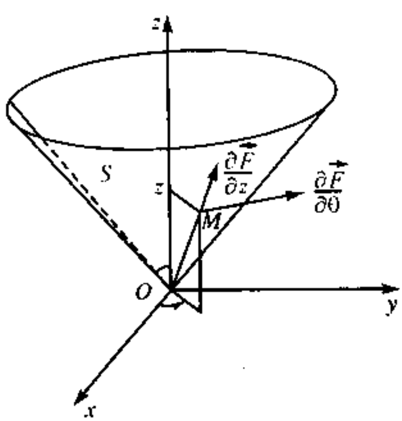
trong đó $D = [-\pi;\pi] \times \mathbb{R}$.

Ở đây $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$, $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial z} = (0,0,1)$.

Từ đó $\left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial z}(u,v)\right\| = r$ và cuối cùng là:

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

2) Yếu tố diện tích trên một hình nón tròn xoay



Một biểu diễn tham số của một nón tròn xoay có trục $(z'z)$ và nửa góc ở đỉnh α $\left(\alpha \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ là :

$$\vec{F}: \quad \underset{(\theta,z)\mapsto(z\tan\alpha\cos\theta,z\tan\alpha\sin\theta,z)}{D \to \mathbb{R}^3},$$

trong đó $D = [-\pi;\pi] \times \mathbb{R}$. Ở đây:

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} = (-z\tan\alpha\sin\theta, z\tan\alpha r\cos\theta, 0),$$

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial z} = (\tan\alpha\cos\theta, \tan\alpha\sin\theta, 1).$$

Từ đó $\left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial z}\right\| = (z\tan\alpha\cos\theta)^2 + (z\tan\alpha\sin\theta)^2 + (z\tan^2\alpha)^2 = z^2\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$

và cuối cùng : $dS = |z|\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\theta\,dz$.

Ta có thể chú ý rằng, vì $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta}$ và $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial z}$ trực giao

nên $\left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial z}\right\| = \left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta}\right\| \cdot \left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial z}\right\|$.

3) Yếu tố diện tích trên một mặt cầu

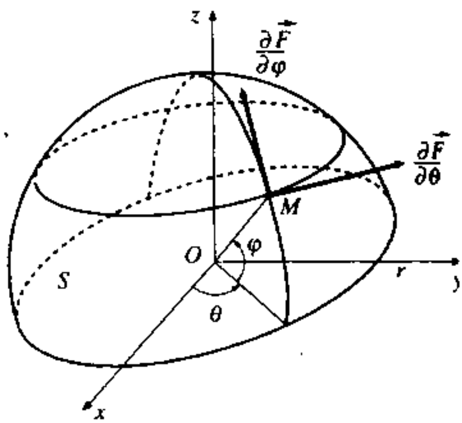
3) Yếu tố diện tích trên một mặt cầu

Một biểu diễn tham số của mặt cầu S có tâm O, bán kính r là:

$$\vec{F}: \begin{array}{c} D \to \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) \end{array},$$

trong đó $D = [-\pi;\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (ở đây ta sử dụng toạ độ cầu).

Ở đây:



$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} = (-r\cos\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\cos\theta, 0),$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{d\varphi} = (-r\sin\varphi\cos\theta, -r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi).$$

Từ đó :

$$\left\|\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right\|^2 = (r^2\cos^2\varphi\cos\theta)^2 + (r^2\cos^2\varphi\sin\theta)^2 + (r^2\sin\varphi\cos\varphi)^2 = r^4\cos^2\varphi \text{ và}$$

cuối cùng là $\quad dS = r^2\cos\varphi \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

Điều chú ý ở cuối ví dụ 2) cũng có giá trị tại đây.

9.1.3 Tích phân mặt

◆ **Định nghĩa**

Giả sử
- D là một compăc của $\mathbb{R}^2$
- $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$ là một lớp tham số hoá thuộc lớp C^1
- $f: D \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1

Ta gọi tích phân kép:

$$\iint_D f(u,v)\left\|\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

là **tích phân mặt**.

Tính bất biến của tích phân mặt khi thay đổi biểu diễn tham số

Ta giữ nguyên các ký hiệu và các giả thiết của định nghĩa trên. Cho Δ là một compăc của $\mathbb{R}^2$; $\phi: D \to \Delta$ là một song ánh sao cho ϕ và ϕ^{-1} đều thuộc lớp C^1 và

$\vec{G}: \Delta \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi $G = F \circ \phi^{-1}$.

Với sự lạm dụng cổ điển các ký hiệu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} = \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial X} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial Y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial X} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial Y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial v}. \end{cases}$$

từ đó $\qquad \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial X}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial v} - \dfrac{\partial X}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial u} \right) \cdot \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial X} \wedge \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial Y}$

và vì thế $\qquad \left\| \dfrac{\partial F}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial F}{\partial v} \right\| = \left| \det J_{\phi^{-1}}(X,Y) \right| \left\| \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial X} \wedge \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial Y} \right\|,$

trong đó $J_{\phi^{-1}}(X,Y)$ là ma trận Jacobi của ϕ^{-1} theo (X,Y) (xem 8.1.3.1) Định nghĩa 2).

Theo công thức đổi biến trong tích phân kép (Tập 2, 13.2.5.2) Định lý):

$$\iint_D f(u,v) \left\| \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$$

$$= \iint_\Delta (f \circ \phi^{-1})(X,Y) \left\| \frac{\partial G}{\partial X}(X,Y) \wedge \frac{\partial G}{\partial Y}(X,Y) \right\| dX dY,$$

điều chứng tỏ tích phân mặt không phụ thuộc lớp tham số hoá biểu diễn mặt.

Tích phân mặt nói trên thường được ký hiệu bởi $\iint_S f(M) dS$ trong đó M là điểm chạy của S (nghĩa là $M = \vec{F}(u,v)$, $\vec{F}$ là một biểu diễn tham số của S), $f(M)$ dùng để chỉ một cách lạm dụng $f(u,v)$, và dS là "yếu tố diện tích" của S (xem 9.1.2) :

$$dS = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \right\| du dv. \qquad \blacksquare$$

Nhận xét:

Trong thực tế, sự có mặt của căn thức do $\left\| \dfrac{\partial F}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial F}{\partial v} \right\|$ làm cho phép tính tích phân mặt thường khó khăn, thậm chí cả "không thực hiện được" (dẫn tới các hàm đặc biệt).

VÍ DỤ:

Tính tích phân mặt $\iint_S f(M) dS$ trong đó S là mặt xác định bởi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \quad \text{và } f: \ M(x,y,z) \mapsto x^2 y^2 z.$$

Một biểu diễn tham số của S là $\qquad \vec{F}: \begin{array}{c} D \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \mapsto (v\cos u, v\sin u, v) \end{array}$

trong đó $D = [-\pi; \pi] \times [0;1]$. Từ đó:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ -v \end{pmatrix}, \ \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\| = v\sqrt{2}$$

(xem thêm 9.1.2 ví dụ 2), hoặc chú ý rằng $\quad \left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\| = \left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\|$

vì $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \perp \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v}$).

Vậy:

$$\iint_S f(M)\mathrm{d}S = \iint_D v^6\sqrt{2}\cos^2 u\sin^2 u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 u\sin^2 u\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^1 v^6\mathrm{d}v\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{28}.$$

Bài tập

◊ **9.1.1** Tính các tích phân mặt $\iint_S f(M)\mathrm{d}S$ trong các ví dụ sau:

a) $f(x,y,z) = xye^{xz}$ và S là một phần của mặt trụ xác định bởi $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

b) $f(x,y,z) = \ln z$ và S là chỏm cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\frac{1}{2} \le z \le 1$.

9.2 Diện tích một phần của mặt

9.2.1 Đại cương

◆ **Định nghĩa**

Giả sử S là một mặt có biểu diễn tham số $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$ thuộc lớp C^1.

Ta gọi số thực ký hiệu là $\mathcal{A}(S)$ và xác định bởi

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

là **diện tích** của S.

Nhận xét:

1) Đây là trường hợp riêng của tích phân mặt $\iint_D f(u,v) \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ với $f = 1$.

2) Nếu S là một miền phẳng, độc giả sẽ thấy là ta lại tìm được diện tích của miền phẳng S (xem tập 2, 13.2.3, Mệnh đề 1).

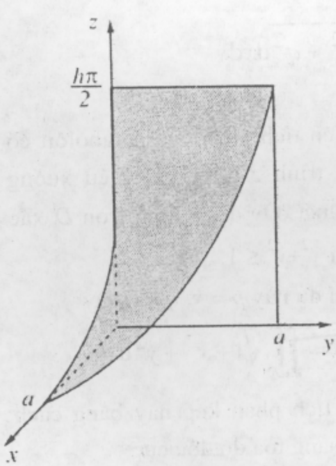
3) Bằng cách ký hiệu $\mathrm{d}S$ là yếu tố diện tích của S (xem 9.1.2) ta có:

$$\mathcal{A}(S) = \iint_S \mathrm{d}S .$$

VÍ DỤ:

Tính diện tích phần xoắn ốc xác định bởi: $x = at\cos\theta,\ y = at\sin\theta,\ z = h\theta,$

$$(\theta; t) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [0;1] \text{ và } (a,h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ cố định.}$$



Với các ký hiệu trên:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -at\sin\theta \\ at\cos\theta \\ h \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó $$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -ah\sin\theta \\ ah\cos\theta \\ -a^2 t \end{pmatrix},$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \right\| = a\sqrt{h^2 + a^2 t^2} .$$

Ta có thể chú ý rằng, vì

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \perp \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \text{ nên: } \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \right\| . \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \right\| .$$

Từ đó

$$\mathcal{A}(S) = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{h^2 + a^2 t^2}\, dt \right) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi a h}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{at}{h}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(h^2 \ln\left(\frac{a}{h} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \right) + a\sqrt{a^2 + h^2} \right). \quad ■$$

Ta sẽ thấy (*9.2.2.2),3)*) là trong thực tế trong các trường hợp thường xảy ra, ta có thể thay thế việc tính tích phân kép để xác định diện tích một phần của mặt bằng việc tính một tích phân đơn.

9.2.2 Các trường hợp riêng

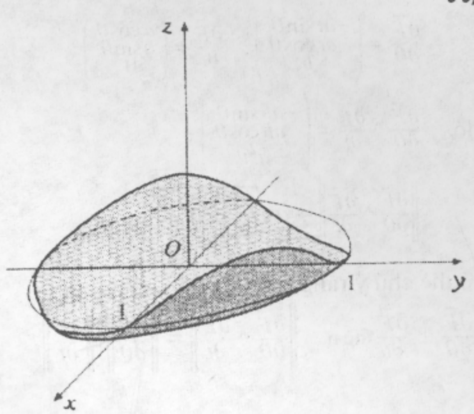
1) Mặt có phương trình toạ độ $z = \varphi(x,y)$

Giả sử S có một phương trình theo toạ độ là $z = \varphi(x,y)$, trong đó $\varphi: D \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 (xem định lý về các hàm ẩn 8.4). Như vậy, S có thể biểu diễn tham số $\vec{F}: \underset{(x,y)\mapsto(x,y,\varphi(x,y))}{D \to \mathbb{R}^3}$, từ đó

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}, \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Ký hiệu $p = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x},\ q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ (ký hiệu Monge) ta có:

$$\mathcal{A}(S) \;=\; \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$



VÍ DỤ:

Tính diện tích phần của parabôlôit có phương trình $z = xy$ và chiếu xuống mặt phẳng $x\mathrm{O}y$ được hình tròn D xác định bởi $x^2+y^2 \le 1$.

Trong ví dụ này $p = y$, $q = x$, vậy:

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

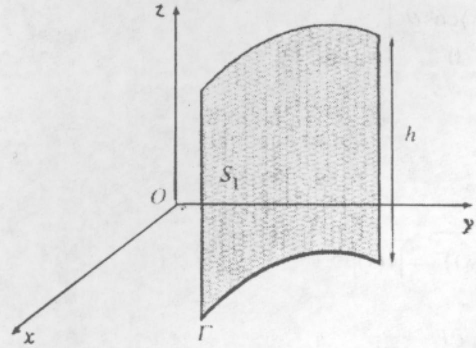
Ta tính tích phân kép này bằng cách chuyển sang tọa độ độc cực ($\Delta = [-\pi,\pi] \times [0;1]$:

$$\mathcal{A}(S) \;=\; \iint_\Delta \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 3{,}829\,.$$

Ta nhận thấy giá trị bằng số thu được lớn hơn π một chút (π là diện tích của D). Tổng quát hơn

$$\mathcal{A}(S) \;=\; \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathcal{A}(D)\,.$$

2) Diện tích một mặt trụ



Cho S là một mặt trụ có đường sinh song song với $(z'z)$, Γ là giao tuyến của S với mặt phẳng xOy: $(x= x(u),\ y= y(u),\ z = 0)$; $u \in I$ là một biểu diễn tham số của Γ giả sử thuộc lớp C^1, $h \in \mathbb{R}_+$.

Một biểu diễn tham số của miếng S_1 của S nằm giữa hai mặt phẳng có phương trình $z = 0$ và $z = h$ là:

$$\vec{F}: \underset{(x,y)\mapsto(x(u),y,(u),hv)}{D \to \mathbb{R}^3},$$

trong đó $D = I \times [0;1]$. Vì thế

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \begin{pmatrix} hy'(u) \\ -hx'(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\| = h\left(\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

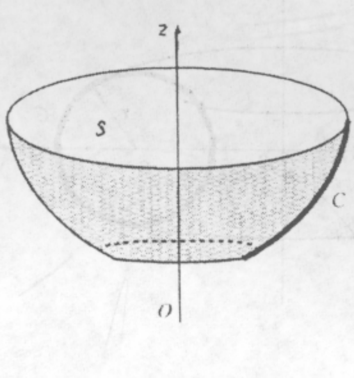
và vì vậy:

$$\mathcal{A}(S_1) = \iint_{I\times[0;1]} h\left(\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= h \int_I \left(\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u = hl(\Gamma)$$

với $l(\Gamma)$ là chiều dài của cung Γ (xem Tập hình học).

3) Diện tích một mặt tròn xoay



Cho C là một đường cong phẳng (thường là chính quy) nằm trong mặt phẳng yOz (chẳng hạn), S là mặt tròn xoay, sinh ra bởi phép quay C quanh $(z'z)$; ta nói C là một (nửa) kinh tuyến của S.

Ký hiệu s toạ độ cong trên C (xem Tập 2, 12.4.2 và Tập hình học) và giả sử: $(x = 0,\ y = y(s),\ z = z(s),\ s \in I)$, biểu diễn tham số của C là hàm của s; ta có: $\forall\ s \in I,\ (y'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1$.

Một biểu diễn tham số của S là

$$\vec{F}: \underset{(s,\theta)\mapsto(y(s)\cos\theta,\, y(s)\sin\theta,\, z(s))}{I \times [-\pi;\pi] \to \mathbb{R}^3}.$$

Ta có: $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial s} = \begin{pmatrix} y'(s)\cos\theta \\ y'(s)\sin\theta \\ z'(s) \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -y(s)\sin\theta \\ y(s)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$,

từ đó $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial s} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -y(s)z'(s)\cos\theta \\ -y(s)z'(s)\sin\theta \\ y(s)y'(s) \end{pmatrix}$.

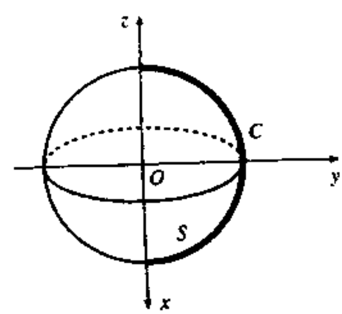
Vậy: $\left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial s} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \right\| = |y(s)|\sqrt{(y'(s))^2 + (z'(s))^2} = |y(s)|$.

Ta cũng có thể nhận thấy rằng, vì: $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial s} \perp \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta}$

nên $\left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial s} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \right\| = \left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial s} \right\| \left\| \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \right\|$, $A(S) = \iint_{I\times[-\pi;\pi]} |y(s)| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}s = 2\pi \int_I |y(s)| \mathrm{d}s$.

VÍ DỤ:

1) Diện tích mặt cầu



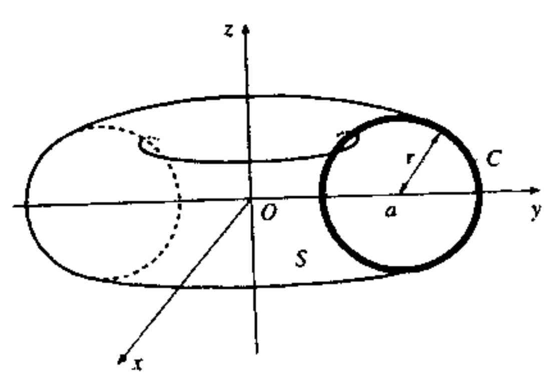
Một biểu diễn tham số của nửa đường tròn C là:

$$x = 0,\ y = r\cos\theta,\ z = r\sin\theta,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

r là bán kính của mặt cầu S. Vậy thì :

$$A(S) = 2\pi \int_C y\mathrm{d}s = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi r^2$$

2) Diện tích mặt xuyến



Theo định nghĩa, mặt xuyến là mặt tạo ra bởi một đường tròn quay chung quanh một đường thẳng nằm trên cùng một mặt phẳng với nó.

Xét đường tròn C có biểu diễn tham số:

$x = 0$; $y = a + r\cos t$; $z = a + r\sin t$; $t \in [0;2\pi]$ với $(a,r) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ cố định. Ở đây ta giả sử $a \geq r$.

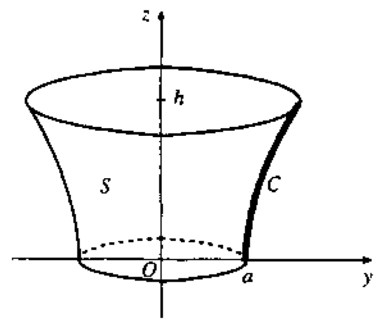
Toạ độ cong s trên C có giá trị là $s = rt$.

Diện tích của mặt xuyến S, do C quay xung quanh $(z'z)$ sinh ra là:

$$\mathcal{A}(S) = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + r\cos t) r \mathrm{d}t = 4\pi^2 ar.$$

Ta cũng có thể sử dụng định lý Guldin 1 (9.4.2, Định lý 1).

3) Diện tích miền hyperbôlôit tròn xoay



Cho S là một miếng của mặt hyperbôlôit tròn xoay xác định bởi :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

trong đó $(a,h) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ cố định.

Nửa - kinh tuyến của S nằm trong nửa - mặt phẳng $\begin{cases} x = 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ là một phần của hyperbôn xác định bởi:

$x = 0,\ 0 \le z \le h,\ y = \sqrt{a^2 + z^2}$.

Ký hiệu s, toạ độ cong trên C ta có $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\left(\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^2 + 1\right)(dz)^2$,từ

đó C tăng theo chiều z : $\mathrm{d}s = \sqrt{\dfrac{a^2+2z^2}{a^2+z^2}}\mathrm{d}s$. Vì vậy ta có:

$$\mathcal{A}(S) = 2\pi \int_C y\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^h \sqrt{a^2 + 2z^2}\,\mathrm{d}z .$$

Phép đổi biến $\varphi = \ln\left(\dfrac{z\sqrt{2}}{a} + \sqrt{1 + \dfrac{2z^2}{a^2}}\right)$, sau đó bằng phép tuyến tính hoá $\mathrm{ch}^2\varphi$ dẫn

tới:

$$\mathcal{A}(S) = \frac{\pi a\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left(\frac{h\sqrt{2}}{a} + \sqrt{1 + \frac{2h^2}{a^2}}\right) + \frac{h\sqrt{2}}{a}\sqrt{1 + \frac{2h^2}{a^2}}\right) .$$

Bài tập

◊ **9.2.1** Tính diện tích của các mặt S sau đây:

$$a)\ \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x\geq 0 \\ \alpha x\leq z\leq \beta x \end{cases}$$, $(\alpha,\beta,r)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ cố định và $\alpha<\beta$

$$b)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z\geq 0 \\ x^2+y^2-ax\leq 0 \end{cases}$$, $a\in\mathbb{R}_+^*$ cố định (cửa sổ Viviani)

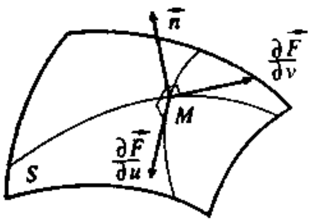
$$c)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ 0\leq z\leq \dfrac{xy}{c} \end{cases}$$, $(a,b,c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ cố định

$$d)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \\ x+y\leq r \end{cases}$$ $r\in\mathbb{R}_+^*$ cố định

$$e)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2ax=0 \\ z\geq 0 \\ x^2+y^2\leq z^2\tan^2\alpha \end{cases}$$ $(a,\alpha)\in\mathbb{R}_+^*\times\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ cố định.

9.3 Thông lượng

9.3.1 Đại cương

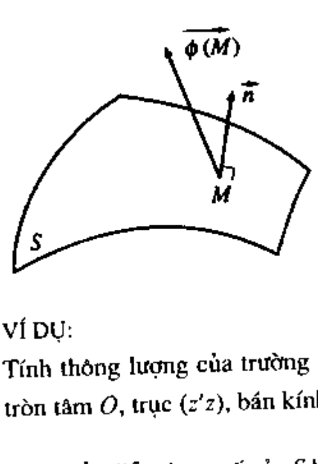


Ta không nêu ra ở đây khó khăn về khái niệm định hướng một mặt.
Ta "định hướng" một mặt bởi **vectơ pháp "*ra*"** $\vec{n}$ (tại mỗi điểm M của S) mà không nêu lên khó khăn về mặt lý thuyết.
Bằng cách ký hiệu $\vec{F}: \underset{(u,v)\mapsto \vec{F}(u,v)}{D \to \mathbb{R}^3}$ là một biểu diễn tham số của S có một vectơ vuông góc với S tại $M(= \vec{F}(u,v))$ là $\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}$. Từ đó, không kể đến dấu:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} = \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\| \vec{n} .$$

◆ **Định nghĩa**

Giả sử
- S là một mặt định hướng
- M là một điểm chạy trên S
- $\vec{n}$ là vectơ trực chuẩn ra tại M của S
- dS là yếu tố diện tích của S
- $\vec{\phi}: U \to \mathbb{R}^3$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên một bộ phận U của $\mathbb{R}^3$ chứa S.



Ta gọi số thực

$$\iint_S (\overrightarrow{\phi(M)}\vec{n})\mathrm{d}S$$

, trong đó $\overrightarrow{\phi(M)}\vec{n}$ là tích vô hướng của $\overrightarrow{\phi(M)}$ và $\vec{n}$, là **thông lượng của $\vec{\phi}$ qua S.**

VÍ DỤ:

Tính thông lượng của trường $\vec{\phi}:(x,y,z)\mapsto(y,x,z)$ qua nửa mặt cầu S, tựa trên đường tròn tâm O, trục $(z'z)$, bán kính 1 và ở phía trên mặt phẳng xOy.

Một biểu diễn tham số của S là $\vec{F}: \underset{(\theta,\varphi)\mapsto(\cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\varphi)}{D \to \mathbb{R}^3}$, trong đó $D = [-\pi;\pi]\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (toạ độ cầu).

Rõ ràng là $\vec{n} = (\cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\varphi)$. Mặt khác chúng ta đã tính được dS (xem 9.1.2, Ví dụ 3). d$S = \cos\varphi\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$. Thông lượng của $\vec{\phi}$ qua mặt S là

$$\iint_S \overrightarrow{\phi(M)}\vec{n}\mathrm{d}S = \iint_{[-\pi;\pi]\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}(2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi\right)+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Nhận xét: Sử dụng lại các ký hiệu trong Định nghĩa (9.1.3) ta có:

$$\iint_S \overrightarrow{\phi(M)}\vec{n}\mathrm{d}S = \iint_D \vec{\phi}\overline{F}(u,v).\left(\left\|\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\right\|\vec{n}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint_D \vec{\phi}\overline{F}(u,v).\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D\left[\overrightarrow{\phi(M)},\frac{\partial\overline{F}}{\partial u},\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

bằng cách ký hiệu [.,.,.] chỉ một hỗn tích trong $\mathbb{R}^3$.

Bài tập

◊ **9.3.1** Tính thông lượng của trường $\vec{\phi}:(x,y,z)\mapsto(x,y,z)$ qua mặt S trong các ví dụ sau đây:

a) $\begin{cases}\vec{\phi}(x,y,z)=(0,0,z)\\ S \text{ là mặt cầu có phương trình } x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}\vec{\phi}(x,y,z)=(y,x,x+y)\\ S \text{ là tam giác } \quad x+2y+z=2, x\geq 0, y\geq 0, z=0\end{cases}$

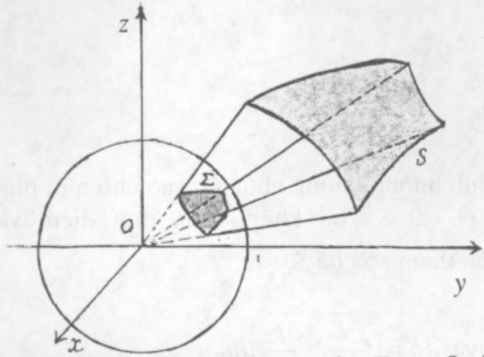
c) $\begin{cases}\vec{\phi}(x,y,z)=(y^2,x^2,z)\\ S \text{ là một phần mặt trụ được xác định, theo toạ độ trụ, bởi:}\\ x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, 0\leq z\leq h, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, (a,h)\in(\mathbf{R}_+^*)^2 \text{ cố định.}\end{cases}$

◊ **9.3.2** Cho S là một mặt, $\vec{\phi}$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên một bộ phận mở của $\mathbb{R}^3$ chứa S. Chứng minh rằng: $\left|\iint_S(\vec{\phi}(M).\vec{n})\mathrm{d}S\right| \leq \mathcal{A}(S)\sup_{M\in S}\left\|\vec{\phi}(M)\right\|$.

9.3.2 Góc khối

◆ **Định nghĩa**

Giả sử S là một mặt sao cho mọi nửa đường thẳng gốc O cắt S không qúa 1 điểm.



Với mỗi M của S, giả sử m là giao điểm của mặt cầu tâm O bán kính 1 với nửa đường thẳng $[OM)$; giả sử Σ là phần mặt cầu được biểu diễn bởi m. Ta gọi số thực $\mathcal{A}(\Sigma)$ là **góc khối theo đó S được nhìn từ O.**

Ví dụ: góc khối theo đó mặt cầu Σ tâm O và bán kính 1 được nhìn từ O bằng 4π (vì $\mathcal{A}(\Sigma) = 4\pi$).

Bằng cách sử dụng các toạ độ cầu, S có một biểu diễn tham số

$$\vec{F}: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) \mapsto \left(R(\theta,\varphi)\cos\theta\cos\varphi, R(\theta,\varphi)\sin\theta\cos\varphi, R(\theta,\varphi)\sin\varphi\right) \end{array}$$

trong đó $R(\theta,\varphi) = \|\overrightarrow{OM}\|$ phụ thuộc θ và φ.

Từ đó suy ra Σ có một biểu diễn tham số

$$\vec{G}: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) \mapsto (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi \sin\varphi) \end{array}$$

Theo 9.1.2, Ví dụ 3, ta có:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_\Sigma d\Sigma = \iint_D \cos\varphi d\theta d\varphi .$$

Xét tích hỗn tạp $\left[\vec{F}, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi}\right]$; vì $\vec{F} = R\vec{G}$, nên ta có:

$$\left[\vec{F}, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi}\right] = \left[R\vec{G}, \frac{\partial R}{\partial\theta}\vec{G} + R\frac{\partial\vec{G}}{\partial\theta}, \frac{\partial R}{\partial\varphi}\vec{G} + R\frac{\partial\vec{G}}{\partial\varphi}\right] = R^3\left[\vec{G}, \frac{\partial\vec{G}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{G}}{\partial\varphi}\right].$$

Mặt khác

$$\left[\vec{G}, \frac{\partial\vec{G}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{G}}{\partial\varphi}\right] = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi .$$

Giả sử $R \neq 0$ (nghĩa là $O \notin S$) ta có:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \left[\vec{F}, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi}\right] \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \iint_D \frac{1}{R^3}\left(\vec{F}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi}\right)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \iint_D \frac{1}{R^3}\vec{F}\mathrm{d}\vec{n},$$

trong đó (một cách lạm dụng) ký hiệu $d\vec{n} = \left(\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi}\right) d\theta d\varphi$.

Ta cũng thấy rằng, nếu $\vec{G} : (u,v) \mapsto \vec{G}(u,v)$ là một biểu diễn tham số khác của mặt có hướng S sao cho $\dfrac{\partial \vec{G}}{\partial \theta} \wedge \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial \varphi}$ "ra" tại mọi điểm của S, thì khi đó :

$$\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi}\right) d\theta d\varphi = \left(\frac{\partial \vec{G}}{du} \wedge \frac{\partial \vec{G}}{dv}\right) dudv .$$

Ta đã chứng minh kết quả sau :

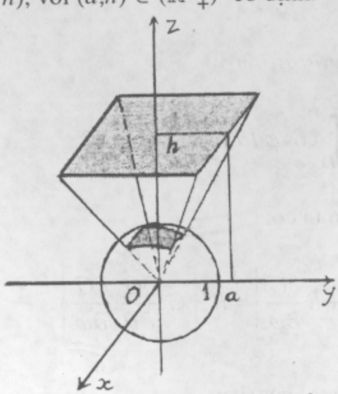
◆ **Mệnh đề** Cho S là một mặt định hướng không chứa O, sao cho mọi nửa - đường thẳng xuất phát từ O cắt S tại không quá một điểm và $\vec{F} : \underset{(u,v) \mapsto \vec{F}(u,v)}{D \to \mathbb{R}^3}$ là một biểu diễn tham số của S.

Với $M \in S$, ta ký hiệu $R = OM$ và $d\vec{n} = \left(\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v}\right) dudv$.

Góc khối, theo đó ta nhìn S từ O có giá trị là $\displaystyle\iint_D \frac{1}{R^3} \vec{F} d\vec{n}$. ■

Như vậy, góc khối theo đó ta nhìn S từ O bằng thông lượng của trường $\dfrac{1}{R^3}\vec{F}$ qua S.

VÍ DỤ: Tính góc khối theo đó ta nhìn từ O hình vuông xác định bởi $(-a \le x \le a, -a \le y \le a, z = h)$, với $(a,h) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$ cố định.



Một biểu diễn tham số của hình vuông đang xét là $\vec{F} : \underset{(x,y) \mapsto (x,y,h)}{[-a;a]^2 \to \mathbb{R}^3}$. Vectơ pháp ra tại M là $\vec{n} = (0,0,1)$.

Từ đó góc khối Ω cần tìm là :

$$\Omega = \iint_{[-a;a]^2} \frac{\overrightarrow{F(x,y)}\vec{n}}{\left\|\overrightarrow{F(x,y)}\right\|^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4 \iint_{[0;a]^2} h(x^2+y^2+h^2)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Chú ý đến sự đối xứng qua đường thẳng $x = y$ và chuyển sang toạ độ độc cực, ta có:

$$\Omega = 8h \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = 8h \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{h} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2+h^2\cos^2\theta}}\right) d\theta$$

$$= 2\pi - 8h \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+h^2)-h^2t^2}} = 2\pi - 8\mathrm{Arcsin}\frac{h}{\sqrt{2(a^2+h^2)}}.$$

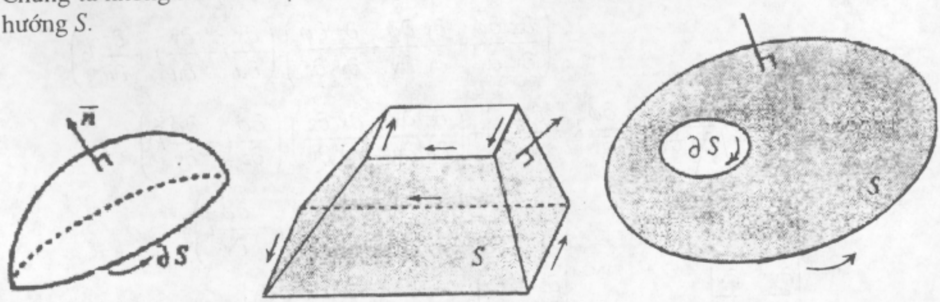
Bài tập

◊ **9.3.3** Tính góc khối Ω theo đó ta nhìn từ O chỏm cầu S xác định bởi:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geq \cos\alpha \end{cases}, \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ cố định.}$$

9.3.3. Định lý Stokes và Ostrogradski

Chúng ta không nêu lên một khó khăn nào về biên giới định hướng ∂S của một mặt có hướng S.



◆ **Định lý 1** **(Định lý Stokes)**

Giả sử S là một mặt định hướng với biên có hướng ∂S và $\vec{\phi}$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên một bộ phận mở của $\mathbb{R}^3$ chứa S. Lưu số của $\vec{\phi}$ dọc theo ∂S bằng thông lượng của rôto của $\vec{\phi}$ qua S:

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{\phi(M)}\overrightarrow{dM} = \iint_D \left(\overrightarrow{\text{rot}\,\phi(M)}.\vec{n}\right)dS.$$

Ký hiệu A, B, C là các thành phần của $\vec{\phi}$, $\overrightarrow{\phi(M)}\overrightarrow{dM}$ dùng để chỉ $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ (xem Tập 2, 13.1.5). Ta công nhận định lý Strokes, tuy nhiên ta sẽ nêu ra một chứng minh một phần có giá trị trong trường hợp những mặt "đơn giản" nhất.

Giả sử $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ là một biểu diễn tham số của S, ∂D là biên của D trong $\mathbb{R}^2$. Ta thừa nhận rằng biên ∂S của S có biểu diễn tham số là thu hẹp của $\vec{F}$ trên ∂D. Khi đó ta có:

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{\phi(M)}\overrightarrow{dM} = \int_{\partial D} (\vec{\phi}_o \vec{F})(u,v).\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}dv\right).$$

Ký hiệu : $P = (\vec{\phi}_o \vec{F})\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u}$, $Q = (\vec{\phi}_o \vec{F})\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v}$.

Theo công thức Green–Rienmann (Tập 2, 13.2.6) và giả sử $\vec{F}$ thuộc lớp C^2:

$$\int_{\partial D}(P\mathrm{d}u+Q\mathrm{d}v)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ta có:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial u}=\dfrac{\partial(\vec{\phi}\circ\vec{F})}{\partial u}\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v}+(\vec{\phi}\circ\vec{F})\dfrac{\partial^2\vec{F}}{\partial u\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial v}=\dfrac{\partial(\vec{\phi}\circ\vec{F})}{\partial v}\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u}+(\vec{\phi}\circ\vec{F})\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\partial v},\end{cases}$$

Từ đó:
$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial(\vec{\phi}\circ\vec{F})}{\partial u}\frac{\partial\vec{F}}{\partial v}-\frac{\partial(\vec{\phi}\circ\vec{F})}{\partial v}\frac{\partial\vec{F}}{\partial u}$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial y}\vec{k}-\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial z}\vec{j}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial z}\vec{i}-\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial y}\vec{k}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial z}\vec{j}-\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial y}\vec{i}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right),$$

Với ký hiệu A, B, C là các thành phần của $\vec{\phi}$ nghĩa là $\vec{\phi}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$.

Vì
$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{F}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\vec{k}$$

và $\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\phi(M)}=\left(\dfrac{\partial C}{\partial y}-\dfrac{\partial B}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{\partial A}{\partial z}-\dfrac{\partial C}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{\partial B}{\partial x}-\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)\vec{k}$ nên ta kết luận :

$$\int_{\partial S}\overrightarrow{\phi(M)}\overrightarrow{\mathrm{d}M}=\iint_D\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\phi\circ F(u,v)}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{F}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_S\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\phi(M)}\vec{n}\mathrm{d}S.$$

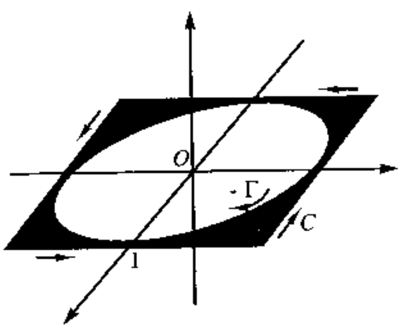
VÍ DỤ:

1) Tính lưu số của trường $\vec{\phi}:(x,y,z)\mapsto(2x+yz,xz,xy)$ dọc theo đường tròn tâm O, trục $(z'z)$, bán kính 1 (theo chiều thuận, một lần).

Ký hiệu P, Q, R là các thành phần của $\vec{\phi}$, thì rõ ràng là $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$. Và như vậy $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{(M)} = 0$.

Vì tồn tại một mặt phẳng định hướng S sao cho đường tròn đang xét là biên của S và $\vec{\phi}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^3$ nên ta kết luận, theo định lý Stokes: $\int_{\partial S} \overrightarrow{\phi(M)} \overrightarrow{dM} = 0$.

2) Tính lưu số của trường $\vec{\phi}$: $(x, y, z) \mapsto \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ dọc theo biên C của hình vuông trong mặt xOy có các đỉnh liên tiếp là $(1,1,0)$, $(-1,1,0)$, $(-1,-1,0)$, $(1,-1,0)$.



Xét đường tròn Γ, tâm O, trục $(z'z)$, bán kính 1, và S là mặt giới hạn bởi Γ và C. Ta có thể áp dụng định lý Stokes đối với S, có biên ∂S hợp bởi C và $-\Gamma$. Bằng cách tính trực tiếp cho thấy :

$$\forall\ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \times \mathbb{R},$$

$$\overrightarrow{\text{rot}\phi(x, y, z)} = \vec{0}.$$

Theo định lý Stokes:

$$\int_C \overrightarrow{\phi(M)} \overrightarrow{\text{d}M} - \int_\Gamma \overrightarrow{\phi(M)} \overrightarrow{\text{d}M} = \iint_{\partial S} \overrightarrow{\phi(M)} \overrightarrow{\text{d}M} = \iint_S \left(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\phi(M)} \vec{n} \right) \text{d}S,$$

từ đó $\displaystyle \int_C \overrightarrow{\phi(M)} \overrightarrow{\text{d}M} = \int_\Gamma \overrightarrow{\phi(M)} \overrightarrow{\text{d}M} = \int_{-\pi}^{\pi} \left((-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta \right) \text{d}\theta = 2\pi$. ■

Nhận xét:

Nếu S là một mặt "kín", nghĩa là nếu $\partial S = \phi$ thì $\int_S \left(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\phi(M)} \vec{n} \right) \text{d}S = 0$ trên mọi trường $\vec{\phi}$ thuộc lớp C^1 trên một bộ phận mở của $\mathbb{R}^3$ chứa S. ■

◆ **Định lý 2** **(Định lý Ostrogradski)**

Giả sử
- V là một miền của không gian
- S là biên có hướng của V
- $\vec{n}$ là vectơ pháp đơn vị ra tại một điểm chạy M của S
- $\vec{\phi}$ là một trường vectơ thuộc lớp C^1 trên V.

Khi đó thông lượng của $\vec{\phi}$ qua mặt S bằng tích phân bội ba của dive của $\vec{\phi}$:

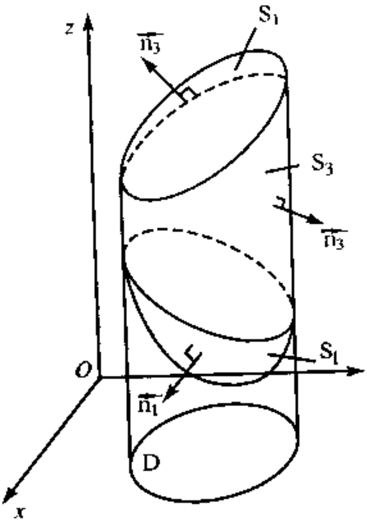
$$\iint_S \left(\overrightarrow{\phi(M)} \vec{n} \right) \text{d}S = \iiint_V \text{div} \overrightarrow{\phi(M)} \text{d}x\text{d}y\text{d}z.$$

Chúng ta công nhận định lý Ostrogradski, nhưng cũng như đối với định lý Stokes, ta đưa ra một chứng minh trong trường hợp riêng.

Giả sử miền V được xác định bởi ; $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad \begin{cases}(x,y) \in D \\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\end{cases}\right\}$,

với D là một compăc thuộc $\mathbb{R}^2$ và φ_1, φ_2: $D \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho :

$\forall\ (x,y) \in D$, $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$ (xem Tập 2 14.2.4).



Ta ký hiệu $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ \begin{cases}(x,y) \in D \\ z = \varphi_1(x,y)\end{cases}\right\}$,

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ \begin{cases}(x,y) \in D \\ z = \varphi_2(x,y)\end{cases}\right\}$,

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad \begin{cases}(x,y) \in \partial D \\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\end{cases}\right\}$

sao cho $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Vectơ pháp ra $\overrightarrow{n_1}$ (tương ứng $\overrightarrow{n_2}$) tại điểm chạy của S_1 (tương ứng S_2) là $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$ (tương ứng $\overrightarrow{n_2} = -\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$). Vectơ pháp ra $\overrightarrow{n_3}$ tại điểm chạy của S_3 trực giao với $\vec{k}$.

Ký hiệu P, Q, R là các thành phần của $\vec{\phi}$ sao cho $\vec{\phi} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Ta có:

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_D \left[R(x,y,z)\right]_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D R\big(x,y,\varphi_2(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D R\big(x,y,\varphi_1(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Mặt khác, vì $\vec{k}\overrightarrow{n_1} = -1$, $\vec{k}\overrightarrow{n_2} = 1$, $\vec{k}\overrightarrow{n_3} = 0$, nên ta có :

$$\begin{cases}\displaystyle\iint_{S_2}\left(R\vec{k}\overrightarrow{n_2}\right)\mathrm{d}S_2 = \iint_D R\big(x,y,\varphi_2(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \displaystyle\iint_{S_1}\left(R\vec{k}\overrightarrow{n_1}\right)\mathrm{d}S_1 = \iint_D R\big(x,y,\varphi_1(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \displaystyle\iint_{S_3}\left(R\vec{k}\overrightarrow{n_3}\right)\mathrm{d}S_3 = 0.\end{cases}$$

Từ đó $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \left(R\vec{k}\vec{n}\right)\mathrm{d}S$.

Với giả thiết rằng V có thể được biểu diễn một cách tương tự như đã làm từ đầu chứng minh và bằng cách hoán vị x, y, z, ta được :

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \left(P\vec{i}\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,,\quad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \left(Q\vec{j}\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,,$$

và cuối cùng :

$$\iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{\phi(M)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)\vec{n}\mathrm{d}S = \iint_S \left(\overrightarrow{\phi(M)}\vec{n}\right)\mathrm{d}S.$$

VÍ DỤ: Tính thông lượng của trường $\vec{\phi}$: $(x,y,z) \mapsto (xyz, xyz, xyz)$ qua biên của hình lập phương đơn vị $[0;1]^3$.

Ký hiệu V là hình lập phương với biên S, định lý Ostrogradski cho:

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\phi(M)}\vec{n}\right)\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{\phi(M)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{[0;1]^3} (yz+xz+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Bài tập

◊ **9.3.4**

a) Tính rôta của trường vectơ $\vec{\phi}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}(2x+y)e^{x^2+xy+y^2}z\\(x+2y)e^{x^2+xy+y^2}z\\z\end{pmatrix}$.

b) Từ đó suy ra thông lượng của trường vectơ :

$$\vec{\varphi}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-(x+2y)e^{x^2+xy+y^2}\\(2x+y)e^{x^2+xy+y^2}\\0\end{pmatrix}$$

qua mặt S tạo bởi bốn tam giác nối liền điểm (0,1,0) với các điểm: (0,0,0), (0,0,1), (1,0,1), (1,0,0).

◊ **9.3.5** Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{\phi}:(x,y,z) \mapsto \vec{\phi}(x,y,z)$ qua mặt S trong các ví dụ sau đây:

a) $\begin{cases}\vec{\phi}(x,y,z) = \left((x+y)z^2, (y+z)x^2, (z+x)y^2\right)\\ S \text{ là mặt cầu } : x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases}$

$$b)\ \begin{cases} \vec{\phi}(x,y,z) = \left(1 - x^2, \dfrac{y^2}{2}, z(2x-y)\right) \\ S: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{và} \quad 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \vec{\phi}(x,y,z) = \left(xy^2 z(z-1), x^2 yz(z-1), z^3 - z^2\right) \\ S \quad \text{là phần của mặt trụ:} \quad x^2 + y^2 = 1, \ \ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

9.4 Khối lượng, tâm quán tính, mômen quán tính của một bản ghềnh

9.4.1 Bản ghềnh

◆ **Định nghĩa** Ta gọi là **bản ghềnh** mọi cặp (S,σ) trong đó S là một mặt của $\mathbb{R}^3$ và $\sigma: S \to \mathbb{R}_+$ là một ánh xạ liên tục; σ được gọi là **tỷ trọng (bề mặt)** của bản ghềnh (S, σ).

Ta thêm vào hệ thống vật chất đã xét trong Tập 2 (13.4.1) Định nghĩa các bản ghềnh.
Nếu σ không đổi, thì ta nói bản ghềnh (S, σ) là **đồng nhất.**

Nhận xét:
Một bản phẳng (xem Tập 2 13.4.1) trong $\mathbb{R}^2$ có thể được coi là một bản ghềnh trong $\mathbb{R}^3$, bị chứa trong $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

9.4.2 Khối lượng của một bản ghềnh

◆ **Định nghĩa** Ta gọi, số thực μ xác định bởi tích phân mặt: $\mu = \iint_S \sigma(M)\mathrm{d}S$, trong đó M là một điểm chạy của S và $\mathrm{d}S$ là một yếu tố diện tích, là **khối lượng** của một bản ghềnh (S,σ) của $\mathbb{R}^3$. ■

Như vậy, nếu S có một biểu diễn tham số $\vec{F}: \underset{(u,v)\mapsto \vec{F}(u,v)}{D \to \mathbb{R}^3}$ thì khối lượng của (S, σ)

sẽ là: $\mu = \iint\limits_D \sigma\left(\vec{F}(u,v)\right)\left\|\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v}\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

VÍ DỤ:
Tính khối lượng của bản ghềnh (S,σ), trong đó S là một phần mặt nón được xác định bởi :

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \text{ và } \sigma: \underset{(x,y,z)\mapsto x^2}{S \to \mathbb{R}}.$$

Mặt nón có biểu diễn tham số $\vec{F}: \underset{(u,v)\mapsto(u,v,\sqrt{u^2+v^2})}{[0;1]^2 \to \mathbb{R}^3}$. Từ đó, sau các tính toán đơn giản ta có: $\left\|\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial v}\right\| = 2$ (xem 9.1.2, Ví dụ 2). Vậy $\mu = \iint_{[0;1]^2} 2u^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \dfrac{2}{3}$.

Nhận xét: Khối lượng của một bản đồng nhất (S, σ) bằng $\mathcal{A}(S).\sigma$.

9.4.3 Tâm quán tính của một bản ghềnh:

Các bản ghềnh xét ở đây và tiết 9.4.4 đều được coi là có khối lượng $\neq 0$.

- **Định nghĩa** **Tâm quán tính** của một bản ghềnh (S,σ) là một điểm G thuộc $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(S,\sigma)} \iint_S \sigma(M)\overrightarrow{OM}\mathrm{d}S,$$

trong đó M vẽ nên S, dS là yếu tố diện tích của S và $\mu(S,\sigma)$ là khối lượng của (S,σ).

Đối với một bản ghềnh đồng nhất, ta dùng từ **trọng tâm** thay cho tâm quán tính.

VÍ DỤ:
Xác định trọng tâm của một bản đồng nhất $(S,1)$ trong đó S là mặt xác định bởi:

$$x = ue^v\cos v,\ y = ue^v\sin v,\ z = e^v, \qquad (u,v) \in [0;1]^2.$$

Ta có: $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u} = \begin{pmatrix} e^v\cos v \\ e^v\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$; $\qquad \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v} = \begin{pmatrix} ue^v(\cos v - \sin v) \\ ue^v(\sin v + \cos v) \\ e^v \end{pmatrix}$,

từ đó: $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v} = e^{2v}\begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix}$, $\left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v}\right\| = e^{2v}\sqrt{1+u^2}$.

Khối lượng μ của $(S,1)$ được cho bởi:

$$\mu = \iint_S \left\|\frac{\partial\vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{F}}{\partial v}\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left[\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du\right]\left(\int_0^1 e^{2v}dv\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)\left(e^2 - 1\right) \approx 3{,}667.$$

Trọng tâm G của $(S,1)$ được xác định bởi:

$$\mu\overrightarrow{OG} = \iint_S \left\|\frac{\partial\vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{F}}{\partial v}\right\| \overrightarrow{OM}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

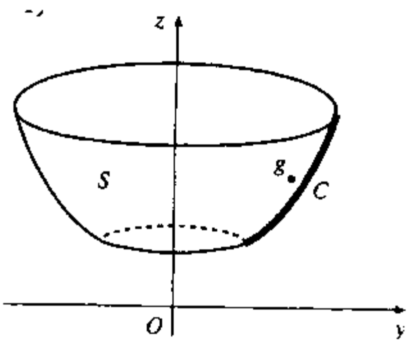
$$= \iint_{[0;1]^2} e^{2v}\sqrt{1+u^2}\,(ue^v\cos v\,\vec{i} + ue^v\sin v\,\vec{j} + e^v\vec{k})\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \left(\int_0^1 e^{3v}\cos v\,dv\right)\left(\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,du\right)\vec{i} + \left(\int_0^1 e^{3v}\sin v\,dv\right)\left(\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,du\right)\vec{j}$$
$$+ \left(\int_0^1 e^{3v}dv\right)\left(\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du\right)\vec{k}$$

$$= \frac{1}{30}\left((3\cos 1 + \sin 1)e^3 - 3\right)\left(2\sqrt{2} - 1\right)\vec{i} + \frac{1}{30}\left((3\sin 1 - \cos 1)e^3 + 1\right)\left(2\sqrt{2} - 1\right)\vec{j}$$
$$+ \frac{1}{12}\left(e^3 - 1\right)\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)\vec{k}.$$

Từ đó $\qquad \overrightarrow{OG} \approx 0{,}772\vec{i} + 0{,}679\vec{j} + 0{,}996\vec{k}$.

Xét trường hợp riêng đối với mặt tròn xoay ■



1) Cho S là một mặt tròn xoay, trục $(z'z)$, nửa kinh tuyến C nằm trong nửa mặt phẳng $(x = 0,\ y \geq 0)$. Giả sử C có biểu diễn tham số $x = 0,\ y = y(t),\ z = z(t)$ trong đó, t chạy trên khoảng I.
Ta đã thấy (9.2.2.3) là diện tích của S được cho bởi $\mathcal{A}(S) = 2\pi \int_C y ds$ trong đó s chỉ toạ độ cong của C . Nhưng theo định nghĩa trọng tâm của C (xem Tập 2, 13.4.2) ta có $y_g = \dfrac{1}{l(C)} \int_C y ds$, trong đó $l(C)$ là chiều dài của C và y_g là tung độ của g.

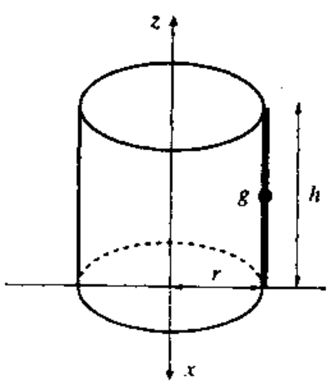
Ta có: $\mathcal{A}(S) = 2\pi y_g l(C)$. Như vậy ta đã chứng minh:

◆ **Định lý 1 (Định lý Guldin thứ nhất)**
Cho S là một mặt tròn xoay (quay quanh trục $(z'z)$) và C là nửa- kinh tuyến của S nằm trong nửa mặt phẳng $(x = 0,\ y \geq 0)$.
Khi đó diện tích của S bằng $2\pi y_g l(C)$, trong đó y_g là tung độ của trọng tâm G của dây đồng nhất C và $l(C)$ là chiều dài của C.

Trong thực tế, định lý Guldin thứ nhất quay về kết quả của 9.2.2.3).

VÍ DỤ:

1) Diện tích xung quanh của mặt trụ tròn xoay

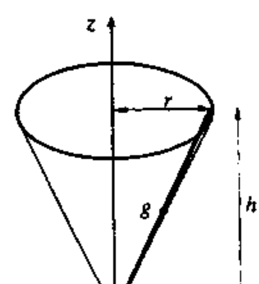


Ở đây: $l(C) = h$ và $y_g = d(g,(z'z)) = r$.
Từ đó $\mathcal{A}(S) = 2\pi rh$.

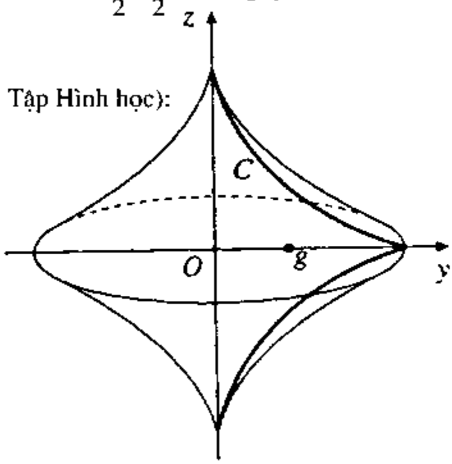
2) Diện tích xung quanh của mặt nón tròn xoay

Ở đây: $l(C) = \sqrt{r^2 + h^2}$ và $y_g = d(g,(z'z)) = \dfrac{r}{2}$.

Từ đó $\mathcal{A}(S) = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.



3) Tính diện tích của mặt tròn xoay S có được bằng cách quay nửa đường astroit C có biểu diễn tham số ($x = 0$, $y = a\cos^3 t$, $z = a\sin^3 t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$) xung quanh ($z'z$).



• Trước hết, ta tính chiều dài l của C (xem Tập Hình học):

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt$$

$$= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = -\frac{3a}{2}\left[\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a .$$

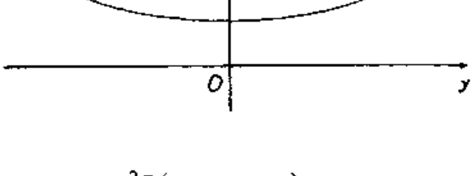
• Xác định trọng tâm g của C (xem Tập 2, 13.4.3). Rõ ràng rằng $x_g = z_g = 0$.

Và: $\quad l.y_g = \int_C yds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3a^2 \cos^3 t |\sin t| \cos t dt = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = \frac{6a^2}{5}$,

từ đó $y_g = \frac{2a}{5}$.

Theo định lý Guldin thứ nhất, diện tích S có giá trị : $\mathcal{A}(S) = \frac{12\pi}{5} a^2$.

2)



Giả sử D là một compăc thoả mãn tính chính quy của mặt phẳng yOz, nằm trong nửa mặt phẳng $y \geq 0$, G là trọng tâm của D. Bằng cách sử dụng các toạ độ trụ ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$) thể tích $\mathcal{V}(V)$ của miền V trong không gian có được bằng cách quay D quanh ($z'z$) là:

$$\mathcal{V}(V) = \int_0^{2\pi} \left(\iint_D \rho d\rho dz \right) d\theta = 2\pi \iint_D y dy dz .$$

Mặt khác $\mathcal{A}(D) = \iint_D dydz$ và tung độ y_G của G được cho bởi :

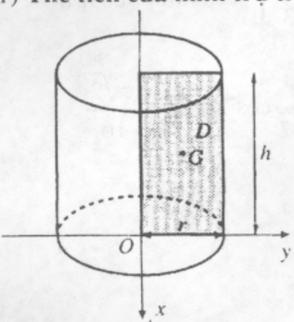
$$\mathcal{A}(D) y_G = \iint_D y dy dz .$$

Từ đó ta có $\mathcal{V}(V) = 2\pi y_G \mathcal{A}(D)$. Như vậy ta đã chứng minh:

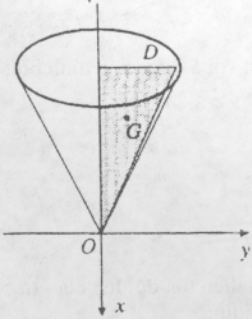
Định lý 2 (Định lý Guldin thứ 2)
Cho D là một compăc thuộc nửa mặt phẳng ($x= 0$, $y \geq 0$) và V là một miền của $\mathbb{R}^3$ có được bằng cách quay D xung quanh ($z'z$). Thể tích của V có giá trị là: $2\pi y_G \mathcal{A}(D)$, trong đó y_G là toạ độ trọng tâm G của bản phẳng đồng nhất D.

Nhận xét :
Trọng tâm G của D, nói chung không trùng với trọng tâm G của biên của D. Ta sẽ luôn tỉnh táo để không nhầm lẫn hai trọng tâm dùng trong hai định lý Guldin.

VÍ DỤ:
1) **Thể tích của hình trụ tròn xoay**



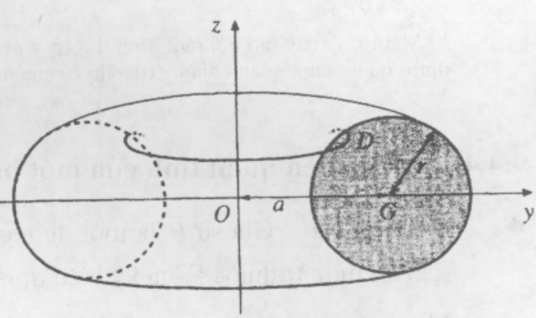
Ở đây: $\mathcal{A}(D) = rh$ và $y_G = \dfrac{r}{2}$, từ đó $\mathcal{V}(V) = \pi r^2 h$.



2) **Thể tích của hình nón tròn xoay**

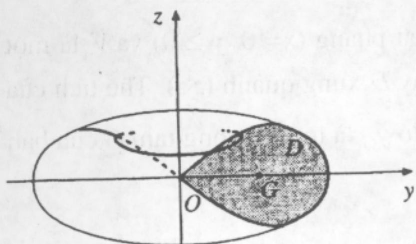
Ở đây : $\mathcal{A}(D) = \dfrac{rh}{2}$ và $y_G = \dfrac{r}{3}$,

từ đó $\mathcal{V}(V) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$



3) **Thể tích của hình xuyến**
Ở đây: $\mathcal{A}(D) = \pi r^2$ và $y_G = a$,
từ đó $\mathcal{V}(V) = 2\pi^2 a r^2$.

4) Tính thể tích của miền được tạo ra bằng cách quay nửa – lemniscat cho bởi phương trình độc cực ($\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$) thuộc mặt yOz quanh ($z'z$).



Diện tích $\mathcal{A}(D)$ của miền D trong nửa đường lemniscat được cho bởi (xem Tập 2, 13.1.6, Ví dụ 2):

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, toạ độ y_G của trọng tâm G của D được cho bởi:

$$\mathcal{A}(D) y_G = \iint_D y dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^2 \sin\theta d\rho\right) d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta$$

$$\underset{t=\sin\theta}{=} \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2t^2)^{\frac{3}{2}} dt \underset{\varphi=\text{Arcsin}\,(t\sqrt{2})}{=} \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}.$$

Từ đó: $\mathcal{V}(V) = 2\pi y_G \mathcal{A}(D) = \dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{8}$.

Bài tập

9.4.1. Xác định tâm quán tính của bản ghềnh đồng nhất (S,σ) với S được xác định bởi:

$$x^2 + y^2 = a^2,\ (x-a)^2 + y^2 + (z-2a)^2 \geq 4a^2,\ 0 \leq z \leq 2a$$

9.4.2. Tính diện tích mặt S trong các ví dụ sau:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

b) Mặt tròn xoay tạo bởi một hình tim ($\rho = a(1+\cos\theta)$ theo toạ độ độc cực ($a > 0$ cố định) quay xung quanh đường tiếp tuyến của nó tại điểm lùi.

9.4.4 Mômen quán tính của một bản ghềnh

◆ **Định nghĩa** Giả sử H là một đường thẳng hoặc một mặt phẳng của $\mathbb{R}^3$; với mọi M thuộc $\mathbb{R}^3$ ta ký hiệu $d(M,H)$ là khoảng cách từ M đến H.

Mômen quán tính của một bản ghềnh (S,σ) **đối với** H là số thực I_H xác định bởi:
$$I_H = \iint_S \sigma(M)\big(d(M,H)\big)^2 \, dS,$$
trong đó M chạy trên S và dS là yếu tố diện tích của S.

Các kết quả thu được trong Tập 2, 13.4.4 đối với các dây, bản phẳng, khối vẫn có giá trị đối với các bản ghềnh:

• Mômen quán tính của một bản ghềnh (S,σ) đối với một đường thẳng D bằng tổng momen quán tính của (S,σ) đối với hai mặt phẳng vuông góc chứa D.
• Mômen quán tính của một bản ghềnh (S,σ) đối với một điểm A bằng tổng các mômen quán tính của (S,σ) đối với 3 mặt phẳng qua A và từng đôi một vuông góc với nhau.
• Mômen quán tính của một bản ghềnh (S,σ) đối với một điểm A bằng nửa tổng các mômen quán tính đối với 3 đường thẳng qua A và từng đôi một vuông góc với nhau.
Trong thực tế, các kết quả trên được biểu diễn bằng các công thức:

$$I_{x'x} = I_{xOy} + I_{xOz}, \qquad I_{y'y} = I_{xOy} + I_{yOz}, \qquad I_{z'z} = I_{xOz} + I_{yOz}$$

$$I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz}, \qquad I_O = \frac{1}{2}(I_{x'x} + I_{y'y} + I_{z'z}).$$

VÍ DỤ :

1) Tính mômen quán tính $I_{z'z}$ đối với $(z'z)$ của bản ghềnh đồng nhất $(S,1)$, trong đó S là mặt được xác định bởi:

$$z = x\,\mathrm{sh}y, \qquad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

Một biểu diễn tham số của S là $\vec{F}: \underset{(x,y)\mapsto(x,y,x\,\mathrm{sh}y)}{[0;1]^2 \to \mathbb{R}^3}$,trong đó

$$\left\|\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} \wedge \frac{\partial\vec{F}}{\partial y}\right\| = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 y + x^2\mathrm{ch}^2 y} = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{ch}y \text{ (xem 9.2.2 1)).}$$

Ta có: $$I_{z'z} = \iint_{[0;1]^2} (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{ch}y\,dxdy$$

$$= \left(\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx\right)\left(\int_0^1 \mathrm{ch}y\,dy\right) + \left(\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\mathrm{ch}y\,dy\right).$$

và sau khi tính toán: $I_{z'z} = \frac{1}{8}\left(15\sqrt{2} + 11\ln(1+\sqrt{2})sh1 - (\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)ch1$

2) Tính mômen quán tính của bản ghềnh đồng nhất $(S,1)$, trong đó S là mặt cầu tâm O, bán kính r, đối với O, đối với 3 trục toạ độ, đối với 3 mặt phẳng toạ độ:

• $$I_o = \int_S \sigma OM^2 \left\|\frac{\partial\vec{M}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi}\right\| d\theta d\varphi = \sigma\int_D r^4\cos\varphi\, d\theta d\varphi$$

(xem 9.1.2, Ví dụ 3), trong đó $D = [-\pi;\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

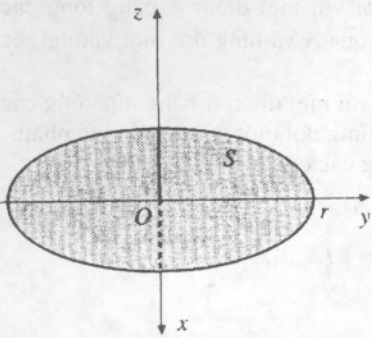
Vậy: $$I_O = \sigma r^4\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right) = 4\pi r^4\sigma.$$

• Vì $I_{xOy} + I_{xOy} + I_{yOz} = I_O$ và do lý do đối xứng vật chất, $I_{xOy} = I_{xOz} = I_{yOz}$,

ta suy ra : $$I_{xOy} = I_{xOz} = I_{yOz} = \frac{4}{3}\pi r^4\sigma.$$

• Tương tự $$I_{x'x} = I_{y'y} = I_{z'z} = \frac{1}{2}(I_{xOy} + I_{xOz}) \qquad = \frac{4}{3}\pi r^4\sigma$$

3) Tính mômen quán tính của một đĩa đồng nhất (S, σ) bán kính r đối với trục của nó.



Bằng cách chọn một hệ quy chiếu trực chuẩn thích hợp, S có một biểu diễn tham số là:

$$\vec{F} : \underset{(\theta,\rho)\mapsto(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\theta)}{[-\pi;\pi]\times[0;r] \to \mathbb{R}^3}.$$

Vậy ta có:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

từ đó $\left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial \rho} \right\| = \rho$.

Và ta suy ra mômen cần tìm:

$$I_{z'z} = \iint_S \sigma OM^2 \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial \rho} \right\| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \sigma \iint_{[-\pi;\pi]\times[0;r]} \rho^3 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho$$

$$= \sigma \left(\int_0^r \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) = \frac{\pi r^4 \sigma}{2}.$$

■

Định lý Huygens đã gặp trong Tập 2 (13.4.4) vẫn đúng đối với các bản ghềnh:

◆ **Định lý (Định lý Huygens)**

Giả sử (S,σ) là một bản ghềnh
G là tâm quán tính của (S,σ)
H là một điểm, một đường thẳng hoặc một mặt phẳng
H_G song song với H và qua G
d là khoảng cách từ H đến H_G
μ là khối lượng của (S,σ)
I_H (tương ứng I_{H_G}) là mômen quán tính của (S,σ) đối với H (tương ứng H_G).

Khi đó ta có : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2$.

VÍ DỤ:

Tìm mômen quán tính của bản ghềnh đồng nhất (S,σ), trong đó S là mặt cầu tâm O, bán kính r, đối với mặt phẳng P tiếp xúc với S.

Theo định lý Huygens $I_P = I_{P_0} + \mu d^2$, trong đó $\mu = 4\pi r^2 \sigma$ (xem 9.2.23) Ví dụ 1), P_0 là mặt phẳng song song với P và đi qua O, $D = \mathrm{d}(P, P_0) = r$, và do tính đối xứng: $I_P = I_{xOy} = \frac{4}{3}\pi r^4 \sigma$ (xem 9.4.4, Ví dụ 2). Ta kết luận: $I_p = \frac{16}{3}\pi r^4 \sigma$.

Bài tập

◊ **9.4.3** Cho (S, σ) là một bản ghềnh đồng nhất, trong đó S là mặt xác định bởi $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ và $x^2 + y^2 \leq 1$. Tính các mômen quán tính của (S, σ) đối với 3 mặt phẳng toạ độ, đối với 3 trục và đối với tâm O.

Phần II

CHỈ DẪN VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 4

4.1.1 *a)* • Với $x \neq 0$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

• $\forall\, a > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (|x| > a \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{na})$.

◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $\mathbb{R}$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$ với $a > 0$ cố định; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}$.

b) • Với $x \neq 0$ cố định ; $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} x$ và $f_n(0) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - x| = \frac{|x|}{1 + nx^2}$.

Ta có: $\begin{cases} |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{|x|}{1+nx^2} \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$

từ đó $\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Cũng có thể khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto |f_n(x) - x| = \frac{|x|}{1 + nx^2}$.

◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trong đó $f : \begin{matrix}\mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x\end{matrix}$.

c) ◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $\mathbb{R}$; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $[a;+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ cố định.

d) ◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trong đó $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ xác định bởi : $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ nếu } x = 1 \\ 1 \text{ nếu } x > 1. \end{cases}$

$f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $\mathbb{R}_+$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên mọi $[0;a] \cup [b;+\infty[$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cố định sao cho $0 \leq a < 1 < b$.

e) ◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trong đó $f : [0;1] \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ nếu } x = 1 \end{cases}$.

$f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $[0;1]$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên mọi $[0;a]$, $a \in [0;1[$ cố định.

f) ◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $\mathbb{R}_+$; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}_+$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $[0;a]$; $a \in \mathbb{R}_+$ cố định.

g) • Với $x \in \mathbb{R}_+$ cố định, thực hiện khai triển tiệm cận (khi $n \to \infty$):

$$f_n(x) = \sin\left(2\pi n\left(1+\frac{x}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2}\right) - \frac{x}{4\pi n} = \sin\left(2\pi n + \frac{x}{4\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{x}{4\pi n} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

• $f_n(12\pi^2 n^2) = -3\pi n.$

• Cho $a \in \mathbb{R}_+$, với mọi $x \in [0;a]$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\left|f_n(x)\right| = \left|\sin\left(\sqrt{x+4\pi^2 n^2} - 2\pi n\right) - \frac{x}{4\pi n}\right|$$

$$= \left|\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x+4\pi^2 n^2} + 2\pi n}\right) - \frac{x}{4\pi n}\right| \le \frac{x}{\sqrt{x+4\pi^2 n^2} + 2\pi n} + \frac{x}{4\pi n} \le \frac{a}{2\pi n}.$$

◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $\mathbb{R}_+$; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}_+$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $[0;a]$; $a \in \mathbb{R}_+$ cố định.

h) ◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $[0;2]$; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[0;1]$ cũng như trên $[1;2]$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $[a;b]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cố định sao cho $0 < a \le b < 2$.

i) • Cho $x \in \mathbb{R}$ cố định; ta có $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nếu $x \ge 0$ và $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nếu $x < 0$.

• $\lim\limits_{0^-} f_n = n$.

• Cho $a > 0$ cố định. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi x thuộc $[a; +\infty[$, ta có:

$$\left|f_n(x)\right| = \frac{1}{n}(nx)^2 e^{-nx}\frac{1}{(1-e^{-x})^2} \le \frac{1}{n}\varphi(nx)\frac{1}{(1-e^{-x})^2},$$

trong đó $\varphi : \mathbf{R}_+ \underset{t \mapsto t^2 e^{-t}}{\to} \mathbf{R}$.

Để ý rằng φ và $x \mapsto (1-e^{-x})^2$ bị chặn trên $[a;+\infty[$.

◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $[0;+\infty[$; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[0;+\infty[$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $[a;+\infty[$, $a > 0$ cố định.

j) • Với $x \in \mathbb{R}$ cố định, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\infty]{} e^x$, xem Tập 2, 7.2 bằng cách thay 1 bởi x hay xem Tập 4, 2.5.3.1).

• Cho $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$, từ đó có các bảng biến thiên của f_n :

n chẵn

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$-$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

n lẻ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ 0

Vậy $f_n - 1$ không bị chặn trên $]-\infty;0[$, mặt khác $\left\|(f_n - 1)|_{[0;+\infty[}\right\|_\infty = 1$

• Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < 0 < b$. Theo các bảng trên,

$$\operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} |f_n(x) - 1| = \operatorname{Max}\left(|f_n(a) - 1|, |f_n(b) - 1|\right) \le |f_n(a) - 1| + |f_n(b) - 1|$$

◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 1$ trên $\mathbb{R}$; $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 1$ trên $]-\infty;0]$ cũng như trên $[0;+\infty[$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 1$ đều trên $[a;b]$ với $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cố định.

4.1.2 Vì $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$, ta có:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, \forall y \in Y, \ \|f_n(y) - f(y)\|_E \le \varepsilon,$$

và vậy nói riêng $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, \forall x \in X, \ \|f_n(\varphi(x)) - f(\varphi(x))\|_E \le \varepsilon$,

tức là: $f_n \circ \varphi \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \circ \varphi$.

4.1.3 *a)* Cho $\varepsilon > 0$. Vì g liên tục đều trên E nên có $\eta > 0$ sao cho:

$\forall (y,y') \in E^2, \ \left(\|y - y'\|_E \le \eta \Rightarrow \|g(y) - g(y')\|_F \le \varepsilon\right)$.

Rồi, do $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\forall n \ge N, \forall x \in X, \ \|f_n(x) - f(x)\|_E \le \eta.$$

Vậy ta có: $\forall n \ge N, \forall x \in X, \ \|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)\|_F \le \varepsilon$,

điều đó chứng tỏ $g \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g \circ f$.

b) Với $n \in \mathbb{N}^*$, xét $f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{n}\end{array}$ và $g : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\end{array}$.

Rõ ràng rằng $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trong đó $f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\end{array}$.

Ta có : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ |(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| = \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|$.

Nói riêng $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |(g \circ f_n - g \circ f)(n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$,

điều đó chứng tỏ: $g \circ f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g \circ f$.

◊ **Trả lời:** không.

4.1.4 *a)* Với mọi (n, x, y) thuộc $\mathbb{N} \times X \times Y$, ta có:

$$\begin{aligned}
|(f_n \otimes g_n)(x,y) - (f \otimes g)(x,y)| &= |f_n(x)g_n(y) - f(x)g(y)| \\
&= |(f_n(x) - f(x))g_n(y) + f(x)(g_n(y) - g(y))| \\
&\le |f_n(x) - f(x)||g_n(y)| + |f(x)||g_n(y) - g(y)|.
\end{aligned}$$

Vì $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và $g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$ nên có $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \ge N_1,\ f_n - f \in B(X, \mathbb{C}) \\ \forall n \ge N_2,\ g_n - g \in B(Y, \mathbb{C}). \end{cases}$$

Ký hiệu $N = \text{Max}(N_1, N_2)$. Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge N$ thì $f_n - f$ và $g_n - g$ bị chặn, vậy do f và g bị chặn, suy ra f_n và g_n cũng bị chặn và tính toán trên đây chứng tỏ $f_n \otimes g_n - f \otimes g$ bị chặn và:

$$\begin{aligned} \|f_n \otimes g_n - f \otimes g\|_\infty &\le \|f_n - f\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \\ &\le \|f_n - f\|_\infty \left(\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\right) + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty . \end{aligned}$$

Do $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0$ và $\|g_n - g\|_\infty \underset{n\infty}{\to} 0$, ta suy ra $\|f_n \otimes g_n - f \otimes g\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$, tức là:

$$f_n \otimes g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \otimes g .$$

b) Xét ví dụ $X = Y = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbf{R} \underset{x \mapsto x + \frac{1}{n}}{\to} \mathbb{C}$, $g_n : \mathbf{R} \underset{y \mapsto y + \frac{1}{n}}{\to} \mathbb{C}$ và lập luận như trong lời giải của bài Tập 4.1.3 *b)*.

◊ **Trả lời:** không.

4.1.5 Do $(f_n)_n$ hội tụ đều trên X nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall x \in X, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \ge N \\ q \ge N \end{cases} \Rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \le \frac{1}{2} \Rightarrow f_p(x) = f_q(x) \right).$$

Vậy ta có: $\forall p \in \mathbb{N}, f_p = f_N$.

4.1.6 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \left|g_n(x) - |f(x)|\right| = \dfrac{|f(x)|\left(\sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}} - |f(x)|\right)}{\sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}}}$

$$\le \sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}} - |f(x)| \le \sqrt{\left((f(x))^2 + \frac{1}{n}\right) - (f(x))^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(xem Tập 1, bài tập 1.2.30 *b)*).

4.1.7 • Ánh xạ $\varphi : \mathbf{R} \underset{x \mapsto \frac{|x|}{1+x^2}}{\to} \mathbf{R}$ là 1 - Lipschitz (khảo sát $\varphi'(x)$ với $x \in \mathbb{R}_+$)

• $\left|\dfrac{|f_n|}{1+f_n^2} - \dfrac{|f|}{1+f^2}\right| = |\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \le |f_n - f|$.

4.1.8 *a)* Do f liên tục trên $[a;b]$ nên f liên tục đều trên $[a;b]$ (Định lý Heine). Cho $\varepsilon > 0$, có $\eta > 0$ sao cho $\eta \le \dfrac{\varepsilon}{M+1}$ và:

$$\forall(x',x'')\in[a;b]^2,\ \left(|x'-x''|\le\eta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\le\varepsilon\right).$$

Tiếp theo, có $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\dfrac{b-a}{n_0}\le\eta$.

Với mọi $k\in\{0,...,n_0\}$, đặt $a_k=a+k\dfrac{b-a}{n_0}$; khi đó $(a_k)_{0\le k\le n_0}$ là một thứ phân của $[a;b]$. Vì $f_n\xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}}f$ với mọi $k\in\{0,...,n_0\}$, nên có $N_k\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$\forall n\ge N_k,\ |f_n(x_k)-f(x_k)|\le\varepsilon.$$

Vậy ký hiệu $N=\underset{0\le k\le n_0}{\text{Max}}\ N_k$ thì ta có:

$$\forall n\ge N,\ \ \forall k\in\{0,...,n_0\},\ |f_n(x_k)-f(x_k)|\le\varepsilon.$$

Cho $x\in[a;b]$; có $k\in\{0,...,n_0\}$ sao cho $x\in[x_k;x_{k+1}]$. Khi đó,

- Theo bất đẳng thức số gia hữu hạn:

$$|f_n(x)-f_n(x_k)|\le M|x-x_k|\le M\frac{b-a}{n_0}\le M\eta\le\varepsilon,$$

- $|f_n(x_k)-f(x_k)|\le\varepsilon$ vì $n\ge N\ge N_k$,
- $|f(x_k)-f(x)|\le\varepsilon$ vì $|x-x_k|\le\dfrac{b-a}{n_0}\le\eta$.

Bởi bất đẳng thức tam giác, ta được: $|f_n(x)-f(x)|\le3\varepsilon$.

Ta đã chứng minh:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\ge N,\forall x\in[a,b],\quad |f_n(x)-f(x)|\le3\varepsilon,$$

tức là: $f_n\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}}f$.

b) Xét ví dụ $f_n:\mathbf{R}\underset{x\mapsto\frac{x}{n+1}}{\to}\mathbf{R}$.

◊ **Trả lời:** không.

4.1.9 $\mathbb{R}$- kgv $\mathbb{R}_N[X]$ có số chiều hữu hạn $(N+1)$ và $\nu:\mathbb{R}_N[X]\to\mathbb{R}$ xác định bởi $\left(\forall x\in\mathbb{R}_N[X],\ \nu(p)=\underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}}|P(x)|\right)$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}_N[X]$. Theo Tập 3, 1.3.2, Định lý 2, khi đó hình cầu đơn vị B'(0;1) của $(\mathbb{R}_N[X],\nu)$ là compăc. Vậy có $L\in\mathbb{R}_N[X]$ và một hàm trích σ sao cho $P_{\sigma(n)}\xrightarrow[n\infty]{}L$ tức là $\nu(P_{\sigma(n)}-L)\xrightarrow[n\infty]{}0$ hay cũng là $P_{\sigma(n)}\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}}L$ trên $[0;1]$.

4.1.10 *1)* Vì $\lim\limits_{n\infty}f=0$, có $A\in[0;+\infty[$ sao cho: $\forall x\in[A;+\infty[,\ |f(x)|<1$. Tiếp theo, $f|_{[0;A]}$ liên tục trên compăc $[0;A]$ nên bị chặn. Ta kết luận rằng f bị chặn trên $\mathbb{R}_+$; có $M\in\mathbf{R}_+^*$ sao cho $\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ |f(x)|<M$.

2) Cho $\varepsilon > 0$ cố định.

Vì $f \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên có $B \in [0;+\infty[$ sao cho: $\forall t \in [B;+\infty[,\ |f(t)| \le \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Vì f liên tục tại 0 nên có $\eta > 0$ sao cho: $\forall t \in [0;\eta],\ |f(t)| \le \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Ký hiệu $N = E\left(\dfrac{B}{\eta}\right) + 1$ và cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge N$. Cho $x \in \mathbb{R}_+$.

• Nếu $x \in [\eta; +\infty[$ thì $n \ge \dfrac{B}{\eta} \Rightarrow B \le n\eta \le nx \Rightarrow |f(nx)| \le \dfrac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |g_n(x)| \le \dfrac{\varepsilon M}{M} = \varepsilon$.

• Nếu $x \in [0; \eta]$ thì $0 \le \dfrac{x}{n} \le x \le \eta \Rightarrow \left|f(\dfrac{x}{n})\right| \le \dfrac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |g_n(x)| \le \dfrac{\varepsilon M}{M} = \varepsilon$.

4.1.11 Với $x \in [0;1]$ cố định, công thức Taylor với phần d tích phân (xem Tập 1, 6.4.5 hay Tập 3, 2.3.10) cho:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-1)^i}{i!} f^{(i)}(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t .$$

Vì $f^{(k+1)}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f^{(k+1)}$ bị chặn nên có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall t \in [0;1],\ \left|f^{(k+1)}(t)\right| \le M .$$

Từ đó: $\forall x \in [0;1],\ \ |f(x)| = \displaystyle\int_x^1 \frac{(t-x)^k}{k!} M \mathrm{d}t = \frac{M(1-x)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Ký hiệu $g_n : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^k x^n (1-x)^{k+1}\end{array}$ thì ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1],\ |f_n(x)| \le \dfrac{M}{(k+1)!} g_n(x)$.

Khảo sát sự biến thiên của g_n để suy ra :

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+k+1}\right) = \left(\frac{n}{n+k+1}\right)^{n+k} \frac{(k+1)^{k+1}}{n+k+1} \le \frac{(k+1)^{k+1}}{n}$$

và vậy: $\|g_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

4.1.12

a) α) Với $i \in \{0, ..., n\}$, ký hiệu $l_i = \displaystyle\prod_{\substack{0 \le k \le n \\ k \ne i}} \left(X - \frac{k}{n}\right)$ và $L_i = \dfrac{1}{l_i\left(\dfrac{i}{n}\right)} l_i$ (Các đa thức nội suy của Lagrange). Đa thức $P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) L_i$ là thích hợp vì:

$$\begin{cases} \deg(P_n) \le n, \\ k \in \{0,...,n\},\ P_n\left(\dfrac{k}{n}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) L_i\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right), \end{cases}$$

để ý rằng $L_i\left(\frac{k}{n}\right)=\begin{cases}1 & \text{nếu } k=i\\ 0 & \text{nếu } k\neq i\end{cases}$.

β) Có thể giả sử: $k\in\{0,...,n\}$, $x\neq\frac{k}{n}$.

Gọi A là số thực xác định bởi $f(x)-P_n(x)=Q_n(x)\frac{A}{(n+1)!}$ (trong đó $Q_n=\prod_{k=1}^{n}\left(X-\frac{k}{n}\right)$) và φ:

$[0;1]\to\mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t\in[0;1],\quad \varphi(t)=f(t)-P_n(t)-Q_n(t)\frac{A}{(n+1)!}.$$

Ta có: $k\in\{0,...,n\}$, $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=0$ vì $f\left(\frac{k}{n}\right)=P_n\left(\frac{k}{n}\right)$ và $Q_n\left(\frac{k}{n}\right)=0$. Từ đó, áp dụng lặp định lý Rolle ta suy ra tồn tại $C_x\in[0;1]$ sao cho $\varphi^{(n+1)}(C_x)=0$,

và: $\forall t\in[0;1],\quad \varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)-Q_n^{(n+1)}(t)\frac{A}{(n+1)!}=f^{(n+1)}(t)-A$, do

$\deg(P_n)<n+1, \deg(Q_n)=n+1$ và Q_n là chuẩn tắc.

Ta kết luận: $A=f^{(n+1)}(C_x)$.

b) α) Chứng minh (bằng quy nạp trên k): $\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in[0;1]$, $f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$. Từ đó, với mọi $(n,x)\in\mathbb{N}\times[0;1]$:

$$|f(x)-P_n(x)|=\left|x\left(x-\frac{1}{n}\right)...\left(x-\frac{n}{n}\right)\frac{(n+1-C_x)e^{-C_x}}{(n+1)!}\right|\le\frac{(n+1-x)}{(n+1)!}\le\frac{1}{n!}.$$

β) $\|f_n-f\|_\infty\le\frac{1}{n!}\xrightarrow[n\infty]{}0$.

4.1.13 1) Trước hết, nhận xét rằng:

- Với mọi $(n,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$, f khả tích trên $[ny;+\infty[$,
- Với mọi $n\in\mathbb{N}$, ánh xạ $y\mapsto\int_{ny}^{+\infty}f(x)dx$ liên tục.

Vậy, F_n xác định trên $\mathbb{R}_+$.

2) Cho $a\in\mathbb{R}_+$. Ta có: $\forall t\in[0;a],\forall n\in\mathbb{N}$, $|F_n(t)|\le\int_0^t\left(\int_{ny}^{+\infty}|f(x)|dx\right)dy$.

Cho $\varepsilon>0$ cố định:

- Ta có: $\forall t\in[0;\varepsilon]$, $|F_n(t)|\le\int_0^\varepsilon\left(\int_0^{+\infty}|F(x)|dx\right)dy=\varepsilon\int_0^{+\infty}|f|$.
- Cho $t\in[\varepsilon,+\infty[$, ta có: $|F_n(t)|\le\int_0^\varepsilon\left(\int_0^{+\infty}|F(x)|dx\right)dy+\int_\varepsilon^t\left(\int_{n\varepsilon}^{+\infty}|f(x)|dx\right)dy$.

Vì $\int_{n\varepsilon}^{+\infty}|f| \xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \geq N$, $\int_{n\varepsilon}^{+\infty}|f| \leq \varepsilon$.

Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$: $|F_n(t)| \leq \varepsilon \int_0^{+\infty}|f| + \varepsilon \int_\varepsilon^t \mathrm{d}y \leq \varepsilon\left(\int_0^{+\infty}|f| + a\right)$.

Ta đã chứng minh: $\forall n \geq N, \forall t \in [0;a]$, $|F_n(t)| \leq \varepsilon\left(\int_0^{+\infty}|f| + a\right)$ Vậy $F_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[0;a]$.

Cuối cùng, với mọi compắc K trong $\mathbb{R}_+$, có $a \in \mathbb{R}_+$ sao cho $K \subset [0;a]$.

3) Một ví dụ: Xét $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

Hãy tính $F_n(t)$: $F_n(t) = t\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{nt} + \frac{\ln(1+n^2t^2)}{2n}$.

Nói riêng $F_n(e^n) = e^n\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{ne^n} + \frac{\ln(1+n^2e^{2n})}{2n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

4.1.14. Vì f liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên f bị chặn trên đó, có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall u \in [0;1]$, $|f(u)| \leq M$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì f liên tục tại 0, có $\eta \in]0;1[$ sao cho: $\forall u \in [0;\eta]$, $|f(u) - f(0)| \leq \varepsilon$. Mặt khác, nhận xét rằng: $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vậy có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leq \eta\right)$.

Khi đó, cho mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$ thì với mọi x thuộc $[0;1]$, ta có:

$$|f_n(x) - f(0)x| = \left|\int_0^x (f(t^n) - f(0))\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |f(t^n) - f(0)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t^n) - f(0)|\mathrm{d}t.$$

- $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} |f(t^n) - f(0)|\mathrm{d}t \leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \varepsilon\mathrm{d}t \leq \varepsilon$.
- $\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 |f(t^n) - f(0)|\mathrm{d}t \leq \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \left(|f(t^n)| + |f(0)|\right)\mathrm{d}t \leq \frac{2M}{\sqrt{n}}$.

Có $N' \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N' \Rightarrow \frac{2M}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon\right)$.

Vậy, ký hiệu $N_1 = \mathrm{Max}(N, N')$ thì ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \left(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(0)x| \leq 2\varepsilon\right).$$

◊ **Trả lời:** $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$ trên $[0;1]$, trong đó $g : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(0)x$.

4.1.15 *a)* Trả lời: $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ trên $[-1;1]$, $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[-1;0]$ cũng như trên $[0;1]$,

$f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên mọi $[-a;a]$, $a \in [0;1[$ cố định.

b) Ký hiệu $I_n = \int_0^1 (x + x^n)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1 + x^{n-1})^n \mathrm{d}x$.

Ta có:

- $I_n \le \int_0^1 x^{n-2}(1 + x^{n-1})^n \mathrm{d}x \underset{y=1+x^{n-1}}{=} \int_1^2 \frac{1}{n-1} y^n dy = \frac{2^{n+1}-1}{n^2-1}$.

- $I_n \ge \int_0^1 x^n(1 + x^{n+1})^n \mathrm{d}x \underset{z=1+x^{n+1}}{=} \int_1^2 \frac{1}{n+1} z^n \mathrm{d}z = \frac{2^{n+1}-1}{(n-1)^2}$.

4.1.16 Vì $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và vì các f_n liên tục nên f liên tục (xem 4.1.3, Hệ quả 1).

Cho $\varepsilon > 0$ cố định, có $\eta > 0$ sao cho: $\forall x \in X$, $\left(\|x - l\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(l)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Rồi vì $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$ nên có $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \ge N_1 \Rightarrow \|u_n - l\| \le \eta\right)$.

Cuối cùng, có $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \ge N_2 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Ký hiệu $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$ và cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge N$. Khi đó ta có:

$\sigma(n) \ge n \ge N_1$ và $\tau(n) \ge n \ge N_2$, từ đó:

$$\left\|f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(l)\right\| \le \left\|f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(u_{\tau(n)})\right\| + \left\|f(u_{\tau(n)}) - f(l)\right\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cuối cùng: $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(l)$.

4.1.17 Trước hết, để ý rằng với mọi $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$\left|(f_n \circ f_n)(x) - (f \circ f)(x)\right| \le \left|f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))\right| + \left|f(f_n(x)) - f(f(x))\right|.$$

a) Cho $a \in \mathbb{R}$.

Vì $f_n - f \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ và $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ theo bài tập 4.1.16, ta có:

$$f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) = (f_n - f)(f_n(x)) \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Mặt khác, vì $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ và vì f liên tục (nói riêng tại $f(x)$) nên ta có:

$$f(f_n(x)) - f(f(x)) \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Ta suy ra $(f_n \circ f_n)(x) \xrightarrow[n\infty]{} (f \circ f)(x)$ và cuối cùng: $f_n \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f \circ f$.

b) Cho $\varepsilon > 0$. Vì f liên tục đều trên $\mathbb{R}$ nên có $\eta >$ sao cho $\eta \le \varepsilon$ và:

$$\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2, \left(|y - y'| \le \eta \Rightarrow |f(y) - f(y')| \le \varepsilon\right).$$

Vì $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \eta .$$

Vậy ta có: $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R},\ |f(f_n(x)) - f(f(x))| \leq \varepsilon$.

Mặt khác: $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))| \leq \eta \leq \varepsilon$.

Vậy ta có: $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R},\ |(f_n \circ f_n)(x) - (f \circ f)(x)| \leq 2\varepsilon$,

và cuối cùng: $f_n \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f \circ f$.

c) Với $n \in \mathbb{N}^*$, xét $f_n : \underset{x \mapsto x^2 + \frac{1}{n^2}}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

Rõ ràng rằng $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$, trong đó $f : \underset{x \mapsto x^2}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

và f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ |(f_n \circ f_n)(x) - (f \circ f)(x)| \leq \dfrac{2x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^2}$,

và nói riêng: $(f_n \circ f_n - f \circ f)(n) \leq 2 + \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\infty}{\not\to} 0$

vậy $f_n \circ f_n \underset{n\infty}{\overset{\text{đều}}{\not\longrightarrow}} f \circ f$,

◊ **Trả lời:**: Không.

d) ◊ **Trả lời:**: Có thể lấy $f_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu } \quad x = 0 \\ 1 & \text{nếu } \left(x = \dfrac{1}{n} \text{ hay } x = 1\right) \\ 0 & \text{nếu không phải như thế.} \end{cases}$

4.1.18 Cho một dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X hội tụ đến một phần tử x thuộc X.

Vì $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ là compăc (xem Tập 3, 1.3.1, Mệnh đề 1), theo giả thiết, $f_n|_A \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f|_A$. Vì các $f_n|_A$ liên tục nên suy ra $f|_A$ liên tục. Nói riêng, do $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ trong A, $f_n|_A(x) \xrightarrow[n\infty]{} f|_A(x)$ tức là $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$. Điều đó chứng tỏ f liên tục trên X.

4.1.19 *1)* **Sự hội tụ đơn.**

Cho $x \in \mathbb{R}$, chúng ta phân biệt nhiều trường hợp:

- $x \leq 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq f_n(x) \leq 1$ vậy $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 1$.
- $0 < x < 2 : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \geq f_n(x) \geq \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}}$ vậy $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

• $x = 2: f_n(2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$.

• $x > 2$: Với (n, x) cố định, ánh xạ $\varphi : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto (n^2+t^x)^{-\frac{1}{2}}$ giảm, do đó:

$$0 \le f_n(x) \le \int_0^n \varphi(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^n\left(1+\frac{t^x}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{n}\int_0^{n^{1-\frac{2}{x}}}(1+u^x)^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{x}}du \le n^{\frac{2}{x}-1}\int_0^{+\infty}(1+u^x)^{-\frac{1}{2}}du;$$

$u \mapsto (1+u^x)^{-\frac{1}{2}}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ vì $0 \le (1+u^x)^{-\frac{1}{2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^{-\frac{x}{2}}$ và $-\frac{x}{2} < -1$. Suy ra:

$f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

2) **Sự hội tụ đều**

• Vì mỗi f_n liên tục trên $\mathbb{R}$ và do giới hạn đơn gián đoạn tại 2 bên trái và bên phải nên không có liên tục đều trên $]-\infty; 2]$ cũng như trên $[2; +\infty[$ (xem 4.1.3, Nhận xét).

• Cho $a \in]-\infty; 2[$ cố định.

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\infty; a]$, $0 \le 1 - f_n(x) \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n^a}} - 1$ và $\frac{n}{\sqrt{n^2+n^a}} - 1 \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• Cho $b \in]2; +\infty[$ cố định. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [b;+\infty[,\quad 0 \le f_n(x) \le n^{\frac{2}{x}-1}\int_0^{+\infty}(1+u^x)^{-\frac{1}{2}}du \le n^{\frac{2}{b}-1}\int_0^{+\infty}(1+u^b)^{-\frac{1}{2}}du$$

và $n^{\frac{2}{b}-1}\int_0^{+\infty}(1+u^b)^{-\frac{1}{2}}du \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:**: • $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trong đó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x < 2 \\ \ln(1+\sqrt{2}) & \text{nếu} \quad x = 2 \\ 0 & \text{nếu} \quad x > 2. \end{cases}$$

• $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $]-\infty; 2]$ cũng như trên $[2; +\infty[$.

• $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên mọi $]-\infty; a]$ ($a \in]-\infty; 2[$ cố định) và trên mọi $[b; +\infty[$ ($b \in]2;+\infty[$ cố định).

4.1.20

1) • $\forall x \in [0;1[$, $nx^n(1-x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ (làm trội).

• $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

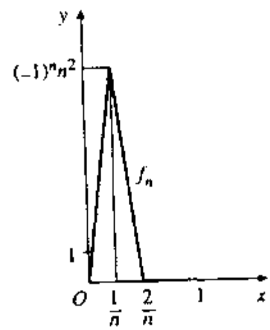
2) $f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} e^{-1}$ vậy $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[0;1]$.

3) $\int_0^1 f_n = n\int_0^1 (x^n - x^{n+1})\mathrm{d}x = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

4.1.21 *1)* • $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• Với $x \in]0;1]$ cố định, có $N \in \mathbb{N}-\{0;1\}$ sao cho $\frac{2}{N} \le x$; và khi đó ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, (n \ge N \Rightarrow f_n(x)=0)$. Điều đó chứng tỏ: $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trên $[0;1]$.

Vì $\left(\forall n \ge 2,\ \|f_n\|_\infty = n^2\right)$, ta có: $f_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[0;1]$.



2) $\forall n \ge 2,\quad \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = (-1)^n n$.

4.1.22

• Mỗi f_n thuộc lớp C^1;

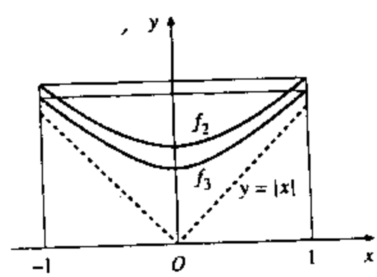
• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1;1]$,

$|f_n(x)-|x|| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\right| \le \sqrt{\frac{1}{n}}$,

xem Tập 1, bài tập 1.2.30 *b*, vậy

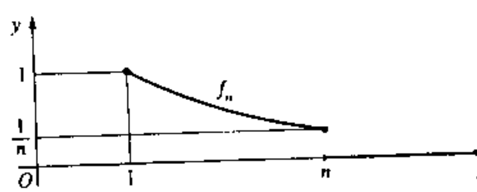
$f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} |.|$ trên $[-1;\ 1]$.

• $|.|$ không thuộc lớp C^1 trên $[-1;\ 1]$.



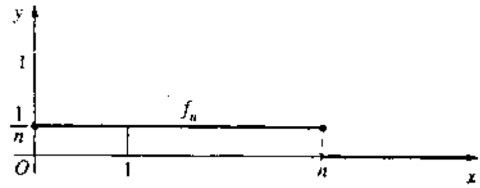
4.1.23 Theo 4.1.6, Mệnh đề, I buộc phải không bị chặn.

◊ **Trả lời:**: Chẳng hạn, $I = [1;+\infty[$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{nếu} \quad 1 \le x \le n \\ 0 & \text{nếu} \quad x > n \end{cases}$.



4.1.24 ◊ **Trả lời:** Chẳng hạn, $I = [0; +\infty[$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu} \quad 0 \le x \le n \\ 0 & \text{nếu} \quad x > n \end{cases}$$

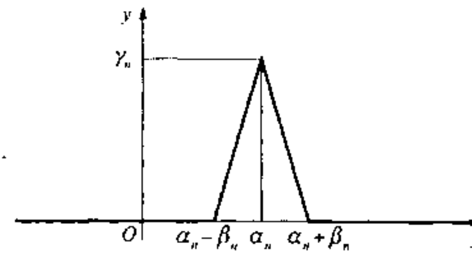


4.1.25 Cách xây dựng sau đây có thể có nhiều biến thể:

Xét ba dãy thực $(\alpha_n)_{n\ge1}$, $(\beta_n)_{n\ge1}$, $(\gamma_n)_{n\ge1}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} 0 \le \alpha_n - \beta_n \le \alpha_n \le \alpha_n + \beta_n \\ 0 \le \gamma_n \end{cases}$$

và $(\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ xác định với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $x \in \mathbb{R}$ bởi:



$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le \alpha_n - \beta_n \ \text{ hay } \ x \ge \alpha_n + \beta_n, \\ \dfrac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n + \beta_n) & \text{nếu} \quad \alpha_n - \beta_n \le x \le \alpha_n, \\ -\dfrac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n - \beta_n) & \text{nếu} \quad \alpha_n \le x \le \alpha_n + \beta_n. \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: φ_n liên tục, bị chặn, khả tích trên $\mathbb{R}$ và bình phương khả tích trên $\mathbb{R}$ và:

- $N_1(\varphi_n) = \beta_n\gamma_n$ (diện tích hình tam giác),
- $$\left(N_2(\varphi_n)\right)^2 = \int_{\alpha_n-\beta_n}^{\alpha_n} \left(\frac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n + \beta_n)\right)^2 dx + \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\beta_n} \left(-\frac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n - \beta_n)\right)^2 dx$$
$$= \frac{\gamma^2{}_n}{3\beta^2{}_n}\left(\left[(x - \alpha_n + \beta_n)^3\right]_{\alpha_n-\beta_n}^{\alpha_n} + \left[(x - \alpha_n - \beta_n)^3\right]_{\alpha_n}^{\alpha_n+\beta_n}\right) = \frac{2}{3}\beta_n\gamma_n^2,$$

vậy $N_2(\varphi_n) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{\beta_n}\gamma_n$,

- $N_\infty(\varphi_n) = \gamma_n$.

$$1) \left\{\begin{array}{l} N_1(\varphi_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ N_2(\varphi_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ N_\infty(\varphi_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_n\gamma_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \sqrt{\beta_n}\gamma_n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \gamma_n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{array}\right| \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_n = 1 \\ \beta_n = \dfrac{1}{n^3} \\ \gamma_n = n^2 \end{array}\right|.$$

◊ **Trả lời:** Chẳng hạn: $f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 1 - \dfrac{1}{n^3} \text{ hay } x \ge 1 + \dfrac{1}{n^3} \\ n^5\left(x - 1 + \dfrac{1}{n^3}\right) & \text{nếu} \quad 1 - \dfrac{1}{n^3} \le x \le 1 \\ -n^5\left(x - 1 - \dfrac{1}{n^3}\right) & \text{nếu} \quad 1 \le x \le 1 + \dfrac{1}{n^3} \end{cases}$.

$$2)\ \begin{cases} N_1(\varphi_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ N_2(\varphi_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ N_\infty(\varphi_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n\gamma_n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \sqrt{\beta_n}\gamma_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \gamma_n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \alpha_{2p} = 1 \\ \beta_{2p} = \dfrac{1}{p^3} \\ \gamma_{2p} = p \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \alpha_{2p+1} = (2p+1)^3 \\ \beta_{2p+1} = (2p+1)^3 \\ \gamma_{2p+1} = \dfrac{1}{(2p+1)^3} \end{cases}.$$

◊ **Trả lời:** Chẳng hạn:

$$g_{2p} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 1 - \dfrac{1}{p^3} \text{ hay } x \ge 1 + \dfrac{1}{p^3} \\ p\left(x - 1 + \dfrac{1}{p^3}\right) & \text{nếu} \quad 1 - \dfrac{1}{p^3} \le x \le 1 \\ -p\left(x - 1 - \dfrac{1}{p^3}\right) & \text{nếu} \quad 1 \le x \le 1 + \dfrac{1}{p^3} \end{cases},$$

$$g_{2p+1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 0 \text{ hay } x \ge 2(2p+1)^3 \\ \dfrac{1}{(2p+1)^5}x & \text{nếu} \quad 0 \le x \le (2p+1)^3 \\ \dfrac{1}{(2p+1)^5}(x - 2(2p+1)^3) & \text{nếu} \quad (2p+1)^3 \le x \le 2(2p+1)^3 \end{cases}.$$

$$3)\ \begin{cases} N_1(\varphi_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ N_2(\varphi_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ N_\infty(\varphi_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n\gamma_n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \sqrt{\beta_n}\gamma_n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \gamma_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \alpha_n = n^3 \\ \beta_n = n^3 \\ \gamma_n = \dfrac{1}{n} \end{cases}.$$

◊ **Trả lời:** Chẳng hạn: $h_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 0 \text{ hay } x \ge 2n^3 \\ \dfrac{1}{n^4}x & \text{nếu} \quad 0 \le x \le n^3 \\ -\dfrac{1}{n^4}(x - 2n^3) & \text{nếu} \quad n^3 \le x \le 2n^3 \end{cases}$.

4.1.26 *a) 1)* Kiểm nghiệm tức khắc rằng:

- $0 \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
- $\forall \alpha \in C, \forall f, g \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ \alpha f + g \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
- $\forall f, g \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ fg \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
- $1 \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$: Phần tử trung hoà của phép nhân.

2) $0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Cho $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Có $a \in \mathbb{R}$ sao cho f triệt tiêu bên ngoài $[-a; a]$. Vì f liên tục trên đoạn $[-a; a]$ nên f bị chặn trên $[-a; a]$. Vậy f bị chặn trên $\mathbb{R}$. Điều đó chứng tỏ: $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

• $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\quad \alpha f \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Cho f, $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Có $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ sao cho f triệt tiêu bên ngoài $[-a; a]$, và g triệt tiêu bên ngoài $[-b;b]$. Khi đó, $f + g$ triệt tiêu bên ngoài $[-c; c]$, trong đó $c = \mathrm{Max}(a,b)$. Vậy $f + g \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Cho f, $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Có $a \in \mathbb{R}_+$ sao cho f triệt tiêu bên ngoài $[-a; a]$. Khi đó, $f\varphi$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và triệt tiêu bên ngoài $[-a; a]$, vậy $f\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

3) • $0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Cho $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Vì $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, có $A \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(|x| \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq 1\right)$ rồi do f liên tục trên đoạn $[-A; A]$ nên f bị chặn trên $[-A; A]$ và vậy f bị chặn trên $\mathbb{R}$. Điều đó chứng tỏ: $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Cho $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Do $f\varphi \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ và do φ bị chặn nên $f\varphi \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, vậy $f\varphi \in \mathcal{CB}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

b) 1) Cho dãy $(f_n)_{n\geq 0}$ những phần tử thuộc $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ hội tụ đến một phần tử f của $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (đối với $\|.\|_\infty$). Khi đó $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$, $(f_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đều đến f; do các f_n liên tục, suy ra f liên tục và vậy $f \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

2) Cho dãy $(f_n)_{n\geq 0}$ những phần tử thuộc $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ hội tụ đến một phần tử f của $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (đối với $\|.\|_\infty$). Do $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, theo 1): $f \in \mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Ngoài ra, do $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và do với mọi $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, suy ra (bởi định lý hoán vị các giới hạn, 4.1.2, Định lý) $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ và vậy $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

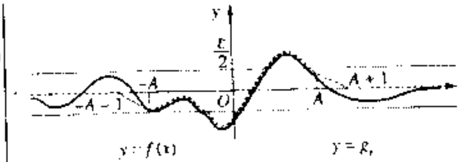
3) • Rõ ràng rằng $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, vậy do $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ đóng trong $\mathcal{CB}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, ta có: $\overline{\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \subset \overline{\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Cho $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Vì $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, nên có $A \in \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(|x| \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Xét ánh xạ g_ε: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi :

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x\le -A-1\\ f(-A)(x+A+1) & \text{nếu } -A-1\le x\le -A\\ f(x) & \text{nếu } -A\le x\le A\\ -f(A)(x-A-1) & \text{nếu } A\le x\le A+1\\ 0 & \text{nếu } A+1\le x\end{cases}$$



Rõ ràng rằng $g_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ và $\|f-g_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$, vì chẳng hạn với $x\in[A;A+1]$:

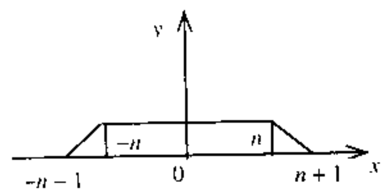
$$|f(x)-g_\varepsilon(x)|\le|f(x)|+|f(A)|(A+1-x)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon.$$

Điều đó chứng tỏ: $\forall f\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C}),\forall\varepsilon>0,\exists g_\varepsilon\in\mathcal{K}_0(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|f-g_\varepsilon\|_\infty\le\varepsilon$,

vậy: $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})\subset\overline{\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$ và cuối cùng, $\overline{\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})}=\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

4) Với $n\in\mathbb{N}^*$, xét $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ xác định bởi:

$$h_n(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x\le -n-1\\ x+n+1 & \text{nếu } -n-1\le x\le -n\\ 1 & \text{nếu } -n\le x\le n\\ -x+n+1 & \text{nếu } n\le x\le n+1\\ 0 & \text{nếu } n+1\le x\end{cases}$$



Rõ ràng rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\in\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ và $\|f_n\|_\infty=1$. Giả sử có một hàm trích $\sigma:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ sao cho $(h_{\sigma(n)})_{n\ge1}$ hội tụ đến một phần tử h thuộc $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ đối với $\|.\|_\infty$. Khi đó $h_{\sigma(n)}\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}}h$, vậy $h_{\sigma(n)}\xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}}h$. Nhưng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $h_{\sigma(n)}(x)=1$ khi $\sigma(n)\ge x$, vậy $h_{\sigma(n)}(x)\xrightarrow[n\infty]{}1$. Suy ra $h=1$ (hằng trên $\mathbb{R}$), mâu thẫn với $h\in\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Từ đó $(h_n)_{n\ge1}$ không có dãy con hội tụ, vậy hình cầu đơn vị đóng trong $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ không compắc.

Nhận xét : Dễ thấy rằng $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ không có số chiều hữu hạn, chẳng hạn họ

$$\left(\varphi_n:x\mapsto\begin{cases}x^n(1-x^n) & \text{nếu } 0\le x\le1\\ 0 & \text{nếu } x\le0 \text{ hay } x\ge1\end{cases}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ độc lập tuyến tính.

Từ đó, kết quả nói trên là một hệ quả của định lý Riecz (xem Tập 3, C1.1).

c) Cho $f\in\mathcal{CL}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ khả tích và $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Có $A\in\mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\int_{-\infty}^{-A}|f|\le\varepsilon \text{ và } \int_{A}^{+\infty}|f|\le\varepsilon.$$

Vì f liên tục trên $[-A;A]$ nên f bị chặn trên $[-A;A]$; ký hiệu $M=\sup_{x\in[-A;A]}|f(x)|$.

Ký hiệu $\eta=\dfrac{\varepsilon}{2M+1}$ và xây dựng g_ε: $\mathbb{R}\to C$ liên tục, triệt tiêu trên $]-\infty;-A]$ và trên $[A;+\infty[$, trùng với f trên $[-A+\eta;A-\eta]$ và chắp nối afin trên $[-A;-A+\eta]$ và trên $[A-\eta;A]$ như trong *b)* 4).

Rõ ràng rằng $g_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, g_ε khả tích trên $\mathbb{R}$ và:

- $\int_{-\infty}^{-A}|f-g_\varepsilon| \le \int_{-\infty}^{-A}|f| \le \varepsilon$ và $\int_{A}^{+\infty}|f-g_\varepsilon| \le \varepsilon$,
- $\int_{-A}^{-A+\eta}|f-g_\varepsilon| \le 2\eta M \le \varepsilon$ và $\int_{A-\eta}^{A}|f-g_\varepsilon| \le \varepsilon$,
- $\int_{-A+\eta}^{A-\eta}|f-g_\varepsilon| = 0$.

Từ đó: $\|f-g_\varepsilon\|_1 \le \int_{-\infty}^{+\infty}|f-g_\varepsilon| \le 4\varepsilon$.

Cuối cùng: $\mathcal{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ trù mật trong $(\mathcal{CL}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.

4.1.27 Ta cố gắng áp dụng định lý về hội tụ đơn điệu hay về hội tụ bị chặn. Nhưng trong nhiều ví dụ, ta cũng có thể đến được kết quả bằng những phép làm trội, làm non, ước lượng cận, biến đổi tích phân... có tính chất sơ cấp hơn.

a) Cách thứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ đơn điệu vào $\left(f_n : x \mapsto \tan^n x\right)_{n\ge 0}$ và $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ nếu } & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 1 \text{ nếu } & x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Cách thứ hai:

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \underset{t=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \le \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

◊ **Trả lời:** 0.

b) Cáchthứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n+e^x}\right)_{n\ge 0}$ và

$$f : x \mapsto \left|\begin{cases} \frac{1}{e^x} & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{nếu } x = 1 \\ 0 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}\right.,$$

sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi: x \mapsto e^{-x}$

Cách thứ hai: Với các f_n và f nói trên đây (với $n \ge 2$)

$$\left|\int_0^{+\infty} f_n - \int_0^{+\infty} f\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^n+e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx\right| + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+e^x)e^x}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}dx \le \int_0^1 x^n dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Cuối cùng $\int_0^{+\infty} f \le \int_0^1 \frac{1}{e^x}dx = 1 - e^{-1}$.

◊ **Trả lời:** $1-e^{-1}$.

c) Cách thứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{x^{n+2}+1}\right)_{n\geq 0}$ và

$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } 1 \leq x. \end{cases}$

Cách thứ hai:

$$\left|\int_0^{+\infty} f_n - \int_0^{+\infty} f\right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,dx + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^{n+2}+1)}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n+4}}\,dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Cuối cùng $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

◊ **Trả lời:** 1.

d) Cách thứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{x^{2n}+1}\right)_{n\geq 2}$ và

$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1, \end{cases}$ sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } 1 \leq x \end{cases}$

Cách thứ hai:

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}\,dx$$

$$\leq \int_0^1 x^n\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

◊ **Trả lời:** 0.

e) Với $p > 0$ cố định, $x \mapsto \dfrac{1}{(x^p+1)^n}$ liên tục trên $[0;+\infty[$, khả tích trên $[0;+\infty[$ nếu và chỉ nếu $pn > 1$. Ký hiệu $N = E\left(\dfrac{1}{p}\right) + 1$ và giả sử $n \geq N$.

Áp dụng định lý hội tụ đơn điệu trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x^p+1)^n}\right)_{n\geq N}$ và

$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = 0 \\ 0 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** 0.

f) Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^n e^{-x}}\right)_{n\geq 0}$ và

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2+e^{-1}} & \text{nếu } x = 1 \\ 0 & \text{nếu } 1 < x \end{cases}$$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Cuối cùng $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{4}$.

g) Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x^{2n}+x^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)_{n\ge 1}$ và

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } 1 \le x \end{cases}$$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi = f$, chú ý rằng với x cố định:

Nếu $0 < x < 1$: $\ln\left(f_n(x)\right) = -\dfrac{1}{n}\ln(x^{2n}+x^n+1) \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{x^n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$,

Nếu $1 < x$: $\ln\left(f_n(x)\right) = -\dfrac{1}{n}\ln(x^{2n}+x^n+1) \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}\ln(x^{2n}) = -\ln(x^2)$.

◊ **Trả lời:** 2.

h) Cách thứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ đơn điệu trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2}\right)_{n\ge 1}$ và $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Cách thứ hai:

Với $n \ge 1$, phân tích I_n thành $I_n = J_n + K_n$ trong đó $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ và $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

• $J_n \le \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$ và $J_n \ge \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}{1+x^2}\mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\operatorname{Arctan}\sqrt{n} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$,

vậy $J_n \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

• $0 \le K_n \le \displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \le \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\sqrt{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$,

vậy $K_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi}{2}$.

i) Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto e^{-x^2}\left|\sin x\right|^n\right)_{n\ge 0}$ và

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-x^2} & \text{nếu } x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ 0 & \text{nếu } x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$.

Điều đó chứng tỏ: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}|\sin x|^n \mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Vì: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n x \mathrm{d}x\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-x^2}|\sin x|^n \mathrm{d}x$,

ta kết luận: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n x \mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:** 0.

j) Cách thứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{ne^{-x^2}\sin x}{1+n^2x^2}\right)_{n\ge 0}$ và $f : x \mapsto 0$; sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ vì với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi x thuộc $[0;+\infty[$:

$$|f_n(x)| \le \frac{nx}{1+n^2x^2}e^{-x^2} \le \frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Cách thứ hai:

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{ne^{-x^2}\sin x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{+\infty}\frac{ne^{-x^2}|\sin x|}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \le \int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{1}{nx}e^{-x^2}\mathrm{d}x +$$

$$= \frac{\ln(1+n^2)}{2n} + \frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

◊ **Trả lời:** 0.

k) Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $]-\infty;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \begin{cases}\dfrac{\sin^n x}{x^2} & \text{nếu } x \ne 0\\ 0 & \text{nếu } x = 0\end{cases}\right)_{n\ge 3}$ và

$$f : x \mapsto \begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]\\ 0 & \text{nếu } x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]\end{cases},$$

sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto \begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x^2} & \text{nếu } |x| \le 1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } |x| > 1\end{cases}$.

Từ đó suy ra: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^2}dx \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:** 0.

4.1.28 Với $\alpha \in]0;+\infty[$ cố định, áp dụng định lý về hội tụ bị chặn trên $]0;1[$ vào

$\left(f_n : x \mapsto x^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ và $f : x \mapsto x^{\alpha-1}e^{-x}$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto x^{\alpha-1}$.

◊ **Trả lời:** 0.

4.1.29 Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $]0;1]$ vào $\left(f_n : x \mapsto \frac{f(x)}{1+nx}\right)_{n\geq 0}$ và $f : x \mapsto 0$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto |f|$

◊ **Trả lời:** 0.

4.1.30 Áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[-1;\ 1]$ vào $\left(f_n : x \mapsto \left|\cos\left(\pi\frac{x^2+(f(x))^2}{1+(f(x))^2}\right)\right|^n\right)_{n\geq 0}$ và $x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{nếu } x \in]-1;1[\\ 1 & \text{nếu } x=-1 \text{ hay } x=1 \end{array}\right|$ (nếu $f(0) \neq 0$) hoặc $x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{nếu } x \in]-1;0[\cup]0;1[\\ 1 & \text{nếu } x \in \{-1;0;1\} \end{array}\right|$ (nếu $f(0)=0$), sự bị chặn được bảo đảm bởi $\varphi : x \mapsto 1$.

◊ **Trả lời:** 0.

4.1.31 *a)* Trước hết, chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,dx \underset{y=1-\frac{x}{n}}{=} n\int_0^1 \sqrt{1+y^n}\,\mathrm{d}y.$$

Cách thứ nhất:

Áp dụng định lý hội tụ đơn điệu trên $[0;1]$ vào $\left(f_n : y \mapsto \sqrt{1+y^n}\right)_{n\geq 1}$ và $f : y \mapsto \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{nếu } y \in [0;1[\\ \sqrt{2} & \text{nếu } y=1 \end{array}\right|$, từ đó: $\int\limits_0^1 \sqrt{1+y^n}\,dy \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Cách thứ hai:

$$0 \leq \int_0^1 \sqrt{1+y^n}\,\mathrm{d}y - 1 \leq \int_0^1\left(\sqrt{1+y^n}-1\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^n}{\sqrt{1+y^n}+1}\mathrm{d}y \leq \int_0^1 \frac{y^2}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

b) Trước hết, chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{y=n(x-1)}{=} \frac{1}{n}\int_0^1 \sqrt{1+\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}y.$$

Sau đó, áp dụng định lý hội tụ bị chặn trên $[0;1]$ vào $\left(f_n : y \mapsto \sqrt{1+\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}\right)_{n\geq 1}$ và $f : y \mapsto \sqrt{1+e^y}$, sự bị chặn trên được bảo đảm bởi chẳng hạn $\varphi : y \mapsto \sqrt{1+e}$. Rồi tính $\int_0^1 \sqrt{1+e^y}\,dy$ bằng phép đổi biến số $z = \sqrt{1+e^y}$.

◊ **Trả lời:** $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\sim} \frac{C}{n}$ trong đó,

$$C = 2\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{1+e}+1) + \ln(\sqrt{2}+1)\right) \simeq 1,642056 .$$

c) Trước hết, để ý rằng với mọi $a \in]0;+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{1}{(x^4+1)(x^2+a^2)}$ khả tích trên $]a;+\infty[$.

Cách thứ nhất:

Ký hiệu $I(a)$ là tích phân đang xét, ta có:

$$a^2 I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} - R(a),$$

trong đó $R(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)}\mathrm{d}x$.

Do $\forall x \in [0;+\infty[$, $\dfrac{x^2}{x^4+1} \le \dfrac{1}{2}$,

ta suy ra: $0 \le R(a) \le \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4a}$,

và vậy $R(a) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Điều đó chứng tỏ: $I(a) \underset{a\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

Cuối cùng, tính $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}\left(= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$.

Cách thứ hai:

Ký hiệu $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a^2}{(x^4+1)(x^2+a^2)}\mathrm{d}x$ và $n = \mathrm{E}(a)$ (với $a \ge 1$), ta có: $J(n+1) \le J(a) \le J(n)$.

Áp dụng định lý về hội tụ đơn điệu trên $]0;+\infty[$ vào $\left(f_n : x \mapsto \dfrac{n^2}{(x^4+1)(x^2+n^2)}\right)_{n\ge 1}$ và

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$, từ đó $J(n) \xrightarrow[n\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ rồi $J(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

4.1.32 Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét f_n: $]0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \forall x \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \; f_n(x) = f\left(\varepsilon_n + \frac{k}{n}\right).$$

- Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n là hàm bậc thang trên $]0;1]$ và thừa nhận $f\left(\varepsilon_n + \dfrac{k}{n}\right)$ là giới hạn tại 0+,

vậy f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $]0;1]$ và $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varepsilon_n + \frac{k}{n}\right)$.

- Cho x $\in$ $]0;1]$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, có $k_{n,x} \in \{1,\ldots,n\}$ duy nhất sao cho $\dfrac{k_{n,x}}{n} < x \le \dfrac{k_{n,x}+1}{n}$ và

vì $\varepsilon_n + \dfrac{k_{n,x}}{n} \xrightarrow[n\infty]{} x$ và f liên tục tại x, ta có : $f_n(x) = f\left(\varepsilon_n + \dfrac{k_{n,x}}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ .Vậy:

$f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$.

• f liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$.

• Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;1[,\ 0 \le f(x) = f\left(\varepsilon_n + \dfrac{k_{n,x}}{n}\right) \le f\left(\dfrac{k}{n}\right) \le f(x)$.

Theo định lý về hội tụ bị chặn, ta kết luận: $\int_0^1 f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f$.

◊ **Trả lời:** $\int_0^1 f$.

4.1.33

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x \underset{[u=\cos x]}{=} \int_0^1 (1-u^2)^n \mathrm{d}u \underset{[t=u\sqrt{n}]}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

b) Với $n \in \mathbb{N}^*$, xét f_n: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{nếu} \quad t \in [0;\sqrt{n}] \\ 0 & \text{nếu} \quad t \in]\sqrt{n},+\infty[. \end{cases}$$

• Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;+\infty[$.

• $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trong đó $f : \begin{array}{l}[0;+\infty[\to R \\ t \mapsto e^{-t^2}\end{array}$ và f liên tục từng khúc trên $[0;+\infty[$.

• Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le f_n \le f$ vì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $t \in [0;\sqrt{n}]$:

$$\ln\big(f_n(t)\big) = n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \le n\left(-\frac{t^2}{n}\right) = -t^2$$

và f liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$. Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} f$ tức là: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$

c) Theo *a)* và công thức Wallis:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\mathrm{d}t \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Theo b), ta kết luận: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4.1.34

a) Với $n \in \mathbb{N}^*$, xét f_n: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{\alpha x}{n}\right)^n \varphi(x) & \text{nếu} \quad x \in]0;n] \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in]n,+\infty[. \end{cases}$$

• Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $]0;+\infty[$.

- $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trong đó $f : [0;+\infty[\underset{x \mapsto e^{\alpha x}\varphi(x)}{\to} \mathbb{R}$ và f liên tục từng khúc trên $[0;+\infty[$.

- Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \le |f|$ và $|f|$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$. Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} f$ tức là: $\int_0^n \left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^n \varphi(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

b) *1)* Với $a \in]1;+\infty[$, $\varphi : x \mapsto e^{-ax}$ liên tục từng khúc trên $[0;+\infty[$ và $x \mapsto e^x e^{-ax} = e^{(1-a)x}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ nên theo *a)*:

$$\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^x e^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1}.$$

2) Với $b \in]-\infty;1[$, $\varphi : x \mapsto e^{bx}$ liên tục từng khúc trên $[0;+\infty[$ và $x \mapsto e^{-x}e^{bx} = e^{-(1-b)x}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ nên theo a):

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{bx}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{bx}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-b}.$$

3) Với $c \in]0;+\infty[$, $\varphi : x \mapsto x^{c-1}$ liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$ và $x \mapsto e^{-x}x^{c-1}$ khả tích trên $]0;+\infty[$ nên theo *a)*:

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{c-1}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{c-1}\mathrm{d}x = \Gamma(c).$$

4.1.35 *a)* Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu f_n: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{nếu} \quad x \in]0;n] \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in]n;+\infty[. \end{cases}$$

α) *1)* Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu g_n: $[0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1-f_n(x)}{x} & \text{nếu} \quad x \in]0;+\infty[\\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, g_n liên tục trên $[0;1]$.
- $g_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} g$ trên $[0;1]$, trong đó:

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{nếu} \quad x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

và g liên tục từng khúc trên $[0;1]$.

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $g_n(0) = 0$ và với mọi $x \in]0;1]$:

$$0 \le g_n(x) = \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} = \frac{1}{n}\frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^k \le \frac{1}{n}n = 1,$$

vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \le 1$ và $x \mapsto 1$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;1]$. Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^{+\infty} g_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} g$, tức là: $I_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$.

2) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $h_n(x) : [1;+\infty[\underset{x \mapsto \frac{f_n(x)}{x}}{\to} \mathbb{R}$.

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, h_n liên tục trên $[1;+\infty[$.
- $h_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} h$, trong đó: $h(x) : [1;+\infty[\underset{x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}}{\to} \mathbb{R}$, và h liên tục từng khúc trên $[1;+\infty[$.
- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $0 \le h_n \le h$ và h liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[1;+\infty[$. Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^{+\infty} h_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} h$, tức là: $J_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \underset{\left[y=\frac{1}{x}\right]}{=} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y}\mathrm{d}y$.

β) Cho $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $\int_1^n g_n = \int_0^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{f_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \ln n - J_n$,

từ đó: $I_n - J_n + \ln n = \int_0^1 g_n + \int_1^n g_n = \int_0^n g_n$

$$= \int_0^n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

b) Theo *a)* α): $I_n - J_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\mathrm{d}x$.

Theo *a)* β) $I_n - J_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Cuối cùng: $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}}{x}\mathrm{d}x = \gamma$.

Nhận xét:

Bằng phép đổi biến số $t = \frac{1}{x}$, ta cũng có: $\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}\mathrm{d}t = \gamma$ và vậy cũng có:

$$\gamma = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}}{x}\mathrm{d}x.$$

4.1.36 *a)* Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu φ_n: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x)f_n(x) & \text{nếu} \quad x \in]0;n] \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in [n;+\infty[. \end{cases}$$

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, φ_n liên tục trên $]0;+\infty[$.
- $\varphi_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} \varphi f$ và φf liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$.

• Với mọi $n \in \mathbb{N}, |\varphi_n| \le |\varphi||f|$ và $|\varphi||f|$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$. Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^{+\infty} \varphi_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi f$, tức là:

$\int_0^n \varphi(x) f_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi(x) f(x)\mathrm{d}x$.

b) Ký hiệu $\varphi : \underset{x\mapsto \ln x}{]0;+\infty[\to \mathbb{R}}$ thì φ liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu f_n: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi: $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{nếu} \quad x \in]0;n[\\ 0 & \text{nếu} \quad x \in [n;+\infty[\end{cases}$, thì:

• $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$, trong đó: $f : \underset{x\mapsto e^{-x}}{]0;+\infty[\to \mathbb{R}}$,

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n| \le |f|$,

• f liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$,

• $\varphi f : x \mapsto e^{-x}\ln x$ khả tích trên $]0;+\infty[$.

Theo *a)* $\int_0^n \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln x\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$.

Mặt khác, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\mathrm{d}x \underset{y=1-\frac{x}{n}}{=} n\int_0^1 y^n \ln\big(n(1-y)\big)\mathrm{d}y = \frac{n}{n+1}\ln n + n\int_0^1 y^n \ln(1-y)\mathrm{d}y.$$

Dùng một tích phân từng phần bằng cách chọn $y \mapsto \dfrac{y^{n+1}-1}{n+1}$ làm một nguyên hàm của $y \mapsto y^n$ trên $]0;1[$, ta được:

$$\int y^n \ln(1-y)dy = \frac{y^{n+1}}{n+1}\ln(1-y) + \int \frac{y^{n+1}-1}{n+1}\frac{1}{1-y}dy$$

từ đó, do $\dfrac{y^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-y) \underset{y\to 0}{\sim} \dfrac{y}{n+1} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$, và do $\dfrac{y^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-y) \underset{y\to 1}{\sim} (y-1)\ln(1-y) \xrightarrow[y\to 1]{} 0$, ta có:

$$\int_0^1 y^n \ln(1-y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^{n+1}-1}{n+1}\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} y^k\mathrm{d}y = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Vậy $\int_0^n \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln x\mathrm{d}x = -\dfrac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k} - \ln n\right)$.

Theo phần khảo sát hằng số Euler (xem Tập 3), $\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, ta kết luận:

$\int_0^n \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln x\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} -\gamma$.

và cuối cùng: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\mathrm{d}x = -\gamma$.

Xem thêm bài tập 4.1.40.

4.1.37 *a)* Với mọi x thuộc $]0;+\infty[$, ta có:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\mathrm{d}u \underset{t=\frac{u-x}{\sqrt{x}}}{=} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}(x+t\sqrt{x})^x e^{-x-t\sqrt{x}}\sqrt{x}\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}t.$$

b) α) Cho $x \in [1;+\infty[$, ký hiệu $\varphi: [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\varphi(t) = \ln(1+t) - t - x\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right) + t\sqrt{x},$$

thì điều kiện đang khảo sát trở thành $\varphi \geq 0$.

Ánh xạ φ thuộc lớp C^1 trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall t \in [0;+\infty[,\quad \varphi'(t) = -\frac{t}{1+t} + \frac{t\sqrt{x}}{\sqrt{x}+t} = \frac{(\sqrt{x}-1)t^2}{(1+t)(\sqrt{x}+t)} \geq 0.$$

Vậy, φ là hàm tăng; vì $\varphi(0) = 0$ suy ra $\varphi \geq 0$, từ đó có ước lượng cận mong muốn.

β) Cho $x \in [0;+\infty[$. Ký hiệu $\psi:]-1;0] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$\psi(u) = -\ln(1+u) + u - \dfrac{u^2}{2}$, thì điều kiện đang khảo sát trở thành $\psi \geq 0$.

Ánh xạ ψ thuộc lớp C^1 trên $]-1;0]$ và:

$$\forall u \in]-1;0],\quad \psi'(u) = -\frac{u^2}{1+u} \leq 0.$$

Vậy, ψ là hàm giảm; $\psi(0) = 0$ suy ra $\psi \geq 0$, từ đó có ước lượng cận mong muốn.

c) Cho $(x_n)_{n\geq 0}$ là một dãy với số hạng ≥ 0, có giới hạn $+\infty$.

Với $n \in \mathbb{N}$ ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x_n,t)\end{array}$.

• Với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$.

• Với mọi $t \in \mathbb{R}$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $-\sqrt{x_N} \leq t$ và khi đó, ta có, với mọi $n \in \mathbb{N}$ mà $n \geq N$:

$$f_n(t) = \exp\left(x_n\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}}\right) - t\sqrt{x_n}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right),$$

điều đó chứng tỏ rằng $(f_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ đến $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

• f liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$.

• Ký hiệu A: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$A(t) = \begin{cases} e^{\frac{t^2}{2}} & \text{nếu } t \leq 0 \\ (1+t)e^{-t} & \text{nếu } t > 0 \end{cases}$$

thì theo *b)* α) và β): $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq A$.

Ngoài ra, A liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $\mathbb{R}$. Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_{\mathbb{R}} f_n \underset{n\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f$, tức là:

$$\int_{-\sqrt{x_n}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}}\right)^{x_n} e^{-t\sqrt{x_n}}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \underset{u=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=} \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Kết quả cuối cùng này đúng với mọi dãy $(x_n)_{n\geq 0}$ với số hạng ≥ 0, có giới hạn $+\infty$, nó cho phép suy ra:

$$\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}}\right)^{x} e^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{2\pi},$$

và cuối cùng: $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{e}{x}\right)^x \sqrt{2\pi x}$.

4.1.38 *a)* Xem bài tập 4.1.34 *b)* 3).

b) Cho $x \in]0;+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \underset{u=\frac{t}{n}}{=} n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u.$$

Nhờ tích phân từng phần liên tiếp:

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\mathrm{d}u = \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\int_0^1 u^{x+n-1}\mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Theo *a)*, ta kết luận: $\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \xrightarrow[n\infty]{} \Gamma(x)$.

4.1.39 Với $x \in]0;+\infty[$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\ln\left(xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right) = \ln x + \gamma x - x\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$$= -x\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma\right) + \ln\left(\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n^x n!}\right).$$

Theo phần khảo sát hằng số Euler γ:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

và theo công thức Gauss về Γ (bài tập 4.1.38):

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \xrightarrow[n\infty]{} \Gamma(x)(>0).$$

Vì exp liên tục tại 0, ta kết luận:

$$xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{\Gamma(x)}.$$

4.1.40 *a)* Ta đã thấy công thức Weierstrass (bài tập 4.1.39):

$$xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\xrightarrow[n\infty]{}\frac{1}{\Gamma(x)},$$

vậy chuỗi $\sum_{n\geq 1}\left(ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)$ hội tụ và:

$$\ln x+\gamma x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(kn\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)=-\ln\Gamma(x).$$

Với $n\in\mathbb{N}^*$, xét $f_n:[0;+\infty[\ \underset{x\mapsto ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}}{\longrightarrow}\mathbb{R}$

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*, f_n$ thuộc lớp C^1 trên $[0;+\infty[$ và:

$$\forall x\in[0;+\infty[,\ \ f_n'(x)=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}=-\frac{x}{n(x+n)}.$$

Cho $a\in\ ]0;+\infty[$. Ta có:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0;a],\quad \left|f_n'(x)\right|=\frac{x}{n(x+n)}\leq\frac{a}{n^2},$$

vậy: $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left\|f_n'|_{[0;a]}\right\|_\infty\leq\frac{a}{n^2}.$

Điều đó chứng tỏ rằng $\sum_{n\geq 1}f_n'$ hội tụ chuẩn tắc và vậy hội tụ đều trên $[0;a]$ và với mọi a thuộc $]0;+\infty[$.

Định lý về lấy đạo hàm của chuỗi ánh xạ cho phép suy ra rằng $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall x\in]0;+\infty[,\quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n\right)'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)=-x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+n)}.$$

Mà ta cũng có:

$$\forall x\in]0;+\infty[,\quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n\right)'(x)=-\frac{1}{x}-\gamma-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Ta kết luận; $\forall x\in]0;+\infty[,\quad \psi(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+n)}.$

b) 1) Thay $x=1$ trong kết quả của *a)*:

$$\psi(1)=-1-\gamma+x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-\gamma,$$

từ đó, vì $\Gamma(1)=0!=1$ nên $\Gamma'(1)=\psi(1)\Gamma(1)=-\gamma$.
2) Ta biết rằng (xem Tập 3, 2.5.5 3) Mệnh đề 3):

$$\forall x\in]0;+\infty[,\quad \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)t^{x-1}e^{-t}dt,$$

từ đó $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)\mathrm{d}t$ và được kết luận mong muốn.

4.1.41 Lý luận bằng phản chứng, giả sử có một hàm trích σ sao cho: $f_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$. Khi đó:

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\left(f_{\sigma(n)}\right)^2$ liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;1]$,
- $\left(f_{\sigma(n)}\right)^2 \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} 0$ và $x \mapsto 0$ liên tục từng khúc trên $[0;1]$,
- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\left|\left(f_{\sigma(n)}\right)^2\right| \le 1$ và $x \mapsto 1$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;1]$

Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^1 \left(f_{\sigma(n)}\right)^2 \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 0 = 0$. Nhưng với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \left(f_{\sigma(n)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\cos 2\sigma(n)x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\sigma(n)\cos\sigma(n),$$

từ đó, do $\sin\sigma(n) = f_{\sigma(n)}(1) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và do $\left(\cos\sigma(n)\right)_{n\ge 0}$ bị chặn:

$\int_0^1 \left(f_{\sigma(n)}\right)^2 \mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}$, mâu thuẫn.

4.1.42 *1)* Giả sử $\int_0^1 f = 0$. Khi đó với mọi $z \in \mathbb{C}$, ta có:

$$\int_0^1 |1 + zf(x)|\mathrm{d}x \ge \left|\int_0^1 (1+zf(x))\mathrm{d}x\right| = \left|1 + z\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| = 1.$$

2) Ngược lại, giả sử: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\int_0^1 |1 + zf(x)|\mathrm{d}x \ge 1$.

Khi đó: $\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \left|1 + \frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right| dx \ge 1$,

từ đó: $\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 n\left(\left|1 + \frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right| - 1\right)dx \ge 0$.

Cho $\theta \in \mathbf{R}$. Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $f_n : [0;1] \underset{x \mapsto n\left(\left|1+\frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right|-1\right)}{\longrightarrow} \mathbf{R}$.

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n liên tục trên $[0;1]$ nên liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;1]$
- Vì với mọi x $\in [0;1]$ và mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \frac{n\left(\left|1 + \frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right| - 1\right)}{\left|1 + \frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right| + 1} = \frac{2\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}f(x)\right) + \frac{1}{n}|f(x)|^2}{\left|1 + \frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right| + 1}$$

dãy $(f_n)_{n\ge 1}$ hội tụ đơn trên $[0;1]$ đến $f_n : [0;1] \underset{x \mapsto \operatorname{Re}(e^{i\theta}f(x))}{\longrightarrow} \mathbf{R}$ và f liên tục trên $[0;1]$ nên liên tục từng khúc.

- Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và mọi x thuộc $[0;1]$, ta có:

$$f_n(x)=n\left(\left|1+\frac{1}{n}e^{i\theta}f(x)\right|-1\right)\le n\left(\left(1+\frac{1}{n}|f(x)|\right)-1\right)=|f(x)|.$$

Mặt khác, do f liên tục trên $[0;1]$ nên f bị chặn và với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $n\ge\|f\|_\infty$ và với mọi $x\in[0;1]$:

$$f_n(x)\ge n\left(\left(1-\frac{1}{n}|f(x)|\right)-1\right)=-|f(x)|.$$

Vậy: $\forall n\ge\|f\|_\infty,\forall x\in[0;1],\ |f_n(x)|\le|f(x)|$, và $|f|$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;1]$.

Theo định lý về hội tụ bị chặn, $\int_0^1 f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \mathrm{Re}(e^{i\theta}f(x))\mathrm{d}x$.

Do, theo giả thiết: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_n\ge 0$, suy ra: $\int_0^1 \mathrm{Re}(e^{i\theta}f(x))\mathrm{d}x\ge 0$.

Bây giờ hãy chọn θ. Rõ ràng rằng có $\theta\in\mathbb{R}$ sao cho: $e^{i\theta}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Khi đó ta có: $0\le\int_0^1\mathrm{Re}(e^{i\theta}f(x))\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)=-\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$, từ đó ta kết luận:

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

4.2.1 Cho $\varepsilon>0$. Theo định lý 1 của § 4.2.1, có một ánh xạ bậc thang φ: $[a;b]\to\mathbb{C}$ sao cho $\|f-\varphi\|_\infty\le\frac{\varepsilon}{b-a}$. Ký hiệu $(a_k)_{0\le k\le N}$ là một phân hoạch của $[a;b]$ tương thích với φ và λ_k là giá trị của φ trên $]a_k;a_{k+1}[$ với mọi k thuộc $\{0, ..., N-1\}$.
Khi đó, ta có:

$$\forall x\in]0;+\infty[,\ \int_a^b\varphi(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k\int_{a_k}^{a_{k+1}}e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k\frac{e^{\mathrm{i}xa_{k+1}}-e^{\mathrm{i}xa_k}}{ix},$$

từ đó: $\forall x\in]0;+\infty[,\ \left|\int_a^b\varphi(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right|=\sum_{k=0}^{N-1}|\lambda_k|\frac{\left|e^{\mathrm{i}xa_{k+1}}-e^{\mathrm{i}xa_k}\right|}{x}\le\frac{2NM}{x}$,

trong đó: $M=\operatorname*{Max}_{0\le k\le N}|\lambda_k|$.

Vì N cố định nên có $x_0\in]0;+\infty[$ sao cho: $\forall x\in]x_0;+\infty[,\ \frac{2NM}{x}\le\varepsilon$.

Khi đó, với mọi x thuộc $[x_0;+\infty[$ ta có:

$$\left|\int_a^b f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_a^b\left(f(t)-\varphi(t)\right)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b\varphi(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right|\le(b-a)\|f-\varphi\|_\infty+\varepsilon\le 2\varepsilon$$

Vậy, ta đã chứng minh:

$$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in]0;+\infty[,\forall x\in]x_0;+\infty[,\quad\left|\int_a^b f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right|\le\varepsilon,$$

tức là: $\int_a^b f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

Nhận xét:

1) Ứng dụng kết quả trên cho $\check{f}: u \mapsto f(-u)$, suy ra:

$$\int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} \int_{-a}^{-b} f(-u)e^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Rồi bởi tổ hợp tuyến tính: $\int_a^b f(t)\cos xt\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\int_a^b f(t)\sin xt\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

2) Nếu ta giả sử f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $[a;b]$ thì một phép tích phân từng phần cho ta kết quả nhanh chóng hơn (xem Tập 1, 6.4.4, ví dụ 2)).

4.2.2 Cho $\varepsilon > 0$. Vì f khả tích trên I nên có một đoạn J nằm trong I sao cho $\int_{I-J} |f| \le \varepsilon$ (trong đó $\int_{I-J}$ chỉ tổng của hai tích phân).

Theo bài tập 4.2.1, có $x_0 \in]0;+\infty[$ sao cho: $\forall x \in]x_0;+\infty[$, $\left|\int_J f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon$.

Khi đó, với mọi x thuộc $[x_0;+\infty[$, ta có:

$$\left|\int_I f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{I-J} f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_J f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{I-J} f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right| + \varepsilon \le 2\varepsilon.$$

Điều đó chứng tỏ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in]0;+\infty[, \forall x \in [x_0;+\infty[, \quad \left|\int_I f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\right| \le 2\varepsilon,$$

tức là: $\int_I f(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Nhận xét:

Sử dụng $u \mapsto f(-u)$ suy ra $\int_I f(t)e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, rồi bởi tổ hợp tuyến tính:

$\int_I f(t)\cos xt\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ và $\int_I f(t)\sin xt\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4.2.3 Với $n \in \mathbb{N}$, xét $P_n = \dfrac{X^n}{n!}$.

- Với mọi $a \in [0;+\infty[$, $(P_n)_{n\ge0}$ hội tụ đều trên $[-a;a]$ đến 0 vì: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a;a]$, $|P_n(x)| \le \dfrac{a^n}{n!}$ và $\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.
- Nhưng $(P_n)_{n\ge0}$ không hội tụ đều đến 0 trên $\mathbb{R}$ vì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n - 0$ không bị chặn trên $\mathbb{R}$.

4.2.4 Với $n \in \mathbb{N}$, xét $P_n = X^{2n}(1-X^2)$.

- Khảo sát sự biến thiên của P_n trên $[-1;1]$ và suy ra

$$\operatorname*{Sup}_{x\in[-1;1]} |P_n(x)| = P_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Điều đó chứng tỏ $(P_n)_{n\ge0}$ hội tụ đều trên $[-1;1]$ đến 0.

• Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ chứa nghiêm ngặt $[-1;1]$. Có $x \in I$ sao cho $|x| > 1$ và khi đó:

$P_n(x) = -x^{2n}(x^2-1) \xrightarrow[n\infty]{} 0$,

điều đó chứng tỏ $(P_n)_{n\geq 0}$ không hội tụ đơn trên I vậy không hội tụ đều trên I.

4.2.5 Cho $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = P_n(P(x)) = P(P_n(x))$.

Do $P_{n+1}(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ và $P_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ và do P liên tục tại điểm $f(x)$, ta suy ra: $f(x) = P(f(x))$.

Đa thức $P - X(\neq 0)$ chỉ có một số hữu hạn không điểm nên suy ra f chỉ lấy một số hữu hạn giá trị.

• Vì $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và vì mọi P_n liên tục trên I nên f liên tục trên I.

Định lý về các giá trị trung gian chứng tỏ f là hằng.

4.2.6 Lý luận bằng phản chứng : giả sử có một dãy $(P_n)_{n\geq 0}$ những ánh xạ đa thức hội tụ đều đến f trên $]0;1]$. Khi đó, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall x \in]0;1],\ |P_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Cho $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\left|P_N\left(\frac{1}{2k\pi - \pi/2}\right) + 1\right| = \left|(P_N - f)\left(\frac{1}{2k\pi - \pi/2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$$

và $$\left|P_N\left(\frac{1}{2k\pi + \pi/2}\right) - 1\right| = \left|(P_N - f)\left(\frac{1}{2k\pi + \pi/2}\right)\right| \leq \frac{1}{2},$$

từ đó: $P_N\left(\frac{1}{2k\pi - \pi/2}\right) \leq -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} \leq P_N\left(\frac{1}{2k\pi + \pi/2}\right)$.

Vì P_N liên tục trên khoảng $\left[\frac{1}{2k\pi + \pi/2}; \frac{1}{2k\pi - \pi/2}\right]$, định lý về các giá trị trung gian chứng tỏ rằng có $\alpha_k \in \left]\frac{1}{2k\pi + \pi/2}; \frac{1}{2k\pi - \pi/2}\right[$ sao cho $P_N(\alpha_k) = 0$.

Do: $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha_{k+1} < \frac{1}{(2k+1)\pi - \pi/2} < \frac{1}{2k\pi + \pi/2} < \alpha_k$ nên P_N có vô số không điểm, vậy (do P_N là một đa thức) $P_N = 0$ và có mâu thuẫn .

4.2.7 Lý luận bằng phản chứng; giả sử có $k \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) \leq k$.

Vì $\mathbb{R}$- kgv $\mathbb{R}_k[X]$ có số chiều hữu hạn, ta suy ra tức khắc rằng các ánh xạ $N : P \mapsto \sup_{x\in[-1;0]} |P(x)|$ và $N' : P \mapsto N(P) + \int_0^1 |P(x)|\mathrm{d}x$ là những chuẩn trên $\mathbb{R}_k[X]$, nên tương đương. Vậy ta có:

$$\left(P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0 \text{ trên } [-1;0]\right) \Leftrightarrow N(P_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Rightarrow N'(P_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 |P_n(x)|\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Rightarrow \int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$ ta có mâu thuẫn.

4.2.8 Do $\mathbf{R}$- kgv $\mathbb{R}_k[X]$ có số chiều hữu hạn, suy ra tức khắc rằng các ánh xạ: $N : P \mapsto \sup\limits_{x\in[a;b]} |P(x)|$ và $N' : P \mapsto \sup\limits_{x\in[c;d]} |P(x)|$ là những chuẩn trên $\mathbb{R}_k[X]$ (ở đây giả sử $c < d$, trường hợp $c = d$ là một khảo sát tầm thường) nên tương đương. Giả sử có f: $[a;b] \to \mathbf{R}$ sao cho $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $[a;b]$, vì mỗi P_n là bị chặn nên f là bị chặn nên ta có: $\left\| P_n|_{[a;b]} - f \right\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Do đó, $(P_n)_{n\ge 0}$ là một dãy Cauchy trong $(\mathbb{R}_k[X], N)$ vì:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\quad N(P_p - P_q) = \left\| P_p|_{[a;b]} - P_q|_{[a;b]} \right\|_\infty \le \left\| P_p|_{[a;b]} - f \right\|_\infty + \left\| f - P_q|_{[a;b]} \right\|_\infty .$$

Do $\mathbb{R}_k[X]$ có số chiều hữu hạn, $(\mathbb{R}_k[X], N)$ là đầy. Vậy có $Q \in \mathbb{R}_k[X]$ sao cho $P_n \xrightarrow[n\infty]{} Q$ trong $(\mathbb{R}_k[X], N)$.

Vì $N \sim N'$ suy ra $P_n \xrightarrow[n\infty]{} Q$ trong $(\mathbb{R}_k[X], N')$ tức là $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} Q$ trên $[c;d]$.

4.2.9 Với mọi $n \in \mathbb{N}$, có $(a_{k,n})_{0\le k\le N} \in \mathbb{C}^{N+1}$ duy nhất sao cho $P_n = \sum\limits_{k=0}^{N} a_{k,n} X^k$.

Rõ ràng rằng có thể tìm được N+1 phần tử $x_0, ..., x_N$ thuộc $[a;b]$ phân biệt từng cặp.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, các hệ số $a_{k,n}$ $(0 \le k \le N)$ của P_n là các nghiệm của một hệ tuyến tính Cramer:

$$\forall i \in \{0,...,N\},\qquad \sum_{k=0}^{N} a_{k,n} x_i^k = P_n(x_i)\,,$$

từ đó: $\forall k \in \{0,...,N\}$ $a_{k,n} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & & P_n(x_0) & \cdots & x_0^N \\ | & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & P_n(x_N) & \cdots & x_N^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & . & x_0^N \\ | & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & . & x_N^N \end{vmatrix}}$.

Vì $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ nên với mọi i thuộc $\{0, ..., N\}$, ta có $P_n(x_i) \xrightarrow[n\infty]{} f(x_i)$, từ đó do tính chất liên tục của định thức:

$$\forall k \in \{0,...,N\},\quad a_{k,n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & f(x_0) & \cdots & x_0^N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & f(x_N) & \cdots & x_N^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_0^N \\ | & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_N^N \end{vmatrix}},$$

ký hiệu là α_k.

Đặt $\quad P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$

Vì $\mathbb{R}$-kgv $\mathbb{R}_N[X]$ có số chiều hữu hạn, các chuẩn $N_\infty : P \mapsto \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} |P(x)|$ và

$N_1 : P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{N} |a_k|$ trên $\mathbb{R}_N[X]$ là tương đương.

Do $P_n \xrightarrow[n\infty]{} P$ trong $(\mathbb{R}_N[X], N_1)$, suy ra $P_n \xrightarrow[n\infty]{} P$ trong $(\mathbb{R}_N[X], N_\infty)$ tức là $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} P$ trên $[a;b]$.

Cuối cùng, vì $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ trên $[a;b]$, ta kết luận $f = P$.

4.2.10 Theo định lý thứ nhất của Weierstrass, có đa thức A với hệ số thực sao cho:

$$\forall x \in [a;b], \qquad |A(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ký hiệu $P = A - \frac{\varepsilon}{2}$, $Q = A + \frac{\varepsilon}{2}$; đó là những đa thức với hệ số thực và ta có:

$$\forall x \in [a;b], \qquad \begin{cases} P(x) \le f(x) \le Q(x) \\ |Q(x) - P(x)| \le \varepsilon. \end{cases}$$

4.2.11 *a)* Có tức khắc vì:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a;a], \qquad \left|\check{f}_n(-x) - \check{f}(x)\right| = |f_n(-x) - f(-x)|.$$

b) Theo định lý thứ nhất của Weierstrass, có một dãy $(A_n)_{n\ge0}$ những đa thức với hệ số phức sao cho $A_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$. Theo *a)*, $\check{A}_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \check{f}$, vậy bởi tổ hợp tuyến tính với hệ số cố định:

$$\frac{1}{2}(A_n + \check{A}_n) \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \frac{1}{2}(f + \check{f}),\ \frac{1}{2}(A_n - \check{A}_n) \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \frac{1}{2}(f - \check{f}).$$

- Nếu f chẵn, ký hiệu $P_n = \frac{1}{2}(A_n + \check{A}_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì P_n là một đa thức thuộc $\mathbb{C}[X]$, chẵn và $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \frac{1}{2}(f + \check{f}) = f$.
- Tương tự, nếu n lẻ, ký hiệu $P_n = \frac{1}{2}(A_n - \check{A}_n)$ thì P_n là một đa thức lẻ và $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \frac{1}{2}(f - \check{f}) = f$.

4.2.12 Do ánh xạ $g : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{C} \\ y \mapsto f(y^{1/k})\end{array}$ liên tục, theo định lý thứ nhất của *Weierstrass*, có một dãy $(P_n)_{n\ge0}$ những đa thức với hệ số phức sao cho: $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$. Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $A_n = P_n(X^k)$ thì A_n là đa thức với hệ số phức và ta có:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \ \left|A_n(x) - f(x)\right| = \left|P_n(x^k) - g(x^k)\right| \leq \|P_n - g\|_\infty$,

và vậy: $A_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$.

4.2.13 Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$.

Cho $N \in \mathbb{N}$, vì $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$ nên $(P_n)_{0\leq n\leq N}$ là một cơ sở của $\mathbb{C}_N[X]$.

Do: $\forall n \in \{0,\ldots,N\}$, $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$,

từ tính chất tuyến tính, suy ra: $\forall P \in \mathbb{C}_N[X]$, $\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$,

và nói riêng: $\forall n \in \{0,\ldots,N\}$, $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Vậy, ta được: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$, từ đó $f = 0$, xem 4.2.2, Hệ quả.

4.2.14 Các kéo theo $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$, $1 \Rightarrow 4$ là hiển nhiên.
$2 \Rightarrow 1$: xem 4.2.2 Hệ qua.
$3 \Rightarrow 1$:
Giả sử có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(n \geq N \Rightarrow \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0\right).$$

Ký hiệu $g : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto x^N f(x)\end{array}$ thì g liên tục trên $[0;1]$,

và: $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left(\int_0^1 x^p g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+p} f(x)\mathrm{d}x = 0\right)$

vậy (xem 4.2.2, Hệ quả): $g = 0$.
Từ đó: $\forall x \in]0;1]$, $f(x) = 0$,
rồi do liên tục của f tại 0, $f = 0$.
$4 \Rightarrow 1$:

Giả sử có $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{kn} f(x)\mathrm{d}t = 0$.

Dùng phép đổi biến, $t = x^k$, ta được: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^{n-1}\left(t^{1/k} f(t^{1/k})\right)\mathrm{d}t = 0$.

Ký hiệu $h : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto t^{1/k} f(t^{1/k})\end{array}$ thì h liên tục trên $[0;1]$ và $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n h(t)\mathrm{d}t = 0$, vậy (xem 4.2.2, Hệ quả): $h = 0$.
Từ đó: $\forall t \in]0;1]$, $f(t^{1/k}) = 0$ rồi $\forall x \in]0;1]$, $f(x) = 0$ và cuối cùng, do f liên tục tại 0: $f = 0$.

4.2.15
$\overline{\mathcal{P}} = E$ theo định lý thứ nhất của *Weierstrass*

$\overset{\circ}{\mathcal{P}} = \phi$ vì $\mathcal{P}$ là kgvc của E và $\mathcal{P} \neq E$ (xem thêm Tập 3, bài tập 1.1.30).

$\mathrm{Fr}(\mathcal{P}) = \overline{\mathcal{P}} - \overset{0}{\mathcal{P}} = E$.

Trả lời: $\overline{\mathcal{P}} = E, \overset{0}{\mathcal{P}} = \varnothing, \mathrm{Fr}(\mathcal{P}) = E$.

4.2.16 Theo định lý thứ nhất của *Weierstrass*, có một dãy $(A_n)_{n\geq 0}$ những đa thức với hệ số phức sao cho: $A_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$.

Với mọi j thuộc $\{1, ..., N\}$, ký hiệu:

$$L_j = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{1\leq k\leq N \\ k\neq j}} (a_j - a_k)} \prod_{\substack{1\leq k\leq N \\ k\neq j}} (X - a_k)$$

là các đa thức nội suy của Lagrange (xem Tập 5, 5.3.1, Ví dụ) và với mọi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu:

$$P_n = A_n + \sum_{j=1}^{N} \big(f(a_j) - A_n(a_j)\big) L_j .$$

Rõ ràng rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, P_n là một đa thức và:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1,...,N\}, \quad P_n(a_i) = A_n(a_i) + \big(f(a_i) - A_n(a_i)\big) = f(a_i) .$$

Cuối cùng, với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \|A_n - f\|_\infty + \sum_{j=1}^{N} |f(a_j) - A_n(a_j)| \|L_j\|_\infty \leq \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \|L_j\|_\infty\right) \|A_n - f\|_\infty ,$$

và vậy $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$.

4.2.17 Cho $n \in \mathbb{N}$, theo định lý thứ nhất của *Weierstrass* áp dụng và 0 $x \mapsto f(x) + \dfrac{5}{4^{n+1}}$, có một đa thức P_n với hệ số thực sao cho:

$$\forall x \in [a;b], \quad \left| P_n(x) - \left(f(x) + \frac{5}{4^{n+1}} \right) \right| \leq \frac{3}{4^{n+1}} .$$

Khi đó:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a;b], \ |P_n(x) - f(x)| \leq \left| P_n(x) - f(x) - \dfrac{5}{4^{n+1}} \right| + \dfrac{5}{4^{n+1}} \leq \dfrac{2}{4^n}$, vậy $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a;b], \ f(x) + \dfrac{2}{4^{n+1}} \leq P_n(x) \leq f(x) + \dfrac{2}{4^n}$,

vậy: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a;b], \ P_{n+1}(x) \leq f(x) + \dfrac{2}{4^{n+1}} \leq P_n(x)$, và vậy $(P_n)_{n\geq 0}$ giảm.

4.2.18 Theo định lý thứ nhất của *Weierstrass*, có một dãy $(B_n)_{n\geq 0}$ những đa thức với hệ số trong $\mathbb{C}$ sao cho $B_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f'$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, Ký hiệu P_n là đa thức xác định bởi: $P_n' = B_n$ và $P_n(a) = f(a)$. Khi đó:

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$, P_n thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$,
- $P_n' \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f'$ trên $[a;b]$.

- $P_n(a) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$.

Theo định lý về tính nguyên hàm của một dãy hàm số, suy ra có một ánh xạ g: $[a;b] \to \mathbb{C}$ sao cho:

- $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$ trên $[a;b]$,
- g thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$,
- $g' = f'$.

Vì $g' = f'$ và vì $g(a) = \lim\limits_{n\infty} P_n(a) = f(a)$, ta kết luận $g = f$.

Cuối cùng: $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và $P_n' \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f'$.

4.2.19 **(i) ⇒ (ii)**

Giả sử f liên tục trên $]a;b[$.

Cho $\varepsilon > 0$. Có $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in]a;b[^2,\ \left(|x' - x''| \le \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon\right).$$

Suy ra: $\forall (x', x'') \in]a;b[^2,\ \left(\begin{cases} a < x' \le a + \eta \\ a < x'' \le a + \eta \end{cases} \Rightarrow |x' - x''| \le \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon\right)$.

Vậy f thoả mãn điều kiện cần và đủ Cauchy của tồn tại giới hạn hữu hạn tại a (xem Tập 3, 1.4.2, Định lý 1) nên f thừa nhận giới hạn hữu hạn l tại a. Tương tự f thừa nhận giới hạn hữu hạn l' tại b. Ký hiệu g: $[a;b] \to \mathbb{K}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in]a;b[\\ l & \text{nếu } x = a \\ l' & \text{nếu } x = b. \end{cases}$$

Vì g liên tục trên $[a;b]$, theo định lý thứ nhất của Weierstrass, có một dãy những đa thức với hệ số trong $\mathbb{K}$ sao cho $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$ trên $[a;b]$ và vậy $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $]a;b[$.

(ii) ⇒ (i)

Giả sử có một dãy $(P_n)_{n\ge 0}$ những đa thức với hệ số trong $\mathbb{K}$ sao cho $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $]a;b[$.

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, P_n liên tục trên $[a;b]$, ta có:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ |P_p(a) - P_q(a)| \le \operatorname*{Sup}_{x \in]a;b[} |P_p(x) - P_q(x)|.$$

Do: $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in]a;b[,\quad |P_p(x) - P_q(x)| \le |P_p(x) - f(x)| + |f(x) - P_q(x)|$,

và do $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $]a;b[$ suy ra rằng $(P_n(a))_{n\ge 0}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ nên hội tụ đến một phần tử l của $\mathbb{K}$.

Tương tự, có $l' \in \mathbb{K}$ sao cho $P_n(b) \xrightarrow[n\infty]{} l'$.

Ký hiệu g: $[a;b] \to \mathbb{K}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in]a;b[\\ l & \text{nếu } x = a \\ l' & \text{nếu } x = b. \end{cases}$$

Khi đó, g bị chặn và:

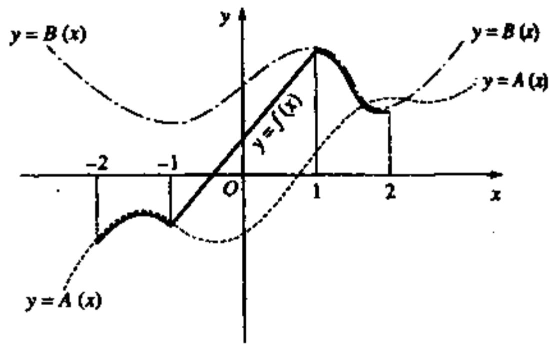
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|P_n - g\|_\infty \le \mathrm{Max}\left(\|P_n - f\|_\infty, |P_n(a) - l|, |P_n(b) - l'|\right).$$

vậy $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$ trên $]a;b[$.

Do các P_n liên tục trên $[a;b]$ suy ra g liên tục trên $[a;b]$, vậy (Định lý Heine) g liên tục đều trên $[a;b]$ và cuối cùng, f liên tục đều trên $[a;b]$.

4.2.20 Các ánh xạ N_1 và N_2 rõ ràng là những chuẩn, điều kiện ($N_1(P) = 0 \Rightarrow P = 0$) được thoả mãn vì nếu P triệt tiêu trên I_1 thì đa thức P triệt tiêu tại vô số điểm, do đó $P = 0$.

Xét ánh xạ f: $[-2;2] \to \mathbb{R}$ trùng với A trên $[-2;-1]$, trùng với B trên $[1;2]$ và chắp nối afin các điểm $(-1, A(-1))$ với $(1, B(1))$ trên $[-1;1]$.



Rõ ràng f liên tục trên $[-2;2]$. Theo định lý thứ nhất của Weierstrass, có một dãy $(P_n)_{n\ge 0}$ những đa thức hệ số thực sao cho $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ trên $[-2;2]$.

Vì: $\forall n \in \mathbb{N},\ N_1(P_n - A) = \sup\limits_{x\in I_1}|P_n(x) - A(x)| = \sup\limits_{x\in I_1}|P_n(x) - f(x)| \le \sup\limits_{x\in[-2;2]}|P_n(x) - f(x)|$,

ta có: $P_n \xrightarrow[n\infty]{} A$ trong (E, N_1).

Cũng có: $P_n \xrightarrow[n\infty]{} B$ trong (E, N_2).

4.2.21 *a)* Cho $x \in [0;1]$. Tiến hành quy nạp trên n. Tính chất là tầm thường khi $n = 0$. Giả sử tính chất đó đúng với một $n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))\right)^2 = \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right).$$

Một mặt, do $P_n(x) \le \sqrt{x}$, ta có: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right) \le \sqrt{x} \le 1$,

vậy $0 \le \sqrt{x} - P_{n+1}(x)$.

Mặt khác, do $0 \le \sqrt{x} - P_n(x) \le \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$ và do $1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right) \le 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ (vì $P_n(x) \ge 0$), ta có:

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \le \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}\,\frac{(2 + n\sqrt{x} + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})}{2(2 + n\sqrt{x})}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}\,\frac{2(2 + n\sqrt{x}) - (n+1)x}{2(2 + n\sqrt{x})} \le \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}.$$

b) Theo *a)*:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\quad 0 \le \sqrt{x} - P_n(x) \le \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \le \frac{2}{n}$$

vậy $P_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \rho$ trên $[0;1]$.

c) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [-1;1]$. Ký hiệu $x = |t| \in [0;1]$. Theo *a)*: $0 \le \sqrt{x} - P_n(x) \le \dfrac{2}{n}$,

vậy: $0 \le \sqrt{x} + P_n(x) \le 2\sqrt{x} \le 2$.

Ta suy ra: $\left|\varphi(t) - Q_n(t)\right| = \left|x - (P_n(x))^2\right| = \left|\sqrt{x} - P_n(x)\right|\left|\sqrt{x} + P_n(x)\right| \le \dfrac{4}{n}$,

và vậy: $Q_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} \varphi$ trên $[-1; 1]$.

4.2.22 *a)* Vì *f* liên tục trên $[a;b]$ nên *f* liên tục đều trên $[a;b]$ (Định lý Heine)
Vậy có $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in [a;b]^2,\ \left(\left|x' - x''\right| \le \eta \Rightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ký hiệu $n = E\left(\dfrac{b-a}{n}\right) + 1$ và với mọi k $\in$ {0, ..., n}, ký hiệu $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ và

$$g_k : \begin{array}{rcl}[a;b] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le x_k \\ x - x_k & \text{nếu } x > x_k. \end{cases}\end{array}$$

Ký hiệu φ: $[a;b] \to \mathbb{K}$ là ánh xạ afin từng khúc và liên tục xác định bởi:

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\}, \forall x \in \left[x_k; x_{k+1}\right],\ \varphi(x) = f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)$$

$$= \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1}) + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f(x_k)$$

có được bằng cách nối liên tiếp các điểm $\left(x_k, f(x_k)\right)$ $k \in \{0, ..., n\}$ bởi các đoạn thẳng.
Chứng minh (xem thêm tập 3, 2.3.3, Mệnh đề)

$$\forall x \in [a;b],\ \left|\varphi(x) - f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cho $x \in [a;b]$. Có $k \in \{0, ..., n-1\}$ sao cho $x \in \left[x_k; x_{k+1}\right]$ và ta có:

$$\left|\varphi(x) - f(x)\right| \le \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left|f(x_{k+1}) - f(x)\right| + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\left|f(x_k) - f(x)\right|$$

$$\le \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Với $k \in \{0, ..., n\}$, ký hiệu $\lambda_k = \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$ thì

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \forall x \in \left[x_k; x_{k+1}\right],\ \varphi(x) = f(x_k) + \lambda_k(x - x_k).$$

Nói riêng: $\qquad \forall x \in \left[x_0, x_1\right],\ \varphi(x) = f(x_0) + \lambda_0(x - x_0)$.

Có $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ duy nhất sao cho: $\mu_0 = \lambda_0, \mu_0 + \mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_0 + \dots + \mu_n = \lambda_n$.
Nếu với một *p* thuộc $\{0, ..., n-2\}$, ta có:

$$\forall x \in \left[x_p; x_{p+1}\right],\ f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{p} \mu_k(x - x_k)$$

thì với mọi *x* thuộc $[x_p; x_{p+1}]$:

$$\varphi(x)=f(x_{p+1})+\lambda_{p+1}(x-x_{p+1})=f(a)+\sum_{k=0}^{p}\mu_k(x_{p+1}-x_k)+\left(\sum_{k=0}^{p+1}\lambda_k\right)(x-x_{p+1})$$

$$=f(a)+\sum_{k=0}^{p}\mu_k\Big((x_{p+1}-x_k)+(x-x_{p+1})\Big)+\lambda_k(x-x_{p+1})=f(a)+\sum_{k=0}^{p+1}\mu_k\left(x-x_k\right).$$

Điều đó chứng tỏ (bằng quy nạp trên p):

$$\forall p\in\{0,...,n-1\},\forall x\in\left[x_p;x_{p+1}\right],\ \ \varphi(x)=f(a)+\sum_{k=0}^{p}\mu_k\left(x-x_k\right)=f(a)+\sum_{k=0}^{p}\mu_k g_k(x)$$

và vậy: $\varphi=f(a)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mu_k g_k$.

b) Cho $k\in\{0,...,n-1\}$. Nhận xét rằng:

$$\forall x\in[a;b],\ \ g_k(x)=\frac{1}{2}\left(x-x_k+\left|x-x_k\right|\right).$$

Theo bài tập 4.2.21 *c)*, với mọi $\alpha>0$, đa thức A_k thuộc $\mathbb{R}[X]$ sao cho:

$$\forall t\in[-1;1],\ \ \Big||t|-A_k(t)\Big|\le\alpha.$$

Bằng tịnh tiến và vị tự, suy ra rằng với mọi $\beta>0$, có đa thức B_k thuộc $\mathbb{R}[X]$ sao cho:

$$\forall x\in[a;b],\ \ \Big|\left|x-x_k\right|-B_k(x)\Big|\le\beta.$$

Cuối cùng, bằng cách xét $\frac{1}{2}(X-x_k+B_k)$, ta được một đa thức P_k thuộc $\mathbb{K}[X]$ sao cho:

$$\forall x\in[a;b],\ \ \left|g_k(x)-P_k(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2M}.$$

c) Ký hiệu $P=f(a)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mu_k P_k$ thì P là một đa thức thuộc $\mathbb{K}[X]$ và theo *a)* và *b)*, ta có:

$$\forall x\in[a;b],\ \ \left|f(x)-P(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

4.2.23 *a)* Vì f liên tục trên $[a;b]$ nên f liên tục đều trên $[a;b]$ (Định lý Heine). Vậy có $\alpha>0$ sao cho:

$$\forall(x,y)\in[0;1]^2,\ \ \left(|x-y|<\alpha\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|\le\varepsilon\right).$$

Cho $(x,y)\in[0;1]^2$.

- Nếu $|x-y|\le\alpha$ thì $\left|f(x)-f(y)\right|\le\varepsilon$.
- Nếu $|x-y|>\alpha$ thì $\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|f(x)\right|+\left|f(y)\right|\le2\|f\|_\infty\le\frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(x-y)^2$.

b) $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall f,g\in E,\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0;1],B_n(\lambda f+g)(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(\lambda f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{n}C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}=\lambda B_n(f)(x)+B_n(g)(x).$$

• Nếu $f \geq 0$ thì: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$.

c) Xem chứng minh Định lý ở 4.2.2:

• $B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \left(x + (1-x)\right)^n = 1 = e_0(x)$.

• $B_n(e_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$.

• $B_n(e_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \left(\frac{k}{n}\right)^2 (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x((n-1)x+1) = \frac{n-1}{n} e_2(x) + \frac{1}{n} e_1(x)$.

Vậy: $B_n(e_0) = e_0, B_n(e_1) = e_1, \|B_n(e_2) - e_2\|_\infty = \underset{x \in [0;1]}{Sup} \frac{x(1-x)}{n} = \frac{1}{4n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

d) Theo *a)*, với mọi $(x,y) \in [0;1]^2$, ta có:

$$\left|f(x) - f(y)e_0(x)\right| = \left|f(x) - f(y)\right| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(x-y)^2$$

$$= \varepsilon e_0(x) + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}\left(e_2(x) - 2ye_1(x) + y^2 e_0(x)\right)$$

tức là: $\left|f(x) - f(y)e_0\right| \leq \varepsilon e_0 + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}\left(e_2 - 2ye_1 + y^2 e_0\right)$.

Cho $n \in \mathbb{N}$. Theo *b)*, với mọi (u, v) thuộc E^2, ta có

$$u \leq v \Leftrightarrow v - u \geq 0 \Rightarrow B_n(v-u) \geq 0 \Leftrightarrow B_n(v) - B_n(u) \geq 0 \Leftrightarrow B_n(u) \leq B_n(v),$$

và vậy B_n là hàm tăng.

Rồi với mọi (u, v) thuộc E^2:

$$|u| \leq v \Leftrightarrow -u \leq v \leq u \Rightarrow -B_n(u) \leq B_n(v) \leq B_n(u) \Leftrightarrow \left|B_n(u)\right| \leq B_n(v).$$

Ta suy ra rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và y thuộc $[0;1]$:

$$\left|B_n(f) - f(y)e_0\right| = \left|B_n(f) - f(y)B_n(e_0)\right| \leq \varepsilon B_n(e_0) + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}\left(B_n(e_2) - 2yB_n(e_1) + y^2 B_n(e_0)\right)$$

và lấy giá trị tại *y*: $\left|B_n(f)(y) - f(y)\right| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}\left(B_n(e_2)(y) - 2yB_n(e_1)(y) + y^2 B_n(e_0)(y)\right)$.

Vì $e_2(y) - 2ye_1(y) + y^2 e_0(y) = (y-y)^2 = 0$ nên ta được:

$$\left|B_n(e_2)(y) - 2yB_n(e_1)(y) + y^2 B_n(e_0)(y)\right|$$

$$= \left|(B_n(e_2)(y) - e_2(y)) - 2y(B_n(e_1)(y) - e_1(y)) + y^2(B_n(e_0)(y) - e_0(y))\right|$$

$$= \left|B_n(e_2)(y - e_2(y))\right| \leq \|B_n(e_2) - e_2\|_\infty.$$

Theo *c)* có *N* sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \|B_n(e_2) - e_2\|_\infty \leq \frac{\alpha^2 \varepsilon}{2\|f\|_\infty + 1}\right)$.

Vậy ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon\right)$

và cuối cùng $B_n(f) \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$.

4.2.24 Có ngay tức khắc từ định nghĩa của $B_n(f)(x)$.

4.2.25 $B_n(\overline{f})(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \overline{f\left(\frac{k}{n}\right)} x^k(1-x)^{n-k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}} = \overline{B_n(f)(x)}$.

4.2.26 $B_n(\tilde{f})(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(1-\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \underset{[l=n-k]}{=} \sum_{l=0}^{n} C_n^l f\left(\frac{l}{n}\right) x^{n-l}(1-x)^l = \widetilde{B_n(f)}(x)$.

4.2.27 *a)* $B_n(\lambda f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\lambda f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k(1-x)^{n-k}$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} = \lambda B_n(f)(x) + B_n(g)(x).$$

b) $f \geq 0 \Rightarrow B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$.

c) $f \leq g \Rightarrow g-f \geq 0 \Rightarrow B_n(g-f) \geq 0 \Leftrightarrow B_n(g)-B_n(f) \geq 0 \Leftrightarrow B_n(f) \leq B_n(g)$.
Xem thêm bài tập 4.2.23.

4. 2. 28 *a)* Nếu f bị chặn trên, ký hiệu $M = \sup_{t\in[0;1]} f(t)$ thì với mọi $x \in [0;1]$, ta có:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k M x^k(1-x)^{n-k} = M\left(x+(1-x)\right)^n = M.$$

Tương tự, nếu f bị chặn dưới, ký hiệu $m = \inf_{t\in[0;1]} f(t)$ thì:

$$B_n(f)(x) \geq \sum_{k=0}^{n} C_n^k m x^k(1-x)^{n-k} = m.$$

Cũng có thể sử dụng bài tập 4.2.27 *c)*

$$\begin{cases} f \leq M \Rightarrow B_n(f) \leq B_n(M) = M, \\ m \leq f \Rightarrow B_n(f) \leq B_n(m) = m. \end{cases}$$

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $x \in [0;1]$, ta có:

$$|B_n(f)(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k} = B_n(|f|)(x) \leq B_n(\|f\|_\infty)(x) = \|f\|_\infty .$$

Nhận xét:

Ký hiệu $E = C^0([0;1], \mathbb{C})$ được trang bị $\|\cdot\|_\infty$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ánh xạ $B_n : \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto B_n(f) \end{array}$ là tuyến tính liên tục và (vì $B_n(1) = 1$): $\|B_n\| = 1$.

4. 2. 29 Cho $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}, n \in \mathbb{N}, x \in [0;1], A = B_n(f)(x) \in \mathbb{K}$.

Vì B_n tuyến tính dương (xem bài tập 4.2.27), vì $B_n(1) = 1$ và vì $B_n(\overline{f}) = \overline{B_n(f)}$ (xem bài tập 4.2.25), ta có:

$$0 \le B_n\left(|f - A|^2\right) = B_n\left(|f|^2 - (A\overline{f} + \overline{A}f) + |A|^2\right) = B_n\left(|f|^2\right) - \left(A\overline{B_n(f)} + \overline{A}B_n(f)\right) + |A|^2.$$

Vậy với mọi $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi $(x,y) \in [0;1]^2$:

$$B_n\left(|f|^2\right)(y) - \left(B_n(f)(x)\overline{B_n(f)(y)} + \overline{B_n(f)(x)}B_n(f)(y)\right) + |B_n(f)(y)|^2 \ge 0.$$

Nói riêng, thay y bằng x, ta được:

$$B_n(|f|^2)(x) - |B_n(f)(x)|^2 \ge 0.$$

4. 2. 30 Giả sử f lồi và cho $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;1]$.

Với $k \in \{0,\dots,n\}$, ký hiệu $p_k = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Ta có (xem thêm chứng minh định lý 4.2.2)

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \text{ và } \sum_{k=0}^{n} kp_k = nx,$$

từ đó, do f lồi (dùng bất đẳng thức Jensen (Tập 1, 5.4.1, Mệnh đề 3):

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k f\left(\frac{k}{n}\right) \ge f\left(\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kp_k\right) = f(x).$$

4. 2. 31 *a) 1)* Cho $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}, n \in \mathbb{N}$. Với mọi $x \in [0;1]$ ta có:

$$\left(B_n(f)\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} f\left(\frac{k}{n}\right)x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} nC_{n-1}^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-1-k}.$$

2) Trường hợp $n = 0$ được khảo sát đơn giản.

• Nếu f tăng thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, mọi $k \in \{0, \dots, n-1\}$, ta có $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \ge 0$, từ đó, theo 1) với mọi $x \in [0;1]$, $\left(B_n(f)\right)'(x) \ge 0$, $B_n(f)$ tăng.

• Nếu f giảm, áp dụng kết quả trên cho $-f$, do B_n tuyến tính dương suy ra $B_n(f)$ giảm.

b) 1) Với $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ cố định, áp dụng kết quả của *a)* 1) cho $f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \ge 0$, ta được, với mọi $x \in [0;1]$:

$$\left(B_n(f)\right)''(x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k\left(\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) - \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)x^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-2-k}.$$

2) Các trường hợp $n = 0$, $n = 1$ được khảo sát đơn giản.

- Nếu f lồi thì với mọi $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ và mọi $k \in \{0, ..., n-2\}$, ta có:

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} + \frac{k+2}{n}\right)\right) \le \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+2}{n}\right)\right),$$

từ đó $f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \ge 0$,

và vậy theo 1), $\left(B_n(f)\right)''(x) \ge 0$, nên $B_n(f)$ lồi.

- Nếu f lõm, bằng cách áp dụng kết quả trên cho $-f$, suy ra $B_n(f)$ lõm.

4. 2. 32 Cho $x \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}$. Ta hãy chứng minh: $B_n(f)(x) - B_{n+1}(f)(x) \ge 0$.

Khảo sát được ngay trường hợp $x = 1$. Giả sử $x \in [0;1[$, và ký hiệu $t = \frac{x}{1-x}$, khi đó $x = \frac{t}{1+t}$ và $1 - x = \frac{1}{1+t}$.

Ta có:

$$(1-x)^{-(n+1)}\left(B_n(f)(x) - B_{n+1}(f)(x)\right)$$

$$= (1+t)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{t}{1+t}\right)^k\left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f\left(\frac{k}{n+1}\right)\left(\frac{t}{1+t}\right)^k\left(\frac{1}{1+t}\right)^{n+1-k}\right)$$

$$= (1+t)\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)t^k - \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f\left(\frac{k}{n+1}\right)t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)t^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)t^{k+1} - \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f\left(\frac{k}{n+1}\right)t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)t^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f\left(\frac{k-1}{n}\right)t^k - \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f\left(\frac{k}{n+1}\right)t^k$$

$$= \left(f(0) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)t^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f\left(\frac{k-1}{n}\right)t^k + f(1)t^{n+1}\right)$$
$$- \left(f(0) + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f\left(\frac{k}{n+1}\right)t^k + f(1)t^{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}t^k,$$

trong đó

$$C_{n,k} = C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) + C_n^{k-1} f\left(\frac{k-1}{n}\right) - C_{n+1}^k f\left(\frac{k}{n+1}\right)$$
$$= C_{n+1}^k\left(\left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right).$$

Vì f lồi và $\frac{k}{n+1} \in [0;1]$, ta có:

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right) \ge f\left(\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\frac{k}{n} + \frac{k}{n+1}\frac{k-1}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n+1}\right).$$

Điều đó chứng tỏ: $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $C_{n,k} \geq 0$

và cuối cùng: $B_n(f)(x) - B_{n+1}(f)(x) \geq 0$.

4. 2. 33 Trước hết, nhận xét rằng $B_n(f)$ là một đa thức nên nó thuộc lớp C^{∞} trên $[0;1]$.
Quy nạp trên r.
Tính chất là tầm thường khi $r = 0$.

Giả sử tính chất đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $r \leq n-1$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}
\left(B_n(f)\right)^{(r+1)}(x) &= \left(\left(B_n(f)\right)^{(r)}\right)'(x) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=1}^{n-r} kC_{n-r}^{k}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^{k-1}(1-x)^{n-r-k} \\
&\qquad - \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{n-r-1}(n-r-k)C_{n-r}^{k}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^{k}(1-x)^{n-r-k-1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=1}^{n-r}(n-r)C_{n-r-1}^{k-1}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^{k-1}(1-x)^{n-r-k} \\
&\qquad - \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{n-r-1}(n-r)C_{n-r-1}^{k}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^{k}(1-x)^{n-r-k-1} \\
&= \frac{n!}{(n-r-1)!}\left(-\sum_{\substack{l=0 \\ [l=k-1]}}^{n-r-1} C_{n-r-1}^{l}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{l+1}{n}\right)x^{l}(1-x)^{n-r-l-1}\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=0}^{n-r-1} C_{n-r-1}^{k}(\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^{k}(1-x)^{n-r-k-1}\right) \\
&= \frac{n!}{(n-(r+1))!}\sum_{k=0}^{n-(r+1)} C_{n-(r+1)}^{k}\left((\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k+1}{n}\right) - (\Delta_{n,r}f)\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^{k}(1-x)^{n-(r+1)-k} \\
&= \frac{n!}{(n-(r+1))!}\sum_{k=0}^{n-(r+1)} C_{n-(r+1)}^{k}(\Delta_{n,r+1}f)\left(\frac{k}{n}\right)x^{k}(1-x)^{n-(r+1)-k}.
\end{aligned}$$

4. 2. 34 *a)* Với mọi $(n,p,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{*}\times[0;1]$, ta có:

$$\begin{aligned}
&x(1-x)S_{n,p}'(x) = \\
&= x(1-x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(-np(k-nx)^{p-1}x^k(1-x)^{n-k} + (k-nx)^p\left(kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k}\right)\right) \\
&= -npx(1-x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k(k-nx)^{p-1}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k(k-nx)^p x^k(1-x)^{n-k}\left(k(1-x)-(n-k)x\right) \\
&\qquad = -npx(1-x)S_{n,p-1}(x) + S_{n,p+1}(x).
\end{aligned}$$

b) Bất đẳng thức $0 \leq S_{n,p}(x)$ là hiển nhiên. Một quy nạp trực tiếp trên p chứng tỏ rằng có

$\alpha_{p,0},\dots,\alpha_{p,N} \in \mathbb{R}[X]$ trong đó $N = E\left(\frac{p}{2}\right)$ sao cho:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{p,k}(x) n^k .$$

Nói riêng, có các đa thức $\alpha_{6,0};\alpha_{6,1};\alpha_{6,2};\alpha_{6,3}$ thuộc $\mathbb{R}[X]$ sao cho:

$$\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n,6}(x) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_{6,k}(x) n^k .$$

Vì $\alpha_{6,0},...,\alpha_{6,3}$ liên tục trên $[0;1]$ nên chúng bị chặn và ký hiệu $c = \underset{0\le k\le 3}{\mathrm{Max}}\left(\underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Sup}}\left|\alpha_{6,k}(x)\right|\right)$

thì do $1 \le n \le n^2 \le n^3$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ S_{n,6}(x) \le cn^3 .$$

4. 2. 35 *a)* Ta có (xem thêm chứng minh Định lý 4.2.2)

$$0 \le \delta^2 A_{n,\delta}(x) = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}} \delta^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \sum_{\substack{0\le k\le n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n} .$$

b) Với các ký hiệu ở bài tập 4.2.34:

$$0 \le \delta^4 A_{n,\delta}(x) \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^4 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^4} S_{n,4}(x) .$$

Hệ thức ở bài tập 4.2.34 *a)* cho:

$$S_{n,3}(x) = nx(1-x)(1-2x) ,$$

$$S_{n,4}(x) = nx(1-x)\big(1+3(n-2)x(1-x)\big) .$$

• Nếu $n \ge 2$, ta suy ra:

$$0 \le \delta^4 A_{n,\delta}(x) \le \frac{1}{n^3} x(1-x)\big(1+3(n-2)x(1-x)\big) \le \frac{1}{4n^3}\left(1+\frac{3}{4}(n-2)\right) \le \frac{1}{4n^2} .$$

• Nếu $n = 1$, ta có:

$$0 \le \delta^4 A_{n,\delta}(x) \le x(1-x)\big(1+3x(1-x)\big) \le x(1-x) \le \frac{1}{4} = \frac{1}{4n^2} .$$

4. 2. 36 Chúng ta sử dụng các ký hiệu và kết quả ở bài tập 4.2.33.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $y \in \left[0;1-\frac{1}{n}\right]$. Theo định lý Rolle, có $\theta_1 \in [0;1]$, (θ_1 phụ thuộc vào n và y) sao cho:

$$(\Delta_{n,1} f)(y) = f\left(y+\frac{1}{n}\right) - f(y) = \frac{1}{n} f'\left(y+\frac{\theta_1}{n}\right) .$$

Rồi: $(\Delta_{n,2} f)(y) = (\Delta_{n,1} f)\left(y+\frac{1}{n}\right) - (\Delta_{n,1} f)(y) = \frac{1}{n}\left(f'\left(y+\frac{\theta_1}{n}+\frac{1}{n}\right) - f'\left(y+\frac{\theta_1}{n}\right)\right)$

từ đó, theo định lý Rolle, có $\theta_2 \in [0;1]$ (phụ thuộc vào n và y) sao cho:

$$(\Delta_{n,2}f)(y) = \frac{1}{n^2} f''\left(y + \frac{\theta_1}{n} + \frac{\theta_2}{n}\right).$$

Một quy nạp trực tiếp chứng tỏ rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, mọi $y \in \left[0; 1 - \frac{r}{n}\right]$, có $\theta_1, ..., \theta_n \in [0;1]$ (phụ thuộc vào n và y) sao cho:

$$\forall s \in \{0, ..., r\}, \quad (\Delta_{n,s}f)(y) = \frac{1}{n^s} f^{(s)}\left(y + \frac{\theta_1}{n} + ... + \frac{\theta_s}{n}\right).$$

Vậy, với $r \in \mathbb{N}^*$ cố định, ký hiệu $\theta = \frac{1}{r}(\theta_1 + ... + \theta_r) \in [0;1]$ thì ta có

$$(\Delta_{n,r}f)(y) = \frac{1}{n^r} f^{(r)}\left(y + \frac{r\theta}{n}\right).$$

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $f^{(r)}$ liên tục trên $[0;1]$ nên theo định lý Heine, nó liên tục đều trên $[0;1]$. Vậy có $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall (x', x'') \in [0;1]^2, \quad \left(|x' - x''| \le \eta \Rightarrow \left|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')\right| \le \varepsilon\right).$$

Ký hiệu $N = E\left(\frac{r}{\eta}\right) + 1$ thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \ge N$, với mọi $x \in [0;1]$, ta có:

$$\left|(B_n(f))^{(r)}(x) - \frac{n!}{(n-r)!n^r}\left(B_{n-r}(f^{(r)})\right)(x)\right|$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!n^r}\left|\sum_{k=0}^{n-r} C_{n-r}^k \left(f^{(r)}\left(\frac{k}{n} + \frac{r\theta}{n}\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-r-k}\right|$$

$$\le \frac{n!}{(n-r)!n^r} \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-r}^k \varepsilon x^k (1-x)^{n-r-k} = \frac{n!}{(n-r)!n^r}\varepsilon \le \varepsilon.$$

Điều đó chứng tỏ: $\left\|(B_n(f))^{(r)} - \frac{n!}{(n-r)!n^r} B_{n-r}(f^{(r)})\right\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Do $\frac{n!}{(n-r)!n^r} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ và do $B_{n-r}\left(f^{(r)}\right) \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f^{(r)}$ (theo chứng minh Định lý 4.2.2 áp dụng cho $f^{(r)}$ thay vì cho f) ta kết luận: $\left(B_n(f)\right)^{(r)} \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f^{(r)}$.

Vậy, nếu f thuộc lớp C^p trên $[0;1]$, ta có đồng thời $B_n(f) \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$, $(B_n(f))' \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f'$, ..., $\left(B_n(f)\right)^{(p)} \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f^{(p)}$.

Tính chất chính quy đáng chú ý đó trong việc xấp xỉ một ánh xạ (thuộc lớp C^p) bởi các đa thức Bernstein của nó bù đắp cho các sự hội tụ khá chậm chạp của $\left(B_n(f)\right)_n, ..., \left(\left(B_n(f)\right)^{(p)}\right)_n$ (xem bài tập 4.2.37).

4. 2. 37 *a)* Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu:

$$U_n(x) = n\left(B_n(f)(x) - f(x)\right) - \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Vì $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$, và vì $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \left(x+(1-x)\right)^n = 1$,

ta có: $U_n(x) = n\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) x^k (1-x)^{n-k}\right) - \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$.

Với mọi $(u,v) \in [0;1]^2$, dùng công thức Taylor với phần dư tích phân, ta có:

$$f(v) = f(u) + (v-u)f'(u) + \int_u^v (v-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

$$= f(u) + (v-u)f'(u) + \frac{1}{2}(v-u)^2 f''(u) + \int_u^v (v-t)(f''(t) - f''(u))\mathrm{d}t .$$

Dùng phép đổi biến số $w = \frac{t-u}{v-u}$ (trường hợp $u = v$ được xét trực tiếp), ta có:

$$\int_u^v (v-t)(f''(t) - f''(u))\mathrm{d}t = (v-u)^2 \varphi(u,v),$$

trong đó ta đã ký hiệu: $\varphi(u,v) = \int_0^1 (1-w)(f''(u+(v-u)w) - f''(u))\mathrm{d}w$.

Vậy với mọi $k \in \{0, \ldots, n\}$, ta có:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) = \left(\frac{k}{n} - x\right)f'(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 f''(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \varphi\left(\frac{k}{n}, x\right).$$

Do $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right) x^k (1-x)^{n-k} = 0$ và $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$,

ta suy ra: $U_n(x) = n\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \varphi\left(\frac{k}{n}, x\right)$.

Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_0^1$ (xem tập 3, 2.3.12 1) Định lý), vì $((u,v),w) \mapsto (1-w)(f''(u+(v-u)w) - f''(u))$ liên tục trên $[0;1]^2 \times [0;1]$ nên φ liên tục trên $[0;1]^2$. Rồi theo định lý Heine, φ liên tục đều trên $[0;1]^2$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Có η > 0 sao cho:

$$\forall (u,v),(u',v') \in [0;1]^2,\ \left(\left\{\begin{array}{l}|u'-v| \le \eta \\ |v'-v| \le \eta\end{array}\right. \Rightarrow |\varphi(u',v') - \varphi(u,v)| \le \varepsilon\right).$$

Tách $\sum_{k=0}^{n}$ trong công thức cho $U_n(x)$ thành $\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \le \eta}}$ và $\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \eta}}$.

1) Vì với mọi k, $\varphi\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right) = 0$, ta có:

$$\left| n \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \le \eta}} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \varphi\left(\frac{k}{n}, x\right)\right| \le n \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \le \eta}} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \left|\varphi\left(\frac{k}{n}, x\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq n\varepsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=n\varepsilon\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{\varepsilon}{4}.$$

2) $$\left|n\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\eta}}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}\varphi\left(\frac{k}{n},x\right)\right|\leq n\|\varphi\|_\infty\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\eta}}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq\frac{n\|\varphi\|_\infty}{\eta^2}\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\eta}}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^4x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{n\|\varphi\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^4x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq\frac{n\|\varphi\|_\infty}{\eta^2}\frac{1}{4\eta^2}.$$

(xem bài tập 4.2.35 *b)*).

Cuối cùng: $U_n(x)\xrightarrow[n\infty]{}0$, tức là

$$n\big(B_n(f)(x)-f(x)\big)\xrightarrow[n\infty]{}\frac{x(1-x)}{2}f''(x).$$

b) Cho f: $[0;1]\to\mathbf{C}$ thuộc lớp C^2. Giả sử: $\|B_n(f)-f\|_\infty \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Khi đó: $n\|B_n(f)-f\|_\infty\xrightarrow[n\infty]{}0$,

vậy: $\forall x\in[0;1],\quad n\big(B_n(f)(x)-f(x)\big)\xrightarrow[n\infty]{}0$.

Theo *a)*, ta suy ra: $\forall x\in[0;1],\quad \frac{x(1-x)}{2}f''(x)=0$

từ đó: $\forall x\in]0;1[,\quad f''(x)=0$,

rồi do tính liên tục của f'' tại 0 và 1: $f''=0$ và cuối cùng, f là afin.

4. 2. 38 *a)* Ký hiệu $\varphi=f-M_f$; φ bị chặn và $\varphi\leq 0$. Cho $n\in\mathbf{N}^*$. Ta có:

$$B_n(f)(x_0)=B_n(f-\varphi)(x_0)+B_n(\varphi)(x_0)=M_f+B_n(\varphi)(x_0).$$

Trong $B_n(\varphi)(x_0)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\varphi\left(\frac{k}{n}\right)x_0^k(1-x_0)^{n-k}$, tách thành $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \frac{k}{n}\in I}}$ và $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \frac{k}{n}\notin I}}$.

1) Vì $\varphi\leq 0$: $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \frac{k}{n}\in I}}C_n^k\varphi\left(\frac{k}{n}\right)x_0^k(1-x_0)^{n-k}\leq 0$.

2) Ta có: $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \frac{k}{n}\notin I}}C_n^k\varphi\left(\frac{k}{n}\right)x_0^k(1-x_0)^{n-k}\leq\|\varphi\|_\infty\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \frac{k}{n}\notin I}}C_n^kx_0^k(1-x_0)^{n-k}$

$$\leq\|\varphi\|_\infty\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \left|\frac{k}{n}-x_0\right|\geq\alpha}}C_n^kx_0^k(1-x_0)^{n-k}\leq\frac{\|\varphi\|_\infty}{\alpha^2}\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ \left|\frac{k}{n}-x_0\right|\geq\alpha}}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2x_0^k(1-x_0)^{n-k}$$

$$\le \frac{\|\varphi\|_\infty}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2 x_0^k(1-x_0)^{n-k} = \frac{\|\varphi\|_\infty}{\alpha^2}\frac{x_0(1-x_0)}{n} \le \frac{\|\varphi\|_\infty}{4\alpha^2 n}.$$

Ta kết luận: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ B_n(f)(x_0) \le M_f + \dfrac{\|f-M_f\|_\infty}{4\alpha^2 n}$.

b) Vì $\dfrac{\|f-M_f\|_\infty}{4\alpha^2 n}\xrightarrow[n\infty]{} 0$ nên nếu $B_n(f)(x_0)\xrightarrow[n\infty]{} l$, ta suy ra từ a): $l \le M_f$.

c) Áp dụng *a)* vào $f-g$, ta được:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ B_n(f)(x_0) - B_n(g)(x_0) = B_n(f-g)(x_0) \le M_{f-g} + \frac{\|f-g-M_{f-g}\|_\infty}{4\alpha^2 n}.$$

Vì f và g trùng nhau trên I, ta có: $M_{f-g} = \underset{x\in I}{Sup}\big(f(x)-g(x)\big) = 0$.

Từ đó $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ B_n(f)(x_0) - B_n(g)(x_0) \le \dfrac{\|f-g\|_\infty}{4\alpha^2 n}$.

Bằng cách thay đổi vai trò của f và g, ta suy ra:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \left|B_n(f)(x_0) - B_n(g)(x_0)\right| \le \frac{\|f-g\|_\infty}{4\alpha^2 n},$$

và vậy: $B_n(f)(x_0) - B_n(g)(x_0)\xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Điều đó chứng tỏ rằng nếu một trong hai dãy $\big(B_n(f)(x_0)\big)_{n\ge 0}$ và $\big(B_n(g)(x_0)\big)_{n\ge 0}$ hội tụ thì dãy kia cũng hội tụ và chúng có cùng giới hạn.

4. 2. 39 *a)* Cho $n \in \mathbb{N}^*, x \in [0;1]$. Ta có:

$$\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|x^k(1-x)^{n-k} \le M\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left|\frac{k}{n}-x\right|^\alpha x^k(1-x)^{n-k}$$

Với k $\in \{0, ..., n\}$, ký hiệu $p_k = C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz với

$$x_k = (p_k)^{\frac{2-\alpha}{2}};\ y_k = \left|\frac{k}{n}-x\right|^\alpha (p_k)^{\frac{\alpha}{2}};\ p = \frac{2-\alpha}{2};\ q = \frac{2}{\alpha}:$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\left|\frac{k}{n}-x\right|^\alpha = \left|\sum_{k=0}^{n} p_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\left|\frac{k}{n}-x\right|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} = (1)^{\frac{2-\alpha}{2}}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \le \left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]\ \ \left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \le \dfrac{M}{4^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Điều đó chứng tỏ: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \le \dfrac{M}{4^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}}}$,

và vậy: $\|B_n(f) - f\|_\infty = \underset{n\infty}{0}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}\right)$.

b) α) Cho $a,b \in]0;+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$, $p, q \in]1;+\infty[$ sao cho $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Theo bất đẳng thức Holder, ta có:

$$S_{a+b}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k |k - nx|^{a+b} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p_k |k - nx|^{a+b}$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left((p_k)^{\frac{1}{p}}|k - nx|^a\right)\left((p_k)^{\frac{1}{q}}|k - nx|^b\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\left((p_k)^{\frac{1}{p}}|k - nx|^a\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left((p_k)^{\frac{1}{q}}|k - nx|^b\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} p_k |k - nx|^{pa}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k |k - nx|^{qb}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(S_{pa}(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(S_{qb}(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

β) Chọn a, b, p sao cho $a + b = 2$; $ap = \alpha$; $bq = 4$. Một phép tính sơ cấp chứng tỏ điều đó có nghĩa là:

$$p = \frac{4-\alpha}{2}; q = \frac{4-\alpha}{2-\alpha}; a = \frac{2\alpha}{4-\alpha}; b = \frac{4(2-\alpha)}{4-\alpha}$$

và khi đó đúng là: $p > 1; q > 1; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1; a > 0; b > 0$.

Theo *a)*: $\forall x \in [0;1]$, $S_2(x) \le \left(S_\alpha(x)\right)^{\frac{2}{4-\alpha}}\left(S_4(x)\right)^{\frac{2-\alpha}{4-\alpha}}$.

Theo bài tập 4.2.34 *a)*: $S_2(x) = nx(1-x)$,

$$S_4(x) = nx(1-x)\left(1 + 3(n-2)x(1-x)\right) \le n^2 x(1-x),$$

từ đó: $nx(1-x) \le \left(S_\alpha(x)\right)^{\frac{2}{4-\alpha}}\left(n^2 x(1-x)\right)^{\frac{2-\alpha}{4-\alpha}}$,

rồi $\left(S_\alpha(x)\right)^2 \ge \left(n^2 x(1-x)\right)^{4-\alpha}\left(n^2 x(1-x)\right)^{-2+\alpha} = n^\alpha\left(x(1-x)\right)^2$.

Ta được: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]$, $S_\alpha(x) \ge n^{\frac{\alpha}{2}} x(1-x)$.

γ) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\left|B_n(f_\alpha)\left(\frac{1}{2}\right) - f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\right| = B_n(f_\alpha)\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{n^\alpha} S_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) \ge \dfrac{1}{4n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Điều này chứng tỏ rằng với mọi $\alpha \in]0;1]$, có một ánh xạ α - Holder f_α sao cho $\|B_n(f_\alpha) - f_\alpha\|_\infty$ không phải không đáng kể đối với $\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ khi n dần đến vô tận (Để chứng minh rằng f_α là α - Holder, hãy khảo sát sự biến thiên của $\begin{array}{l}[0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto (1-t)^\alpha - 1 + t^\alpha\end{array}$).

4.3.1 *a)* • $x \in [0;1] \Rightarrow |f_n(x)| \le \dfrac{2}{n^2}$.

• $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\Rightarrow |f_n(x)| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **Trả lời:** Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $[0;1]$; $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[0;1]$.

b) 1) **Hội tụ đơn**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad n^2 f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0 \text{ ; vậy } \sum_n f_n \text{ hội tụ đơn trên } \mathbb{R}.$$

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Khảo sát sự biến thiên của f_n (f_n là lẻ)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗		↘	0

Ta có: $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2en}}$

vậy $\sum_n \|f_n\|_\infty$ phân kỳ.

Với $a >$ cố định, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \ge N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n}} \le a\right)$$

từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \ge N \Rightarrow \left(\forall x \in]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[, \ |f_n(x)| \le f_n(a)\right)\right)$

và vậy $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$

3) **Hội tụ đều**

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \ R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} xe^{-kx^2} = \frac{x}{1-e^{-x^2}} e^{-(n+1)x^2}$

từ đó $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \dfrac{1}{e\sqrt{n+1}\left(1-e^{-\frac{1}{n+1}}\right)} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n+1}}{e} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **Trả lời:** • $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$, $a > 0$ cố định.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

c) 1) **Hội tụ đơn**

Nếu $x \in [0;1[$ thì $\sum_n n^2\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$ hội tụ (quy tắc *d'Alembert*) và $\sum_n f_n(0)$ hội tụ.

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗		↘	0

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Khảo sát sự biến thiên của f_n. Từ đó:

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{n^2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n}{2e} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty .$$

Với $a \in [0;1[$ cố định, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \dfrac{2n}{2n+1} \geq a\right)$ và vậy với mọi $n \geq N$, $\underset{x\in[0;a]}{\operatorname{Sup}} |f_n(x)| = f_n(a)$.

3) **Hội tụ đều**

Ta đã thấy: $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{n}{2e}$, vậy $|f_n|_{+\infty} \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$

◊ **Trả lời:** • $\sum\limits_n f_n$ hội tụ đơn trên $[0;1[$.

• $\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên mọi $[0;a]$, với $a \in [0;1[$ cố định.

• $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ đều trên $[0;1[$.

d) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, $n^2 f(x) = n^2 x^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$; và $\sum\limits_n f_n(0)$ hội tụ.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Khảo sát sự biến thiên của f_n, ta có:

$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{4}{e^2 n}$

và $\sum\limits_n \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Với $a > 0$ cố định, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq a\right)$, và vậy với $n \geq N$, $\|f_n|_{[a;+\infty[}\|_\infty = f_n(a)$.

3) **Hội tụ đều**

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^2 e^{-x\sqrt{k}} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} x^2 e^{-x\sqrt{k}} \geq n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$,

từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \dfrac{1}{2e}$ và vậy $R_n \not\xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$.

◊ **Trả lời:** • $\sum\limits_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$.

• $\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$, $a > 0$ cố định.

• $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

e) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbf{R}_+^*$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2} > 0$; và $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n không bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

Chứng minh rằng với $n \geq 1$ cố định, f_n là hàm tăng. Vậy với $a \in \mathbb{R}_+$ cố định, ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\| f_n|_{[0;a]} \right\|_\infty = f_n(a).$$

3) **Hội tụ đều**

Ta đã thấy: $\|f_n\|_\infty = +\infty \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

◊ **Trả lời:** • $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[0;a]$, $a \in \mathbb{R}_+$ cố định.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

f) 1) **Hội tụ đơn**

• $\forall x \in [0;1[, 0 \leq f_n(x) \leq x^n$ và $\sum_n x_n$ hội tụ.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = \dfrac{1}{n+1}$ vậy $\sum_n f_n(1)$ phân kỳ.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

• $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \geq f_n(1^-) = \dfrac{1}{n+1}$ vậy $\sum_n \|f_n\|_\infty$ phân kỳ.

• Với $a \in [0;1[$ cố định, ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| f_n|_{[0;a]} \right\|_\infty \leq a^n$ và $\sum_n a^n$ hội tụ.

3) **Hội tụ đều**

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1[,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{1+kx} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x^k}{1+kx} \geq \dfrac{nx^{2n}}{1+2nx}$,

từ đó $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$, $R_n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \geq \dfrac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}{2n-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2e^2}$ và vì vậy $R_n \underset{n\infty}{\overset{\text{đều}}{\not\longrightarrow}} 0$ trên $[0;1[$.

◊ **Trả lời:** • $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $[0;1[$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[0;a]$, $a \in [0;1[$ cố định.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $[0;1[$.

g) ◊ **Trả lời:** • Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $]-\infty;a] \cup [b;0[\cup]0;c] \cup [d;+\infty[$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ cố định sao cho $a < -1 < b < 0 < c < 1 < d$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]-\infty;-1[$ cũng như trên $]1;+\infty[$.

h) ◊ **Trả lời:**

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[0; a]$ với $a > 0$ cố định, $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}_+$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

i) Nhận xét rằng mỗi f_n là lẻ.

1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^3} > 0$; và $\sum_n \frac{1}{n^3}$ hội tụ.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Khảo sát sự biến thiên của f_n. Ta có:

x	0		n^2		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\|f_n\|_\infty = f_n\left(n^2\right) = \frac{1}{2n}$ và vậy $\sum_n \|f_n\|_\infty$ phân kỳ.

Với $a \in \mathbb{R}_+$ cố định, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $N^2 \geq a$ và vậy $n \geq N$, $\|f_n|_{[0;a]}\|_\infty = f_n(a)$.

3) **Hội tụ đều**

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{kx}{k^4 + x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx}{k^4 + x^2} \geq \frac{n(n+1)x}{16n^4 + x^2}$

và vậy $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n\left(n^2\right) \geq \frac{n+1}{17n} \geq \frac{1}{17}$ nó chứng tỏ $R_n \underset{n\infty}{\overset{\text{đều}}{\not\longrightarrow}} 0$

◊ **Trả lời:** • $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[-a; a]$, $a \geq 0$ cố định.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]-\infty; 0]$ cũng như trên $[0; +\infty[$.

j) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}$ cố định, lập một khai triển tiệm cận (khi $n \to \infty$).

$$f_n(x) = th\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - \frac{x}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n không bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Cho $a \in \mathbb{R}_+$. Có thể viết $f_n = g_n + h_n$ trong đó $h_n, g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \left(g_n(x) = th\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}};\ h_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Chứng minh rằng mỗi $g_n|_{\mathbf{R}_+}$ là tăng và âm, từ đó $\|g_n|_{[-a;a]}\|_\infty = -g_n(a)$.

Mặt khác: $\forall x \in [-a;a]$, $|h_n(x)| = |x| \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| \le a \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$, và $\sum\limits_{n \ge 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ hội tụ (chuỗi kính viễn vọng).

3) **Hội tụ đều**

Ta đã thấy rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n không bị chặn trên $\mathbb{R}$.

◊ **Trả lời:** • $\sum\limits_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$.

• $\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mỗi $[-a; a]$, $a \ge 0$ cố định.

• $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

k) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$.

• Nếu $x \le n$ thì $0 \le f_n(x) \le \dfrac{\ln(2n)}{n^2}$.

• Nếu $x \ge n$ thì $0 \le f_n(x) \le \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$. Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$ giảm với $x \ge \dfrac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$.

Cuối cùng: $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbf{R}_+$, $0 \le f_n(x) \le \dfrac{\ln(2n)}{n^2}$ và $\sum\limits_{n \ge 1} \dfrac{\ln(2n)}{n^2}$ hội tụ.

◊ **Trả lời:** $\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}_+$.

l) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbf{R}$ cố định, $n^2 f(x) = n e^{-(x-n)^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

• $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = f_n(n) = \dfrac{1}{n} \right)$, vậy $\sum\limits_{n \ge 1} \|f_n\|_\infty$ phân kỳ.

• Với $a \in \mathbb{R}_+$ cố định, ký hiệu $N = E(a)$, ta có:

$$\forall n \ge N, \forall x \in]-\infty; a],\ 0 \le f_n(x) \le f_n(a).$$

3) **Hội tụ đều**

Cách thứ nhất

Cho $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbf{R}$, cố định; dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (Tập 3, 1.6.2, Định lý 1), ta

có: $$\left(R_n(x)\right)^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-(x-k)^2}\right)^2 \le \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-2(x-k)^2}\right).$$

Một mặt: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$.

Mặt khác: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-2(x-k)^2} \le 2\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p^2} \le 2\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p} = \frac{2}{1-e^{-2}} < 3$.

Vậy: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbf{R},\ \left|R_n(x)\right| \le \sqrt{\frac{3}{n}}$, điều đó chứng tỏ: $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}_+$.

Cách thứ hai

Tổng quát hơn, xét chuỗi ánh xạ $\displaystyle\sum_{n\ge 1} f_n, f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \alpha_n e^{-(x-n)^2}$ trong đó $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ là một dãy thực hội tụ đến 0.

Với mọi $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbf{R}$, ký hiệu $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ và $\beta_n = \operatorname{Sup}_{k\ge n} |\alpha_k|$, ta có:

$$\left|R_n(x)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_n| e^{-(x-n)^2} \le \beta_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(x-k)^2} \le \beta_{n+1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-k)^2}$$

(ở đây, $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}$ chỉ $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} + \sum_{k=1}^{+\infty}$ khi cả hai chuỗi hội tụ).

Chứng minh rằng "chuỗi" $\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k$, trong đó $g_k : x \mapsto e^{-(x-k)^2}$, hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ và tổng G của nó là 1 - tuần hoàn.

Nhận xét: $\forall k \in \mathbf{Z}, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right],\ e^{-(x-k)^2} \le e^{-\left(|k|-\frac{1}{2}\right)^2}$ và từ đó suy ra rằng "chuỗi" $\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k$ hội tụ chuẩn tắc trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ rồi G bị chặn trên $\mathbb{R}$

Vậy ta được: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbf{R},\ \left|R_n(x)\right| \le \beta_{n+1} \|G\|_\infty$, vậy $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}$.

◊ **Trả lời:** • $\displaystyle\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $]-\infty; a]$, $a \in \mathbb{R}_+$ cố định, $\displaystyle\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$.

• $\displaystyle\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

m) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbf{R}_+^*$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x \ln n} > 0$; và $\sum_{n \geq 2} \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ hội tụ.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Khảo sát sự biến thiên của f_n. Từ đó:

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	−	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n \ln n}$ và vậy $\sum_n \|f_n\|_\infty$ phân kỳ.

Với $a > 0$ cố định, bắt đầu từ một thứ hạng nào đó, ta có: $\left\| f_n \mid_{[a;+\infty[} \right\|_\infty = f_n(a)$.

3) **Hội tụ đều**

Cho $x > 0$ cố định. Vì $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{\ln t(1+t^2x^2)}$ giảm trên $[2;+\infty[$ và vì $\int_2^{+\infty} \varphi_x(t)dt$ hội tụ, có thể sử dụng so sánh chuỗi-tích phân (xem Tập 3, 3.3.7 *1) a)*), từ đó:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\},\ 0 \leq R_n(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{x dt}{(1+t^2x^2)\ln t} \leq \frac{1}{\ln n} \int_n^{+\infty} \frac{x dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{\ln n}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(nx)\right) \leq \frac{\pi}{2\ln n}.$$

Điều đó chứng tỏ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$, $\|R_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2\ln n}$ và vậy $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$.

◊ **Trả lời:** • $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$, $a > 0$ cố định, $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}_+$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

n) 1) **Hội tụ đơn**

Cho $x \in \mathbb{R}$ cố định.

• Nếu $x \leq -\frac{1}{2}$ thì $|f_n(x)| \underset{n\infty}{\sim} n^{-x-\frac{1}{2}} \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• Nếu $x > -\frac{1}{2}$, thực hiện một khai triển tiệm cận (khi $n \to \infty$):

$$f_n(x) = (-1)^n n^{-x-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = (-1)^n n^{-x-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= (-1)^n n^{-x-\frac{1}{2}} - n^{-x-1} + O\left(n^{-x-3/2}\right);$$

Chuỗi $\sum_n (-1)^n n^{-x-\frac{1}{2}}$ hội tụ (xem Tập 3, 3.3.5, Ví dụ). Chuỗi $\sum_n n^{-x-1}$ hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 0$. Chuỗi $\sum_n O\left(n^{-x-3/2}\right)$ hội tụ tuyệt đối vì $-x - \frac{3}{2} < -1$.

Cuối cùng, $\sum_n f_n(x)$ hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 0$.

2) **Hội tụ tuyệt đối**

Cho $x \in \mathbb{R}_+^*$ cố định, ta có: $|f_n(x)| = n^{-x-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = n^{-x-\frac{1}{2}} - (-1)^n n^{-x-1} + O\left(n^{-x-3/2}\right)$.

Chuỗi $\sum_n n^{-x-\frac{1}{2}}$ hội tụ nếu và chỉ nếu $x > \frac{1}{2}$. Chuỗi $\sum_n (-1)^n n^{-x-1}$ hội tụ. Chuỗi $\sum_n 0\left(n^{-x-3/2}\right)$ hội tụ tuyệt đối. Vậy $\sum_n |f_n(x)|$ hội tụ nếu và chỉ nếu $x > \frac{1}{2}$.

3) **Hội tụ chuẩn tắc**

Ở đây, ta xét trên $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. $\|f_n\|_\infty = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{1}{n}$ nên $\sum_n \|f_n\|_\infty$ phân kỳ.

Với $a \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ cố định, $\left\|f_n|_{[a;+\infty[}\right\|_\infty = |f_n(a)|$ và $\sum_n |f_n(a)|$ hội tụ.

4) **Hội tụ đều**

Phân tích: $f_n = g_n - h_n$ trong đó $g_n, h_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} g_n(x) = (-1)^n n^{-x-\frac{1}{2}} \\ h_n(x) = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} n^{-x-1}. \end{cases}$$

- $\sum_{n\geq 2} g_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+^*$ vì theo dấu hiệu hội tụ của chuỗi đan dấu (Tập 3, 3.3.8 2) *c)* Mệnh đề):

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)\right| \leq (n+1)^{-x-\frac{1}{2}} \leq (n+1)^{-\frac{1}{2}},$$

- $\sum_{n\geq 2} h_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+^*$ vì : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)^{-1} \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \geq \frac{1}{2}$,

từ đó: $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(x) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-x-1} \geq \frac{1}{2}\int_{n+1}^{+\infty} t^{-x-1}dt = \frac{1}{2x}(n+1)^{-x}$,

và vậy $\sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{n}{2}(n+1)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Tuy nhiên với $b \in]0;+\infty[$ cố định, $\sum_n h_n$ hội tụ đều trên $[b;+\infty[$ vì:

$$\forall n \geq 2, \forall x \in [b;+\infty[, \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(x) \leq \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-x-1} \leq 3\int_n^{+\infty} t^{-x-1}dt = \frac{3}{x}n^{-x} \leq \frac{3}{b}n^{-b}.$$

◊ **Trả lời:** • Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $]0;+\infty[$.

• Tập hội tụ tuyệt đối của $\sum_n f_n$ là $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > \frac{1}{2}$ cố định.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]0;+\infty[$; $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên mọi $[b;+\infty[$, với $b > 0$ cố định.

o) 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in \mathbb{R}$ cố định, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 1$ (ví dụ Riemann, xem Tập 3, 3.2.3. Định lý).

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

• $\forall n \geq 1,\ \sup_{x\in[1;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ và $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

• Với mỗi $a \in]1;+\infty[$, ta có: $\forall n \geq 1,\ \sup_{x\in[1;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^a}$ và $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ hội tụ.

3) **Hội tụ đều**

Vì với $x > 1$ cố định, ánh xạ $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ giảm trên $[1;+\infty[$ và vì $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ khả tích trên $[1;+\infty[$, có thể dùng một so sánh chuỗi – tích phân (xem Tập 3, 3.3.7 *1) a)* Hệ quả):

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1;+\infty[,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x}\,dt = \frac{(n+1)^{-x+1}}{-x+1}.$$

Từ đó suy ra rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, R_n không bị chặn trên $]1;+\infty[$.

◊ **Trả lời:** • Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $]1;+\infty[$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]1;+\infty[$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mỗi $[a;+\infty[$ với $a > 1$ cố định.

p) 1) **Hội tụ đơn, hội tụ tuyệt đối**

Cho $x \in \mathbb{R}$ cố định.

• $\sum_n |f_n(x)|$ hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 1$ (xem bài tập *o)* trên đây).

• Nếu $x \leq 0$ thì $f_n(x) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• Nếu $x \in]0; 1]$ thì $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ hội tụ theo ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu (xem Tập 3,3.3.5, Ví dụ).

2) **Hội tụ chuẩn tắc**: xem *o)* trên đây.

3) **Hội tụ đều**

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]0;+\infty[$ vì $\sup_{x\in]0;+\infty[} |f_n(x)| = 1 \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• Với $a \in]0;+\infty[$ cố định, theo ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu (xem Tập 3, 3.3.8, Ví dụ), ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a;+\infty[,\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}\right| \le \frac{1}{(n+1)^x} \le \frac{1}{(n+1)^a}$, và vậy $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $[a;+\infty[$.

◊ **Trả lời:** • Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $]0;+\infty[$.

• Tập hội tụ tuyệt đối của $\sum_n f_n$ là $]1;+\infty[$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $]1;+\infty[$. $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$, với $a > 1$ cố định.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]0;+\infty[$. $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > 0$ cố định.

q) Trước hết, nhận xét rằng: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ f_n(x) = \frac{1 + x^n - 1}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^n)} = g_{n-1}(x) - g_n(x)$,

trong đó $g_0 = 1$ và $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+,\quad g_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x^k)\right)^{-1}$.

Vậy ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = 1 - g_n(x)$.

1) **Hội tụ đơn**

Cho $x \in \mathbf{R}_+$ cố định.

• Nếu $x \ge 1$ thì $0 \le g_n(x) \le 2^{-n}$. Vậy $S_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

• Giả sử $x < 1$.

Vì $\ln(1+x^k) \underset{k\infty}{\sim} x^k$ và vì $\sum_k x^k$ hội tụ nên chuỗi $\sum_k \ln(1+x^k)$ hội tụ và vậy $g_n(x)$ có một giới hạn hữu hạn (>0) mà ta ký hiệu là $P(x)$.

Với khái niệm tích vô hạn $P(x) = \left(\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)\right)^{-1}$.

Khi đó: $S_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 1 - P(x)$.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [1;+\infty[,\quad 0 \le f_n(x) \le g_{n-1}(x) \le 2^{1-n}.$$

Cho $x \in [0;1[, p \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$0 \le f_{2p+1}(x) = \frac{x^{2p+1}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2p+1})} \le \frac{x^{2p}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2p})}$$

$$= f_{2p}(x) \le \frac{x^{2p}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^p)} \le \frac{x^{2p}}{(1+x^p)^p}.$$

Khảo sát sự biến thiên của $\varphi_p : \begin{array}{l} [0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^2}{(1+t)^p} \end{array}$ để suy ra (với $p \ge 3$):

$$\forall t \in [0,1[,\ 0 \le \varphi_p(t) \le \varphi_p\left(\frac{2}{p-2}\right) = \frac{2}{(p-2)^2}\left(\frac{p-2}{p}\right)^p \le \frac{2}{(p-2)^2}.$$

Vậy ta được: $\forall x \in [0;1[, \forall p \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}\ \ 0 \le f_{2p+1}(x) \le f_{2p}(x) \le \dfrac{2}{(p-2)^2}$.

◊ **Trả lời:** $\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}_+$.

4.3.2 *a) 1)* **Hội tụ đơn, hội tụ tuyệt đối**

Nếu $x \ne 0$ thì $\sum\limits_n |f_n(x)|$ hội tụ và $\sum\limits_n |f_n(0)|$ hội tụ.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

Khảo sát sự biến thiên của $|f_n|$ trên $\mathbb{R}_+$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$		$+\infty$
$\lvert f_n\rvert'(x)$		$+$	0	$-$	
$\lvert f_n\rvert(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Từ đó:

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{-n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{en}}$$

Với $a > 0$ cố định, có $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\dfrac{1}{\sqrt{2N-1}} \le a$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge N$, ta có

$$\forall x \in [a;+\infty[,\quad |f_n(x)| \le f_n(a).$$

3) **Hội tụ đều**

Với $x \in \mathbb{R}_+$ cố định, chuỗi $\sum\limits_n f_n(x)$ đan dấu và $\left(|f_n(x)|\right)_n$ giảm nên (ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu, Tập 3, 3.3.8 2) *c)* Mệnh đề): $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \le |f_{n+1}(x)| \le \|f_{n+1}\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2e(n+1)}}$.

Điều đó chứng tỏ: $R_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$ trên $\mathbb{R}$.

4) **Tổng**

Với $x \in \mathbb{R}^*$ cố định: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n = \dfrac{x}{1+\dfrac{1}{1+x^2}} = \dfrac{x(1+x^2)}{2+x^2}$.

◊ **Trả lời:** • $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $]-\infty;0]$ cũng như trên $[0;+\infty[$.

- $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$ với $a > 0$ cố định.
- $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \dfrac{x(1+x^2)}{2+x^2}$.

b) Trước hết, nhận xét: $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{-1;1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n\left(\dfrac{1}{x}\right) = xf_n(x)$.

điều đó cho phép đưa về xét với $|x| < 1$.

Rồi: $\forall x \in]-1;1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (1-x)f_n(x) = \dfrac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \dfrac{1}{1-x^n} - \dfrac{1}{1-x^{n+1}}$,

từ đó: $\forall x \in]-1;1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^{n+1}}\right)$.

◊ **Trả lời:** • Tập hội tụ đơn (và tuyệt đối) của $\sum_n f_n$ là $\mathbb{R} - \{-1;1\}$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên các khoảng $]-\infty;-1[$; $]-1;1[$; $]1;+\infty[$, nhưng với $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 \le a < 1 < b$, $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $]-\infty;+b] \cup [-a;a] \cup [b;+\infty[$.

• $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{-1;1\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(1-x)^2} & \text{nếu } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$

c) Chứng minh bằng quy nạp theo n: $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{z^{2^k}+1} = \dfrac{2}{z^2-1} - \dfrac{2^{n+1}}{z^{2^{n+1}}-1}$.

◊ **Trả lời:**

• Tập hội tụ đơn (và tuyệt đối) của $\sum_n f_n$ là $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên D.

• $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi tập compăc K của $\mathbb{C}$ mà $K \subset D$.

• $\forall z \in D, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = \dfrac{2}{z^2-1}$.

4.3.3 *a)* ◊ . **Trả lời:**

- $\sum\limits_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+^*$.

$\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$, $a>0$ cố định.

b) Cho $x>0$ cố định và $\varphi_x : \begin{array}{l}[1;+\infty[\to \mathbb{R}\\ t \mapsto t^x e^{-tx}\end{array}$

Vì φ_x giảm và vì φ_x khả tích trên $[a;+\infty[$, dùng so sánh chuỗi-tích phân (xem Tập 3, 3.7, 1) *a)*,

Hệ quả):
$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t \le S(x) \le e^{-x} + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t.$$

Ta có: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t \underset{u=tx}{=} \frac{1}{x^{x+1}} \int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\mathrm{d}u$.

Cho một dãy $(x_n)_{n\ge 0}$ với số hạng trong $]0;1]$ hội tụ đến 0.

Với $n\in\mathbb{N}$, ký hiệu $f_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:
$$f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0<u\le x \\ u^{x_n}e^{-u} & \text{nếu } x<u. \end{cases}$$

Khi đó:

- Với mọi $n\in\mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $]0;+\infty[$.
- $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$, trong đó $f : \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R}\\ u \mapsto e^{-u}\end{array}$ liên tục từng khúc.
- Ta có: $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in]0;+\infty[$, $|f_n(u)| \le \varphi(u)$, trong đó $\varphi:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ xác định bởi

$\varphi(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{nếu } 0<u\le 1 \\ ue^{-u} & \text{nếu } 1<u \end{cases}$. φ là một hàm số liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $]0;+\infty[$.

Theo định lý về hội tụ bị chặn:
$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1,$$

vậy $\displaystyle\int_{x_n}^{+\infty} u^{x_n}e^{-u}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

Bởi đặc trưng dãy của giới hạn, suy ra: $\displaystyle\int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

Từ đó: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}e^{-x\ln x}\int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

và cuối cùng $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4.3.4 *a)* • Với $x > 0$ cố định, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $N!x > 1$ và khi đó ta có: $\forall n \geq N,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n!x}$.

• $f_n\left(\dfrac{1}{n!}\right) = 1$.

◊ **Trả lời:**

• $\sum\limits_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbf{R}_+^*$.

• $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$.

$\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > 0$ cố định.

b) Cho $x \in \mathbf{R}_+^*$, ký hiệu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

• Nếu $x \geq 1$ thì $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!x} = \dfrac{1}{x}e \leq e$.

• Nếu $x < 1$ có $N \in \mathbb{N}^*$ (phụ thuộc x) sao cho $N! < \dfrac{1}{x} < (N+1)!$ và ta có:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{N} n!x + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n!x}.$$

Một mặt: $x\sum\limits_{n=0}^{N} n! \leq x\big(2(N!)\big) \leq 2$ (chứng minh bằng quy nạp $\sum\limits_{n=0}^{N} n! \leq 2(N!)$).

Mặt khác: $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!x} \leq \dfrac{1}{(N+1)!x}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(N+2)^k} = \dfrac{1}{(N+1)!x}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{N+2}} \leq \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Ta được: $S(x) \leq 2 + \dfrac{3}{2}$.

4.3.5 *a)* Với $x \in \mathbf{R}$ cố định, $|f_n(x)| \underset{n\infty}{\sim} |a_n| e^{-n+x}$.

◊ **Trả lời:** $\sum\limits_n f_n$ **hội tụ tuyệt đối (vậy đơn) trên R.**

b) Cho $x \in \mathbf{R}$ cố định.

Nếu $x \leq 0$ thì $|S(x)| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n+x}\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \dfrac{1}{1-e^{-1}} = \dfrac{e}{e-1}$.

2) Giả sử $x \geq 0$. Có $N \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc x) sao cho: $N \leq x \leq N+1$. Ta có:

$$|S(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|x-n|} = \sum_{n=0}^{N} e^{-x+n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{x-n} =$$

$$= e^{-x}\frac{e^{N+1}-1}{e-1} + e^{x-(N+1)}\frac{1}{1-e^{-1}} \le \frac{e^{N+1-x}}{e-1} + \frac{e^{x-N}}{e-1} \le \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} = \frac{2e}{e-1}.$$

4.3.6 *a)* **Hội tụ đơn**

Nếu $x > 1$ thì $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{n}{x}$.

Nếu $x = 1$ thì $f_n(x) = \frac{n}{2}$.

Nếu $0 < x < 1$ thì $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} nx^{n-1}$.

◊ **Trả lời:**

• Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $[0;1[$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $[0;1[$;

$\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[0;a]$ với $a \in [0;1[$ cố định.

b) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1[,\ \ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ge f_N(x) = \frac{Nx^{N-1}}{1+x^N}$.

Cho $A \in \mathbb{R}_+$ cố định, có $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{N}{2} > A$.

Vì $\frac{Nx^{N-1}}{1+x^N} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{N}{2}$, có $\eta \in\ ]0;1[$ sao cho: $\forall x \in]1-\eta;1[,\ \frac{Nx^{N-1}}{1+x^N} > A$ và khi đó $S(x) > A$.

Điều đó chứng tỏ: $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

4.3.7 *a)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ 0 \le f_n(x) \le \frac{x}{n^3 x} = \frac{1}{n^3}$.

◊ **Trả lời:** $\sum_n f_n$ **hội tụ chuẩn tắc trên** $\mathbb{R}_+$.

b) Cho $A \in \mathbb{R}_+$.

Vì $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nên có $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \ge A+1$.

Vì $\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ nên có $\eta > 0$ sao cho $\forall x \in]0;\eta],\ \ \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \ge A$.

Cuối cùng: $\forall x \in]0;\eta],\ \ \frac{S(x)}{x} \ge \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \ge A$.

◊ **Trả lời:** $\frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, S không có đạo hàm phải tại 0.

4.3.8 *a)* ◊ **Trả lời:** • Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $\mathbb{R}_+^*$.

- $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên mọi $[a\,;+\infty[$ với $a>0$ cố định.
- $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$.

b) Cho $x>0$ cố định, ánh xạ $\varphi_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ giảm và khả tích trên $[1;+\infty[$. Vậy có thể dùng so sánh chuỗi tích phân ((xem Tập 3, 3.3.7 1)*a)*):

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \le S(x) \le 1+\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt\,,$$

và $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \underset{u=x\sqrt{t}}{=} \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-u}u\,du = -\frac{2}{x^2}\Big[(u+1)e^{-u}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{x^2}$.

Vậy: $\forall\, x\in\mathbf{R}_+^*,\ \dfrac{2}{x^2}\le S(x)\le 1+\dfrac{2}{x^2}$.

Suy ra: $S(x)=\dfrac{2}{x^2}+\underset{x\to0^+}{0}(1)$ và $S(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{2}{x^2}$.

◊ **Trả lời:** $S(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{2}{x^2}$.

4.3.9 *a)* 1) **Hội tụ đều**

Với $x\in\,]1;+\infty[$ cố định, $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{nx}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{nx}\right)^{-1}=\dfrac{(-1)^n}{nx}+\underset{n\infty}{0}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ và vậy $\sum_n f_n(x)$ hội tụ.

2) **Hội tụ tuyệt đối**

Với $x\in\,]1;+\infty[$ cố định, $|f_n(x)|\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{1}{nx}$ và vậy $\sum_n |f_n(x)|$ phân kỳ.

3) **Hội tụ đều**

Cho $a>1$ cố định, ta hãy chứng minh rằng $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $[a;+\infty[$.

Với $n\in\mathbf{N}^*$, phân tích $f_n=g_n+h_n$ trong đó $g_n,h_n:\,]1;+\infty[\to\mathbf{R}$ xác định bởi:

$$g_n(x)=\frac{(-1)^n}{nx},\qquad h_n(x)=\frac{-1}{nx(nx+(-1)^n)}.$$

- $\sum_n g_n$ hội tụ đều trên $[a;+\infty[$ (xem ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu Tập 3, 3.3.8 2) *c)*, Mệnh đề):

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in[a;+\infty[,\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kx}\right|\le\frac{1}{(n+1)x}\le\frac{1}{(n+1)a}.$$

- $\sum_n h_n$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $[a;+\infty[$ vì:

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in[a;+\infty[,\quad \left(n>\frac{1}{a}\Rightarrow|h_n(x)|\le\frac{1}{nx(nx-1)}\le\frac{1}{na(na-1)}\right)$$

và $\sum_n \dfrac{1}{na(na-1)}$ hội tụ.

◊ **Trả lời:** $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $]1;+\infty[$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ tuyệt đối tại điểm nào và không hội tụ chuẩn tắc trên mọi tập con không rỗng của $]1;+\infty[$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]1;+\infty[$.

• $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên mọi $[a;+\infty[$, $a > 1$ cố định.

b) Với mọi $x \in [2;+\infty[$, ta có: $S(x) = 1 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right)\frac{1}{x}T(x)$,

trong đó $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{nx(nx+(-1)^n)}$.

Nhận xét rằng: $\forall x \in [2;+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nx + (-1)^n \geq nx - 1 \geq \frac{nx}{2}$,

ta được $|T(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(nx)^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}\right)\frac{1}{x^2}$.

Cuối cùng: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

◊ **Trả lời:** $S(x) = 1 - \frac{\ln 2}{x} + \underset{x\to+\infty}{0}\left(\frac{1}{x}\right)$.

4.3.10 *a)* Nhận xét rằng với $x \in \mathbb{R}$, cố định, chuỗi $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu (Tập 3, 3.3.5, Định lý).

◊ **Trả lời:**

• $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$.

• $\sum_n f_n$ chỉ hội tụ tuyệt đối tại 0.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}_+$.

$\sum_n f_n$ hội tụ đều trên mỗi $[0;a]$ với $a \geq 0$ cố định.

b) Cho $x > 0$ cố định, ta có:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1 + \frac{x}{2p-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2p}\right)\right).$$

Ký hiệu $\varphi_x : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t \in [1;+\infty[, \quad \varphi_x(t) = \left(\ln\left(1+\frac{x}{2t-1}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{2t}\right)\right)$$

Sử dụng $\varphi_x(t) = \ln\left(1+\dfrac{\frac{x}{4}}{t^2+\frac{x-1}{2}t-\frac{x}{4}}\right)$, kiểm nghiệm rằng φ_x giảm trên $[1;+\infty[$ và φ_x khả tích trên $[1;+\infty[$. Dùng so sánh chuỗi tích phân (xem Tập 3, 3.3.7 1) *a)* Hệ quả), khi đó ta có:

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \le S(x) \le \ln\frac{1+x}{1+\frac{x}{2}} + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt .$$

Tính một nguyên hàm của φ_x:

$$\int \varphi_x(t)dt = \int\left(\ln\left(t+\frac{x-1}{2}\right) + \ln t - \ln\left(t-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(t+\frac{x}{2}\right)\right)dt$$

$$= \left(t+\frac{x-1}{2}\right)\ln\left(t+\frac{x-1}{2}\right) - \left(t+\frac{x-1}{2}\right) + t\ln t - t$$

$$-\left(t-\frac{1}{2}\right)\ln\left(t-\frac{1}{2}\right) + \left(t-\frac{1}{2}\right) - \left(t+\frac{x}{2}\right)\ln\left(t+\frac{x}{2}\right) + t + \frac{x}{2},$$

và từ đó suy ra:

$$\int \varphi_x(t)dt = -\frac{x+1}{2}\ln\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \left(1+\frac{x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{2}\right),$$

rồi bằng một khai triển tiệm cận:

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln x + \underset{x\to+\infty}{O}(1) .$$

◊ **Trả lời:** $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln x$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} f_n(1) = \ln\frac{(2.4....(2N))^2}{(1.2...(2N))^2(2N+1)} \xrightarrow[N\infty]{} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

◊ **Trả lời:** $S(1) = \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.3.11 *a) 1)* **Hội tụ đơn**

Với $x > 0$ cố định, $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^3}$.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

$f_n(n^2) = \dfrac{1}{4n}$.

Với $a > 0$ cố định: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;a], \; |f_n(x)| \le \dfrac{a}{n^3}$.

3) **Hội tụ đều**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{kx}{(k^2+x)^2} \ge \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx}{(k^2+x)^2} \ge \frac{n(n+1)x}{(4n^2+x)^2},$$

từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; R_n(n^2) \ge \dfrac{n+1}{25n} \ge \dfrac{1}{25}$ và vậy $R_n \underset{n\infty}{\overset{\text{đều}}{\not\longrightarrow}} 0$ trên $\mathbb{R}_+^*$

◊ **Trả lời:** • $\displaystyle\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+^*$.

- $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$.

  $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[0;a]$ với mọi $a > 0$ cố định.

b) Với $x > 1$ cố định, đặt $\varphi_x : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$ xác định bởi:

$\forall t \in [0;+\infty[, \quad \varphi_x(t) = \dfrac{tx}{(t^2+x)^2}$.

Khảo sát sự biến thiên của φ_x.

t	0		$\sqrt{\frac{x}{3}}$		$+\infty$
$\varphi_x'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_x(t)$	0	↗		↘	0

Ký hiệu $N = E\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right)$, từ đó

$N \le \sqrt{\dfrac{x}{3}} < N+1$ và phân tích: $S(x) = R_N(x) + S_N(x)$, trong đó $S_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \varphi_x(k)$ và

$R_N(x) = \sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \varphi_x(k)$.

Vì φ_x tăng trên $[0;N]$, ta có:

$$\int_0^N \varphi_x(t)\mathrm{d}t \le S_N(x) \le \int_0^N \varphi_x(t)\mathrm{d}t + \varphi_x(N).$$

Vì φ_x giảm và khả tích trên $[N+1;+\infty[$, ta có:

$$\int_{N+1}^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t \le R_N(x) \le \int_{N+1}^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t + \varphi_x(N+1).$$

Ta suy ra:

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t - \int_N^{N+1} \varphi_x(t)\mathrm{d}t \le S(x) \le \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t - \int_N^{N+1} \varphi_x(t)\mathrm{d}t + \varphi_x(N) + \varphi_x(N+1)$$

Nhưng: $\quad 0 \le \varphi_x(N) \le \dfrac{x}{N^3}$, $0 \le \varphi_x(N+1) \le \dfrac{x}{(N+1)^3}$,

$$0 \le \int_N^{N+1} \varphi_x(t)\mathrm{d}t = \int_N^{N+1} \frac{tx}{(t^2+x)^2}\mathrm{d}t \le \frac{(N+1)x}{(N^2+x)^2}$$

và $N \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{x}{3}}$,

ta suy ra: $\varphi_x(N) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\varphi_x(N+1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\int_N^{N+1} \varphi_x(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Cuối cùng: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\mathrm{d}t \underset{u=t^2+x}{=} x\int_x^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{2}$.

4.3.12 *1)* Cho $(x,y) \in I^2$ sao cho $x \le y$. Vì mỗi f_n là hàm tăng, ta có: $\forall n \in \mathbf{N},\ f_n(x) \le f_n(y)$,

từ đó, lấy tổng (vì $\sum_n f_n$ hội tụ đơn): $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) \le \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(y)$.

2) Nếu các f_n là hàm lồi, cũng lý luận như trên, xuất phát từ:

$\forall(x,y)\in I^2,\ (x\le y), \forall\lambda\in[0;1], \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f_n(x)+(1-\lambda)f_n(y)$.

4.3.13 $\forall x\in]1;+\infty[,\ \ \zeta(x)+T(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}=2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^x}=\frac{1}{2^{x-1}}\zeta(x)$.

4.3.14

a) • $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k\right)dt=\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1+t}dt$

và $\left|\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}dt\right|=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\le\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$ vậy $S_n\xrightarrow[n\infty]{}\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\ln 2$.

• Lý luận tương tự cho $T_n: T_n\xrightarrow[n\infty]{}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$.

b)• $\sum_{k=1}^{n}(S_k-\ln 2)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{-(-t)^k}{1+t}dt=\int_0^1-\frac{1}{1+t}\left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^k\right)dt=\int_0^1\left(-\frac{t}{1+t}\right)\left(\frac{-t(1-(-t)^n)}{1+t}\right)dt$

$$=\int_0^1\frac{t}{(1+t)^2}dt+\int_0^1\frac{(-1)^n t^{n+1}}{(1+t)^2}dt.$$

• Giống như ở *a)*: $\int_0^1\frac{(-1)^n t^{n+1}}{(1+t)^2}dt\xrightarrow[n\infty]{}0$. Vậy: $\sum_{n=1}^{+\infty}(S_k-\ln 2)=\int_0^1\frac{t}{(1+t)^2}dt$.

Lý luận tương tự cho $T_n-\frac{\pi}{4}$. Ta được: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(T_n-\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^1\frac{t^2}{(1+t)^2}dt$.

◊ **Trả lời:** $\sum_{n=1}^{+\infty}(S_k-\ln 2)=\ln 2-\frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(T_n-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

4.3.15 *Nhận xét:* $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2,\ \alpha\beta\le\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$, suy ra:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |a_n|=|na_n|\frac{1}{n}\le\frac{1}{2}\left(n^2a_n^2+\frac{1}{n^2}\right).$$

Vì $\sum_{n\ge1}n^2a_n$ và $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, suy ra $\sum_{n\ge1}|a_n|$ hội tụ.

4.3.16 *a)* • $y\le 1\Rightarrow f_n(x,y)\ge\frac{1}{2}$.

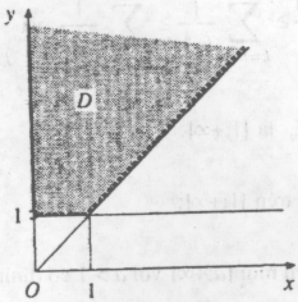
• $\begin{cases}y>1\\x\le 1\end{cases}\Rightarrow 0\le f_n(x,y)\le\frac{2}{y^{2n}}$.

• $\begin{cases}y>1\\x>1\end{cases}\Rightarrow f_n(x,y)\underset{n\infty}{\sim}\left(\frac{x}{y}\right)^{2n}>0$.

◊ **Trả lời:** Tập hội tụ của $\sum_n f_n$ là

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y>1 \text{ và } \left(0\le x\le 1 \text{ hoặc } \left(x>1 \text{ và } \frac{x}{y}<1\right)\right)\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+\right)^2, y>\mathrm{Max}(1,x)\right\}.$$

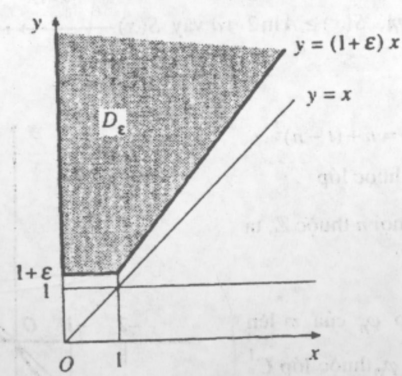


b) Với $\varepsilon>0$ cố định, xét $D_\varepsilon=\left\{(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+\right)^2; y\ge(1+\varepsilon)\mathrm{Max}(1,x)\right\}$.

Cho $n\in\mathbb{N},(x,y)\in D_\varepsilon$, ta có:

$$0\le x\le 1\Rightarrow 0\le f_n(x,y)\le\frac{2}{(1+\varepsilon)^{2n}},$$

$$x\ge 1\Rightarrow 0\le f_n(x,y)\le\frac{1+x^{2n}}{1+(1+\varepsilon)^{2n}x^{2n}}\le\frac{2}{1+(1+\varepsilon)^{2n}},$$



và vậy $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc, do đó đều trên D_ε Vì mỗi f_n liên tục trên D (vậy tại mọi điểm thuộc D_ε) suy ra S liên tục tại mỗi điểm thuộc D_ε Cuối cùng, vì $\forall(x,y)\in D,\exists\varepsilon>0,(x,y)\in\overset{0}{D}_\varepsilon$ (trong đó $\overset{0}{D}_\varepsilon$ chỉ phần trong của D_ε trong $\left(\mathbb{R}_+\right)^2$), suy ra S liên tục trên D.

4.3.17 *a) 1)* $\sum_n f_n(x)$ hội tụ $\Leftrightarrow x>1$.

2) • $\underset{x\in]1;+\infty[}{\mathrm{Sup}} |f_n(x)| \geq \lim\limits_{x\to 1^+} |f_n(x)| = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$.

• $\forall a > 1,\ \underset{x\in]1;+\infty[}{\mathrm{Sup}} |f_n(x)| \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

3) $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{kx^k}$ và $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{kx^k} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

◊ **Trả lời:**

• Tập hội tụ đơn của $\displaystyle\sum_n f_n$ là $]1;+\infty[$.

• $\displaystyle\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]1;+\infty[$;

$\displaystyle\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > 1$ cố định.

b) $\displaystyle\sum_n f_n$ hội tụ đều địa phương trên $]1;+\infty[$ và mỗi f_n liên tục trên $]1;+\infty[$ nên S liên tục trên $]1;+\infty[$.

c) Cho $A \in \mathbb{R}_+$ cố định; vì $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ có $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq A+1$. Vì:

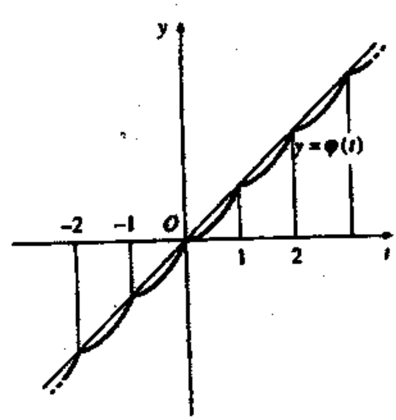
$$\forall x \in]1;+\infty[,\ \ S(x) \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \geq \ln 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{kx^k} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k},$$

suy ra: $\exists \eta > 0, \forall x \in]1;1+\eta],\ S(x) \geq A\ln 2$ *và* vậy $S(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

4.3.18 *a)* Ta có:

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in [n;n+1], \varphi(t) = n + (t-n)^2$.

Ánh xạ φ liên tục trên $\mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$; với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, ta có: $\varphi'_g(n) = 2, \varphi'_d(n) = 0$.



Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, thu hẹp φ_n của φ lên $[n; n+1]$ là 2-Lipschitz vì φ_n thuộc lớp C^1 và vì:

$\forall t \in [n;n+1], |\varphi'_n(t)| = |2(t-n)| \leq 2$

Cho $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $v \leq u$, ký hiệu $n = E(u)$; $p = E(v)$ (vậy $n \geq p$).

• Nếu $p = n$ thì $0 \leq \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi_n(u) - \varphi_n(v) \leq 2(u-v)$.

• Nếu $p < n$ thì $0 \leq \varphi(u) - \varphi(v) = \big(\varphi(u) - \varphi(n)\big) - \big(\varphi(n) - \varphi(p+1)\big) + \big(\varphi(p+1) - \varphi(v)\big)$

$$\leq 2(u-n) + n - p + 1 + 2(p+1-v) = 2u - 2v + (p+1-n) \leq 2(u-v).$$

Cuối cùng, φ là 2 — Lipschitz.

2) • $\sup\limits_{x\in]1;+\infty[} |f_n(x)| \ge \lim\limits_{x\to 1^+} |f_n(x)| = \dfrac{\ln(n+1}{n}$.

• $\forall a > 1$, $\sup\limits_{x\in]1;+\infty[} |f_n(x)| \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

3) $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \ge \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{kx^k} \ge \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{kx^k}$ và $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{kx^k} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge \frac{1}{2}$.

◊ **Trả lời:**

• Tập hội tụ đơn của $\sum\limits_n f_n$ là $]1;+\infty[$.

• $\sum\limits_n f_n$ không hội tụ đều trên $]1;+\infty[$;

$\sum\limits_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > 1$ cố định.

b) $\sum\limits_n f_n$ hội tụ đều địa phương trên $]1;+\infty[$ và mỗi f_n liên tục trên $]1;+\infty[$ nên S liên tục trên $]1;+\infty[$.

c) Cho $A \in \mathbb{R}_+$ cố định; vì $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ có $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \ge A+1$. Vì:

$$\forall x \in]1;+\infty[,\quad S(x) \ge \sum_{k=1}^{N}\frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \ge \ln 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{kx^k} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k},$$

suy ra: $\exists \eta > 0, \forall x \in]1;1+\eta[,\ S(x) \ge A\ln 2$ *và* vậy $S(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

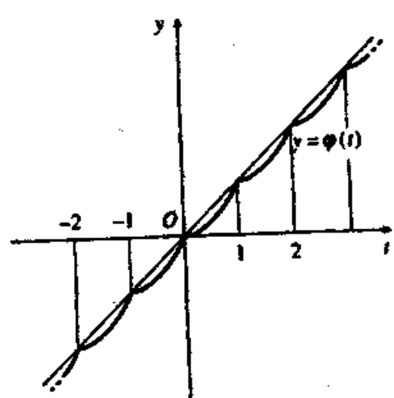
4.3.18 *a)* Ta có:

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in [n;n+1[, \varphi(t) = n + (t-n)^2$.

Ánh *xạ* φ liên tục trên $\mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$; với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$, ta có: $\varphi'_g(n) = 2, \varphi'_d(n) = 0$.

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, thu hẹp φ_n của φ lên $[n;\ n+1]$ là 2-Lipschitz vì φ_n thuộc lớp C^1 và vì:

$\forall t \in [n;n+1], |\varphi'_n(t)| = |2(t-n)| \le 2$



Cho $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $v \le u$, ký hiệu $n = E(u)$; $p = E(v)$ (vậy $n \ge p$).

• Nếu $p = n$ thì $0 \le \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi_n(u) - \varphi_n(v) \le 2(u-v)$.

• Nếu $p < n$ thì $0 \le \varphi(u) - \varphi(v) = \big(\varphi(u) - \varphi(n)\big) - \big(\varphi(n) - \varphi(p+1)\big) + \big(\varphi(p+1) - \varphi(v)\big)$

$$\le 2(u-n) + n - p + 1 + 2(p+1-v) = 2u - 2v + (p+1-n) \le 2(u-v).$$

Cuối cùng, φ là 2 — Lipschitz.

b) 1) $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbf{R}$ vì với $x \in \mathbf{R}^*$ cố định, ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x)| \le \dfrac{|nx|+1}{n^2(n+1)}$.

2) $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $]-\infty;0]$ cũng như trên $[0;+\infty[$ và các f_n không bị chặn trên đó. Nhưng với $a \in \mathbf{R}_+$ cố định, $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[-a;a]$ vì:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a;a],\ |f_n(x)| \le \frac{na+1}{n^2(n+1)}$$

3) Vì $\sum_n f_n$ hội tụ đều địa phương trên $\mathbf{R}$ (xem 2) và vì mỗi f_n liên tục (xem *a*) ta kết luận rằng S liên tục trên $\mathbf{R}$.

4) $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |S(x)-S(y)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi(nx)-\varphi(ny)}{n^2(n+1)}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|\varphi(nx)-\varphi(ny)|}{n^2(n+1)}$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n|x-y|}{n^2(n+1)} = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)|x-y| = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)|x-y| = 2|x-y|,$$

các chuỗi đã sử dụng là hội tụ.

4.3.19 *a) 1)* **Hội tụ đơn**

Với $z \in \mathbf{C} - \mathbb{Z}_-$ cố định, các $f_n(z)$ tồn tại và:

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\infty}{0}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Vậy $\sum_n f_n(z)$ hội tụ.

***2)* Hội tụ đều**

Cho A là một tập bị chặn trong $\mathbf{C}$ sao cho $A \cap \mathbb{Z} = \varnothing$; có $M \in \mathbf{R}_+$ sao cho: $\forall z \in A,\ |z| \le M$.

Với mọi $(n,z) \in \mathbb{N}^* \times A$, $f_n(z) = \dfrac{(-1)^n}{n} + g_n(z)$ trong đó $g_n(z) = \dfrac{(-1)^{n+1} z}{n(n+z)}$.

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge M+1$, ta có: $\forall z \in A,\ |g_n(z)| \le \dfrac{M}{n(n-M)}$, điều đó chứng tỏ rằng $\sum_{n \ge M+1} g_n$ hội tụ chuẩn tắc trên A và vậy $\sum_{n \ge 1} g_n$ cũng thế.

Mặt khác, chuỗi ánh xạ hằng $\sum_{n \ge 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ đều trên A theo ĐLBĐ về hội tụ của các chuỗi đan dấu: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}\right| \le \dfrac{1}{n+1}$.

Vậy $\sum_{n \ge 0} f_n$ hội tụ đều trên A.

◊ **Trả lời:**

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbf{C}-\mathbf{Z}_-$.
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ không hội tụ tuyệt đối tại bất cứ số phức nào.
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ hội tụ đều trên mọi tập con bị chặn của $\mathbf{C}-\mathbf{Z}_-$.
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên tập con không rỗng nào của $\mathbf{C}$.

b) Vì $\sum_n f_n$ hội tụ đều địa phương trên $\mathbf{C}-\mathbf{Z}_-$ (xem *a)*) và vì mỗi f_n liên tục trên đó nên ta kết luận: S liên tục trên $\mathbf{C}-\mathbf{Z}_-$.

4.3.20 *a) α)* Cho $x \in \mathbb{R}_+$, ký hiệu $\nu = E(x)+1$. Cho $N \in \mathbf{N}$ sao cho $N \geq \nu$. Ta có:

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = \sum_{n=0}^{N}(g(n)-g(n+x)) \leq \sum_{n=0}^{N}(g(n)-g(n+\nu))$$
$$= \sum_{n=0}^{N} g(n) - \sum_{n=0}^{N} g(n+\nu) = \sum_{n=0}^{N} g(n) - \sum_{p=\nu}^{N+\nu} g(p) = \sum_{n=0}^{\nu-1} g(n) - \sum_{n=N+1}^{N+\nu} g(n) \leq \sum_{n=0}^{\nu-1} g(n).$$

β) Với $x \in \mathbb{R}_+$ cố định, chuỗi số $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ có số hạng trong $\mathbb{R}_+$, với các tổng riêng bị chặn trên (xem *α*) nên hội tụ.

b) α) Cho $(x,y)\in(\mathbf{R}_+)^2$ sao cho $x \leq y$. Vì g giảm, ta có:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f_n(x) = g(n)-g(n+x) \leq g(n)-g(n+y) = f_n(y),$$

từ đó: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y) = S(y)$.

c) Ta có, với mọi $(N,x)\in \mathbf{N}\times\mathbf{R}_+$:

$$\sum_{n=0}^{N}\big(g(n)-g(n+x+1)\big)-\sum_{n=0}^{N}\big(g(n)-g(n+x)\big)=\sum_{n=0}^{N}\big(g(n+x)-g(n+x+1)\big)=g(x)-g(N+x+1).$$

Vì $g \xrightarrow[+\infty]{} 0$ nên với $x \in \mathbb{R}_+$ cố định, khi cho N dần đến vô tận, suy ra:

$$S(x+1) - S(x) = g(x).$$

d) α) Cho $a \in \mathbb{R}_+$ cố định, với mọi $(n,x) \in \mathbf{N}\times[0;a]$, ký hiệu $\nu = E(x)+1$, ta có:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}(g(p)-g(p+x))\right| = \sum_{p=n+1}^{+\infty}(g(p)-g(p+x))$$
$$\leq \sum_{p=n+1}^{+\infty}(g(p)-g(p+\nu)) = \sum_{p=n+1}^{n+\nu-1} g(p) \leq \sum_{p=n+1}^{n+E(a)} g(p).$$

Điều đó chứng tỏ : $\forall n\in \mathbf{N},\ \left\| R_n|_{[0;a]} \right\|_\infty \le \sum_{p=n+1}^{n+E(a)} g(p)$. Vì $g \xrightarrow[+\infty]{} 0$ và vì a cố định, ta

kết luận: $R_n|_{[0;a]} \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} 0$.

β) Vì $\sum_n f_n$ hội tụ đều địa phương trên $\mathbf{R}_+$ và mỗi f_n đều liên tục trên $\mathbb{R}_+$, ta kết luận rằng

S liên tục trên $\mathbf{R}_+$.

e) ◊ **Trả lời:** $\left[S+\theta,\ \theta\in \mathbf{R}^{\mathbf{R}_+} \text{ và } \theta \text{ là 1 - tuần hoàn} \right]$.

f) ◊ **Trả lời:** $\forall x\in \mathbf{R}_+,\ S(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-e^{-1}}$.

4.3.21 *a)* Trước hết: $\forall x\in]1;+\infty[,\ \zeta(x) - 1 - \dfrac{1}{2^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$. Vì $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ giảm và khả tích

trên $[2;+\infty[$, dùng so sánh chuỗi tích phân, ta được:

$$0 \le \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \le \int_2^{+\infty} t^{-x}\mathrm{d}t = \frac{2^{-x+1}}{x-1} = \underset{x\to+\infty}{o}(2^{-x}).$$

Cuối cùng: $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}(2^{-x})$

b) α) Cho $x \in\ ]1;+\infty[$, với mọi $n\in \mathbf{N}^*$, ta có:

$$\int_1^{n+1} \frac{t-E(t)}{t^{x+1}}\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} t^{-x}\mathrm{d}t - \sum_{p=1}^{n} p\int_p^{p+1} t^{-x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)^{-x+1}}{x-1} - \frac{1}{x}\sum_{p=1}^{n}(pp^{x} - p(p+1)^{-x})$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)^{-x+1}}{x-1} - \frac{1}{x}\left(\sum_{p=1}^{n} pp^{-x} - \sum_{q=2}^{n+1}(q-1)q^{-x} \right)$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)^{-x+1}}{x-1} - \frac{1}{x}\left(\sum_{q=1}^{n+1} q^{-x} - (n+1)^{-x+1} \right).$$

Từ đó cho n dần đến vô tận, suy ra:

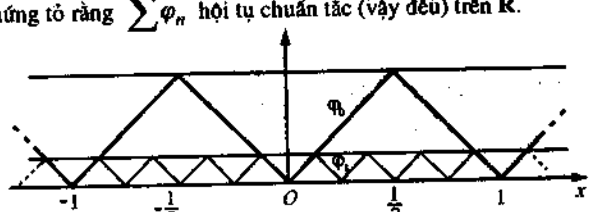
$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1-E(t)}{t^{x+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\zeta(x).$$

β) Nhận xét rằng $x \mapsto I(x)$ giảm trên $]1;+\infty[$ và vậy $0 \le I(x) \le I(1)$, từ đó:

$$(x-1)\zeta(x) = x - x(x-1)I(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1.$$

4.3.22 *1)* Ta có: $\forall x\in \mathbf{R},\ 0 \le \varphi_0(x) \le \dfrac{1}{2}$, từ đó: $\forall n\in \mathbf{N}, \forall x\in \mathbf{R},\ 0 \le \varphi_n(x) \le \dfrac{1}{2.4^n}$

điều này chứng tỏ rằng $\sum \varphi_n$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên $\mathbf{R}$.



Vì mỗi φ_n liên tục trên $\mathbb{R}$, ta kết luận rằng tổng $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) Cho $x_0\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}^*$. Với mọi $p\in\mathbb{N}$ và $\varepsilon\in\{-1;1\}$, ký hiệu:

$$\tau_{n,p,\varepsilon}=\frac{\varphi_p(x_0+\varepsilon 4^{-n})-\varphi_p(x_0)}{\varepsilon 4^{-n}}=\frac{\varphi_0(4^p x_0+\varepsilon 4^{p-n})-\varphi_0(4^p x_0)}{\varepsilon 4^{p-n}}.$$

Nếu $p\ge n$ thì $\varepsilon 4^{p-n}\in\mathbb{Z}$ *và* vậy do φ_0 là 1 - tuần hoàn : $\tau_{n,p,\varepsilon}=0$.

Có $\varepsilon\in\{-1;1\}$ sao cho $\left]4^{n-1}x_0+\frac{\varepsilon}{4};4^{n-1}x_0\right[$ (khoảng mở mút $4^{n-1}x_0+\frac{\varepsilon}{4}$ *và* $4^{n-1}x_0$) không chứa phần tử nào thuộc $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ vì $\left|\frac{\varepsilon}{4}\right|=\frac{1}{4}$.

Giả sử $p\le n-1$. Nếu $\left]4^p x_0+\varepsilon 4^{p-n};4^p x_0\right[$ chứa một phần tử r của $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ thì $\left]4^{n-1}x_0+\frac{\varepsilon}{4};4^{n-1}x_0\right[$ chứa $4^{n-1-p}r$ và $4^{n-1-p}r\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, có mâu thuẫn.

Điều đó chứng tỏ: $\forall p\in\{0,\ldots,n-1\}$, $\left|\frac{\varphi_0(4^p x_0+\varepsilon 4^{p-n})-\varphi_0(4^p x_0)}{\varepsilon 4^{p-n}}\right|=1$.

Vậy, ký hiệu $\tau_n=\frac{S(x_0+\varepsilon 4^{-n})-S(x_0)}{\varepsilon 4^{-n}}$ thì ta có

$$\tau_n=\sum_{p=0}^{+\infty}\tau_{n,p,\varepsilon}=\sum_{p=0}^{n-1}\tau_{n,p,\varepsilon}$$

và vậy τ_n là một số nguyên cùng tính chẵn lẻ với n. Do đó rõ ràng rằng $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ phân kỳ và vậy S không có đạo hàm tại x_0.

4.3.23 *a)* Trước hết chứng minh rằng $x\mapsto x(x-\ln(e^x-1))$ khả tích trên $]0;+\infty[$ rồi:

$$I=\int_0^{+\infty}x(x-\ln(e^x-1))dx=\int_0^{+\infty}-x\ln(1-e^{-x})dx\underset{t=e^{-x}}{=}\int_0^1\frac{\ln t\ln(1-t)}{t}dt.$$

Dùng tích phân từng phần để được: $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(\ln t)^2}{1-t}dt$.

Vì: $\forall t\in[0;1[$, $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$, vấn đề được đưa đến xét chuỗi ánh xạ $\sum_{n\ge1}f_n$ trong đó f_n: $[0;1]\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f_n(t)=\begin{cases}t^n(\ln t)^2 & \text{nếu } t\ne0\\ 0 & \text{nếu } t=0\end{cases}\quad\text{và}\quad f_0:\begin{array}{l}]0;1]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto(\ln t)^2\end{array}.$$

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khảo sát sự biến thiên của f_n và từ đó suy ra rằng $\sum_{n\ge1}f_n$ hội tụ chuẩn tắc, vậy đều, trên $[0;1]$. Khi đó, theo 4.3.4, Định lý, ta có: $I=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n(\ln t)^2dt$.

Cuối cùng, dùng một tích phân từng phần, chứng minh:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n (\ln t)^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^3}$$

(xem thêm bài tập 4.3.23, *e*)).

Cách khác: Sử dụng $\forall t \in [0;1[,\ \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ (xem 5.5.3 4)) thì tránh được việc phải lấy tích phân từng phần ở phần đầu của lời giải trên.

b) Trước hết, chứng minh rằng $x \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$ khả tích trên $]0;+\infty[$ rồi

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\mathrm{d}x \underset{t=e^{-bx}}{=} -\frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{t^{\frac{a}{b}-1}\ln t}{1-t}\mathrm{d}t .$$

Xét $\sum_{n\geq 1} f_n$ trong đó f_n: $[0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{\frac{a}{b}+n-1}\ln t & \text{nếu } t \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } t = 0 \end{cases} \text{ và } f_0 : \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln t \end{array}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi $t \in\ ]0;1[$:

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) = t^{\frac{a}{b}-1}\ln t \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \frac{t^{\frac{a}{b}+n}\ln t}{1-t}.$$

Vì $\varphi : t \mapsto \frac{t^{\frac{a}{b}}\ln t}{1-t}$ thừa nhận những giới hạn hữu hạn tại 0 và 1 nên R_n liên tục trên $[0;1]$ và

$$\left|\int_0^1 R_n(t)\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^{\frac{a}{b}+n}(-\ln t)}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^{\frac{a}{b}}\ln t}{1-t}t^n \mathrm{d}t \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{\|\varphi\|_\infty}{n+1}.$$

Vậy $\int_0^1 R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Từ đó suy ra (xem 4.3.4 Nhận xét)

$$I = -\frac{1}{b^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^{\frac{a}{b}+n-1}\ln t\mathrm{d}t .$$

Một phép tích phân từng phần cho: $\int_0^{+\infty} t^{\frac{a}{b}+n-1}\ln t\mathrm{d}t = -\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+n\right)^2}$.

Từ đó: $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

Xem thêm về sau 4.3.6, Ví dụ.

c) Trước hết, chứng minh rằng $x \mapsto \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x}$ khả tích trên $]0;+\infty[$ rồi

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x}\cos ax}{1+e^{-2x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x,$$

trong đó: $f_n : \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2e^{-x}\cos ax(-1)^n(e^{-2x})^n \end{array}$.

Với mọi $n \in \mathbf{N}$, ánh xạ R_n xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \frac{2e^{-x}\cos ax e^{-2(n+1)x}}{1+e^{-2x}}$$

liên tục, khả tích trên $[0;+\infty[$. Ta có:

$$\left|\int_0^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-2(n+1)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)},$$

điều đó chứng tỏ có thể hoán vị $\int_0^{+\infty}$ và $\sum_{n=0}^{+\infty}$ (xem 4.3.4, Nhận xét), từ đó:

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2e^{-x}\cos ax(-1)^n e^{-2nx}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-2(n+1)x}\cos ax\mathrm{d}x .$$

Cuối cùng, ta biết (xem Tập 2, 9.3.3)): $\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

d) Với $n \in \mathbf{N}^*$, xét

$$f_n : [0;1] \to \mathbf{R},\quad x \mapsto \begin{cases} (-1)^n x^{2n}(-\ln x)^p & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad \text{và}\quad f_0 :]0;1] \to \mathbf{R},\ t \mapsto (-\ln x)^p .$$

Khi đó, ta có: $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1+x^2} = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.

Với $n \in \mathbf{N}$ và $x \in [0;1]$, ta có:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = (-\ln x)^p \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^k = \frac{(-\ln x)^p(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

Ánh xạ $\varphi : [0;1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2(-\ln x)^p}{1+x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên có $M \in \mathbf{R}_+$ sao cho:

$\forall x \in [0;1],\ |\varphi(x)| \le M$.

Khi đó, ta có: $\forall n \in \mathbf{N},\quad \left|\int_0^1 R_n(t)\mathrm{d}t\right| \le M\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \dfrac{M}{2n+1}$.

Điều đó chứng tỏ: $\int_0^1 R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Khi đó, theo 4.3.4, Nhận xét, có thể hoán vị $\int_0^1$ và $\sum_{n=0}^{+\infty}$, từ đó:

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}(-\ln x)^p\mathrm{d}x .$$

Ký hiệu $I_{n,p} = \int_0^1 x^{2n}(-\ln x)^p\mathrm{d}x$, dùng tích phân từng phần, chứng minh:

$I_{n,p} = \dfrac{p}{2n+1}I_{n,p-1}$, từ đó: $I_{n,p} = \dfrac{p!}{(2n+1)^{p+1}}$.

e) Cũng dùng phương pháp như ở *d)*.

f) Cũng dùng phương pháp như ở *b)*.

4.3.24 *a) 1)* **Hội tụ tuyệt đối**

Với $x \in \mathbf{R}_+^*$, $n^2|f_n(x)| = ne^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

2) **Hội tụ đơn**

Với $x < 0$, $|f_n(x)| \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$; $\sum_n f_n(0)$ hội tụ.

3) **Hội tụ chuẩn tắc**

- $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ (trên $\mathbf{R}_+$).
- $\forall a > 0$, $\operatorname{Sup}_{x \in [a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$.

4) **Hội tụ đều**

Vì với $x \in \mathbf{R}_+$ cố định, $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ giảm, dần đến 0 nên ta có:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \le |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-x\sqrt{n+1}}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

◊ **Trả lời:**

- Tập hội tụ đơn của $\sum_n f_n$ là $\mathbf{R}_+$.
- Tập hội tụ tuyệt đối của $\sum_n f_n$ là $\mathbf{R}_+^*$.
- $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbf{R}_+$ nhưng với $a > 0$ cố định, $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;+\infty[$.
- $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+$.

b) • Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, f_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+$ và $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} e^{-x\sqrt{n}}$.

• Như ở *a)*, chứng minh rằng $\sum_n f_n'$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+$ (hội tụ đều địa phương ở đây cũng đủ).

• Đã thấy rằng $\sum_n f_n(x)$ hội tụ với mọi x thuộc $\mathbf{R}_+$.

Theo 4.3.5, Hệ quả, ta suy ra S thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+$ và:

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} e^{-x\sqrt{n}}$$

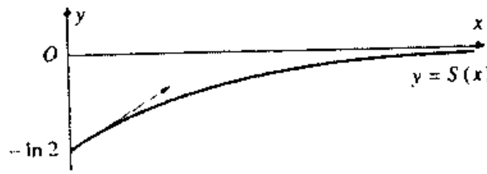
c) • Với $x \in \mathbf{R}_+$, chuỗi số $\sum_{n\ge1} f_n'$ thuộc phạm vi ĐLBĐ về hội tụ của chuỗi đan dấu nên $S'(x)$ có cùng dấu với $f_1'(x)$, vậy ≥ 0. Từ đó, f tăng trên $\mathbf{R}_+$.

• $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, xem 5.5.3 4) Nhận xét. Và $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}6$.

• Lập luận như ở *b)* chứng tỏ rằng S thuộc lớp C^2 trên $\mathbf{R}_+^*$ và: $\forall\ x \in \mathbf{R}_+^*$,

$S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-x\sqrt{n}} \le 0$, vậy đường biểu diễn của S có hướng lõm xuống dưới.

• Vì $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+$ và vì $\left(\forall n \in \mathrm{N}^*,\ f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0\right)$ suy ra (xem 4.3.2 Định lý) $S(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.



4.3.25 *a)* 1) **Hội tụ đơn**

Với $x \in D$ cố định, $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$.

2) **Hội tụ chuẩn tắc**

•Với mỗi $n \in \mathrm{N}^*$, f_n không bị chặn trên D.

•Với $a \in \mathbf{R}_+$ cố định, $\underset{x \in [0;a]}{\mathrm{Sup}} |f_n(x)| \le \frac{a}{n^2}$.

•Với $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ cố định sao cho có $k \in \mathbb{Z}_-^*$ để $k < \alpha \le \beta < k+1$, với mọi $n \in \mathrm{N}^*$ sao cho $n \ge |k| + 1$ ta có: $\underset{x \in [\alpha;\beta]}{\mathrm{Sup}} |f_n(x)| \le \frac{|k|+1}{n(n-\beta)}$.

◊ **Trả lời:**

• $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên D.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên D; với mọi $a \in \mathbf{R}_+$, $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $[0; a]$, với mọi $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ sao cho có $k \in \mathbb{Z}_-^*$ để $k < \alpha \le \beta < k+1$, $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[\alpha; \beta]$

b) • Với mọi $n \in \mathrm{N}^*$, f_n thuộc lớp C^1 trên D và $\forall x \in D,\ f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$.

Tương tự như ở *a)*, $\sum_n f_n'$ hội tụ đều địa phương trên D. Cuối cùng $\sum_n f_n(x)$ hội tụ với mọi x thuộc D. Theo 4.3.5, Hệ quả, ta kết luận rằng S thuộc lớp C^1 trên D và:

$$\forall x \in D,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} .$$

• $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$, chuỗi kính viễn vọng (xem Tập 3, 3.3.8 1) *b)*, Ví dụ 1)).

◊ **Trả lời:** $S(1) = 1$.

4.3.26 *a)* Khảo sát sự biến thiên của f_n trên $\mathbb{R}$ *và* suy ra: $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

◊ **Trả lời:** $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$.

b) Mỗi f_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

Với mọi $a \in \mathbb{R}_+$, ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[, \quad |f_n'(x)| \le \frac{1}{n(1+na^2)}.$$

Vậy $\sum_n f_n'$ hội tụ đều địa phương trên $\mathbb{R}^*$.

Theo 4.3.5, Hệ quả, ta kết luận rằng S thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^*$ và:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

c) • $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, chuỗi kính viễn vọng (xem Tập 3, 3.3.8 1) *b)* ví dụ 1).

• $\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x}{n(1+nx^2)} = -S(x)$.

• Cho $A \in \mathbb{R}_+$, vì $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > A + 1$.

Vì $\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)}$, và vì $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, nên có $\eta > 0$ sao cho: $\forall x \in]0;\eta[, \ \frac{S(x)}{x} > A$. Cuối cùng, $\frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

• Do $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $[0;+\infty[$ (xem *a)*) và do với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ nên suy ra $S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (xem 4.3.2, Định lý).

4.3.27

a) ◊ **Trả lời:**

• $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+^*$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$, $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > 0$ cố định.

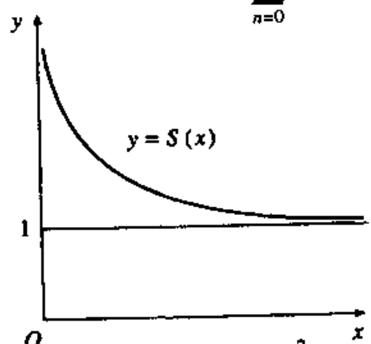
b) • Với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}_+^*$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f_n^{(k)}(x) = (-n^2)^k e^{-n^2 x}.$$

Kết quả là với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_n f_n^{(k)}$ hội tụ đều địa phương trên $\mathbf{R}_+^*$.

• Ta đã thấy $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbf{R}_+^*$. Theo 4.3.5 Hệ quả và dùng quy nạp (trên k) suy ra rằng S thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}_+^*$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-n^2)^k e^{-n^2 x}.$$



c) Ta có: $S(x) = S_2(x) + R_2(x)$, trong đó: $S_2(x) = \sum_{n=0}^{2} e^{-n^2 x} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-5x})$

và $0 \le R_2(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-n^2 x} \le \sum_{n=9}^{+\infty} e^{-nx} = \dfrac{e^{-9x}}{1-e^{-x}}$. Vậy $R_2(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-5x})$.

◊ **Trả lời:** $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-5x})$

d) • $\forall N \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ S(x) \ge \sum_{n=0}^{N} e^{-n^2 x} \xrightarrow[x\to0^+]{} N+1$,

từ đó suy ra: $S(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$.

• Ta đã thấy: $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\begin{cases} S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -n^2 e^{-n^2 x} < 0 \\ S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 x} > 0. \end{cases}$

4.3.28

a) • Với $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$ cố định, $|f_n(x)| \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{nn!}$ và vậy $\sum_n |f_n(x)|$ hội tụ. Điều đó chứng tỏ S xác định trên $\mathbf{R}_+^*$.

• $S(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}=-(e^{-1}-1)=1-\frac{1}{e}$ vì $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}=e^x$ với mọi x.

• $\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ xS(x)-S(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{n!(x+n)}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p-1)!(x+p)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+n)}{n!(x+n)}+1=e^{-1}$.

b) Với mọi $n\in\mathbb{N}$, f_n thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}_+^*$ và:

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ f_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

Rõ ràng rằng với mọi $k\in\mathbb{N}$, $\sum_n f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên $]0;+\infty[$. Theo 4.3.5, Hệ quả và bằng quy nạp (trên k) suy ra rằng S thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}_+^*$ và:

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ S^{(k)}(x)=(-1)^k k!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)^{k+1}}.$$

c) **Cách thứ nhất**

Với $n\in\mathbb{N}^*$, f_n có thể được thác triển bởi liên tục tại 0 (bởi $f_n(0)=\frac{(-1)^n}{n!n}$). Khi đó rõ ràng rằng $\sum_{n\geq 1}f_n$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên $\mathbf{R}_+$.

Theo 4.3.2, Định lý, từ đó suy ra:

$$S(x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}.$$

Có thể làm yếu kết quả bởi: $S(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x}$.

Cách thứ hai:

Theo *a)*: $x(Sx)=S(x+1)+\frac{1}{e}\xrightarrow[x\to 0^+]{}S(1)+\frac{1}{e}=1$.

d) Với $(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}_+^*$, phân tích $f_n(x)$ thành:

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!x}\frac{1}{1+\frac{n}{x}}=\frac{(-1)^n}{n!x}\left(1-\frac{n}{x}+\frac{n^2}{x^2}+g_n(x)\right),$$

trong đó $g_n(x)=\frac{-\frac{n^3}{x^3}}{1+\frac{n}{x}}$.

Từ đó suy ra: $S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n!}+\frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}+T(x)$

trong đó: $T(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{n!x^3(x+n)}$.

- $\left|T(x)\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!\,x^4} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p!} = -e^{-1}$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}(p+1)}{p!} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(p-1)!} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!} = 0$.

◊ **Trả lời:** $S(x) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

e) $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{x-1+n}}{n!}\right)\mathrm{d}t$ và chuỗi $\sum_{n\ge 0}\left(t\mapsto\frac{(-1)^n}{n!}t^{x-1+n}\right)$ hợp bởi những ánh xạ liên tục trên $[0;1]$, hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên $[0;1]$, từ đó (xem 4.3.4, Định lý):

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{x-1+n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x} = S(x).$$

4.3.29 *a)* Với $x\in\mathbf{R}_+^*$ cố định, chuỗi $\sum_n f_n(x)$ thuộc phạm vi của ĐLĐB về hội tụ cho chuỗi đan dấu nên hội tụ *và*: $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \le \left|f_{n+1}(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

◊ **Trả lời:**

- $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$.
- $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbf{R}_+^*$.

b) • Với mọi $n\in\mathbb{N}$, f_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+^*$ và $\forall\ x\in\mathbf{R}_+^*$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(x+n)^{3/2}}$. Vậy $\sum_n f_n'$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $\mathbf{R}_+^*$.

Theo 4.3.5, Hệ quả, suy ra S thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+^*$ và $\forall x\in\mathbf{R}_+^*$, $S'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^{3/2}}$.

• Vì $\sum_{n\ge 0} f_n$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$ và vì với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nên suy ra:

$$S(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Nói riêng, $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ và vậy $S(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

• Vì $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+^*$ và vì với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ suy ra: $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:**

•S thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+^*$.

• $S(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

• $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

c) • Trước hết chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbf{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}$ khả tích trên $]0;+\infty[$.

• Cho $x \in \mathbf{R}_+^*$ cố định. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\varphi_n : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ xác định bởi $\varphi_n(t) = \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}(-1)^n e^{-nt}$. Khi đó ta có: $\forall t \in \mathbf{R}_+^*$, $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t)$.

Với mọi $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbf{R}_+^*$, $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(t) = \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}(-1)^{n+1} e^{-(n+1)t} \dfrac{1}{1+e^{-t}}$. Điều đó chứng tỏ R_n liên tục và khả tích trên $]0;+\infty[$. Ngoài ra:

$$\left|\int_0^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{u=(n+1)t}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u .$$

Điều đó chứng tỏ: $\int_0^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Khi đó ta có thể hoán vị $\int_0^{+\infty}$ và $\sum_{n=0}^{+\infty}$ (xem 4.3.4 Nhận xét), từ đấy:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(x+n)}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t .$$

Cuối cùng: $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t(x+n)}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t(x+n)}}{=} \dfrac{2}{\sqrt{x+n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x+n}}$,

vậy $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\mathrm{d}t = \sqrt{t}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}} = \sqrt{\pi}S(x)$.

4.3.30 *a)* ◊ **Trả lời:**

• $\sum_n f_n$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}_+$.

• $\sum_n f_n$ không hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbf{R}_+$; với mọi $a > 0$ cố định, $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;+\infty[$

b) • Với mọi $n \in \mathbb{N}$, f_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+$ và: $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f_n'(x) = \dfrac{n(-1)^{n+1}}{n+1} e^{-nx}$. Từ đó suy ra $\sum_n f_n'$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên mọi $[a;+\infty[$ với $a>0$ cố định.

• $\sum_n f_n$ hội tụ đơn trên $\mathbb{R}_+$ (xem *a)*). Theo 4.3.5 Hệ quả, suy ra rằng S thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}_+^*$ và: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(-1)^{n+1}e^{-nx}}{n+1}$.

Ta sẽ trở lại sự tồn tại của đạo hàm phải tại 0 sau khi tính S (xem *c)*).

c) $\forall x\in\mathbf{R}_+,\quad -e^{-x}S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

Tương tự như ở b), ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng trên $\mathbf{R}_+^*$, từ đó, ký hiệu $T(x)=-e^{-x}S(x)$ thì:

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\quad T'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Từ đó, bằng cách lấy nguyên hàm và sử dụng: $T(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=-\ln 2$, ta được:

$$\forall x\in\mathbf{R}_+,\ T(x)=-\ln(1+e^{-x}).$$

Cuối cùng: $\forall x\in\mathbf{R}_+,\ S(x)=\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$.

Ta thấy rằng S thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+$.

◊ **Trả lời:** $\forall x\in\mathbf{R}_+,\ S(x)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{-x}}$.

4.3.31 *a)* ◊ **Trả lời:** $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbf{R}_+$.

b) Với mọi $n\in\mathrm{N}^*$, f_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+$ và $\forall x\in\mathbf{R}_+,\quad f_n'(x)=-\dfrac{2}{(n+x)^3}$, vậy $\sum_n f_n'$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $\mathbf{R}_+$.

Theo 4.3.5, Hệ quả, ta kết luận rằng S thuộc lớp C^1 trên $\mathbf{R}_+$ và:

$$\forall x\in\mathbf{R}_+,\quad S'(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^3}<0.$$

Cũng nhận xét thêm rằng với $(x,y)\in(\mathbf{R}_+)^2$ sao cho $x\le y$, ta có: $\forall n\in\mathrm{N}^*,\ f_n(x)\ge f_n(y)$ và vậy, lấy tổng: $S(x)\ge S(y)$.

c) Với $k\in\{2,3,4\}$, ký hiệu A_k: $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ A_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}.$$

Có thể áp dụng định lý về lấy đạo hàm địa phương của tổng một chuỗi ánh xạ và vậy S thuộc lớp C^2 trên $\mathbf{R}_+$ và: $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \begin{cases} S'(x) = -2A_3(x) \\ S''(x) = 6A_4(x) \end{cases}.$

Nhưng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3}\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^4}\right),$$

từ đó suy ra: $2SS'' - 3S'^2 \ge 0$.

Ký hiệu $\varphi = \frac{1}{\sqrt{S}}$ ta cũng được: $\varphi'' = \frac{1}{4} S^{-\frac{5}{2}}(3S'^2 - 2SS'') \le 0$.

4.3.32 *a)* ◊ **Trả lời:** $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[-\pi; \pi]$.

b) • Cũng lý luận như ở bài tập 4.3.18. Với $(x,y) \in (\mathbf{R}_+)^2$ cố định sao cho $x \ne y$, ta có:

$$|S(x) - S(y)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx - \sin ny}{n^2(n+1)}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left|2\sin\frac{n(x-y)}{2}\right|}{n^2(n+1)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|x-y|}{n^2(n+1)}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)|x-y| = |x-y|.$$

• Hơn thế, nếu $|S(x) - S(y)| = |x-y|$ thì từ dãy bất đẳng thức trên suy ra:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sin\frac{n(x-y)}{2}\right| = \left|\frac{n(x-y)}{2}\right|,$$

từ đó nói riêng: $|\sin(x-y)| = |x-y|$ và vậy $x - y = 0$.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, f_n thuộc lớp C^1 trên $[-\pi; \pi]$ và $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $f_n'(x) = \frac{\cos nx}{n(n+1)}$, vậy $\sum_n f_n'$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $[-\pi; \pi]$. Theo 4.3.5, Định lý ta kết luận rằng S thuộc lớp C^1 trên $[-\pi; \pi]$ và $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$. Nói riêng $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Vậy $\frac{S(x) - S(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ *và* từ đó S không là phép co trên $[-\pi; \pi]$.

◊ **Trả lời:** Không.

4.3.33 Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l}[1;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \alpha^n u_n^x\end{array}$.

Rõ ràng rằng mỗi f_n thuộc lớp C^∞ trên $[1;+\infty[$ *và* với mỗi $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\ge1} f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên $[1;+\infty[$ vì:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [1;+\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \alpha^n (\ln u_n)^k u_n^x,$$

và vậy: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N},\ \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty \le \alpha^n (\ln \beta)^k$.

Theo định lý về lấy đạo hàm địa phương của tổng một chuỗi ánh xạ và bằng phép quy nạp (trên k) ta suy ra S thuộc lớp C^∞ trên $[1;+\infty[$ và ký hiệu $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n^x$ thì ta có:

$$\forall x \in [1;+\infty[,\ S''(x) = \frac{A(x)A''(x) - A'^2(x)}{\left(A(x)\right)^2}.$$

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho:

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n (\ln u_n) u_n^x\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha^{\frac{n}{2}}(\ln u_n) u_n^{\frac{x}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{n}{2}} u_n^{\frac{x}{2}}\right)\right) \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n (\ln u_n) u_n^x\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n^x\right)$$

từ đó $A'^2 \le AA''$ và vậy $S'' \ge 0$.

Xem thêm bài tập 4.3.31, c).

4.3.34 Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $f_n :]1;+\infty[\underset{x \mapsto \frac{1}{n^x}}{\longrightarrow} \mathbf{R}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*, f_n$ thuộc lớp C^∞ trên $]1;+\infty[$ và: $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1;+\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$.

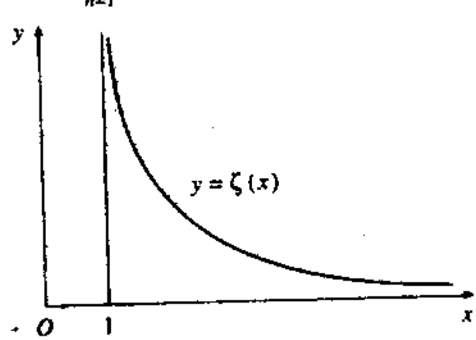
Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \ge 1} f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên mọi $[a;+\infty[$ với $a > 1$ cố định.

Theo định lý về lấy đạo hàm địa phương của chuỗi hàm số, ta suy ra ζ thuộc lớp C^∞ trên $]1;+\infty[$ và:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1;+\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Nói riêng $\forall x \in]1;+\infty[,\ \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0$, và vậy ζ giảm nghiêm ngặt trên $]1;+\infty[$.

Và: $\forall x \in]1;+\infty[,\ \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0$ nên ζ lồi.



Ta đã thấy (xem bài tập 4.3.21): $\zeta(x)\xrightarrow[x\to 1^+]{}+\infty$, $\zeta(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

4.3.35 *1)* Chứng minh bằng phép quy nạp trên n:

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ f_n\in C^0(]-1;1[,\mathbb{R})\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\begin{cases}f_n\in C^1(]-1;1[,\mathbb{R})\\ f_n' = f_{n-1}.\end{cases}\end{cases}$$

2) Với mọi $a\in\ ]-1;1[$, ta có:

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[-a;a],\quad |f_{n+1}(x)|=\left|\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\right|\le a\|f|_{[-a;a]}\|_\infty,$$

từ đó: $\forall n\in\mathbb{N}, \|f_{n+1}|_{[-a;a]}\|_\infty\le a\|f_n|_{[-a;a]}\|_\infty$,

rồi $\forall n\in\mathbb{N}, \|f_n|_{[-a;a]}\|_\infty\le a^n\|f_0|_{[-a;a]}\|_\infty$.

Điều đó chứng tỏ $\sum_n f_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $[-a;a]$, vậy hội tụ đều địa phương trên $]-1;1[$.

Ngoài ra, do $f_n' = f_{n-1}$ (với $n\ge 1$) ta thấy có thể áp dụng định lý về đạo hàm địa phương của tổng của một chuỗi ánh xạ, vậy tổng $S_1=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ thuộc lớp C^1 trên $]-1;1[$ và:

$$\forall x\in]-1;1[,\ S_1'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_{n-1}(x)=f(x)+S_1(x).$$

Bây giờ giải phương trình vi phân: $\forall x\in]-1;1[,\ y'(x)-y(x)=f(x)$ với điều kiện $y'(0)=0$.

◊ **Trả lời:** $\forall x\in]-1;1[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\right)(x)=f(x)+e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t$.

4.3.36 *a)* Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, f_n thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n^{(k)}(x)=\frac{(i2^n)^k}{n^n}e^{i2^n x}.$$

Điều đó kéo theo: với mọi $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ bị chặn trên $\mathbb{R}$ và $\|f_n^{(k)}\|_\infty=\dfrac{2^{nk}}{n^n}$.

Từ đó suy ra với mọi $k\in\mathbb{N}$, chuỗi $\sum_{n\ge1}\|f_n^{(k)}\|_\infty$ hội tụ.

Vậy, với mọi $k\in\mathbb{N}$, $\sum_{n\ge1}f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $\mathbb{R}$.

Có thể áp dụng lặp định lý về lấy đạo hàm của tổng một chuỗi ánh xạ, nên S thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$:

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\quad S^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(i2^n)^k}{n^n}e^{i2^n x}.$$

b) Ta có: $\forall k\in\mathbb{N},\quad S^{(k)}(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(i2^n)^k}{n^n}$.

Vậy, với mọi $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ hội tụ chuẩn tắc (do đó đều) trên $\mathbb{R}$.

Có thể áp dụng lặp định lý về lấy đạo hàm của tổng một chuỗi ánh xạ, nên S thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i2^n)^k}{n^n} e^{i2^n x}.$$

b) Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}, \quad S^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i2^n)^k}{n^n}$.

Nói riêng, với $x \in \mathbb{R}^*$ cố định:

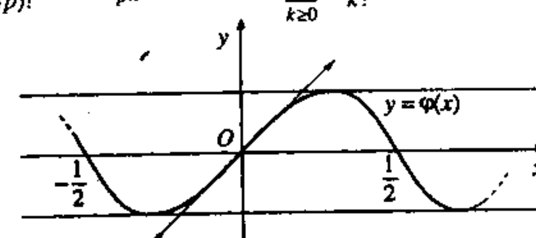
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \frac{S^{(4p)}(0)}{(4p)!} x^{4p} = \frac{x^{4p}}{(4p)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{4np}}{n^n} \geq \frac{x^{4p}}{4p!} \frac{2^{4p^2}}{p^p}$$

$$\geq \frac{x^{4p}}{(4p)^{4p}} \frac{2^{4p^2}}{p^p} = \exp\left(4p\ln|x| - 4p\ln(4p) + 4p^2\ln 2 - p\ln p\right).$$

Vậy (do tính trội của $4p^2 \ln 2$) ta thấy $\frac{S^{(4p)}(0)}{(4p)!} x^{4p} \xrightarrow[p\infty]{} +\infty$ và từ đó $\sum_{k\geq 0} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$ phân kỳ.

4.3.37 *a)* • Rõ ràng rằng φ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$, φ_n thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

• $\sum_n \varphi_n$ và $\sum_n \varphi'_n$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$. Theo 4.3.5 Hệ quả, từ đó suy ra f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và:



$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \varphi'(n!x).$$

b) Cho $x \in \mathbb{Q}$, có $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbb{N}^*$ sao cho $x = \frac{p}{q}$. Trước hết, nhận xét:

• $\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(\varphi(n!x) \in \mathbb{Q} \text{ và } \varphi'(n!x) \in \mathbb{Q}\right)$.

• $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq q \Rightarrow n!x \in \mathbf{Z} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(n!x) = 0 \\ \varphi'(n!x) = 1 \end{cases}\right)$.

Suy ra: *1)* $f(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{(n!)^2} \varphi(n!x) \in \mathbf{Q}$

$$2) \ f'(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \varphi(n!x) + \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \varphi(n!x) - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!}\right) + e \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$$

do $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (xem tập1, 3.2.2 ví dụ 1)) và $\sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \varphi(n!x) - \frac{1}{n!} \in \mathbf{Q}$.

4.3.38 Với $x \in]1;+\infty[$, $\lambda \in [-1;1]$ cố định. Ta có:

$$\forall t \in]0;+\infty[,\ \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-\lambda e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\lambda e^{-t})^n .$$

Ký hiệu, với $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbf{R} \\ t \mapsto \lambda^n t^{x-1} e^{-(n+1)t} \end{array}$.

- Với mọi n thuộc N, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $]0;+\infty[$,
- $\sum\limits_{n\ge0} f_n$ hội tụ đơn và có tổng $S : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{1-\lambda e^{-t}}$,
- S liên tục từng khúc trên $]0;+\infty[$,
- $\sum\limits_{n\ge0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t$ hội tụ vì với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t = |\lambda|^n \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} \mathrm{d}t \underset{u=(n+1)t}{=} \frac{|\lambda|^n}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{|\lambda|^n \Gamma(x)}{(n+1)^x} \le \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x},$$

và $\sum\limits_{n\ge0} \dfrac{\Gamma(x)}{(n+1)^x}$ hội tụ vì $x > 1$.

Theo 4.3.6, Định lý 2, ta suy ra S khả tích trên $]0;+\infty[$ (cũng có thể thấy trực tiếp điều này) và:

$$\int_0^{+\infty} S(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x} .$$

4.3.39 Với $n \ge 2$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{l} [2;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{1}{n^x} \end{array}$. Khi đó:

- Với mọi $n \ge 2$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[2;+\infty[$,
- $\sum\limits_{n\ge2} f_n$ hội tụ đơn trên $[2;+\infty[$ và có tổng $S : \begin{array}{l} [2;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \zeta(x)-1 \end{array}$,
- S liên tục từng khúc trên $[2;+\infty[$ vì ζ liên tục trên $]1;+\infty[$,
- $\sum\limits_{n\ge2} \int_2^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x$ hội tụ vì với mọi $n \ge 2$:

$$\int_2^{+\infty} |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{1}{n^x} \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-x\ln n}}{-\ln n}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{n^2 \ln n},$$

và $\sum\limits_{n\ge2} \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ hội tụ.

Theo 4.3.6, Định lý 2, S khả tích trên $[2;+\infty[$ và :

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} .$$

C4.1 I *1)* Cho $p_0 \in \mathcal{D}_f, p_0 = x_0 + iy_0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{C}, p = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $x \geq x_0$. Ta có:

$$\forall t \in [0;+\infty[,\ \left|e^{-pt}f(t)\right| = e^{-xt}|f(t)| \leq e^{-x_0 t}|f(t)| = \left|e^{-p_0 t}f(t)\right|.$$

Vì $p_0 \in \mathcal{D}_f, t \mapsto e^{-p_0 t}f(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$ nên $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$ và vậy $p_0 \in \mathcal{D}_f$.

2) Ánh xạ $t \mapsto e^{-pt}t^n e^{at}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ nếu và chỉ nếu Re$(p - a) > 0$, tức là Re$(p) >$ Re(a).

Với mọi $p \in \mathbb{C}$ mà Re$(p) >$ Re(a), một phép tích phân từng phần (ở đây được phép) cho ta:

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}t^n \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}t^n\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}nt^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{n}{p-a}\int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}t^{n-1}\mathrm{d}t$$

nếu $n \geq 1$.

Khi đó, một phép quy nạp đơn giản cho ta:

$$\mathcal{L}f(p) = \frac{n!}{(p-a)^n}\int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\mathrm{d}t = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} \mathcal{D}_f = \left\{p \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(a)\right\},\ \sigma_f = \mathrm{Re}(a) \\ \forall p \in \mathcal{D}_f,\ \mathcal{L}f(p) = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}. \end{cases}$

3) Ở đây ký hiệu $I_f = \left\{x \in \mathbb{R}; \{x\} \times \mathbb{R} \in \mathcal{D}_f\right\}$. Vậy ta có: $I_f =]\sigma_f;+\infty[$ hay $[\sigma_f;+\infty[$ và $\mathcal{D}_f = I_f \times \mathbb{R}$. Ánh xạ $F : (x, y, z) \mapsto e^{-(x+iy)t}f(t)$ liên tục trên $(I_f \times \mathbb{R}) \times [\sigma_f;+\infty[$ và với mọi $x_0 \in I_f$ ánh xạ $\varphi_{x_0} : \begin{array}{l}[0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-x_0 t}|f(t)|\end{array}$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $[0;+\infty[$.

Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$ với giả thiết bị chặn trên địa phương (xem Tập 3, 2.5.5 1), Mệnh đề) ta kết luận rằng $\mathcal{L}f$ liên tục trên $\mathcal{D}_f$

4) a) Cho $p \in \mathbb{C}$ sao cho Re$(p) \geq \mathrm{Max}\left(\sigma_f, \sigma_g\right)$. Khi đó $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ và $t \mapsto e^{-pt}g(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$, vậy $t \mapsto e^{-pt}(\lambda f + g)(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$ và:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}(\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)\mathrm{d}t$$

từ đó có các kết quả đòi hỏi.

b) Cho $p \in \mathbb{C}$, điều kiện cần và đủ để $t \mapsto e^{-pt}e^{at}f(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$ là $p - a \in \mathcal{D}_f$ và ta suy ra các kết quả đòi hỏi.

5) a) Cho $p \in \mathcal{D}_f$. Dùng một phép tích phân từng phần ta được:

$$\forall T \in [0;+\infty[,\ \int_0^T e^{-pt}f'(t)\mathrm{d}t = e^{-pT}f(T) - f(0) + p\int_0^T e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t.$$

Theo giả thiết: $e^{-pT}f(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0$ và $t \mapsto e^{-pt}f'(t)$ và $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ khả tích trên $[0;+\infty[$, vậy $p \in \mathcal{D}_f$ và $\mathcal{L}f'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f'(t)\mathrm{d}t = -f(0) + p\mathcal{L}f(p)$.

b) Quy nạp trên n bằng cách dùng *a)*.

6) a) α) Kiểm nghiệm phép tích phân từng phần:

$$\mathcal{L}f(p+a)) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-at} g'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \left[e^{-at} g(t)\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t)\mathrm{d}t = a\int_0^{+\infty} e^{-at} g(t)\mathrm{d}t\,.$$

β) Cho $n \in \mathbb{N}$. Vì $\left(\forall p \in \mathcal{D}_f, \mathcal{L}f(p) = 0\right)$, ta có nói riêng với $p \in \mathcal{D}_f$ và $a \in \mathbb{R}_+^*$ cố định: $\mathcal{L}f(p+(n+1)a) = 0$. Thay a bởi $(n+1)a$ trong *α)*, ta được:

$$\mathcal{L}f(p+(n+1)a) = (n+1)a\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)at} g(t)\mathrm{d}t \underset{u=e^{-at}}{=} (n+1)\int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right)\mathrm{d}u\,.$$

γ) Ánh xạ h: $[0;1] \to \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$h(u) = \begin{cases} g\left(-\dfrac{\ln u}{a}\right) & \text{nếu } u \in]0;1] \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v)\mathrm{d}v & \text{nếu } u = 0 \end{cases}$$

liên tục trên $[0;1]$ và theo *β)*: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n h(u)\mathrm{d}u = 0$. Theo 4.2.2, Hệ quả, từ đó suy ra $h = 0$ rồi $g = 0$.

b) Vì $g = 0$ và vì $\left(\forall t \in [0;+\infty[, g'(t) = e^{-pt} f(t)\right)$, suy ra $f = 0$.

Vì phép biến đổi *Laplace* là tuyến tính (xem 4)*a*) kết quả trên chứng tỏ nó là đơn ánh.

II. Giả sử bài toán đặt ra có một nghiệm y và giả sử $y \in \mathfrak{F}$, ta ký hiệu F là biến đổi Laplace của y: $y(t) \sqsupset F(p)$.

Theo I 5): $y'(t) \sqsupset pE(p) - y(0) = pF(p) + 3$ và

$$y''(t) \sqsupset p^2F(p) - (py(0) + y'(0)) = p^2F(p) + 3p - 5\,.$$

Vậy do tính chất tuyến tính của phép biến đổi *Laplace*, xem I 4)*a)*:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) \sqsupset (p^2 - 3p + 2)F(p) + 3p - 14$$

Mặt khác (xem I 2): $4e^{2t} \sqsupset \dfrac{4}{p-2}$. Vậy ta có: $(p^2 - 3p + 2)F(p) + 3p - 14 = \dfrac{4}{p-2}$, từ đó, sau những phép tính sơ cấp và phân tích thành những phần tử đơn:

$$F(p) = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)p-2)^2} = -\frac{7}{p-1} + \frac{4}{(p-2)^2} + \frac{4}{p-2}\,.$$

Theo I 2): $\dfrac{1}{p-1} \sqsubset e^t, \dfrac{1}{p-2} \sqsubset e^{2t}, \dfrac{1}{(p-2)^2} \sqsubset te^{2t}$, từ đó: $F(p) \sqsubset -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$. Từ tính chất đơn ánh của phép biến đổi *Laplace* (I 6),ta được: $y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$. Ngược lại, rõ ràng ánh xạ $y: \begin{array}{l}[0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}\end{array}$ là một phần tử của $\mathfrak{F}$ và phép tính trên đây chứng tỏ (bởi tính chất đơn ánh của phép biến đổi *Laplace*) rằng y là một nghiệm của bài toán đặt ra.

◊ **Trả lời:** $\forall t \in [0;+\infty[\ y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$.

2) Các bước tiến hành như ở *1)*.

Ký hiệu $x(t) \sqsupset F(p); y(t) \sqsupset G(p)$ thì:

$$\begin{cases} x'(t) \sqsupset pF(p) - x(0) = pF(p) \\ y'(t) \sqsupset pG(p) + y(0) = pG(p) \\ y''(t) \sqsupset p^2G(p) - (py(0) + y'(0)) = p^2G(p). \end{cases}$$

Mặt khác: $e^{-t} \sqsupset \frac{1}{p+1}$ và $1 \sqsupset \frac{1}{p}$.

Vậy ta có: $\begin{cases} pF(p) + 2p^2G(p) = \dfrac{1}{p+1} \\ pF(p) + 2F(p) - G(p) = \dfrac{1}{p}. \end{cases}$

Một phép tính sơ cấp cho:

$$F(p) = \frac{2p^2+2p+1}{p(p+1)(2p^2+4p+1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\beta},$$

trong đó $\alpha = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}; \beta = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$.

Sau đó ta trở lại với x: $x(t) = 1 + e^{-t} - e^{\alpha t} - e^{\beta t}$. Rồi $y(t) = x'(t) + 2x(t) - 1$.

◊ **Trả lời:** $\forall t \in [0;+\infty[, \begin{cases} x(t) = 1 + e^{-t} - e^{\alpha t} - e^{\beta t} \\ y(t) = 1 + e^{-t} + \beta e^{\alpha t} + \alpha e^{\beta t} \end{cases}$

$\alpha = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}; \beta = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$.

C4.2 **I** *1)* Cho $f \in \mathcal{L}^1, x \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng rằng $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra, vì $\forall t \in \mathbb{R}, \left|f(t)e^{-ixt}\right| = |f(t)|$ nên $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ khả tích trên $\mathbb{R}$.

2) *a)* Ánh xạ $\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)e^{-ixt} \end{array}$ liên tục trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *và* $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, |\Phi(t)| = |f(t)|$ trong đó $|f|$ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $\mathbb{R}$. Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_I$ (xem Tập 3, 2.5.5, 1)Định lý), suy ra rằng $\mathfrak{F}f$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

*b) **Cách thứ nhất***

Cho $f \in \mathcal{L}^1$ và $\varepsilon > 0$.

Có $A \in]0;+\infty[$ sao cho $\int_{-\infty}^{-A} |f(t)| \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{6}$ và $\int_A^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

Cho $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ta có:

$$\sqrt{2\pi}\left|\mathfrak{F}f(x_1) - \mathfrak{F}f(x_2)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t}\right)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\left|e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t}\right| \mathrm{d}t$$

$$\leq 2\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{-A}^{A} |f(t)|\left|2\sin\frac{(x_1-x_2)t}{2}\right|\mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{3} + |x_1 - x_2| \int_{-A}^{A} |t||f(t)|\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ký hiệu $\eta = \varepsilon\left(3\int_{-A}^{A} |t||f(t)|\mathrm{d}t + 1\right)^{-1}$ thì từ đó ta có:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \left(|x_1 - x_2| \leq \eta \Rightarrow \sqrt{2\pi}\left|\mathfrak{F}f(x_1) - \mathfrak{F}f(x_2)\right| \leq \varepsilon\right)$$

và vậy $\mathfrak{F}f$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét: Kết quả trên bao trùm kết quả ở *a)* và cho phép tránh sử dụng định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_{-\infty}^{+\infty}$.

Cách thứ hai
Có thể chứng minh (sử dụng định lý về hội tụ bị chặn, xem 4.1.6, Nhận xét) rằng nếu $F : A\times I \to \mathbf{K}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \bullet \text{với mọi } x \in A,\ F(x,\circ) \text{ liên tục từng khúc trên } I, \\ \bullet \text{với mọi } t \in I,\ F(\circ,t) \text{ liên tục trên } A, \\ \bullet \text{có } \varphi : I \to \mathbf{R} \text{ liên tục từng khúc, } \geq 0, \text{ khả tích sao cho } \forall (x,t) \in A\times I, |F(x,t)| \leq \varphi(t), \end{cases}$$

thì

$$\begin{cases} \bullet \text{với mọi } x \in A,\ F(x,\circ) \text{ khả tích trên } I, \\ \bullet \text{ánh xạ } f : \begin{array}{l} A \to \mathbf{K} \\ x \mapsto \int_I F(x,t)dt \end{array} \text{ liên tục trên } A. \end{cases}$$

Với $f \in \mathcal{L}^1$, áp dụng kết quả đó cho F: $(x,t) \mapsto f(t)e^{-ixt}$, ta kết luận rằng $\mathfrak{F}f$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) $|\mathfrak{F}f(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)e^{-ixt}\right|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ vì f khả tích trên $\mathbb{R}$.

d) Cho $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}^1$. Khi đó $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda f + g)(t)e^{-ixt}dt = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}dt$$
$$= \lambda\mathfrak{F}(f)(x) + \mathfrak{F}(g)(x).$$

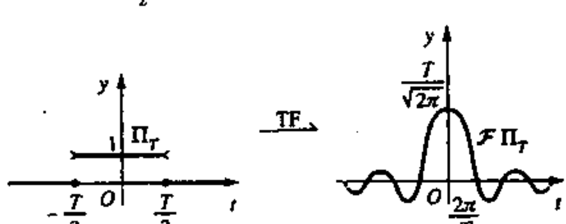
Vậy $\mathfrak{F}(\lambda f + g) = \lambda\mathfrak{F}f + \mathfrak{F}g$, $\mathfrak{F}$ là tuyến tính.

II. 1) Hiển nhiên $\Pi_T \in \mathcal{L}^1$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}\Pi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_T(t)e^{-ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-ixt}dt.$$

Nếu $x \neq 0$: $\mathfrak{F}\Pi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ixt}}{-ix}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{x}\sin\frac{xT}{2} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$.

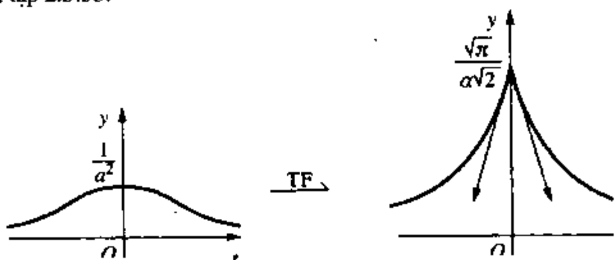
Nếu $x = 0$: $\mathfrak{F}\Pi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}$.



2) Rõ ràng rằng f: $t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$ là một phần tử của $\mathcal{L}^1$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có do tính chẵn:

$$\mathfrak{F}\Pi_T(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\mathrm{i}xt}}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xt}{a^2+t^2}\mathrm{d}t\underset{u=\frac{t}{a}}{=}\frac{2}{a\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos axu}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|x|}$$

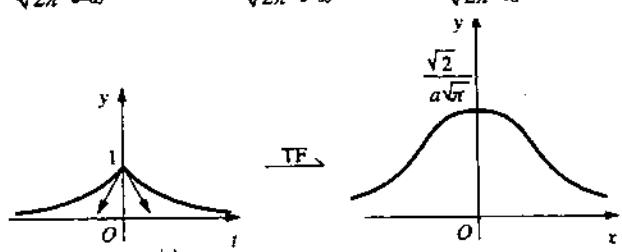
xem Tập 3, bài tập 2.5.53.



$$f(t)=\frac{1}{a^2+t^2} \qquad \mathfrak{F}f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|x|}$$

3) Rõ ràng rằng $f:t\mapsto e^{-a|t|}$ là một phần tử của $\mathcal{L}^1$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{(a-\mathrm{i}x)t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{(-a-\mathrm{i}x)t}\mathrm{d}t$$



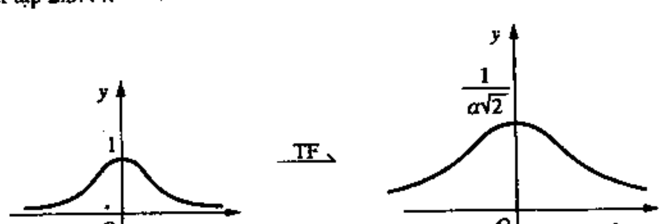
$$f(t)=e^{-a|t|} \qquad \mathfrak{F}f(x)=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(a-ix)t}}{a-ix}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(-a-ix)t}}{-a-ix}\right]_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-ix}+\frac{1}{a+ix}\right)=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}.$$

4) Rõ ràng rằng $f:t\mapsto e^{-\alpha^2t^2}$ là một phần tử của $\mathcal{L}^1$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2t^2}e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\underset{u=\alpha t}{=}\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}e^{-\mathrm{i}\frac{x}{\alpha}u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{i}x}{\alpha}\right)^2}=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$$

xem Tập 3, bài tập 2.5.44.



$$f(t)=e^{-\alpha^2t^2} \qquad \mathfrak{F}f(x)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$$

III *1) α)* Cho $f \in \mathcal{L}^1$. Rõ ràng rằng $\overline{f}: t \mapsto \overline{f(t)}$ và $\check{f}: t \mapsto f(-t)$ đều thuộc $\mathcal{L}^1$ và với mọi $x \in \mathbf{R}$:

- $\mathfrak{F}\overline{f}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(t)e^{-ixt}dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt} = \overline{\mathfrak{F}f(-x)} = \overline{\mathfrak{F}\check{f}(x)}$.
- $\mathfrak{F}\check{f}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-ixt}dt \underset{u=-t}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{ixu}du = \mathfrak{F}f(-x) = \mathfrak{F}\check{f}(x)$.

β)

- $\mathfrak{F}\check{\overline{f}} = \check{\mathfrak{F}}\,\overline{f} = \overline{\mathfrak{F}f}$ và $\mathfrak{F}\check{\overline{f}} = \mathfrak{F}\overline{\check{f}}$
- $\overline{\mathfrak{F}\overline{f}} = \overline{\overline{\check{\mathfrak{F}}f}} = \check{\mathfrak{F}}f$
- $\check{\mathfrak{F}}\,\overline{f} = \overline{\check{\mathfrak{F}}f} = \overline{\mathfrak{F}f}$
- $\overline{\mathfrak{F}\check{f}} = \overline{\check{\mathfrak{F}}f}$
- $\check{\mathfrak{F}}\check{\check{f}} = \check{\check{\mathfrak{F}}}f = \mathfrak{F}f$

b) • Nếu f thực và chẵn thì $\check{\overline{f}} = f$, vậy $\mathfrak{F}f = \mathfrak{F}\check{\overline{f}} = \overline{\mathfrak{F}f}$ *và* $\check{f} = f$ nên $\mathfrak{F}f = \mathfrak{F}\check{f} = \check{\mathfrak{F}}f$. Ta kết luận rằng $\mathfrak{F}f$ thực và chẵn.

• Nếu f thực *và* lẻ thì $\check{\overline{f}} = -f$, vậy $\mathfrak{F}f = \mathfrak{F}\check{\overline{f}} = -\overline{\mathfrak{F}f}$ và $\check{f} = -f$ nên $\mathfrak{F}f = -\mathfrak{F}\check{\overline{f}} = -\overline{\mathfrak{F}f}$. Ta kết luận rằng $\mathfrak{F}f$ thuần ảo và lẻ.

Nhận xét:

• Nếu f chẵn thì với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ixt}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

$$\underset{u=-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(-u)e^{ixu}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt,$$

gọi là biến đổi *Fourier* theo cosin.

• Nếu f lẻ thì với mọi $x \in \mathbf{R}$:

$$\mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(-u)e^{ixu}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)(e^{-ixt} - e^{ixt})dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt$$

và $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt$ gọi là biến đổi *Fourier* theo sin.

2) Cho $f \in \mathcal{L}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Rõ ràng rằng $\tau_a f \in \mathcal{L}^1$ *và* với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}(\tau_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_a f)(t)e^{-ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-ixt}dt$$

$$\underset{u=t-a}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\mathrm{i}xa-\mathrm{i}xu}\mathrm{d}u = e^{-\mathrm{i}xa}\mathfrak{F}f(x).$$

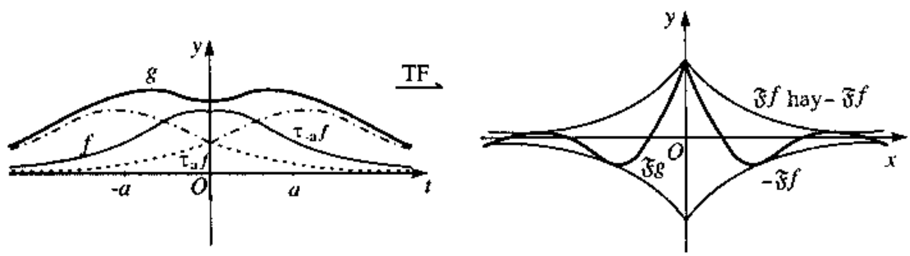
Nhận xét:

1) Theo kết quả trên: $\forall x\in\mathbf{R},\ |\mathfrak{F}(\tau_a f)(x)| = |\mathfrak{F}f(x)|$.

2) Tín hiệu chuyển thành biên độ:

Cho $f \in \mathcal{L}^1$ và $a \in \mathbb{R}$, ký hiệu $g: t\mapsto \frac{1}{2}\big(f(t+a)+f(t-a)\big)$, nói cách khác: $g=\frac{1}{2}(\tau_{-a}f+\tau_a f)$. Khi đó $g\in \mathcal{L}^1$ và bởi tính tuyến tính và theo kết quả trên:

$$\forall x\in\mathbf{R},\ \mathfrak{F}g(x)=\frac{1}{2}\Big(e^{ixa}\mathfrak{F}f(x)+e^{-ixa}\mathfrak{F}f(x)\Big)=\cos ax\mathfrak{F}f(x).$$



3) Rõ ràng rằng $g\in \mathcal{L}^1$ và với mọi $x\in\mathbf{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}\lambda t}f(t)e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}(x-\lambda)t}\mathrm{d}t=\mathfrak{F}f(x-\lambda)=\tau_\lambda(\mathfrak{F}f)(x)$$

Nhận xét: Từ kết quả trên suy ra:

$$f(t)\to\mathfrak{F}(x)\Rightarrow\begin{cases}\cos\lambda t f(t)\to\frac{1}{2}(\tau_\lambda F+\tau_{-\lambda}F)(x)\\ \sin\lambda t f(t)\to\frac{1}{2i}(\tau_\lambda F-\tau_{-\lambda}F)(x)\end{cases}.$$

4) Rõ ràng rằng $h\in \mathcal{L}^1$ và với mọi $x\in\mathbf{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(kt)e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

Nếu $k>0$: $\mathfrak{F}h(x)\underset{u=kt}{=}\frac{1}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-\mathrm{i}\frac{x}{k}u}\mathrm{d}u=\frac{1}{k}\mathfrak{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$.

Nếu $k<0$: $\mathfrak{F}h(x)\underset{u=kt}{=}\frac{1}{k\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-\mathrm{i}\frac{x}{k}u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{k}\mathfrak{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$.

Cuối cùng: $\mathfrak{F}h(x)=\frac{1}{|k|}\mathfrak{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$.

IV. 1) Cho $f\in \mathcal{L}^1$. Theo định lý Riemann - Lebesgue trên một khoảng tuỳ ý (bài tập 4.2.2) ta có: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$. Vậy $\mathfrak{F}f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$.

2) Hàm cánh cửa Π_T (xem II 1) thuộc $\mathcal{L}^1$ nhưng biến đổi *Fourier* $\mathfrak{F}\Pi_T$ không thuộc $\mathcal{L}^1$ vì $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ không khả tích trên $[1;+\infty[$ (xem Tập 2, 10.2.1, Ví dụ 2) hay Tập 3, 2.5.2 3) Nhận xét 2)).

◊ **Trả lời:** Không.

V. *1) a)* **Cách thứ nhất:**

Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ánh xạ $\Phi:(x,t)\mapsto f(t)e^{-ixt}$ liên tục trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ và thoả mãn giả thiết bị chặn:

$$\forall (x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R},\quad \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|\le \psi(t),$$

trong đó $\psi:\begin{array}{l}\mathbf{R}\to\mathbf{R}\\ t\mapsto |tf(t)|\end{array}$ liên tục, ≥ 0, khả tích trên $\mathbb{R}$. Theo định lý về lấy đạo hàm dưới dấu $\int_{-\infty}^{+\infty}$ (xem Tập 3, 2.5.5.2) Định lý), $\mathfrak{F}f$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall x\in\mathbf{R}, (\mathfrak{F}f)'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-\mathrm{i}tf(t)e^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t=-\mathrm{i}\mathfrak{F}f_1(x).$$

Muốn chuyển từ trường hợp f liên tục sang trường hợp f liên tục từng khúc, hãy làm thích ứng phương pháp được sử dụng trong bài tập 4.2.2.

Cách thứ hai:

Cho $x\in\mathbf{R}$, $(h_n)_{n\ge 0}$ là một dãy trong $\mathbb{R}^*$ có giới hạn 0. Với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta có:

$$\frac{1}{h_n}\left(\mathfrak{F}f(x+h_n)-\mathfrak{F}f(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h_n}f(t)(e^{-ih_nt}-1)e^{-ixt}dt.$$

Với $n\in\mathbb{N}$, ký hiệu $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall t\in\mathbf{R},\ g_n(t)=\frac{1}{h_n}f(t)(e^{-ih_nt}-1)e^{-ixt}.$$

Khi đó:

- Với mọi $n\in\mathbb{N}$, g_n liên tục từng khúc và khả tích trên $\mathbf{R}$ vì: $\forall t\in\mathbf{R}, |g_n(t)|=\dfrac{2}{|h_n|}|f(t)|$ và f khả tích trên $\mathbf{R}$.
- Dãy $(g_n)_{n\ge 0}$ hội tụ đơn trên $\mathbf{R}$ đến $g:\begin{array}{l}\mathbf{R}\to\mathbf{C}\\ t\mapsto -itf(t)e^{-ixt}\end{array}$ vì với mọi $t\in\mathbf{R}$ cố định, $\dfrac{e^{-ih_nt}-1}{h_n}\xrightarrow[n\infty]{}-it$.
- Ánh xạ g liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$.
- Dãy $(g_n)_{n\ge 0}$ thoả mãn giả thiết về bị chặn. Thực vậy, trước hết ta có:

$$\forall u\in\mathbf{R}, \left|e^{-iu}-1\right|=\left|e^{-i\frac{u}{2}}\left(e^{-i\frac{u}{2}}-e^{i\frac{u}{2}}\right)\right|=\left|2\sin\frac{u}{2}\right|\le |u|,$$

từ đó ký hiệu $\varphi:\begin{array}{l}\mathbf{R}\to\mathbf{C}\\ t\mapsto |tf(t)|\end{array}$ thì φ liên tục từng khúc, ≥ 0, khả tích trên $\mathbf{R}$ và:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left|g_n(t)\right| = \frac{|f(t)|}{|h_n|}\left|e^{-ih_n t} - 1\right| \le \left|tf(t)\right| = \varphi(t).$$

Theo định lý về hội tụ bị chặn (4.1.6, Định lý 2) ta suy ra rằng g khả tích trên $\mathbb{R}$ (điều này đã đạt được ở trên) và: $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$

tức là: $\frac{1}{h_n}\left(\mathfrak{F}f(x+h_n) - \mathfrak{F}f(x)\right) \xrightarrow[n\infty]{} -i\mathfrak{F}f_1(x)$.

Điều này chứng tỏ bởi đặc trưng dãy: $\frac{1}{h}\left(\mathfrak{F}f(x+h) - \mathfrak{F}f(x)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} -i\mathfrak{F}f_1(x)$,

và vậy $\mathfrak{F}f$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và : $\forall x \in \mathbb{R}, (\mathfrak{F}f)'(x) = -i\mathfrak{F}f_1(x)$

Cuối cùng (xem I 1), $\mathfrak{F}f_1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\mathfrak{F}f$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

b) Quy nạp trên k.

c) Cho f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ liên tục từng khúc *và* triệt tiêu bên ngoài một đoạn, khi đó với mọi $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k f(t)$ cũng thế và vậy $\left(f_k : t \mapsto t^k f(t)\right) \in \mathcal{L}^1$. Theo *b)* $\mathfrak{F}f$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$.

Nói một cách hình ảnh f "*càng dẹt*" ở $\pm\infty$ thì biến đổi *Fourier* của f càng chính quy.

2) a) α) Vì f khả tích trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\mathrm{d}u \xrightarrow[t\to+\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(u)\mathrm{d}u.$$

Điều này chứng tỏ f có một giới hạn hữu hạn l tại $+\infty$, nếu $l \neq 0$ thì f không khả tích trên $\mathbb{R}$ nên có mâu thuẫn. Vậy: $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Lý luận tương tự tại $-\infty$ (hoặc áp dụng điều trên đây cho $\check{f}$).

β) Với mọi $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, nhờ một tích phân từng phần:

$$\int_X^Y f'(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-ixt}\right]_X^Y + ix\int_X^Y f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t.$$

Vì f và f' khả tích trên $\mathbb{R}$, từ đó suy ra rằng khi cho X dần đến $-\infty$ và Y dần đến $+\infty$ và sử dụng *α)*:

$$\mathfrak{F}(f')(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t = \frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t = ix\mathfrak{F}f(x).$$

b) Quy nạp đơn giản.

c) Cho $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^{n-1} trên $\mathbb{R}$ và thuộc lớp C^n từng khúc trên $\mathbb{R}$ và sao cho:

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ f^{(k)} \in \mathcal{L}^1.$$

Theo *b)*, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{F}(f)(x) = \frac{1}{(ix)^n}\mathfrak{F}(f^{(n)})(x)$.

Nhưng theo IV 1), $\mathfrak{F}(f^{(n)})(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$,

nên suy ra: $\mathfrak{F}(f)(x) = \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

3) Ánh xạ $f:\begin{array}{l}\mathbf{R}\to\mathbf{C}\\ t\mapsto e^{-\alpha^2t^2}\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và f và $f': t\mapsto -2\alpha^2 te^{-\alpha^2t^2}$ khả tích trên $\mathbb{R}$.

Nhưng: $\forall t\in\mathbf{R}, f'(t)=-2\alpha^2tf(t)$ nên từ đó, bằng cách xét biến đổi *Fourier và* dùng 1)*a)* và 2)*a)* và ký hiệu $F=\mathfrak{F}f$, suy ra: $\forall x\in\mathbf{R}, ixF(x)=-2\alpha^2iF'(x)$.

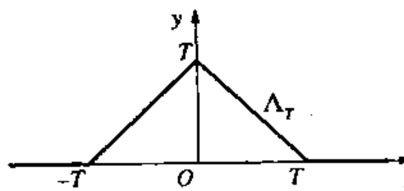
Bằng cách giải phương trình vi phân vừa tìm thấy:

$$\forall x\in\mathbf{R},\ F(x)=F(0)e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}.$$

Cuối cùng: $F(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2t^2}dt\underset{u=\alpha t}{=}\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$.

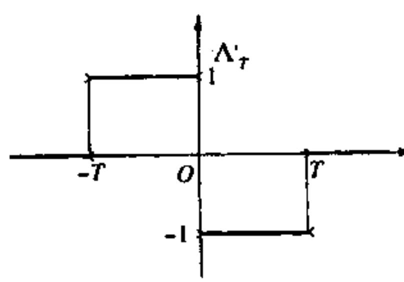
Ta kết luận: $\forall x\in\mathbf{R},\ \mathfrak{F}f(x)=\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$.

4) Ánh xạ Λ_T liên tục trên $\mathbb{R}$, thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$, khả tích trên $\mathbb{R}$ với giá bị chặn. Hơn thế, với mọi $t\in\mathbb{R}$:



$$\Lambda'_T=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<-T\\ 1 & \text{nếu } -T<t<0\\ -1 & \text{nếu } 0<t<T\\ 0 & \text{nếu } T<t.\end{cases}$$

Vậy với $t\in\mathbb{R}-\{-T;0;T\}$, ta có:



$$\Lambda'_T=\Pi_T\left(t+\frac{T}{2}\right)-\Pi_T\left(t-\frac{T}{2}\right)=\tau_{-\frac{T}{2}}\Pi_T(t)-\tau_{\frac{T}{2}}\Pi_T(t),$$

từ đó, với mọi $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\mathfrak{F}(\Lambda'_T)(x)=e^{i\frac{T}{2}x}\mathfrak{F}\Pi_T(x)-e^{-i\frac{T}{2}x}\mathfrak{F}\Pi_T(x)=\frac{2iT}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{T}{2}x\frac{\sin\frac{T}{2}x}{\frac{T}{2}x}.$$

Mặt khác $\forall x\in\mathbf{R},\ \mathfrak{F}(\Lambda'_T)(x)=ix\mathfrak{F}\Lambda_T(x)$.

Từ đó, cuối cùng:

$$\forall x\in\mathbf{R}^*,\ \mathfrak{F}\Lambda_T(x)=\frac{T^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}\right)^2 \text{ và } \mathfrak{F}\Lambda_T(0)=\frac{T^2}{\sqrt{2\pi}}.$$

VI *1)* Cho $f\in\mathcal{L}^1$, g: $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ liên tục từng khúc và bị chặn. Rõ ràng rằng $t\mapsto f(t)g(x-t)$ liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$. Mặt khác: $\forall t\in\mathbf{R},\ |f(t)g(x-t)|\le\|g\|_\infty|f(t)|$

và vậy do f khả tích trên $\mathbb{R}$ nên $t \mapsto f(t)g(x-t)$ khả tích trên $\mathbb{R}$.

2) Cho $f, g \in \mathcal{L}^1$ sao cho chẳng hạn g bị chặn. Theo 1), tồn tại $f * g$.

• Trước hết, giả sử f và g liên tục trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $\Phi : (x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$ liên tục trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện về bị chặn vì:
$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ |\Phi(x,t)| \le \|g\|_\infty |f(t)|$.

Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int_{-\infty}^{+\infty}$, $f * g$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Để chuyển sang trường hợp tổng quát hơn khi f và g liên tục từng khúc, hãy làm tương thích lời giải của I 2)*b)*.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, hoán vị $\int_{-A}^{+A}$ và $\int_{-\infty}^{+\infty}$ với $A \in [0;+\infty[$, ta có:

$$\int_{-A}^{+A} |(f * g)(x)| \mathrm{d}x \le \int_{-A}^{+A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |(f(t)g(x-t)| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-A}^{+A} |g(x-t)| \mathrm{d}x \right) |f(t)| \mathrm{d}t$$
$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| \mathrm{d}u \right) |f(t)| \mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| \mathrm{d}u \right),$$

và vậy $f * g$ khả tích trên $\mathbb{R}$.

Bằng cách hoán vị hai ký hiệu $\int_{-\infty}^{+\infty}$, ta được với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) \mathrm{d}u \right) e^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) e^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t \right) f(u) \mathrm{d}u$$
$$\underset{v=t-u}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-\mathrm{i}x(u+v)} \mathrm{d}v \right) f(u) \mathrm{d}u$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\mathrm{i}xu} \mathrm{d}u \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-\mathrm{i}xv} \mathrm{d}v \right) = \mathfrak{F}f(x) \mathfrak{F}g(x).$$

VII. *1)* Cho $f \in \mathcal{L}^1$. Vì với mọi đoạn J trong $\mathbb{R}$, f và $\tilde{f}$ trùng nhau tại mọi điểm trừ nhiều nhất một số hữu hạn điểm và vì $\tilde{f}$ liên tục từng khúc trên $\mathbb{R}$ và khả tích trên $\mathbb{R}$ nên $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$.
Có thể nhận xét:

$$\forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall f, g \in \mathcal{L}^1,\ (\widetilde{\alpha f + g}) = \alpha \tilde{f} + \tilde{g},$$
$$\forall f \in \mathcal{L}^1,\ \tilde{\tilde{f}} = \tilde{f},$$
$$\forall f \in \mathcal{L}^1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) \mathrm{d}t.$$

2) Cho $f \in \mathcal{L}^1$ sao cho $F = \mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto F(u)e^{\mathrm{i}xu}$ khả tích trên $\mathbb{R}$, vậy:

$$\int_{-A}^{A} F(u) e^{\mathrm{i}xu} \mathrm{d}u \xrightarrow[A \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{\mathrm{i}xu} \mathrm{d}u.$$

Mặt khác, ta thừa nhận $\int_{-A}^{A} F(u)e^{ixu}\mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(x)$ nên từ đó:

$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{ixu}\mathrm{d}u = \mathfrak{F}f(-x)$.

Vậy nếu $f \to F$ (và nếu $F \in \mathcal{L}^1$) thì $f \to \check{\tilde{f}}\,(=\check{\tilde{f}})$

3) Rõ ràng rằng $\widetilde{\mathcal{L}^1}$ là một $\mathbb{C}$ - kgv và ánh xạ thu hẹp $\mathfrak{F} : \begin{matrix}\widetilde{\mathcal{L}^1} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto \mathfrak{F}f\end{matrix}$ là tuyến tính. Để chứng minh rằng $\mathfrak{F}$ là đơn ánh, chỉ cần chứng minh $\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}) = \{0\}$.

Cho $f \in \widetilde{\mathcal{L}^1}$ sao cho $\mathfrak{F}f = 0$. Vì rõ ràng $0 \in \mathcal{L}^1$ nên theo *a)* ta có:

$$\check{\tilde{f}} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}f = \mathfrak{F}0 = 0,$$

vậy $\tilde{f} = 0$, rồi do $f = \tilde{f}$ nên $f = 0$.

Cuối cùng, $\mathfrak{F} : f \to \mathfrak{F}f$ là đơn ánh "*lên*" $\widetilde{\mathcal{L}^1}$.

4) Cho $t \in]0;\eta]$, $x \in \mathbb{R}$. Vì f liên tục từng khúc và khả tích trên $\mathbb{R}$ nên $\tau_t f - f$ cũng thế và vậy:

$$\mathfrak{F}(\tau_t f - f)(x) = e^{-ixt}\mathfrak{F}f(x) - \mathfrak{F}f(x).$$

Nhưng cũng có:

$$|\mathfrak{F}(\tau_t f - f)(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau_t f - f)(u)e^{-ixu}\mathrm{d}u\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|(\tau_t f - f)(u)|\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|(f(u-t) - f(u)|\mathrm{d}u \le \frac{t^\alpha}{\sqrt{2\pi}}.$$

Vậy ta được: $\forall t \in]0;\eta], \forall x \in \mathbb{R}, \ \left|e^{-ixt} - 1\right||\mathfrak{F}f(x)| \le \frac{t^\alpha}{\sqrt{2\pi}}$.

Cho $x \in \mathbb{R}^*$. Khi đó với mọi $t \in \left]0; \mathrm{Min}\left(\eta, \frac{2\pi}{|x|}\right)\right]$, ta có:

$$|\mathfrak{F}f(x)| \le \frac{t^\alpha}{2\left|\sin\frac{xt}{2}\right|\sqrt{2\pi}}.$$

Vì $\alpha > 1$, ta có: $\frac{t^\alpha}{2\left|\sin\frac{xt}{2}\right|\sqrt{2\pi}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{|x|}\frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$,

và vậy: $\mathfrak{F}f(x) = 0$.

Cuối cùng do $f \in \widetilde{\mathcal{L}^1}$ *và* do $\mathfrak{F}f = 0$ suy ra từ 3) rằng $f = 0$.

5) Cho $(f, g) \in (\mathcal{L}^1)^2$ sao cho $(\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g) \in (\mathcal{L}^1)^2$.

Theo IV 2) áp dụng vào $\overline{\mathfrak{F}}$ và theo 2):

$$\tilde{f}\tilde{g} = (\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f)(\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}g) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f * \mathfrak{F}g).$$

Rồi: $\mathfrak{F}(fg) = \mathfrak{F}(\widetilde{fg}) = \mathfrak{F}(\tilde{f}\tilde{g}) = \mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f * \mathfrak{F}g) = \mathfrak{F}f * \mathfrak{F}g$.

6) a) • Cho $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. Rõ ràng rằng $\gamma_{a,b}\in\mathcal{L}^1$ và khi ký hiệu $\varphi_a : t\mapsto\dfrac{1}{t^2+a^2}$ thì với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: (xem II 2)

$$\mathfrak{F}\gamma_{a,b}(x)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathfrak{F}(\tau_a\varphi_a)(x)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-ibx}\mathfrak{F}\varphi_a(x)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-ibx}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|x|}=e^{-ibx}e^{-a|x|}.$$

• Cho $(a,b);(a',b')\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. Vì $\gamma_{a,b};\gamma_{a',b'}\in\mathcal{L}^1$ và bị chặn nên với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\mathfrak{F}(\gamma_{a,b}*\gamma_{a',b'})(x)=\mathfrak{F}\gamma_{a+b}(x)\mathfrak{F}\gamma_{a',b'})(x)=(e^{-ibx}e^{-a|x|})(e^{-ib'x}e^{-a'|x|})$$
$$=e^{-i(b+b')x}e^{-(a+a')|x|}=\mathfrak{F}\gamma_{a+a',b+b'}.$$

Vậy: $\mathfrak{F}(\gamma_{a,b}*\gamma_{a',b'})(x)=\mathfrak{F}\gamma_{a+a',b+b'}$

Nhưng $\gamma_{a,b}*\gamma_{a',b'}$ và $\gamma_{a+a',b+b'}$ thuộc $\widetilde{\mathcal{L}^1}$ (vì liên tục và nằm trong $\mathcal{L}^1$) do tính đơn ánh của $\mathfrak{F}$ trên $\widetilde{\mathcal{L}^1}$, ta kết luận: $\gamma_{a,b}*\gamma_{a',b'}=\gamma_{a+a',b+b'}$.

b) Rõ ràng rằng $\Pi_T\in\mathcal{L}^1$ và bị chặn nên với mọi $x\in\mathbb{R}$: $\mathfrak{F}(\Pi_T*\Pi_T)(x)=\mathfrak{F}\left(\Pi_{\frac{T}{2}}(x)\right)^2$.

Theo II 1), $\mathfrak{F}\Pi_T(x)=\dfrac{T}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$, và theo IV 4): $\mathfrak{F}\Lambda_T(x)=\dfrac{T^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}\right)^2$ nên:

$$\mathfrak{F}(\Pi_T*\Pi_T)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}\Lambda_T(x)=\mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Lambda_T\right)(x).$$

Vì $\mathfrak{F}(\Pi_T*\Pi_T)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}\Lambda_T(x)$ và vì $\Pi_T*\Pi_T$ và Λ_T thuộc $\widetilde{\mathcal{L}^1}$ nên do tính đơn ánh của f trên $\mathcal{L}^1$, suy ra: $\Pi_T*\Pi_T=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\Lambda_T$.

c) Cho $\alpha,\beta\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Rõ ràng rằng φ_α và φ_β liên tục, bị chặn, khả tích trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, sử dụng II 4), ta có:

$$\mathfrak{F}(\varphi_\alpha*\varphi_\beta)(x)=\mathfrak{F}(\varphi_\alpha)(x)\mathfrak{F}(\varphi_\beta)(x)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}\frac{1}{\beta\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4\beta^2}}.$$

Ký hiệu γ là phần tử của $\mathbb{R}_+^*$ xác định bởi $\dfrac{1}{\gamma^2}=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ tức là $\gamma=\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ thì ta có:

$$\mathfrak{F}(\varphi_\alpha*\varphi_\beta)(x)=\frac{\gamma}{2\alpha\beta}e^{-\frac{x^2}{4\gamma^2}}=\frac{\gamma}{\alpha\beta\sqrt{2}}\frac{1}{\gamma\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4\gamma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\mathfrak{F}\varphi_\gamma(x).$$

Từ đó do tính đơn ánh của $\mathfrak{F}$ trên $\widetilde{\mathcal{L}^1}$ suy ra:

$$\varphi_\alpha*\varphi_\beta=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\varphi_{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}.$$

VIII. *1)* Trước hết, nhận xét rằng $\overline{f},g,\overline{f}g\in\mathcal{L}^1$ và g liên tục từng khúc và bị chặn. Theo VII 5): $\mathfrak{F}(\overline{f}g)=\mathfrak{F}\overline{f}*\mathfrak{F}g$, tức là:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(t) g(t) e^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\overline{f}(x-u) \mathfrak{F}g(u) \mathrm{d}u .$$

Nói riêng, với $x = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(t) g(t) e^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\overline{f}(-u) \mathfrak{F}g(u) \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathfrak{F}f(u)} \mathfrak{F}g(u) \mathrm{d}u .$$

2) Thay g bởi f trong 1).

3) Cho $f_1, f_2 \in \mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}^1}$ sao cho $\mathfrak{F}f_1 \in \mathcal{L}^1; \mathfrak{F}f_2 \in \mathcal{L}^1; \mathfrak{F}f_1 = \mathfrak{F}f_2$. Khi đó $f_1 - f_2 \in \mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}^1}$ và $\mathfrak{F}(f_1 - f_2) = 0$, nên theo *c)*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|(f_1 - f_2)(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathfrak{F}(f_1 - f_2)(x)\right|^2 \mathrm{d}x = 0$$

và vậy, do $f_1 - f_2 \in \widetilde{\mathcal{L}^1}$ nên $f_1 - f_2 = 0, f_1 = f_2$.

C4.3

I. 1) *a)* α) Giả sử rằng $\left(\int_a^{\to +\infty} F(x,t) \mathrm{d}t \right)_{x \in I}$ hội tụ đều.

• Với mọi $x \in I$, điều kiện cần *và* đủ *Cauchy* về tồn tại giới hạn hữu hạn tại $+\infty$ áp dụng vào ánh xạ $T \mapsto \int_a^T F(x,t) \mathrm{d}t$ chứng tỏ rằng $\int_a^{\to +\infty} F(x,t) \mathrm{d}t$ hội tụ.

• Cho $\varepsilon > 0$, có $t_0 \in [a;+\infty[$ sao cho:

$$\forall (t_1, t_2) \in [a;+\infty[^2, \forall x \in I, \left(t_2 \ge t_1 \ge t_0 \Rightarrow \left| \int_{t_1}^{t_2} F(x,t) \mathrm{d}t \right| \le \varepsilon \right).$$

Cho t_2 dần đến $+\infty$, suy ra:

$$\forall t_1 \in [a;+\infty[, \forall x \in I, \left(t_1 \ge t_0 \Rightarrow \left| \int_{t_1}^{+\infty} F(x,t) \mathrm{d}t \right| \le \varepsilon \right).$$

β) Ngược lại, để ý rằng:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} F(x,t) \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{t_1}^{+\infty} F(x,t) \mathrm{d}t - \int_{t_2}^{+\infty} F(x,t) \mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{t_1}^{+\infty} F(x,t) \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{t_2}^{+\infty} F(x,t) \mathrm{d}t \right|.$$

b) • Giả sử rằng $\left(\int_a^{\to +\infty} F(x,t) \mathrm{d}t \right)_{x \in I}$ hội tụ chuẩn tắc: có $\mu : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall t \in [a;+\infty[,\ \mu(t) \ge 0, \\ \int_a^{\to +\infty} \mu(t) \mathrm{d}t \text{ hội tụ}, \\ \forall (x,t) \in T \times [a;+\infty[,\ \left|F(x,t)\right| \le \mu(t). \end{cases}$$

Cho $\varepsilon > 0$. Vì $\int_a^{\to +\infty} \mu(t) \mathrm{d}t$ hội tụ, tồn tại $t_0 \in [a;+\infty[$ sao cho $\int_a^{\to +\infty} \mu(t) \mathrm{d}t \le \varepsilon$.

Cho $(t_1, t_2) \in [t_0;+\infty[^2$ sao cho $t_1 \le t_2$ *và* $x \in I$. Ta có: $\forall t \in [t_1;+\infty[,\ \left|F(x,t)\right| \le \mu(t)$ và vậy:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} F(x,t) \mathrm{d}t \right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|F(x,t)\right| \mathrm{d}t \le \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \mathrm{d}t \le \int_{t_0}^{+\infty} \mu(t) \mathrm{d}t \le \varepsilon ,$$

điều này chứng tỏ rằng $\left(\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I}$ hội tụ đều.

• Điều ngược lại không đúng, như ví dụ sau chứng tỏ: $a=1, F:(x,t)\mapsto \dfrac{\sin t}{t}$.

2) Cho $x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$

Vì $\left(\int_a^{\to+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right)_{x\in I}$ hội tụ đều, theo 1)*a)* có $t_0\in[a;+\infty[$ sao cho với mọi $t_1 \in [t_0;+\infty[$ và mọi $x\in I$:
$$\left|\int_{t_1}^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Rồi theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int$ (Tập 3, 2.3.12 1) Định lý), vì F liên tục trên $I\times[a;t_0]$ nên ánh xạ $x\mapsto \int_a^{t_0} F(x,t)\mathrm{d}t$ liên tục trên I, vậy có $\eta > 0$ sao cho:
$$\forall x\in I,\ \left(|x-x_0|\le\eta \Rightarrow \left|\int_a^{t_0} F(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^{t_0} F(x_0,t)\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Khi đó với mọi $x \in I$ sao cho $|x-x_0|\le\eta$, ta có:
$$|f(x)-f(x_0)| \le \left|\int_a^{t_0} F(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^{t_0} F(x_0,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{t_0}^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{t_0}^{+\infty} F(x_0,t)\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon$$

3) Ký hiệu $g: \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x\mapsto \int_a^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt \end{array}$ thì g hoàn toàn được xác định vì với mọi $x\in I$, $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$ hội tụ.

1) Cho $n\in\mathbb{N}$, vì F liên tục trên $I\times[a;a+n]$ và vì $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trên $I\times[a;a+n]$, định lý về lấy đạo hàm dưới dấu $\int$ (Tập 3, 2.3.12 2) Định lý) chứng tỏ rằng:
$f_n: \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x\mapsto \int_a^{a+n} F(x,t)dt \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I và: $\forall x\in I,\ f_n'(x) = \int_a^{a+n} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt.$

2) Hãy chứng minh: $f_n' \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} g$.

Cho $\varepsilon > 0$. Theo 1)*a)*, có $t_0\in[a;+\infty[$ sao cho:
$$\forall t_1\in[t_0;+\infty[, \forall x\in I, \left|\int_{t_1}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt\right| \le \varepsilon.$$

Vậy với mọi $n\in\mathbb{N}$ sao cho $n\ge t_0-a$ và với mọi $x\in I$, ta có:
$$\left|f_n'(x)-g(x)\right| = \left|\int_{a+n}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt\right| \le \varepsilon.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $(f_n')_{n\ge 0}$ hội tụ đều đến g trên I.

3) Do $f_n(x_0)=\int_a^{a+n}F(x_0,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} \int_a^{+\infty}F(x_0,t)\mathrm{d}t=f(x_0)$ nên $(f(x_0))_{n\geq 0}$ hội tụ đến $f(x_0)$

Theo 1), 2), 3), định lý lấy đạo hàm của một dãy ánh xạ (4.1.5) chứng tỏ:

$$\begin{cases}(f_n)_{n\geq 0} \text{ hội tụ đều đến } f \text{ trên mọi đoạn bao hàm trong } I,\\ f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I,\\ \forall x\in I, f'(x)=g(x)=\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.\end{cases}$$

C4.4

1) a) Theo bài tập 4.2.21, dãy đa thức $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi $P_0=0$ và $\left(\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0;1], P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}(x+P_n(x))^2\right)$ hội tụ đều trên $[0;1]$ đến ánh xạ $\rho: x\mapsto\sqrt{x}$. Ký hiệu $\delta=\|f\|_\infty$ và với $n\in\mathbb{N}$, g_n: $X\to\mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $g_n(x)=\delta P_n\left(\dfrac{(f(x))^2}{\delta^2}\right)$ nếu $f\neq 0$. Khi đó, $g_n\in A$ (do A là một đại số và $f\in A$) và $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến $|f|$ trên X.

b) $\operatorname{Inf}(f,g)=\frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right)$ và $\operatorname{Sup}(f,g)=\frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$,

và $\overline{A}$ là một đại số con của E.

2) Có $g\in A$ sao cho $g(x)\neq g(y)$, lấy: $f=\dfrac{\beta g(x)-\alpha g(y)}{g(x)-g(y)}+\dfrac{\alpha-\beta}{g(x)-g(y)}g$ thì $f\in A$.

3) Theo 2), với mọi $z\in X$ có $h_z\in A$ sao cho: $\begin{cases}h_z(x)=f(x)\\ h_z(z)\leq f(z)+\dfrac{\varepsilon}{3}.\end{cases}$

Vì h_z và f liên tục trên X có một lân cận V_z của z trong X sao cho: $\forall y\in V_z, h_z(y)\leq f(y)+\varepsilon$. Do X compăc, từ phủ mở $(V_z)_{z\in X}$ của X có thể lấy ra phủ con hữu hạn $(V_{z_i})_{1\leq i\leq N}$ của X khi đó $g=\operatorname{Inf}_{1\leq i\leq N} h_{z_i}$ là thích hợp.

4) Cho f: $X\to\mathbb{R}$ liên tục; theo 3), với mọi $x\in X$ và $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, có $g_x\in\overline{A}$ sao cho

$$\begin{cases}g_x(x)=f(x)\\ \forall y\in X, g_x(y)\leq f(y)+\varepsilon\end{cases}.$$

Vì g_x và f liên tục trên X có một lân cận U_x của x trong X sao cho: $\forall y\in U_z, g_x(y)\geq f(y)-\varepsilon$. Do X compăc, từ phủ mở $(U_x)_{x\in X}$ của X có thể lấy ra phủ con hữu hạn $(U_{x_j})_{1\leq j\leq P}$ của X Khi đó $\varphi=\operatorname{Sup}_{1\leq j\leq P} g_{x_j}\in\overline{A}$ *và*

$\left(\forall y\in X, f(y)-\varepsilon\leq\varphi(y)\leq f(y)+\varepsilon\right)$ tức là $\|\varphi-f\|_\infty\leq\varepsilon$. Vậy $f\in\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

5) a) Gọi E là đại số các ánh xạ liên tục từ $[0;1]^2$ vào $\mathbb{R}$, A là đại số con của E sinh bởi các ánh xạ $(x,y)\mapsto u(x)$ và $(x,y)\mapsto v(x)$ với u,v: $[0;1]\to\mathbb{R}$ liên tục; rõ ràng A chứa các hàm hằng.

Cho (x,y), $(x',y')\in[0;1]^2$ sao cho $(x,y)\neq(x',y')$, giả sử chẳng hạn $x\neq x'$.

Có u: $[0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $u(x) \neq u(x')$ và khi đó $g:[0;1]^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x,y) = g(u)$ thoả mãn $g(x,y) \neq g(x',y')$. Có thể áp dụng Định lý *Stone - Weierstrass*: A trù mật trong E.

b) Giả sử có $n \in \mathbb{N}^*$; $u_1, ..., u_n$; $v_1, ..., v_n$: $[0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho:

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ |x-y| = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y).$$

Cho $x \in [0;1]$, ký hiệu $f_x : \begin{matrix}[0;1] \to \mathbb{R} \\ y \mapsto |x-y|\end{matrix}$.

Vì ($\forall y \in [0;1],\ f_x(y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y)$), ta có $f_x = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i$. Vậy các $f_x (x \in [0;1])$ thuộc kgvc sinh bởi $v_1, ..., v_n$. Không gian này có số chiều hữu hạn. Nhưng dễ thấy rằng $(f_x)_{x \in [0;1]}$ là một họ độc lập tuyến tính, chú ý rằng với $x \in]0;1[$, f_x có đạo hàm trên $]0;1[- \{x\}$ và không có đạo hàm tại x.

C.4.5

I 1) $(\forall n \in \mathbb{N}, A_n(0) \in \mathbb{Z})$ và $A_n(0) \xrightarrow[n\infty]{} f(0)$.

2) *a)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$ hội tụ vì $\alpha \in]0;1[$.

b) Áp dụng định lý Stone - Weierstrass (C4.4) với $X = [-\alpha;\alpha]$ và A là đại số con sinh bởi hàm số $x \mapsto x^k$ (tức là tập các hàm số kiểu $x \mapsto P(x^k)$, $P \in \mathbb{R}[X]$), để ý rằng A tách điểm của X vì k lẻ.

c) $\left|P(x^k) - Q(x^k)\right| = |P(0)| = |P(0) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

d) Ký hiệu $Q = \sum_{i=1}^{N} a_i X^i$ và để ý rằng $Q(0) = 0$, ta có:

$$\left|Q(x^k) - R(x^k)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N}(a_i - E(a_i))x^{ki}\right| \leq \sum_{i=1}^{N}|a_i - E(a_i)|\left|x^{ki}\right| \leq \sum_{i=1}^{N}\left|x^{ki}\right| \leq \sum_{i=1}^{N}\alpha^{ki} \leq \sum_{n=k}^{+\infty}\alpha^n \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

e) $|g(x) - A(x)| = \left|g(x) - R(x^k)\right| \leq \left|g(x) - P(x^k)\right| + \left|P(x^k) - Q(x^k)\right| + \left|Q(x^k) - R(x^k)\right| \leq \varepsilon$.

II *1) a)* $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2 - x^k}\right| \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2 - b^k}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

b) Chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}\left(x \mapsto (x^k - 1)^n\right)$ hội tụ chuẩn tắc trên $[a;b]$ (vì $\left|(x^k - 1)^n\right| \leq (1 - a^k)^n$ và $1 - a^k \in]0;1[$) và có tổng là $x \mapsto \frac{1}{1 - (x^k - 1)} = \frac{1}{2 - x^k}$.

c) $\sum_{n=0}^{N}(X^k - 1)^n \in \mathbb{Z}[X]$.

2) Nhận xét rằng nếu φ, ψ: $[a;b] \to \mathbb{R}$ là những giới hạn đều trên $[a;b]$ của những chuỗi đa thức với hệ số nguyên thì $\varphi + \psi$ và $\varphi\psi$ cũng như thế.

3) Ký hiệu $P = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$, $a_0, ..., a_r \in \mathbb{R}$. Với mỗi $i \in \{0, ..., r\}$, có $A_i \in \mathbb{Z}[X]$ sao cho:

$\forall x \in [a;b], |a_i - A_i(x)| \le \frac{\varepsilon}{r+1}$.

Từ đó ký hiệu: $A = \sum_{i=0}^{r} A_i(X) X^i$ thì :

$$\forall x \in [a;b],\ |P(x) - A(x)| = \left|\sum_{i=0}^{r}(a_i - A_i(x))x^i\right| \le \sum_{i=0}^{r}|a_i - A_i(x)|x^i \le \frac{\varepsilon}{r+1}\sum_{i=0}^{r} x^i \le \varepsilon .$$

III 1) Xem I 1).

2) *a)* Nhận xét rằng $g(0) = g(1) = 0$. Rồi

$$\forall x \in [0;1],\ |A_n(x) - B_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) - E\left(C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{n},$$

để ý rằng $C_n^k \ge n$ với $k \in \{1, ..., n-1\}$.

b) $\|g - A_n\|_\infty \le \|g - B_n\|_\infty + \|B_n - A_n\|_\infty$ *và* $f = g + f(1)X + f(0)(1-X)$.

IV *1)* Ánh xạ $P \mapsto \|f - P\|_\infty$ liên tục trên tập compăc $\left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \|P\|_\infty \le 2\|f\|_\infty\right\}$ (khi trang bị $\|.\|_\infty$ trên $[0;1]$ cho $\mathbb{R}[X]$). Ngoài ra, nếu $\|P\|_\infty \ge 2\|f\|_\infty$ thì

$$\|f - P\|_\infty \ge \|P\|_\infty - \|f\|_\infty \ge \|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty .$$

2) $|P_n(0)| = |P_n(0) - f(0)| \le \|f - P\|_\infty = E_n(f)$ và vậy $|P_n(1)| \le E_n(f)$. Từ đó:

$$\forall x \in [0;1],\ |P_n(1) + P_n(0)(1-x)| \le E_n(f)(x + (1-x)) = E_n(f),$$

rồi: $\forall x \in [0;1], |f(x) - Q_n(x)| \le |f(x) - P_n(x)| + |P_n(1)x + P_n(0)(1-x)| \le 2E_n(f)$.

3) Chứng minh rằng họ $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \le k \le n}$ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}_n[X]$: nếu $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k(1-X)^{n-k} = 0$ (với $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$) thì $\lambda_0 = 0$ (số hạng hằng) rồi đơn giản cho X và lặp lại.

4) $\forall x \in [0;1],\ |A_n(x) - Q_n(x)| = \left|\sum (a_k - E(a_k))x^k(1-x)^{n-k}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{n}$

(như trong **III** 2).

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 5

5.1.1 $\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2}$.

◊ **Trả lời:** 1.

b) $\frac{n^2+n}{2^n+n!} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^2}{n!} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(n-2)!}$ và dấu hiệu d'Alembert.

◊ **Trả lời:** ∞.

c) $\frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

◊ **Trả lời:** 1.

d) $\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+n+2}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

◊ **Trả lời:** 1.

e) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ln\left|(\sqrt{n})^n z^n\right| = \frac{1}{2}n\ln n + n\ln|z| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **Trả lời:** 0.

f) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ln\left|(\ln n)^n z^n\right| = \frac{1}{2}n\ln\ln n + n\ln|z| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

◊ **Trả lời:** 0.

g) $e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}}(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1) = e^{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}-1) \underset{n\infty}{\sim} \frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$.

Với $z \in \mathbb{C}^*$: $\left|\frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}z^n\right| = \exp\left(\sqrt{n} - \ln(2\sqrt{n}) + n\ln|z|\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z|<1 \\ +\infty & \text{nếu } |z|>1 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** 1.

h) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \ln\left|\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\ln n} z^n\right| = \ln n \ln\frac{n+2}{2n+1} + n\ln|z| \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{nếu } |z|<1 \\ +\infty & \text{nếu } |z|>1. \end{cases}$

◊ **Trả lời:** 1.

i) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|(\ln n)^{\ln n} z^n\right| = \exp\left(\ln n \ln\ln n + n\ln|z|\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z|<1 \\ +\infty & \text{nếu } |z|>1 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** 1.

j) $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n+1)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln n\right)$

$$= \exp\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\left(1 - \exp\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$ rồi dấu hiệu *d'Alembert*.

◊ **Trả lời:** 1.

k) Nhận xét: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n \le \ln(n!) \le n \ln n$.

◊ **Trả lời:** 1.

l) $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt[3]{n}}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ vậy $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt[3]{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

◊ **Trả lời:** 1.

m) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\operatorname{sh} n} - e^{\operatorname{sh}(n+1)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:** ∞.

n) $\left(\operatorname{sh}(\sqrt{\ln n})\right)^{-2} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{2}\right)^{-2} = 4e^{-2\sqrt{\ln n}}$ rồi với

$$z \in \mathbb{C}^* : \left|e^{-2\sqrt{\ln n}} z^n\right| = \exp\left(-2\sqrt{\ln n} + n \ln|z|\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z| < 1 \\ +\infty & \text{nếu } |z| > 1. \end{cases}$$

◊ **Trả lời:** 1.

o) $\sqrt[n]{n} \operatorname{sh} n = e^{\frac{\ln n}{n}} \frac{e^n - e^{-n}}{2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$.

◊ **Trả lời:** $\frac{1}{e}$.

p) Chứng minh $\pi\sqrt{n^2 + 3n + 2} = \pi n + \frac{3\pi}{2} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ từ đó $\tan\left(\pi\sqrt{n^2 + 3n + 2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{8n}{\pi}$.

◊ **Trả lời:** 1.

q) Chứng minh $\left|\sin\left(\pi\sqrt[3]{n^3 + 1}\right)\right|^{\frac{1}{3}} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{3n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

◊ **Trả lời:** 1.

r)
- $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sin\sqrt{n}\right|\right) \le 1$ từ đó $R = 1$
- $\left(\sin\sqrt{n}\right)_{n\ge 0}$ phân kỳ vì dãy con $(\sin n)_{n\ge 0}$ phân kỳ (xem Tập 1, bài tập 3.1.10).

◊ **Trả lời:** 1.

s) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \le \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

◊ **Trả lời:** ∞.

t) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{1}{n^2} z^{n^2}\right| = \exp\left(-2\ln n + n^2 \ln|z|\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z| < 1 \\ +\infty & \text{nếu } |z| > 1 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** 1.

u) Chứng minh $\ln\left(\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{24}$.

◊ **Trả lời:** 1.

v) Theo Tập 2, 8.3.3 3):

$$\operatorname{Arccos}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\infty}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\underset{n\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

◊ **Trả lời:** 1.

w) $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3+n+1}}\underset{n\infty}{\sim}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$ rồi dấu hiệu *d'Alembert*.

◊ **Trả lời:** 1.

x) $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ vậy

$$a_n\underset{n\infty}{\sim}\sin a_n=\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{3n^2}{(2n+1)^2}}=\frac{n\sqrt{3}}{2(2n+1)}\left(1-\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)\underset{n\infty}{\sim}\frac{-\sqrt{3}}{2n}.$$

◊ **Trả lời:** 1 .

y) Vì $\operatorname{Arctan}\dfrac{n\sqrt{3}}{n+1}\xrightarrow[n\infty]{}\operatorname{Arctan}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, ta có:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{3}-\operatorname{Arctan}\frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right)\underset{n\infty}{\sim}\left(\frac{\pi}{3}-\operatorname{Arctan}\frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right)\underset{n\infty}{\sim}\tan\left(\frac{\pi}{3}-\operatorname{Arctan}\frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right)=\frac{\sqrt{3}-\frac{n\sqrt{3}}{n+1}}{1+\sqrt{3}\,\frac{n\sqrt{3}}{n+1}}\underset{n\infty}{\sim}\frac{\sqrt{3}}{4n}.$$

◊ **Trả lời:** 1.

z) Ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*,\dfrac{e^n}{2}\le\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ch}k\le n\frac{e^n+1}{2}$, từ đó: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{ne^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ch}k\le\frac{1+e^{-n}}{2}\le 1$.

◊ **Trả lời:** 1.

a') • $a_n\le\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{3/2}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right)=\frac{2}{\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}}\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

• Tương tự, với $n\ge 2$: $a_n\ge\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x^3}}\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{3}n\sqrt{n}}$.

◊ **Trả lời:** 1.

b') Ký hiệu $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{n^2+\sin^2 x}dx$ và $b_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{n^2}dx=\frac{\pi}{4n^2}$ thì ta có:

$$|a_n-b_n|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{n^2(n^2+\sin^2 x)}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n^4}dx=\frac{\pi}{2n^4}$$

vậy: $a_n\underset{n\infty}{\sim}b_n=\dfrac{\pi}{4n^2}$.

◊ **Trả lời:** 1.

c') • $a_n\ge\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2n^2}$.

• Với $n\ge 2$, $a_n\le\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dx}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{1}{n^2}$.

◊ **Trả lời:** 1.

$$d')\ a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx \underset{y=x^2}{=} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy \underset{u=y-n\pi}{=} \frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{n\pi+u}}du$$

từ đó : $$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{n\pi+\pi}}du \le |a_n| \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{n\pi}}du,$$

tức là: $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \le |a_n| \le \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

◊ **Trả lời:** 1.

$e')$ $\dfrac{1}{n^{a+1}} \le |a_n| \le \dfrac{1}{n^{a-1}}$.

◊ **Trả lời:** 1.

$f')$ ◊ **Trả lời:** $\dfrac{1}{a}Max(1,b)$.

g') Theo tập 2, 8.3.3 3) :

$$\text{Arccos}\left(1-\frac{1}{n^a}\right) \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{n^a}} = \sqrt{2}n^{-\frac{a}{2}}.$$

◊ **Trả lời:** 1.

h') Theo Tập 3, 3.3.7, 1)*b)* Ví dụ : $\ln(n!) \underset{n\infty}{\sim} n\ln n$.

Vì với $z \in \mathbf{C}^*: \ln\left|a_n z^n\right| = a\ln\left(\ln(n!)\right) - b\ln(n!) + n\ln|z|$, suy ra:

- Nếu $b>0$ thì $\ln\left|a_n z^n\right| \underset{n\infty}{\sim} -bn\ln n!$ vậy $a_n z^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$,
- Nếu $b<0$ thì $\left|a_n z^n\right| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$,
- Nếu $b=0$, $\ln\left|a_n z^n\right| \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} -\infty \text{ nếu } |z|<1 \\ +\infty \text{ nếu } |z|>1 \end{cases}$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} \infty \text{ nếu } b>0 \\ 1 \text{ nếu } b=0 \\ 0 \text{ nếu } b<0 \end{cases}$.

$$i')\ \forall z \in \mathbf{C}^*, \left|e^{-(\ln n)^a} z^n\right| = \exp\left(-(\ln n)^a + n\ln|z|\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z|<1 \\ +\infty & \text{nếu } |z|>1 \end{cases}.$$

◊ **Trả lời:** 1.

$$j')\ \forall z \in \mathbf{C}^*, \left|\frac{n^a}{(\ln n)^{\ln n}} z^n\right| = \exp\left(a\ln z - \ln n \ln\ln n + n\ln|z|\right) \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{nếu } |z|<1 \\ +\infty & \text{nếu } |z|>1 \end{cases}.$$

◊ **Trả lời:** 1.

k') Với $\forall z \in \mathbf{C}^*, \left|(n^a)^{n^b} z^n\right| = \exp\left(an^b\ln n + n\ln|z|\right)$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 1 & \text{nếu } (a=0 \text{ hoặc } b<1) \\ 0 & \text{nếu } (a>0 \text{ và } b\ge 1) \\ +\infty & \text{nếu } (a<0 \text{ và } b \ge 1) \end{cases}$.

l') Với $z \in \mathbb{C}^*, \left|\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{bn^c} z^n\right| = \exp\left(abn^{c-1} + o(n^{c-1}) + n\ln|z|\right)$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } (c > 2 \text{ và } ab > 0) \\ +\infty & \text{nếu } (c > 2 \text{ và } ab < 0) \\ e^{-ab} & \text{nếu } c = 2 \\ 1 & \text{nếu } c < 2 \end{cases}$

m') $\dfrac{(\operatorname{sh} n)^a}{(\operatorname{ch} n)^b} \underset{n\infty}{\sim} \left(\dfrac{e^n}{2}\right)^{b-a} = 2^{b-a}(e^{a-b})^n$.

◊ **Trả lời:** e^{b-a}.

n') Với $z \in \mathbb{C}^*, \left|a^{n^b} z^n\right| = \exp\left(n^b \ln a + n\ln|z|\right)$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } (a > 1 \text{ và } b > 1) \\ +\infty & \text{nếu } (a < 1 \text{ và } b > 1) \\ 1 & \text{nếu } ((a = 1 \text{ và } b > 1) \text{ hoặc } b < 1) \\ \dfrac{1}{a} & \text{nếu } b = 1. \end{cases}$

o') $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|e^{(n+1)^a - n^a} z^n\right| = \exp\left((n+1)^a - n^a + n\ln|z|\right) = \exp\left(an^{a-1} + o(n^{a-1}) + n\ln|z|\right)$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } a > 2 \\ e^{-2} & \text{nếu } a = 2 \\ 1 & \text{nếu } a < 2. \end{cases}$

p') $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^a} z^n\right| = \exp\left(n^{a-1} + o(n^{a-1}) + n\ln|z|\right)$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } a > 2 \\ e^{-2} & \text{nếu } a = 2 \\ 1 & \text{nếu } a < 2. \end{cases}$

q') $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{n^a} z^n\right| = \exp\left(\dfrac{1}{2}n^{a-2} + o(n^{a-2}) + n\ln|z|\right)$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } a > 3 \\ e^{-\frac{1}{2}} & \text{nếu } a = 3 \\ 1 & \text{nếu } a < 3. \end{cases}$

r') ◊ **Trả lời:** $\begin{cases} 0 & \text{nếu } a < 0 \\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} 1} & \text{nếu } a = 0 \\ 1 & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$

5.1.2 $\ln\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \underset{n\infty}{0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$.

◊ **Trả lời:** $R=1$. Chuỗi phân kỳ tại 1 và tại -1.

5.1.3 *a)* Chứng minh bằng phản chứng: giả sử: $\sin(n^2)\xrightarrow[n\infty]{}0$

Từ: $\sin((n+1)^2)=\sin(n^2)\cos(2n+1)+\cos(n^2)\sin(2n+1)$,

suy ra: $\cos(n^2)\sin(2n+1)\xrightarrow[n\infty]{}0$.

Nhưng $\cos^2(n^2)=1-\sin^2(n^2)\xrightarrow[n\infty]{}1$, nên $\sin(2n+1)\xrightarrow[n\infty]{}0$.

Theo Tập 1, bài tập 3.1.10, ta biết rằng với $\alpha\in\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$ cố định, các dãy $(\sin n\alpha)_n$ và $(\cos n\alpha)_n$ phân kỳ, vậy có mâu thuẫn.

Nhận xét: có thể thay đổi thích ứng phương pháp trên đây để chứng minh rằng với hầu hết mọi đa thức P thuộc $\mathbb{R}[X]$ có bậc ≥ 2, các dãy $\left(\sin(P(n))\right)_n$ và $\left(\cos(P(n))\right)_n$ phân kỳ.

b) ◊ **Trả lời:** 1.

5.1.4 $\dfrac{(an)!}{(bn)!\,n^{cn}}\underset{n\infty}{\sim}\left(\dfrac{a^a e^{b-a}}{b^b}\right)\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,n^{(a-b-c)n}$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases}0 & \text{nếu } a-b-c>0\\ \infty & \text{nếu } a-b-c<0\\ b^b a^{-a} e^{a-b} & \text{nếu } a-b-c=0.\end{cases}$

5.1.5 *a)* Nhận xét: $\forall n\in\mathbb{N}^*, n^p\leq\sigma_p(n)\leq nn^p=n^{p+1}$.

◊ **Trả lời:** 1.

b) Nhận xét: $\forall n\in\mathbb{N}^*, 1\leq\varphi(n)\leq n$.

◊ **Trả lời:** 1.

5.1.6 Vì $(a_n z_0^n)_n\xrightarrow[n\infty]{}0$ và vì $\sum a_n z_0^n$ không hội tụ tuyệt đối, ta có $|z_0|\leq R$ và $|z_0|\geq R$.

5.1.7 Cho $z\in\mathbb{C}$.

• Nếu $|z|<\dfrac{R}{|\lambda|}$ thì $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(\lambda z)^n$ hội tụ tuyệt đối.

• Nếu $|z|>\dfrac{R}{|\lambda|}$ thì $\left(a_n(\lambda z)^n\right)_n$ phân kỳ.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{R}{|\lambda|}$.

5.1.8 Cho $z\in\mathbb{C}$, ta có:

• $|z|<R^p\Rightarrow|z|^{\frac{1}{p}}<R\Rightarrow a_n\left(|z|^{\frac{1}{p}}\right)^n\xrightarrow[n\infty]{}0\Rightarrow|a_n|^p|z|^n=\left|a_n\left(|z|^{\frac{1}{p}}\right)^n\right|^p\xrightarrow[n\infty]{}0\Rightarrow|z|\leq R'$

• $|z| < R' \Rightarrow |a_n|^p z^p = |a_n|\left(|z|^{\frac{1}{p}}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Rightarrow |z|^{\frac{1}{p}} \le R \Rightarrow |z| \le R^p$.

◊ **Trả lời::** $R' = R^p$.

5.1.9 Ký hiệu R, R' theo thứ tự là bán kính của $\sum_{n\ge1} a_n z^n$, $\sum_{n\ge1} a_n e^{n^\alpha} z^n$.

1) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|a_n e^{n^\alpha}\right| \ge |a_n|\right)$, từ đó $R' \le R$.

2) Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < R$, có $\rho \in \mathbb{R}$ sao cho: $|z| < \rho < R$.

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|a_n e^{n^\alpha} z^n\right| \ge \left|a_n \rho^n\right| \left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n e^{n^\alpha}\right)$.

Một mặt $a_n \rho^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ (vì $\rho < R$).

Mặt khác $\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n e^{n^\alpha} = \exp\left(n \ln\frac{|z|}{\rho} + n^\alpha\right) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ vì $0 < \frac{|z|}{\rho} < 1$ và $\alpha \in]-\infty; 1[$. Điều này chứng tỏ $a_n e^{n^\alpha} z^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và vậy $|z| \le R'$.

Cuối cùng $R' = R$.

5.1.10 Giả sử $l \ne 0$. Cho $\varepsilon \in]0; l[$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\forall n > N,\ l - \varepsilon \le \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \le l + \varepsilon .$$

Từ đó suy ra có $(C_1, C_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho:

$$\forall n > N,\ C_1(l-\varepsilon)^n \le |u_n| \le C_2(l+\varepsilon)^n ,$$

vậy: $\forall n > N,\ C_1(l-\varepsilon)^n |a_n| \le |u_n a_n| \le C_2(l+\varepsilon)^n |a_n|$.

Theo bài tập 5.1.7, các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n>N} C_1(l-\varepsilon)^n a_n z^n$ và $\sum_{n>N} C_2(l+\varepsilon)^n a_n z^n$ có bán kính theo thứ tự là $\frac{R}{l-\varepsilon}$ và $\frac{R}{l+\varepsilon}$.

Từ đó suy ra *rằng* bán kính R' của $\sum_{n\ge1} u_n a_n z^n$ thoả mãn: $\frac{R}{l+\varepsilon} \le R' \le \frac{R}{l-\varepsilon}$.

Có bất đẳng thức đó với mọi $\varepsilon \in]0; l[$. Vậy cho ε dần đến 0^+, ta được: $R' = \frac{R}{l}$.

Cũng giải quyết tương tự cho trường hợp $l = 0$ và $R > 0$. Nếu $l = R = 0$, ta không thể kết luận gì về R' như các ví dụ sau đây chứng tỏ:

1) $\begin{cases} a_n = n! \\ u_n = \dfrac{1}{n!} \end{cases}$ khi đó $R' = 1$.

2) $\begin{cases} a_n = (n!)^2 \\ u_n = \dfrac{1}{n!} \end{cases}$ khi đó $R' = 0$.

3) $\begin{cases} a_n = n! \\ u_n = \dfrac{1}{(n!)^2} \end{cases}$ khi đó $R' = \infty$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} R' = \dfrac{R}{l} \text{ nếu } l > 0 \\ R' = \infty \text{ nếu } (l = 0 \text{ và } R > 0) \\ \text{Không có kết luận gì về } R' \text{ nếu } l = R = 0. \end{cases}$

5.1.11 Ký hiệu R' là bán kính của $\sum_{n \geq 1} n! a_n z^n$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Có $M \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{N}^*$, sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n > N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{M}{n} \Rightarrow |n! a_n| \leq M^n \frac{n!}{n^n} \leq M^n.$$

Từ đó suy ra: $R' \geq \dfrac{1}{M} > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Dãy $\left(n! a_n \left(\dfrac{R'}{2}\right)^n\right)_{n \geq 1}$ bị chặn: có $C \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| n! a_n \left(\frac{R'}{2}\right)^n \right| \leq C.$$

Từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{C^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}} \dfrac{R'}{2}}$.

Một mặt: $C^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Mặt khác:

$$\ln((n!)^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))\right) = \frac{1}{n}\left(n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n}\right)(1 + o(1)) = \ln n - 1 + o(1),$$

từ đó: $(n!)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} e^{\ln n - 1} = \dfrac{n}{e}$ và cuối cùng $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \underset{n\infty}{0}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

5.1.12 Ký hiệu $l = \lim\limits_{n\infty} \mathrm{Sup}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) \in [0; +\infty]$.

Giả sử $0 < l < +\infty$ (các trường hợp $l = 0$, $l = +\infty$ được giải quyết một cách tương tự).

Cho $\varepsilon \in]0; l[$.

- Có $N \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n > N \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon \Rightarrow |a_n| < (l + \varepsilon)^n\right)$ và vậy ta có $R \geq \dfrac{1}{l + \varepsilon}$
- Có một hàm trích σ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, |a_{\sigma(n)}|^{\frac{1}{\sigma(n)}} > l - \varepsilon$. Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| > \dfrac{1}{l - \varepsilon}$.

Khi đó ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \left|a_{\sigma(n)} z^{\sigma(n)}\right| \geq \left((l - \varepsilon)|z|\right)^n$, vậy $\left|a_{\sigma(n)}z^{\sigma(n)}\right| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ và vậy $|z| \geq R$.

Điều đó chứng tỏ: $R \leq \dfrac{1}{l-\varepsilon}$.

Từ điều đã có: $\forall \varepsilon \in]0;l[,\ \dfrac{1}{l+\varepsilon} \leq R \leq \dfrac{1}{l-\varepsilon}$, cho ε dần đến 0^+, ta suy ra: $R = \dfrac{1}{l}$.

5.1.13 Chứng minh rằng dãy $(\sin n)_{n\geq 0}$ thừa nhận 1 làm một giá trị dính. Khi đó ta có:

$$\limsup_{n\infty}(|a_n|^{\frac{1}{n}}) = \limsup_{n\infty} e^{\sin n} = e .$$

◊ **Trả lời:** $R = \dfrac{1}{e}$.

5.1.14 Trước hết, nhận xét rằng bán kính của $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là ≥ 1.

Ký hiệu $A:]-1;1[\to \mathbb{C}$ và $B:]-1;1[\to \mathbb{R}$ là các tổng theo thứ tự của $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

1) Vì $\sum_{n\geq 0} b_n$ phân kỳ và có số hạng ≥ 0 nên $\sum_{k=0}^{n} b_k \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$. Cho $C_1 > 0$ cố định, có $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum_{n=0}^{N_1} b_n \geq C_1 + 1$.

Vì $\sum_{n=0}^{N_1} b_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{N_1} b_n \geq C_1 + 1$, có $\eta_1 \in]0;1[$ sao cho:

$$\forall x \in]1-\eta_1;1[,\ \sum_{n=0}^{N_1} b_n x^n \geq C_1 .$$

Khi đó ta có: $\forall x \in]1-\eta_1;1[,\ B(x) \geq \sum_{n=0}^{N_1} b_n x^n \geq C_1$.

Điều đó chứng tỏ: $B(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

2) Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\infty]{} l$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N,\ |a_n - lb_n| \leq \varepsilon b_n$. Suy ra:

$$\forall x \in]0;1[,\ \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n - l\sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n\right| \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \leq \varepsilon B(x),$$

rồi: $\forall x \in]0;1[,\ \left|\dfrac{A(x)}{B(x)} - l\right| \leq \dfrac{\left|\sum_{n=0}^{N}(a_n - lb_n)x^n\right|}{B(x)} + \varepsilon$.

Vì N cố định và vì $B(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$, có $\eta \in]0;1[$ sao cho:

$$\forall x \in]1-\eta;1[,\ \frac{\left|\sum_{n=0}^{N}(a_n - lb_n)x^n\right|}{B(x)} < \varepsilon .$$

Vậy ta được: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in]0;1[, \forall x \in]1-\eta;1[,\ \left|\frac{A(x)}{B(x)} - l\right| < 2\varepsilon$,

và vậy $\frac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} l$.

5.1.15 Lập luận tương tự như ở lời giải bài tập 5.1.14. Để chứng minh $\frac{\sum_{n=0}^{N}(a_n - lb_n)x^n}{B(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, chú ý rằng $B(x) \ge b_{N+1}x^{N+1}$.

5.2.1 *a)* Các chuỗi luỹ thừa rời nhau:

$$\sum_{p\ge0}(\sqrt{2p}+6p)^{-1}z^{2p} \text{ và } \sum_{p\ge0}\left(\sqrt{2p+1}+\frac{2p+1}{3}\right)^{-1}z^{2p+1}$$

có bán kính 1.

◊ **Trả lời:** 1.

b) $\left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{|\sin n|}{n^2}$ và $\sum_{n\ge1}\frac{|\sin n|}{n^2}z^n$ có cùng bán kính với $\sum_{n\ge1}\sin nz^n$.

◊ **Trả lời:** 1.

c) $\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}$, $\frac{|\cos n|}{n} \le \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \le |\cos n|$

và $\sum_{n\ge1}\frac{|\cos n|}{n}z^n$ và $\sum_{n\ge1}|\cos n|z^n$ có cùng bán kính 1.

◊ **Trả lời** 1.

d) $\sum_{n\ge1}\frac{\cos^3 n}{n(n+2)}z^n$ có cùng bán kính R với $\sum_{n\ge1}\cos^3 nz^n$.

- $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\cos^3 n\right| \le 1\right)$, vậy $R \ge 1$.
- $\cos^3 n \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$ (vì $(\cos n)_n$ phân kỳ).

◊ **Trả lời:** 1.

5.2.2 *1)* Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| > \frac{1}{R}$. Vì $\left|\frac{1}{z}\right| < R$, chuỗi $\sum_{n\ge0}a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n$ hội tụ, số hạng tổng quát dần đến 0, vậy $\left(\frac{1}{a_n}z^n\right)_{n\ge0}$ không bị chặn và do đó $|z| \ge R'$.

Điều đó khẳng định $RR' \le 1$ (trường hợp $R = 0$ xét tương tự).

2) Ta có thể có $RR' = 1$ hay $RR' \ne 1$ như hai ví dụ sau đây chứng tỏ:

• $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1)$ và bấy giờ $R = R' = 1$.

• $a_n = \begin{cases} n! \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ 1 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ và bấy giờ $R = 0, R' = 1, RR' = 0 < 1$.

◊ **Trả lời:** Nếu $\begin{cases} (R,R') \ne (0;\infty) \\ (R,R') \ne (\infty;0) \end{cases}$ thì $RR' \le 1$.

5.2.3 *a)* $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 + a_1 = 0 \\ a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n = 0 \\ \vdots \end{cases}$

Hệ phương trình này xác định một và chỉ một nghiệm $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong đó các b_n được tính dần dần.

b) Có $r \in \,]0;R[$. Vì $|r| < R$, có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}, \left|a_n r^n\right| \le M$. Ta có:

• $|b_1| = |a_1| \le \dfrac{M}{r}$.

• $|b_2| = |-a_2 - a_1 b_1| \le |a_2| + |a_1 b_1| \le \dfrac{M}{r^2} + \dfrac{M^2}{r^2} = \dfrac{M(M+1)}{r^2}$.

• Nếu $|b_n| \le \dfrac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$ thì

$$|b_{n+1}| = \left|-a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}\right| \le \frac{M}{r^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} = \frac{M}{r^{n+1}} + \frac{M^2(M+1)^n}{r^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{M+1}\right)^k$$

$$= \frac{M}{r^{n+1}} + \frac{M^2(M+1)^{n-1}}{r^{n+1}} \frac{1 - \dfrac{1}{(M+1)^n}}{1 - \dfrac{1}{M+1}} = \frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}.$$

Vậy: $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \le \dfrac{M}{M+1}\left(\dfrac{M+1}{r}\right)^n$ và từ đó bán kính R' của $\sum_{n\ge 0} b_n z^n$ thoả mãn

$R' \ge \dfrac{r}{M+1}$ nên hiển nhiên $R' > 0$. Hơn thế, với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \text{Min}\left(R, \dfrac{r}{M+1}\right)$, ta có:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1.$$

5.2. 4 Xét ánh xạ $g : \{u \in \mathbb{C}, |u| < R\} \to \mathbb{C}$ xác định bởi: $g(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| u^k$.

Cho $z \in \mathbb{C}$.

Trường hợp 1: $|z| < R$.

Ta có: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|^{\frac{1}{n}} = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k\right)^{\frac{1}{n}} \leq (g(|z|))^{\frac{1}{n}}$.

Vì $(g(|z|))^{\frac{1}{n}} \to \begin{cases} 1 & \text{nếu } g(|z|) \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } g(|z|) = 0, \end{cases}$

nên suy ra: $\limsup_{n\infty}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|^{\frac{1}{n}}\right) \leq 1$.

Trường hợp 2: $|z| \geq R$.

Cho $t \in \left]0;\frac{R}{|z|}\right[$. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$|a_k||z|^k = \frac{1}{t^k}|a_k|(t|z|)^k \leq \frac{g(t|z|)}{t^k},$$

từ đó: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n}|a_k||z|^k \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{g(t|z|)}{t^k} = t^{-n}g(t|z|)\sum_{k=0}^{n} t^k \leq \frac{g(t|z|)}{t^n(1-t)}$.

Suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{g(t|z|)}{(1-t)}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Do $\left(\frac{g(t|z|)}{(1-t)}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{nếu } g(t|z|) \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } g(t|z|) = 0, \end{cases}$

ta có: $\limsup_{n\infty}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{1}{R}$.

Bất đẳng thức đó được nghiệm đúng với mọi $t \in \left]0;\frac{R}{|z|}\right[$ nên ta kết luận:

$\limsup_{n\infty}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{|z|}{R}$.

5.2.5 Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, khi đó $\sum_{p\geq 1} a_p z^p$ và $\sum_{q\geq 1} b_q z^q$ hội tụ tuyệt đối nên (xem Tập 3, 3.4.2 3) Mệnh đề 3) họ $\left(a_p z^p b_q z^q\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng. Với mọi $p,q \in (\mathbb{N} - \{0,1\})^2$ ta có $p+q \leq pq$ nên $\left|z^{pq}\right| \leq \left|z^p\right|\left|z^q\right|$. Từ đó họ $\left(a_p b_q z^{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}-\{0,1\})^2}$ khả tổng. Do các họ $\left(a_1 b_q z^q\right)_{q\geq 1}$ và $\left(a_p b_1 z^p\right)_{p\geq 2}$ khả tổng, ta kết luận rằng $\left(a_p b_q z^{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng.
Khi đó có thể ứng dụng định lý về đảo thứ tự lấy tổng (xem 3.4.2 3) Mệnh đề 2):

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} a_p b_q z^{pq} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} a_p b_q z^{pq} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\left(\sum_{q=1}^{+\infty} b_q (z^p)^q\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p),$$

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} a_p b_q z^{pq} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_p b_q z^{pq} = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p (z^q)^p\right) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q).$$

Ví dụ:

1) Lấy $a_p = \alpha^p$; $b_q = \beta^q$; từ đó $A(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p z^p = \sum_{p=1}^{+\infty} (\alpha z)^p = \dfrac{\alpha z}{1-\alpha z}$, $B(z) = \dfrac{\beta z}{1-\beta z}$ và

vậy $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \alpha^p \frac{\beta z^p}{1-\beta z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \beta^q \frac{\alpha z^q}{1-\alpha z^q}$.

Đơn giản cho $\alpha\beta z$ (các trường hợp $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $z = 0$ được khảo sát trực tiếp), ta kết luận:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{p-1} z^p}{1-\beta z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\beta^{q-1} z^q}{1-\alpha z^q}.$$

2) • Thay α bởi 1 và β bởi -1 trong kết quả trên (và nhân với z), ta được:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1+z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{q-1} z^q}{1-z^q}.$$

• **Lấy** $a_p = 1$ và $b_q = q$, ta được: $A(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \dfrac{z}{1-z}$ và $B(z) = \sum_{q=1}^{+\infty} \dfrac{z}{(1-z)^2}$,

từ đó: $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1-z^p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q) = \sum_{q=1}^{+\infty} q \frac{z^q}{1-z^q}$.

• **Lấy** $a_p = 1$ và $b_q = (-1)^{q-1} q$, ta được:

$$A(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z} \text{ và } B(z) = -\sum_{q=1}^{+\infty} q(-z^q) = \frac{z}{(1+z)^2}.$$

từ đó: $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1+z^p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q) = \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q-1} q \frac{z^q}{1-z^q}$.

5.3.1 Giả sử rằng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, với $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu

$f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto a_n x^n\end{array}$.

Theo 4.3.1, Mệnh đề 2, có N sao cho với mọi $n \geq N$, f_n bị chặn. Nhưng rõ ràng rằng với $n \geq 1$, f_n bị chặn nếu và chỉ nếu $a_n = 0$. Điều ngược lại có tức khắc.

◊ **Trả lời:** $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ hội tụ đều nếu và chỉ nếu $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n = 0$;

5.3.2 • Các tính chất $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$ và $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$ có ngay tức khắc. Cho $P \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $\|P\| = 0$. Khi đó P có bậc $\leq N$, triệt tiêu tại ít nhất $n + 1$ điểm phân biệt $(z_1, ..., z_N)$ nên $P = 0$.

• Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, Q_n, R_n theo thứ tự là thương và phần dư *Euclid* của S_n chia cho A: $S_n = AQ_n + R_n$, $R_n \in \mathbb{C}_N[X]$.

Ta sẽ chứng minh rằng $(R_n)_{n\geq 0}$ là dãy *Cauchy* trong $(\mathbb{C}_N[X], \|.\|)$.

Ký hiệu $\rho = \underset{0\leq k\leq N}{\mathrm{Max}} |z_k|$. Dãy $(S_n)_{n\geq 0}$ hội tụ đều trong $B'(0, \rho)$ (vì $0 \leq \rho < R$) và với mọi $(n,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|R_{n+q} - R_n\| = \sum_{k=0}^{N} \left|R_{n+q}(z_k) - R_n(z_k)\right| = \sum_{k=0}^{N} \left|S_{n+q}(z_k) - S_n(z_k)\right|$$

$$\leq (N+1) \sup_{|z|\leq \rho} \left|S_{n+q}(z) - S_n(z)\right|,$$

từ đó: $\|R_{n+q} - R_n\| \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Do $(R_n)_{n\geq 0}$ là dãy *Cauchy* trong $(\mathbb{C}_N[X], \|.\|)$ và do $\mathbb{C}_N[X]$ có số chiều hữu hạn nên $(R_n)_{n\geq 0}$ hội tụ trong $(\mathbb{C}_N[X], \|.\|)$ (xem Tập 3, 1.4.2 Định lý 2).

5.4.1 *a)* $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

◊ **Trả lời:** 1.

b) Tại 1: $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ và $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

Tại -1: $(-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underset{n\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

◊ **Trả lời:** hội tụ tại -1 và phân kỳ tại 1 .

c) Theo 5.4, Định lý 1, S liên tục trên $]-1;1[$. Do chuỗi hội tụ tại -1, có thể đặt

$$S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Với $x \in [-1;0]$, chuỗi số $\sum_{n\geq 1}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu nên:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right| \leq \left|\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} x^{n+1}\right| \leq \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Từ đó suy ra rằng chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1}\left(x \mapsto \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right)$ hội tụ đều trên $[-1;0]$ và vậy S liên tục tại -1.

◊ **Trả lời:** S liên tục trên $[-1;1[$.

d) Với mọi $x \in]0;1[$, ta có:

$$(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1} = x\sin 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n.$$

Vì:

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\underset{n\infty}{0}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}+\underset{n\infty}{0}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)=\underset{n\infty}{0}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

nên chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1}\left(x\mapsto\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n\right)$ hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên $[-1;1]$. Từ đó suy ra:

$$(1-x)S(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\sin 1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)=0\,.$$

5.5.1 Một chiều là hiển nhiên.

Ngược lại, nếu h ktdCTL(0) thì h thuộc lớp C^∞ trong lân cận của 0 và:

$$\forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}(0)=h^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)\,.$$

Từ đó suy ra rằng trong lân cận của 0:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=g(x)\,.$$

5.5.2 Cho $f\in D$, $\varepsilon>0$, hãy chứng minh $B(f,\varepsilon)\not\subset D$.

Xét $\varphi:[-1;1]\to\mathbb{R}$ xác định bởi: $\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0.\end{cases}$

Ta có: $\varphi\in E$ và $\|\varphi\|_\infty=e^{-1}<1$, từ đó $f+\varepsilon\varphi\in B(f,\varepsilon)$.

Nhưng (xem 5.5.1, Nhận xét), φ không ktdCTL(0) nên $f+\varepsilon\varphi$ cũng thế và vậy $f+\varepsilon\varphi\notin D$.

Ta có thể nhận xét tổng quát hơn rằng D là $\mathbb{R}$ - kgvc của E, khác E và vậy $\overset{0}{D}=\varnothing$.

5.5.3 **Ký hiệu** $P=aX^2+bX+c$, $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3, a\neq 0$.

Ánh xạ f là ktdCTL(0) (do là tích $f(x)=e^{aX^2}e^{bX}e^c$) vậy thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và:

$$f'=fP'$$
$$f''=f'P'+fP''$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}=(f')^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f^{(n-1-k)}(P')^{(k)}=f^{(n-1)}P'+(n-1)f^{(n-1)}P''$$

Ký hiệu $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ là KTCTL(0) ; giả sử rằng có $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $a_{n_0}=a_{n_0+1}=0$.

Khi đó: $\forall n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\dfrac{P'(0)}{n}+\dfrac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}\dfrac{P''(0)}{n}$,

và bằng một quy nạp đơn giản, suy ra: $\forall n\geq n_0$, $a_n=0$.

Khi đó f là một đa thức (có bậc $\leq n_0-1$); vì $f=e^P$, bằng cách so sánh dáng điệu ở $+\infty$ suy ra một mâu thuẫn.

5.5.4 Ánh xạ f thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$ và $f'' = (P'^2 + P'')e^P$.

Nói riêng: $P''(x_0) = f''(x_0)e^{P(x_0)}$.
Vì các hệ số của KTCLT(0) của f đều ≥ 0 nên các hệ số của KTCLT(0) của f'' cũng thế và vậy $f''(x_0) \geq 0$. Cuối cùng: $P''(x_0) = f''(x_0)e^{-P(x_0)} \geq 0$

5.5.5 Ký hiệu $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ là các KTCLT(0) của f, g thì:

$$fg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ trong đó: } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Giả sử rằng với mọi $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f|_V \neq 0$ và $g|_V \neq 0$. Do tính duy nhất của KTCLT(0) của hàm không, ta có: $(a_n)_n \neq 0, (b_n)_n \neq 0$. Vậy có $n_1 = \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq 0\}$ và $n_2 = \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N}; b_n \neq 0\}$. Khi đó:
$C_{n_1+n_2} = a_0 b_{n_1+n_2} + ... + a_{n-1}b_{n_2+1} + a_{n_1}b_{n_2} + a_{n_1+1}b_{n_2-1} + ... + a_{n_1+n_2}b_0 = a_{n_1}b_{n_2} \neq 0$,
suy ra một mâu thuẫn.
Có thể tóm tắt kết quả của bài tập bởi: vành các (mầm) hàm ktdCTL(0) là vành nguyên

5.5.6 Trước hết, nhận xét rằng $\forall k \in \{1,...,n\}, z_k \neq 0$: (vì $a_0 \neq 0$). Ký hiệu $\rho = \underset{1\leq k\leq n}{\mathrm{Min}} |z_k| > 0$. Với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \rho$, ta có:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-z_k} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{z_k}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{z_k}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{z_k}\right)^q\right) = -\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k^{q+1}}\right)z^q = -\sum_{q=0}^{+\infty} S_{q+1}z^q$$

Vậy với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \rho$, ta có:

$$P'(z) = -P(z)\sum_{q=0}^{+\infty} S_{q+1}z^q.$$

Cho $p \in \mathbb{N}$ cố định. Do tính duy nhất của KTCLT(0), có thể "đồng nhất" các số hạng chứa z^{p-1} trong hệ thức trên đây, từ đó: $pa_p = -\sum_{q=1}^{p} a_{p-q}S_q$.

Ứng dụng:

- $S_1 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{z^k} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4} = -1$.
- $2a_2 + a_1 S_1 + a_0 S_2 = 0$, từ đó $S_2 = -1$.
- $3a_3 + a_2 S_1 + a_1 S_2 + a_0 S_3 = 0$, từ đó $S_3 = 2$.

◊ **Trả lời:** 2.

5.5.7
a) Dấu hiệu *d'Alembert* chứng tỏ rằng bán kính bằng 1. Trong các tính toán sau: $z \in \mathbb{C}$ và

$|z| < 1$.

Ta biết (chuỗi cấp số nhân): $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, từ đó, bằng cách lấy đạo hàm:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n, \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)z^n, \frac{6}{(1-z)^4} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)(n+2)(n+1)z^n.$$

Ký hiệu $P_0 = 1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = (X+2)(X+1)$, $P_3 = (X+3)(X+2)(X+1)$ thì ta thấy rằng (P_0, P_1, P_2, P_3) là một cơ sở của $\mathbb{R}_3[X]$. Nói riêng ta có phân tích sau:

$$X^3 = P_3 - 6X^2 - 11X - 6 = P_3 - 6P_2 + 7X + 6 = P_3 - 6P_2 + 7P_1 - P_0.$$

Từ đó: $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n = \frac{6}{(1-z)^4} - \frac{12}{(1-z)^3} + \frac{7}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}$.

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(z) = \frac{z + 4z^2 + z^3}{(1-z)^4}$.

Nhận xét: ta cũng có thể tính một cách tổng quát, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) z^n$ với mọi $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Trước hết: $R = 1$, Ký hiệu $u = -z^2$ thì với $|z| < 1$ ta có:

$$zS(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1\big)u^n$$

$$= \frac{2}{(1-u)^3} - \frac{3}{(1-u)^2} + \frac{1}{1-u} = \frac{u+u^2}{(1-u)^3} = \frac{z^4 - z^2}{(1+z^2)^3}.$$

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(z) = \frac{z^3 - z}{(1+z^2)^3}$.

c) Trước hết $R = 1$. Với $x \in]-1;1[- \{0\}$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n - 2 + \frac{6}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{6}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x}\ln(1-x).$$

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(x) = \begin{cases} \frac{-2+3x}{(1-x)^2} - \frac{6}{x}\ln(1-x) & \text{nếu } x \in]-1;0[\cup]0;1[\\ 4 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

d) ◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \ln(1-x^2)$.

e) Trước hết $R = 1$. Cho $x \in]-1;1[$.

Nếu $0 \le x < 1$, ký hiệu $t = \sqrt{x}$ thì:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2n-1} = \frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Nếu $-1 < x \le 0$, ký hiệu $t = \sqrt{-x}$ thì

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n-1} = -t\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{2p+1} = -t\,\text{Arctan}\,t = -\sqrt{-x}\,\text{Arctan}\sqrt{-x}\,.$$

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{nếu } x \in [0;1[\\ -\sqrt{-x}\,\text{Arctan}\sqrt{-x} & \text{nếu } x \in]-1;0[. \end{cases}$

f) Trước hết $R = 1$. Ta có: $\forall x \in]-1;1[,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \dfrac{1}{1-x^3}$,

từ đó với mọi $x \in]-1;1[$: $S(x) = S(0) + \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^3}$.

Để kết thúc, dùng một phân tích thành những phần tử đơn giản.

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(x) = -\dfrac{1}{3}\ln(1-x) + \dfrac{1}{6}\ln(1+x+x^2) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{Arctan}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

g) ◊ **Trả lời:** $R = 1, S(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2}\text{Arc}\tan x$.

h) Trước hết $R = 1$. Với $x \in]-1;1[$:

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)x^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^{2n-2}}{n}.$$

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2} - x^2\right)\ln(1-x^2) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{4} & \text{nếu } x \in]-1;0[\cup]0;1[\\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

i) Trước hết $R = 1$. Rồi phân tích $\dfrac{1}{n(n+3)}$ thành những phần tử đơn giản.

◊ **Trả lời:** $R = 1,\ S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^3} - 1\right)\ln(1-x) + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{3x^2} & \text{nếu } x \in]-1;0[\cup]0;1] \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

j) Trước hết $R = 1$. Một phân tích thành những phần tử đơn giản cho ta:

$$\frac{4n+1}{2n^2-n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n-1},$$

từ đó: $S = A + 2B$, trong đó $A(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$, $B(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1}$.

- $xA(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x$.
- *1)* Nếu $x > 0$, ký hiệu $t = \sqrt{x}$ thì:

$$B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2n-1} = \frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

2) Nếu $x < 0$, ký hiệu $t = \sqrt{-x}$ thì

$$B(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2n-1}=-t\,\mathrm{Arctan}\,t=-\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{-x}\,.$$

◊ **Trả lời:** $R=1,\ S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)-1+\sqrt{x}\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{nếu } x\in]0;1[\\ -\dfrac{1}{x}\ln(1-x)-1-2\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{-x} & \text{nếu } x\in]-1;0[\\ 0 & \text{nếu } x=0.\end{cases}$

k) ◊ **Trả lời:** $R=1,\ S(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$.

l) ◊ **Trả lời:** $R=1,\ S(x)=-\dfrac{x^2+1}{2}\mathrm{Arctan}\,x+\dfrac{x}{2}$.

m) Trước hết: $R=1$. Rồi nhận xét $S(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)n(n-1)}$ và phân tích $\dfrac{1}{(n+1)n(n-1)}$ thành những phần tử đơn giản.

◊ **Trả lời:** $R=1,\ S(x)=-\dfrac{(1-x)^2}{2}\ln(1-x)-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{4}$.

n) Các chuỗi $\displaystyle\sum_{p\ge0}4^{2p}z^{2p}$ và $\displaystyle\sum_{p\ge0}2^{2p+1}z^{2p+1}$ rời nhau và có bán kính theo thứ tự là $\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}$ nên $R=\dfrac{1}{4}$.

Rồi $S(z)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}4^{2p}z^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}2^{2p+1}z^{2p+1}=\frac{1}{1-16z^2}+2z\frac{1}{1-4z^2}$.

◊ **Trả lời:** $R=\dfrac{1}{4},\ S(z)=\dfrac{1}{1-16z^2}+\dfrac{2z}{1-4z^2}$.

o) $R=\dfrac{1}{\sqrt3}$ (chẳng hạn bởi dấu hiệu *d'Alembert*).

Rồi: $3S(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-n-3)(3z^2)^n$.

Ta có: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^n=\frac{1}{1-t},\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n=\frac{1}{(1-t)^2},\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)t^n=\frac{2}{(1-t)^3}$.

Phân tích $n^2-n-3=(n+2)(n+1)-4(n+1)-1$ và đặt $t=3z^2$

◊ **Trả lời:** $R=\dfrac{1}{\sqrt3},\ S(z)=\dfrac{-1+6z^2-3z^4}{(1-3z^2)^3}$.

p) ◊ **Trả lời:** $R=1,\ S(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\ln(1-x^2)$.

q) Trước hết, $R=\infty$.

Phân tích n^3 theo $1,n,n(n-1),n(n-1)(n-2)$:

$$n^3+1=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n+1\,,$$

từ đó: $S(x)=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^3}{(n-3)!}+3\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=x^3e^x+3x^2e^x+xe^x+e^x$.

◊ **Trả lời:** $R=\infty$, $S(x)=(x^3+3x^2+x+1)e^x$.

Nhận xét: Bằng cách như thế, ta có thể tính một cách tổng quát $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$ với mọi $P\in\mathbb{R}[X]$

(và cả $P\in\mathbb{C}[X]$, xem 5.6.1).

r) Trước hết: $R=\infty$.

• Nếu $x\ge 0$, ký hiệu $t=\sqrt{x}$ thì: $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\operatorname{ch}t=\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

• Nếu $x\le 0$, ký hiệu $t=\sqrt{-x}$ thì $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos t=\cos\sqrt{-x}$.

◊ **Trả lời:** $R=\infty$, $S(x)=\begin{cases}\operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{nếu } x\ge 0\\ \cos\sqrt{-x} & \text{nếu } x\le 0\end{cases}$.

s) Với $|x|<1$, các chuỗi hội tụ và:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\cos n\theta x^n+i\sum_{n=0}^{+\infty}\sin n\theta x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{in\theta}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{i\theta}x\right)^n=\frac{1}{1-e^{i\theta}x}$$

$$=\frac{1-e^{-i\theta}x}{(1-e^{i\theta}x)(1-e^{-i\theta}x)}=\frac{(1-x\cos\theta)+ix\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

◊ **Trả lời:** • Với $\sum_{n\ge 0}\cos n\theta x^n$: $R=1$ và $S(x)=\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

• Với $\sum_{n\ge 0}\sin n\theta x^n$, $R=\begin{cases}1 \text{ nếu } \theta\notin\pi\mathbf{Z}\\ \infty \text{ nếu } \theta\in\pi\mathbf{Z}\end{cases}$,

và $\begin{cases}S(x)=\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} & \text{nếu } \theta\notin\pi\mathbf{Z}\\ S(x)=0 & \text{nếu } \theta\in\pi\mathbf{Z}.\end{cases}$

t) Các bán kính cũng giống như ở câu *s)*.

Với $x\in\,]-1;1[$, ký hiệu $S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}x^n$, $S_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$.

• Ta có: $xS_1'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos n\theta x^n=\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}-1=\frac{x\cos\theta-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$,

từ đó $S_1'(x)=\frac{\cos\theta-x}{1-2x\cos\theta+x^2}$ nếu $x\ne 0$ (và $S_1'(0)=\cos\theta$), rồi:

$$S_1(x)=S_1(0)+\int_0^x\frac{\cos\theta-t}{1-2t\cos\theta+t^2}dt=-\frac{1}{2}\Big[\ln(1-2t\cos\theta+t^2)\Big]_0^x.$$

• Lập luận một cách tương tự cho S_2.

◊ **Trả lời:** • Với $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\theta}{n}x^n$: $R=1$ và $S(x)=-\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$

• Với $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$: $R=\begin{cases}1 \text{ nếu } \theta\notin\pi\mathbb{Z}\\ \infty \text{ nếu } \theta\in\pi\mathbb{Z}\end{cases}$ và

$$S(x)=\begin{cases}\text{Arctan}\left(\dfrac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\text{Arctan}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} & \text{nếu } \theta\notin\pi\mathbb{Z}\\ 0 & \text{nếu } \theta\in\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

u) $\cos^2 n=\frac{1}{2}(1+\cos 2n)$.

◊ **Trả lời:** $R=1$, $S(x)=\dfrac{1}{2(1-x)}+\dfrac{1-x\cos 2}{2(1-2x\cos 2+x^2)}$.

v) ◊ **Trả lời:** $R=\dfrac{1}{e}$, $S(x)=\dfrac{ex}{2(1-ex)^2}-\dfrac{e^{-1}x}{2(1-e^{-1}x)^2}$.

w) Các chuỗi luỹ thừa $\sum_{p\geq 0}2^{-3p}z^{3p}$ và $\sum_{p\geq 0}2^{3p+2}z^{3p+2}$ rời nhau và có bán kính theo thứ tự là 2 và $\frac{1}{3}$, từ đó $R=\frac{1}{3}$,

và: $S(z)=\sum_{p=0}^{+\infty}(2^{-3}z^3)^p+\sum_{p=0}^{+\infty}(3z)^2(3^3z^3)^p$.

◊ **Trả lời:** $R=\dfrac{1}{3}$, $S(z)=\dfrac{8}{8-z^3}+\dfrac{9z^2}{1-27z^3}$.

5.5.8 *a)* Phân tích thành những phần tử đơn giản thuộc $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{X^2-X+2}{X^4-5X^2+4}=-\frac{1}{3}\frac{1}{X-1}+\frac{2}{3}\frac{1}{X+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{X-2}-\frac{2}{3}\frac{1}{X+2}.$$

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-1)^n-\frac{1}{6}\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)x^n$, $R=1$.

b) Các cực điểm của f là các căn bậc 4 của 1 mà khác 1, từ đó $R=1$. Nhận xét:

$$\forall x\in]-1;1[, f(x)=\frac{(1-x)^3}{(1-x^4)^3}=\frac{1}{2}(1-x)^3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^{4n}.$$

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, trong đó

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}(p+2)(p+1) & \text{nếu } n=4p\\ -\frac{3}{2}(p+2)(p+1) & \text{nếu } n=4p+1\\ \frac{3}{2}(p+2)(p+1) & \text{nếu } n=4p+2\\ -\frac{1}{2}(p+2)(p+1) & \text{nếu } n=4p+3\end{cases},\quad p\in\mathbb{N}, R=1.$$

c) Trường hợp $\theta = 0$ được khảo sát trực tiếp nên có thể giả sử $\theta \neq 0$. Các cực điểm của phân thức hữu tỷ là e^{θ} và $e^{-\theta}$, từ đó $R = e^{-|\theta|}$ và:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\theta}}{x - e^{\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{x - e^{-\theta}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - xe^{-\theta}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - xe^{\theta}}.$$

◊ **Trả lời:** • Nếu $\theta \neq 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh} n\theta x^n$, $R = e^{-|\theta|}$

• Nếu $\theta = 0$ thì $f = 0$.

So sánh với bài tập 5.5.7 *s)*.

d) Giả sử $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$, khi đó $R = 1$ và:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \frac{1}{(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})} = \frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\sin\theta}\left(-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{-i\theta}\right)^n + e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{i\theta}\right)^n\right) = \frac{1}{2i\sin\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} 2i\sin(n+1)\theta x^n.$$

◊ **Trả lời:** • Nếu $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}x^n$, $R = 1$.

• Nếu $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$, $R = 1$.

• Nếu $\theta \in \pi + 2\pi\mathbf{Z}$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$, $R = 1$.

So sánh với bài tập 5.5.7 *s)*.

e) Nhận xét: $f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ nếu n = 2p và nếu n = 2p+1; $R = 1$.

f) ◊ **Trả lời:** $f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)n}x^n$, $R = 1$.

g) ◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n H_{n+1}x^n$ (trong đó $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$), $R = 1$.

h) Nhận xét: Đối với các x (mà ta cần chỉ rõ)

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$$

◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, trong đó $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{nếu } n \not\equiv 0[3] \\ -\frac{2}{n} & \text{nếu } n \equiv 0[3] \end{cases}$; $R = 1$

i) ◊ **Trả lời:**

• Nếu $q \leq 0$, f không ktdCLT(0).

• Nếu $q > 0$, f ktdCLT(0) và $f(x) = \ln q - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_1^{-n} + x_2^{-n}}{n}x^n$, $R = 1$, trong đó x_1, x_2 là các không điểm (thực) của $X^2 + pX + q$, $R = \mathrm{Min}(|x_1|,|x_2|)$.

j) Nhận xét:(Đối với các x mà ta cần chỉ rõ)

$$f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) - \ln(1+x^2).$$

◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, trong đó :

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-1+(-1)^p}{3p} & \text{nếu } n = 6p \\ \dfrac{1}{6p+1} & \text{nếu } n = 6p+1 \\ \dfrac{1+2(-1)^{p+1}}{6p+2} & \text{nếu } n = 6p+2 \\ -\dfrac{2}{6p+3} & \text{nếu } n = 6p+3 \\ \dfrac{1+2(-1)^p}{6p+4} & \text{nếu } n = 6p+4 \\ \dfrac{1}{6p+5} & \text{nếu } n = 6p+5. \end{cases} ; R = 1$$

k) ◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, trong đó $a_n = \begin{cases} \dfrac{-1+2(-1)^p}{2p} & \text{nếu } n = 2p \\ -\dfrac{1}{2p+1} & \text{nếu } n = 2p+1 \end{cases}$;$R = 1$.

l) Ánh xạ f xác định trên $[-1;1]$, có đạo hàm trên $]-1;1[$ và sau một số tính toán:

$$\forall x \in]-1;1[-\{0\},\ f'(x) = \frac{1}{2x}\left(1-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

◊ **Trả lời:** $f(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{2.4....(2n)} \frac{1}{4n} x^{2n}$, $R = 1$.

m) Tuyến tính hoá: $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$.

◊ **Trả lời:**: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3^{2n+1}-3)(-1)^{n-1}}{4((2n+1)!)} x^{2n+1}$; $R = \infty$.

n) Với $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} = \frac{1}{4x^3}\left(3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-3^{2n+1}}{4(2n+1)!}(-1)^n x^{2n-2}.$$

Kết quả vừa tìm được cũng đúng cho $x = 0$.

◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3-3^{2n+3}}{4((2n+3)!)} x^{2n}$, $R = \infty$.

o) Giống như ở *n)*:

◊ **Trả lời:** $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n (2^{2n+2}-1)}{(2n+4)!} x^{2n}$, $R = \infty$.

p) f có đạo hàm trên $\mathbb{R} - \{4\}$ và $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$, từ đó với $x \in \,]-\infty;4[$:

$f(x) = f(0) - \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{2}$.

◊ **Trả lời:** $f(x) = -\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}x^{2n+1}$; $R = 2$.

q) f có đạo hàm trên $\mathbb{R} - \{-1\}$ và sau khi tính toán: $f'(x) = \dfrac{-\sin 2\alpha}{1+2x\cos 2\alpha + x^2}$

Có thể sử dụng bài tập 5.5.7 *s)*.

◊ **Trả lời:** $f(x) = \alpha + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin 2n\alpha\, x^n$; $R = 1$ nếu $\alpha \neq 0$, $R = \infty$ nếu $\alpha = 0$.

r) Chứng minh rằng f' thoả mãn phương trình vi phân: $(1-x^2)y' - xy - 2 = 0$ trên $]-1;1[$.

◊ **Trả lời:**: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!(n+1)}x^{2n+2}$; $R = 1$.

s) Chứng minh rằng f thoả mãn phương trình vi phân $(1-x^2)y'' - xy' - a^2y = 0$ trên $]-1;1[$.

◊ **Trả lời:** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$; trong đó với mọi $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2+a^2) \text{ nếu } p \geq 1 \text{ và } a_0 = e^{a\frac{\pi}{2}} \\ a_{2p+1} = \dfrac{-aa_0}{(2p+1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2+a^2) \end{cases} ;\ R = 1.$$

t) Ký hiệu $f(x) = e^{x\operatorname{ch}a}\operatorname{ch}(x\operatorname{sh}a)$, $g(x) = e^{x\operatorname{ch}a}\operatorname{sh}(x\operatorname{sh}a)$, $u = f+g$, $v = f-g$ thì ta có:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = e^{x(\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}a)} = e^{xe^a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xe^a)^n}{n!} \text{ và tương tự cho } v(x).$$

◊ **Trả lời:** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{ch}na}{n!}x^n$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}na}{n!}x^n$; $R = \infty$.

u) f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = \sin(x^2)$.

◊ **Trả lời:** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$; $R = \infty$

v) • $\dfrac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ nên tích phân $\displaystyle\int_0^x \dfrac{e^t-1}{t}dt$ tồn tại với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{e^x-1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$, khai triển đó cũng đúng cho $x = 0$.

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n.n!}$; $R=\infty$

w) f có đạo hàm trên $\mathbb{R}^*$ và: $\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=2\frac{\operatorname{ch}2x}{2x}-\frac{\operatorname{ch}x}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}-1}{(2n)!}x^{2n-1}$, khai triển cũng đúng tại 0.

Mặt khác: $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{t}+\int_x^{2x}\frac{\operatorname{ch}t-1}{t}dt$ và $\int_x^{2x}\frac{\operatorname{ch}t-1}{t}dt\xrightarrow[x\to 0]{}0$ vì $t\mapsto\frac{\operatorname{ch}t-1}{t}$ bị chặn trong lân cận của 0, từ đó $f(0)=\ln 2$.

◊ **Trả lời:** $f(x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}-1}{(2n)(2n)!}x^{2n}$; $R=1$.

x) Chứng minh rằng f thoả mãn phương trình vi phân $y'+xy=1$ trên $\mathbb{R}$.

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1.3...(2n+1)}x^{2n+1}$; $R=\infty$.

y) Với $x\in\,]-1;1[$ cố định, chuỗi ánh xạ liên tục $\sum_{n\geq 1}\left(t\mapsto\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x\sin^2 t)^n\right)$ hội tụ chuẩn tắc do đó đều trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Theo 4.3.4, Định lý, suy ra:

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\sin^{2n}t\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt\right)x^n.$$

Ta đã biết (tích phân Wallis, Tập 1, 6.4.4, ví dụ 1)).

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\pi\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{(2^n n!)^2}x^n$; $R=1$.

z) Cùng phương pháp như ở *y)*.

◊ **Trả lời:** $f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n((2n)!)^2}{(2^n n!)^4}x^{2n}$; $R=1$.

a') Cùng phương pháp như ở *y)*.

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$; $R=1$.

5.5.9 Đưa vào một chuỗi luỹ thừa rồi lấy giá trị của tổng của nó tại một số điểm đặc biệt

a) Thay z bởi $\frac{1}{2}$ trong kết quả của bài tập 5.5.7 *a)*.

◊ **Trả lời:** 26.

b) Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}$ có bán kính 1 và tổng của nó, mà ta ký hiệu là S, thoả mãn: $\forall x \in]-1;1[-\{0\}$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n+1}\right)x^{2n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^2}.$$

Vì chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}\left(x \mapsto \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}\right)$ hội tụ chuẩn tắc trên $]-1;1]$, tổng của nó liên tục tại 1 nên:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 2\ln 2.$$

◊ **Trả lời:** 2ln2.

c) Theo bài tập 5.5.7. *k)*, ta có:

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

Vì chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 2}\left(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\right)$ hội tụ chuẩn tắc trên $[-1;1]$, ta suy ra:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x\to 1^-}\left((1+x)\ln(1+x) - x\right).$$

◊ **Trả lời:** $2\ln 2 - 1$.

d) Thay x bởi $-x$ trong kết quả của bài tập 5.5.7 *q)*.

◊ **Trả lời:** $\frac{2}{e}$.

e) Theo bài tập 5.5.7 *f)*:

$$\forall x \in]-1;1[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} = -\frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Với $x \in [-1;0]$, chuỗi số $\sum_{N\geq 0}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu, nên:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right| \leq \left|\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right| \leq \frac{1}{3n+4}.$$

Điều đó chứng tỏ chuỗi ánh xạ liên tục $\sum_{N\geq 0}\left(x \mapsto \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)$ hội tụ đều trên $[-1;0]$ và vậy

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1} = \lim_{x\to 1^+} S(x).$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(6n+5)}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6n+2}-\frac{1}{6n+5}\right)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$.

Xét chuỗi luỹ thừa $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{3n+2}}{3n+2}$ và lập luận như trong lời giải của *e)*.

◊ **Trả lời:** $-\dfrac{2\ln 2}{9}+\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

g) Xét chuỗi luỹ thừa $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2^{2n}}x^n$ và lập luận như trong lời giải của *e)*.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.5.10

$$\forall x\in\mathbf{R}^*, f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}.$$

Khai triển đó cũng đúng tại $x = 0$. Đều đó chứng tỏ f ktdCTL(0), có bán kính ∞ và vậy f thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbf{R}$.

5.5.11 ◊ **Trả lời:**

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n$ hội tụ đơn trên $\left]\frac{1}{2};1\right[$, không hội tụ đều trên $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ cũng như trên $\left[\frac{3}{4};1\right[$, nhưng hội tụ chuẩn tắc trên mọi $[a;b]$ sao cho $\dfrac{1}{2}<a<b<1$.

- $\forall x\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{2x-1}$.

5.5.12 Chuỗi hội tụ nếu và chỉ nếu $|x|<1$ và với mọi $x\in\left]-1;1\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}9(n+2)(n+1)x^n-21\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

$$=9\frac{2}{(1-x)^3}-21\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}=\frac{4x^2+13x+1}{(1-x)^3}.$$

◊ **Trả lời:** $\left\{\dfrac{-13+\sqrt{153}}{8}\right\}$.

5.5.13 *a)* Tách thành các trường hợp: $|a|<|b|$, $|a|=|b|$, $|a|>|b|$.

◊ **Trả lời:** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}(a^n+b^n)$ hội tụ nếu và chỉ nếu $|a|\leq 1$ và $|b|\leq 1$.

b)

- $\begin{cases}|a|\le 1\\ |b|\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\le 1\\ x\ne 1\\ |x|\le |1-x|\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

- Ánh xạ $\varphi:[-1;1] \to \mathbf{R}$, $x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ thuộc lớp C^1 trên $]-1;1[$ và:

$$\forall x\in]-1;1[-\{0\}, \varphi'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

Vậy ánh xạ $S:[-1;1]\to \mathbf{R}$, $x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(x^n+\left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$ thuộc lớp C^1 trên $\left]-1;\frac{1}{2}\right[$ và:

$$\forall x\in \left]-1;\frac{1}{2}\right[-\{0\}, S'(x)=\varphi'(x)-\frac{1}{(1-x)^2}\varphi'\left(-\frac{x}{1-x}\right)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{x(1-x)}\ln(1-x)=\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Vì S' liên tục tại 0, ta suy ra: $\forall x\in \left]-1;\frac{1}{2}\right[, S'(x)=\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Rồi: $\forall x\in \left]-1;\frac{1}{2}\right[, S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)dt=-\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$.

Do tính chất hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) của chuỗi ánh xạ liên tục $\sum_{n\ge 1}\left(x\mapsto \frac{1}{n^2}\left(x^n+\left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)\right)$ trên $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$, ta kết luận:

$$\forall x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right], S(x)=-\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2.$$

◊ **Trả lời:** $\forall x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right], S(x)=-\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$.

5.5.14 ◊ **Trả lời:** $\sum_{n\ge 1}\frac{a^n(1+b^n)}{n}$ (với $(a,b)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$) hội tụ nếu và chỉ nếu $0<a<1$ và $0<ab<1$. Trong trường hợp đó, tổng của nó là: $-\ln(1-a)-\ln(1-ab)$.

5.5.15 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}\rho^n+i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\rho^n$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)+i\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\rho-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\arctan\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) & \text{nếu } \theta\ne 0\\ -\ln(1-\rho) \quad \text{nếu } \theta=0.\end{cases}$

5.5.16 Theo bài tập 5.5.8 *d)* (hay 5.5.7 *s)*):

$$\forall\theta\in\mathbf{R}, \forall x\in]-1;1[, \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n+1)\theta\, x^n.$$

Với $x \in]-1;1[$ cố định, chuỗi ánh xạ liên tục $\sum_{n\geq 0}\left(\theta \mapsto \sin(n+1)\theta \sin k\theta x^n\right)$ hội tụ chuẩn tắc, do đó đều trên $[0;\pi]$; từ đó:

$$I_k(x) = \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\theta \sin k\theta x^n\right) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,k} x^n ,$$

trong đó:

$$I_{n,k} = \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin k\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(n+1-k)\theta - \cos(n+1+k)\theta\right) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \neq n+1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{nếu } k = n+1. \end{cases}$$

Với $|x| > 1$, nhận xét *rằng* $I_k(x) = \frac{1}{x^2} I_k\left(\frac{1}{x}\right)$.

◊ **Trả lời:** $I_k(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x^{k-1} & \text{nếu } |x| < 1 \\ \frac{\pi}{2} x^{-k-1} & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$

5.5.17 Với $x \in]-1;1[$ cố định, chuỗi ánh xạ liên tục $\sum_{n\geq 1}\left(t \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \sin^{2n-2} t\right)$ hội tụ chuẩn tắc, vậy đều, trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, từ đó:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sin^{2n} t x^{n+1}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt\right) x^{n+1}.$$

Đã biết tích phân Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$ (xem Tập 1, 6.4.4, ví dụ 1): $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Suy ra: $\forall x \in]-1;1[, \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n+1)(2^n n!)^2} x^{n+1}$

và ta nhận biết KTCLT(0) của $\sqrt{1+x} - 1$.

5.5.18 Khai triển hàm số (dưới dấu tích phân) thành một chuỗi hàm rồi chứng minh có thể hoán vị $\int$ và $\sum$ (xem 4.3.4).

a) Chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1} f_n$ trong đó $f_0 : \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array}$ và $f_n : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{n!} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \end{array}$ $(n \geq 1)$ hội tụ chuẩn tắc trên $[0;1]$ vì: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0;1], |f_n(x)| = (-x\ln x)\frac{x^{n-1}}{n!}$ và vì $x \mapsto \begin{cases} -x\ln x & \text{nếu } x \in]0;1] \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ bị chặn trên $[0;1]$.

Vậy ta có: $\int_0^1 e^x \ln x\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Tính: $\int_0^1 x^n \ln x\mathrm{d}x$ nhờ một tích phân từng phần.

b) Ta có: $\forall x \in]0;1[, \frac{(\ln x)^k}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln x)^k$.

Vậy xét chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1} f_n$ trong đó $f_n : [0;1[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^n(\ln x)^k & \text{nếu } x\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$ $(n \geq 1)$ và $f_0 :]0;1[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto (\ln x)^k$.

Rõ ràng rằng $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ đơn trên $[0;1[$ và:

$$\forall x \in]0;1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x) = (\ln x)^k \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{x(\ln x)^k}{1-x} x^n .$$

Ánh xạ $x \mapsto \frac{x(\ln x)^k}{1-x}$ có thể thác triển liên tục tại 0 và 1, vậy là bị chặn trên $]0;1[$; có $\mathrm{M}_k \in \mathbf{R}_+$ sao cho: $\forall x \in]0;1[, \left|\frac{x(\ln x)^k}{1-x}\right| \leq M_k$.

Khi đó ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x\right| \leq M_k \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{M_k}{n+1}$ điều đó chứng tỏ (xem 4.3.4, Nhận xét) rằng $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ hội tụ và:

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n (\ln x)^k \mathrm{d}x .$$

Tính $\int_0^1 x^n (\ln x)^k \mathrm{d}x$ nhờ một tích phân từng phần.

c) Ta có: $\forall x \in]0;1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{4n}$.

Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} \frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)} x^{4n+1}$ hội tụ chuẩn tắc trên $[0;1]$ và theo công thức Stirling (Tập 3, 3.3.7, 4)): $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}}$.

Vậy tổng S của nó liên tục trên $[-1;1]$; nói riêng:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) .$$

Mặt khác, $S(0) = 0$ và S thuộc lớp C^1 trên $]-1;1[$ và:

$$\forall x \in]-1;1[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{4n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Ta kết luận: $S(1) = S(0) + \int_0^1 S'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$.

5.5.19 Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\alpha_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ thì với mọi $x \in]-1;1[$, ta có:

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ và } \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Sử dụng công thức Stirling $n! \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (xem tập 3, 3.3.7 4)), ta được $\alpha_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Điều đó chứng tỏ các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$ và $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$ hội tụ chuẩn tắc trên $[-1;1]$ và vậy các tổng liên tục trên $[-1;1]$. Vậy các KTCLT(0) của $\operatorname{Arcsin} x$ và $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ cũng đúng khi thay x bởi 1 (hay bởi -1):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} = \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

So sánh với lời giải bài tập 5.5.18 *c)*.

5.5.20 *a) Sử dụng dấu hiệu d'Alembert* cho chuỗi luỹ thừa:

b) $\forall x \in]-1;1[, S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \ln(p+1) x^{p+1}$

$$= x \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \left(\ln p + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right) x^p = -xS(x) + x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

c) Với $x \in [0;1]$, chuỗi số $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu. Vậy $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) x^k\right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$;

điều đó chứng tỏ chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$ hội tụ đều trên $[0;1]$. Vậy tổng A của nó liên tục tại 1, từ đó: $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

d) Với $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2^2.4^2....(2N)^2(2N+2)}{1.3^2....(2N+1)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!\sqrt{2N+1}}\sqrt{\frac{2N+2}{2N+1}}\right) \xrightarrow[N\infty]{} \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

◊ **Trả lời:** $\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$.

5.5.21 *a)* ◊ **Trả lời:** 1.

b) Theo bài tập 5.1.14, do $\frac{a_n}{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{a}{n}$, ta có: $S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n}x^n = -a\ln(1-x)$.

◊ **Trả lời:** $-a$.

5.5.22 *a)* ◊ **Trả lời:** ∞.

b) Theo bài tập 5.1.15, do $\frac{\frac{a_n}{n!}}{\frac{1}{n!}} \underset{n\infty}{\sim} a$ ta có: $\dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n} \xrightarrow[x\to\infty]{} a$.

◊ **Trả lời:** a.

5.5.23 Áp dụng bài tập 5.1.14 với $a_n = n^k$, $b_n = n(n-1)...(n-k+1)$ và

$$\sum_{n=k}^{+\infty} b_n x^n = x^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!\,x^k}{(1-x)^{k+1}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

5.5.24 Áp dụng bài tập 5.1.15 với $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{n!}$ và $b_n = \frac{e^{n-\frac{1}{2}}}{n!}$.

(vì $a_n = \frac{1}{n!}\exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n!}\exp\left(n-\frac{1}{2}+o(1)\right)$).

5.5.25 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, I_n = \int_a^b e^{it}\frac{(e^{it})^n-1}{e^{it}-1}dt = \int_a^b \frac{e^{i(n+1)t}}{e^{it}-1}dt - \int_a^b \frac{e^{it}}{e^{it}-1}dt$.

Theo bổ đề Lebesgue (Tập 1, 6.4.4, ví dụ 2)), do $t \mapsto \frac{1}{e^{it}-1}$ thuộc lớp C^1 trên $[a;b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{e^{i(n+1)t}}{e^{it}-1}dt \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Ta suy ra:

$$I_n \xrightarrow[n\infty]{} -\int_a^b \frac{e^{it}}{e^{it}-1}dt = -\int_a^b \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{2i\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{i}{2}\int_a^b \operatorname{cotan}\frac{t}{2}dt - \frac{1}{2}(b-a) = i\ln\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\frac{a}{2}} - \frac{1}{2}(b-a).$$

Mặt khác: $I_n = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b e^{ikt}dt = -i\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikb}}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ika}}{k}\right)$.

Từ đó ta kết luận rằng các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\ge1}\frac{e^{ina}}{n}$ và $\sum_{n\ge1}\frac{e^{inb}}{n}$ cùng tính cách và nếu chúng hội tụ thì ta có: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inb}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{ina}}{n}=-\ln\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\frac{a}{2}}-\frac{i}{2}(b-a)$.

b) Chuỗi $\sum_{n\ge1}\frac{e^{inb}}{n}$ hội tụ với $b=\pi$ và có tổng là: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\pi}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln2$ (xem 5.5.3 *4)* Nhận xét). Ta kết luận (xem *a*) rằng $\sum_{n\ge1}\frac{e^{ina}}{n}$ hội tụ và ta suy ra tổng của nó.

◊ **Trả lời:** $\forall a\in]0;2\pi[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{ina}}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{a}{2}\right)+\frac{i}{2}(\pi-a)$.

5.5.26 Với $n\in\mathbf{N}$, ký hiệu $f_n:\begin{array}{l}[0;1[\to\mathbf{C}\\ x\mapsto a_nx^n\end{array}$. Khi đó :

- với mọi $n\in\mathbf{N}$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;1[$,
- $\sum_{n\ge0}f_n$ hội tụ đơn trên $[0;1[$,
- $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ liên tục từng khúc trên $[0;1[$,
- $\sum_{n\ge0}\int_{[0;1[}|f_n|$ hội tụ vì với mọi $n\in\mathbf{N}$, $\int_{[0;1[}|f_n|=\int_0^1|a_n|x^n\mathrm{d}x=\frac{|a_n|}{n+1}$.

Theo định lý về lấy tích phân trên một khoảng đối với một chuỗi hàm số (xem 4.3.6, Định lý 2), S khả tích trên $[0;1[$ và: $\int_0^1S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}$.

5.5.27

- Với mọi $n\in\mathbf{N}$, S_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;1[$.
- Dãy $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tăng.
- Dãy $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ đơn đến f trên $[0;1[$.
- f liên tục từng khúc trên $[0;1[$.
- Dãy $\left(\int_{[0;1[}S_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ bị chặn trên bởi $\int_0^1f$.

Khi đó, theo định lý về hội tụ đơn điệu (4.1.6 định lý 1) ta có: $\int_0^1f=\lim_{n\infty}\int_0^1S_n$, từ đó:

$$\int_0^1|f-S_n|=\int_0^1(f-S_n)=\int_0^1f-\int_0^1S_n\xrightarrow[n\infty]{}0.$$

5.5.28 Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, e^{a^n z} - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(a^n z)^p}{p!}$.

Cho $z \in \mathbb{C}$, họ $\left(\frac{a^{np} z^p}{p!}\right)_{(n,p)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ khả tổng vì với mọi (n,p) thuộc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $np \geq n$ nên $\left|\frac{a^{np} z^p}{p!}\right| \leq |a^n| \frac{|z|^p}{p!}$ và các dãy $(|a|^n)_{n\geq 0}$ và $\left(\frac{|z|^p}{p!}\right)_{p\geq 1}$ khả tổng (xem tập 3, 3.4.2 3) Mệnh đề 3).

Từ đó, theo định lý về hoán vị (tập 3, 3.4.2 3) Mệnh đề 2) suy ra rằng với mọi $z \in \mathbb{C}$:

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(a^n z)^p}{p!} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a^p)^n\right)\frac{z^p}{p!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!(1-a^p)} z^p ,$$

và vậy f_a khai triển được thành chuỗi luỹ thừa tại 0 với bán kính vô tận.

◊ **Trả lời:** $\forall z \in \mathbb{C}, f_a(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!(1-a^p)} z^p$.

5.5.29 Cho $x \in]0;+\infty[$, $t = x - 1$. Ta có:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a^n}{x+n} = \frac{a^n}{(n+1)+t} = \frac{a^n}{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{n+1}} .$$

Giả sử $|t| < 1$. Khi đó:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a^n}{x+n} = \frac{a^n}{n+1}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{t}{n+1}\right)^p .$$

Họ $\left(\frac{a^n}{n+1}(-1)^p\left(\frac{t}{n+1}\right)^p\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ khả tổng vì với mọi $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left|\frac{a^n}{n+1}(-1)^p\left(\frac{t}{n+1}\right)^p\right| = \frac{|a|^n |t|^p}{(n+1)^{p+1}} \leq |a|^n |t|^p ,$$

và các dãy $(|a|^n)_{n\geq 0}$ và $(|t|^p)_{n\geq 0}$ khả tổng. Theo định lý về hoán vị các tổng (xem Tập 3, 3.4.2 3) Mệnh đề 2), ta suy ra:

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+1}(-1)^p\left(\frac{t}{n+1}\right)^p = \sum_{p=1}^{+\infty}\left((-1)^p \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{(n+1)^{p+1}}\right)t^p ,$$

điều đó chứng tỏ f_a khai triển được thành chuỗi luỹ thừa tại 1 với bán kính $R \geq 1$.

Mặt khác, với mọi $x \in]0;2[$: $f_a(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{x+n}$. Chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1}\left(x \mapsto \frac{a^n}{x+n}\right)$ hội tụ chuẩn tắc, do đó đều, trên $[0;2]$ vì $\left|\frac{a^n}{x+n}\right| \leq |a|^n$, vậy $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{x+n} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n}$.

Kết quả là $f_a(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$ và buộc phải có $R=1$.

5.5.30 Trước hết, nhận xét rằng do $(a_n)_{n\geq 0}$ bị chặn nên chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{a^n}{n!}x^n$ có bán kính vô tận.

Với $n\in\mathbb{N}$, ký hiệu $f_n:\begin{array}{l}[0;+\infty[\;\to\;\mathbf{C}\\ x\;\;\mapsto\dfrac{a^n}{n!}e^{-x}\end{array}$ thì:

• Với mọi $n\in\mathbb{N}$, f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;+\infty[$.

$\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ hội tụ đơn trên $[0;+\infty[$,

• $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n : x\mapsto S(x)e^{-x}$ liên tục từng khúc trên $[0;+\infty[$.

• $\sum\limits_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}|f_n|$ hội tụ vì với mọi $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}|f_n|=\dfrac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{|a_n|}{n!}\Gamma(n+1)=|a_n|$.

Theo định lý về lấy tích phân trên một khoảng đối với một chuỗi hàm số (xem 4.3.6, Định lý 2), $x\mapsto S(x)e^{-x}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ và:

$$\int_0^{+\infty}S(x)e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\Gamma(n+1)=\sum_{n\geq 1}a_n\ .$$

5.5.31 *a)* • Hội tụ đơn:

Cho $x\in\,]0;+\infty[$. Chuỗi $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^ne^{-\lambda_nx}$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu vì $(e^{-\lambda_nx})_{n\geq 0}$ giảm và dần đến 0, vậy $\sum\limits_{n\geq 0}f_n(x)$ hội tụ

• Hội tụ đều:

Vì với mọi $x\in\,]0;+\infty[$, $\sum\limits_{n\geq 0}f_n(x)$ thuộc phạm vi ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu nên với mọi $n\in\mathbb{N}$ và với mọi $x\in\,]0;+\infty[$ ta có:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^ke^{-\lambda_nx}\right|\leq e^{-\lambda_{n+1}x}.$$

Với mọi $a\in\,]0;+\infty[$: $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[a;+\infty[}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^ke^{-\lambda_nx}\right|\leq e^{-\lambda_{n+1}a}\xrightarrow[n\infty]{}0$,

nên $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ hội tụ đều trên $[a;+\infty[$.

Cuối cùng, nếu $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ hội tụ đều trên $]0;+\infty[$ thì vì với mọi $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}(-1)^n$, chuỗi $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ hội tụ và ta có mâu thuẫn.

◊ **Trả lời:** • $\sum_{n\ge 0} f_n$ hội tụ đơn trên $]0;+\infty[$,

• $\sum_{n\ge 0} f_n$ hội tụ đều trên mọi $[a;+\infty[$ với $a \in]0;+\infty[$, nhưng không hội tụ đều trên $]0;+\infty[$.

b) Phương pháp sử dụng trong lời giải bài tập 5.5.30 không áp dụng được ở đây vì trước tiên $\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}$ không hội tụ tuyệt đối (chẳng hạn $\lambda_n = n+1$).

Cho $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ sao cho $0 < a \le b$.

Vì mỗi f_n liên tục trên $[a;b]$ và vì $\sum_{n\ge 0} f_n$ hội tụ đều trên $[a;b]$ nên S liên tục trên $[a;b]$ và:

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-\lambda_n a}-e^{-\lambda_n b}}{\lambda_n}.$$

Với $n \in \mathbf{N}$, ký hiệu $g_n : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & (-1)^n\frac{e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n} \end{array}$.

Sử dụng ĐLĐB về hội tụ của chuỗi đan dấu, ta chứng minh được $\sum_{n\ge 0} g_n$ hội tụ đều trên $[0;+\infty[$.

Ký hiệu $T = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ thì vậy ta có: $\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = T(a) - T(b)$. Vì với mọi n thuộc $\mathbf{N}$,

$g_n(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} g_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$ và vì $g_n(b) \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$, ta suy ra:

$$T(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n} \text{ và } T(b) \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0.$$

Điều đó chứng tỏ tích phân suy rộng $\int_{\to 0}^{\to+\infty} S(x)$ hội tụ và

$$\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} T(a) - \lim_{b\to+\infty} T(b) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

5.5.32 Vì chuỗi $\sum_{n\ge 0}|a_n|$ hội tụ nên dãy $(a_n)_{n\ge 0}$ bị chặn; ký hiệu $M = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbf{N}}|a_n|$. Nếu $M = 0$ thì với mọi $n \in \mathbf{N}$, $a_n = 0$. Vậy giả sử $M > 0$.

Vì với mọi $k \in \mathbf{N}^*$: $\forall n \in \mathbf{N}, \left|a_n^k\right| = \left|a_n^{k-1}\right|\left|a_n\right| \le M^{k-1}\left|a_n\right|$,

nên chuỗi $\sum_{n\ge 0} a_n^k$ hội tụ tuyệt đối.

Sử dụng $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, chứng minh rằng có $n_1 \in \mathbf{N}$ sao cho $\left|a_{n_1}\right| = M$ và tập hợp $I = \left\{n \in \mathbf{N} \mid |a_n| = M\right\}$ hữu hạn. Ký hiệu $M' = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbf{N}-I}|a_n|$, chứng minh $M' < M$.

Với $z \in \mathbb{C}$, xét dãy kép $(a_n^k z^k)_{(n,k)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$. Ta có :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \left|a_n^k z^k\right| = \left|\frac{a_n}{M}\right|^k |Mz|^k \le \left|\frac{a_n}{M}\right| |Mz|^k .$$

Vì $\sum_{n\ge 0}\left|\frac{a_n}{M}\right|$ hội tụ, suy ra rằng với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|Mz| < 1$, dãy kép $(a_n^k z^k)_{(n,k)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ khả tổng.

Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \frac{1}{M}$. Do định lý về hoán vị các tổng, ta có:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_n^k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k z^k ,$$

từ đó:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n z}{1-a_n z} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k\right) z^k = 0$$

Vậy với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \frac{1}{M}$: $\sum_{n\in I}\frac{a_n z}{1-a_n z} + \sum_{n\in \mathbb{N}-I}\frac{a_n z}{1-a_n z} = 0$.

- Ta có với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < \frac{1}{M}$:

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}-I}\frac{a_n z}{1-a_n z}\right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}-I}\frac{|a_n z|}{1-|a_n z|} \le \sum_{n\in\mathbb{N}-I}\frac{|a_n z|}{1-\frac{M'}{M}} \le \frac{1}{M-M'}\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| .$$

Điều đó chứng tỏ $z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}-I}\frac{a_n z}{1-a_n z}$ bị chặn trên đĩa mở $B\left(0;\frac{1}{M}\right)$.

- Mặt khác, I là hữu hạn nên ký hiệu $J = \left\{n\in\mathbb{N}; a_n = a_{n_1}\right\}$ thì ánh xạ $\sum_{n\in I-J}\frac{a_n z}{1-a_n z}$ thừa nhận một giới hạn hữu hạn tại $\frac{1}{M}$, vậy bị chặn trong lân cận $\frac{1}{M}$ và ánh xạ $z \mapsto \sum_{n\in J}\frac{a_n z}{1-a_n z} = \mathrm{Card}(J)\frac{Mz}{1-Mz}$ có giới hạn vô tận về giá trị tuyệt đối khi z dần đến $\frac{1}{M}$.

Kết quả là có mâu thuẫn.

Cuối cùng: $\forall n\in\mathbb{N}, a_n = 0$.

5.5.33 Trước hết, nhận xét rằng do dãy $(a_n)_{n\ge 0}$ bị chặn nên chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\ge 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ có bán kính vô tận và tổng của nó, ký hiệu là S, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $f_n : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_n \frac{x^n}{n!} e^{-2x} \end{array}$. Khi đó:

- Với mọi $n \in \mathbb{N}$; f_n liên tục từng khúc và khả tích trên $[0;+\infty[$.
- $\sum_{n\ge 0} f_n$ hội tụ đơn trên $[0;+\infty[$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto S(x)e^{-2x}$ liên tục từng khúc trên $[0;+\infty[$.
- $\sum_{n\ge 0} \int_{[0;+\infty[} |f_n|$ hội tụ vì với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n| \le \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-2x} \mathrm{d}x \underset{[y=2x]}{=} \frac{1}{n!2^{n+1}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} \mathrm{d}y = \frac{1}{n!2^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Theo định lý về lấy tích phân trên một khoảng cho một chuỗi hàm số (xem 4.3.6, Định lý 2), $x \mapsto S(x)e^{-2x}$ khả tích trên $[0;+\infty[$ và:

$$\int_0^{+\infty} S(x)e^{-2x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x .$$

Từ đó:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} S(x) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(x) \mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

5.5.34 *1)* Vì $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$ nên chuỗi số $\sum_{n\ge 1} \frac{H_n}{n^2}$ hội tụ. Ngoài ra, để ý rằng $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$ (với $n \ge 2$), ta thấy hệ thức đòi hỏi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = \zeta(3)$.

2) Nhận xét rằng, nhờ một tích phân từng phần, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n \ln x \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$,

ta được:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{H_n}{(n+1)^2} = -\int_0^1 H_n x^n \ln x \mathrm{d}x .$$

Xét chuỗi ánh xạ $\sum_{n\ge 1} f_n$, trong đó f_n: $[0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_n(x) = \begin{cases} H_n x^n \ln x & \text{nếu } x \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

3) Chứng minh rằng ở đây có thể hoán vị $\int$ và $\sum$ để đi đến:

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x \right).$$

Rõ ràng rằng $\sum_{n\ge 1} f_n$ hội tụ đơn trên $[0;1]$. Ánh xạ $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ ktđCTL(0) và bằng phép nhân:

$$\forall x \in [0;1[, \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n .$$

Vậy ta có: $\forall x \in]0;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -\frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x}$.

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu R_n là phần dư cấp n của $\sum_{n\geq 1} f_n$ thì với mọi $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0;1[$:

$$R_n(x) = -\frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x} - \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

điều đó chứng tỏ R_n liên tục trên $]0;1[$.

Hơn thế, do $x \mapsto \frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x}$ và f_k $(1 \leq k \leq n)$ khả tích trên $]0;1[$ nên R_n khả tích trên $]0;1[$.

Ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} H_k x^{k-1}(1-x) \right) \frac{x \ln x}{1-x} \mathrm{d}x$.

Ánh xạ $x \mapsto \frac{x \ln x}{1-x}$ liên tục trên $]0;1[$ và thác triển liên tục tại 0 và 1 nên bị chặn trên $]0;1[$;

có $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall x \in]0;1[, \left| \frac{x \ln x}{1-x} \right| \leq M$.

Từ đó suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x \right| \leq M \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} H_k x^{k+1}(1-x) \right) \mathrm{d}x$.

Nhưng với mọi $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0;1[$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} H_k x^{k-1}(1-x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} H_k x^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} H_k x^k$$

$$= H_{n+1}x^n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (H_{k+1} - H_k)x^k = H_{n+1}x^n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

Một mặt, $\int_0^1 H_{n+1}x^n \mathrm{d}x = \frac{H_{n+1}}{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Mặt khác:

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} \mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \left(-\frac{\ln(1-x)}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

(xem bài tập 5.5.18 b)). Vậy ta đã chứng minh $\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Theo 4.3.4, Nhận xét, từ đó suy ra:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x} \mathrm{d}x.$$

4) Chứng minh rằng có thể lấy tích phân từng phần:

$$2\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x} \mathrm{d}x = +\left[-\ln x (\ln(1-x))^2 \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(\ln(1-x))^2}{1-x} \mathrm{d}x.$$

Cuối cùng, (xem bài tập 5.5.18 *b*)):

$$\int_0^1 \frac{(\ln(1-x))^2}{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} \mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

5.5.35 Cho $z_0 \in \mathbf{C}$ sao cho $|z_0| < R$ và $z \in \mathbf{C}$ sao cho $|z - z_0| < R - |z_0|$. Ký hiệu $h = z - z_0$ thì $z = z_0 + h$ và $|z| = |z_0 + h| = |z_0| + |h| \le |z_0| + (R - |z_0|) = R$, từ đó:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} h^k \right).$$

Với $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, ký hiệu $u_{n,k} = \begin{cases} C_n^k a_n z_0^{n-k} h^k & \text{nếu } k \le n \\ 0 & \text{nếu } k > n \end{cases}$ thì ta có: $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$.

Với mọi $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k\ge 0} |u_{n,k}|$ hội tụ (vì các số hạng đều triệt tiêu từ một thứ hạng nào đó) và:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \left| C_n^k a_n z_0^{n-k} h^k \right| = |a_n| (|z_0| + |h|)^n.$$

Vì $|z_0| + |h| < R$ nên chuỗi $\sum_{n\ge 0} |a_n| (|z_0| + |h|)^n$ hội tụ và vậy $\sum_{n\ge 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| \right)$ hội tụ. Từ đó suy ra rằng (xem tập 3, 3.4.2, 3) Mệnh đề 2)) dãy kép $(u_{n,k})_{(n,k)\in \mathbf{N}^2}$ khả tổng và:

- Với mọi $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{n\ge 0} u_{n,k}$ hội tụ,
- $\sum_{k\ge 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$ hội tụ,
- $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = S(z)$.

Vậy với $k \in \mathbf{N}$, ký hiệu $b_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k a_n z_0^{n-k}$ thì với mọi $z \in \mathbf{C}$ sao cho $|z - z_0| < R - |z_0|$, ta có: $S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$.

Điều đó chứng tỏ S khai triển được thành chuỗi luỹ thừa tại z_0 với một bán kính $\ge R - |z_0|$.

5.6.1 ◊ **Trả lời:** các bán kính là vô tận và

$$\forall (x,\theta) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!} x^n = e^{x\cos\theta} \cos(x \sin\theta) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n!} x^n = e^{x\cos\theta} \sin(x \sin\theta). \end{cases}$$

5.6.2 *a)* $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2(n!)} x^n$.

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n;\quad R=\infty$.

b) $\forall x\in R,\ \sin x \operatorname{ch} x=\frac{1}{4i}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}-e^{(1-i)x}-e^{(-1-i)x}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(-1+i)^n-(1-i)^n-(-1-i)^n}{4i}\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{n}{2}-1}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!}.$$

◊ **Trả lời:** $f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 2^{p+\frac{1}{2}}\cos\frac{2p+1}{4}\pi}{(2p+1)!}x^{2p+1};\quad R=\infty$.

c) Với $x\in\mathbf{R}$ cố định, chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}\left(\theta\mapsto\frac{(ix\sin\theta)^n}{n!}\right)$ hội tụ chuẩn tắc, vậy đều, trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, từ đó: $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta\right)x^n$.

Các tích phân Wallis đã được tính trong tập 1, 6.4.4, ví dụ 1):

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta=\begin{cases}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} & \text{nếu } n=2p\\ \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}\frac{\pi}{2} & \text{nếu } n=2p+1\end{cases}\quad p\in\mathbb{N}.$$

◊ **Trả lời:** $f(x)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2^n n!)^2}{((2n+1)!)^2}x^{2n+1};\ R=\infty$.

5.6.3 $\left|e^z-\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-\sum_{n=0}^{N}\frac{|z|^n}{n!}$.

5.6.4

• $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y$,

từ đó: $|\cos z|^2=\cos^2 x\operatorname{ch}^2 y+\sin^2 x\operatorname{sh}^2 y=\cos^2 x(1+\operatorname{sh}^2 y)+\sin^2 x\operatorname{sh}^2 y=\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y$.

• Tương tự cho $|\sin z|^2$.

5.6.5 Theo bài tập 5,6,4:

$$\left|\frac{\sin az}{\sin\pi z}\right|^2=\frac{\sin^2\left(a\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)+\operatorname{sh}^2 ay}{1+\operatorname{sh}^2\pi y}\leq\frac{1+\operatorname{sh}^2 ay}{1+\operatorname{sh}^2\pi y}=\frac{\operatorname{ch}^2 ay}{\operatorname{ch}^2\pi y}.$$

5.6.6.

$$\tan(x+iy)=\frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}=\frac{\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y}{\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y}$$

$$=\frac{(\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y)(\cos x\,\mathrm{ch}\,y+i\sin x\,\mathrm{sh}\,y)}{(\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y)}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{i}{2}\mathrm{sh}\,2y}{\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\,2y}.$$

5.6.7 *a)* Với $z=x+\mathrm{i}y$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, ta có:

$$\sin z=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\,\mathrm{sh}\,y\cos x\,.$$

◊ **Trả lời:** $\{n\pi+iy;(n,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\}$.

b) Với mọi $z\in\mathbf{C}$, ta có:

$$\mathrm{ch}\,z-\sin z=\mathrm{ch}\,z-\mathrm{ch}\left(i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right)=2\,\mathrm{sh}\left(\frac{1+i}{2}z-i\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{1-i}{2}z+i\frac{\pi}{4}\right).$$

và: $\forall z\in\mathbf{C},\left(\mathrm{sh}\,z=0\Leftrightarrow e^{z}=e^{-z}\Leftrightarrow e^{2z}=1\Leftrightarrow z\in i\pi\mathbf{Z}\right)$.

◊ **Trả lời:** $\left\{\frac{1+\varepsilon i}{4}\pi(4\varepsilon n+1);\,(\varepsilon,n)\in\{-1;1\}\times\mathbf{Z}\right\}$.

c) Theo bài tập 5.6.4:

$$|\cos z|=|\sin z|\Leftrightarrow\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y=\mathrm{ch}^2 y-\cos^2 x\Leftrightarrow 2\cos^2 x=1$$

◊ **Trả lời:** $\left\{\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}+iy;\quad(n,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\right\}$.

Bổ sung

◊ C5.1

1) a) Để kết hợp trong ngoặc $X_1X_2...X_n$ $(n \ge 2)$ người ta nhóm trong một kết hợp trong ngoặc đầu tiên $X_1...X_k$, mặt khác $X_{k+1},...,X_n$ rồi trong nhóm $X_1...X_k$ (theo thứ tự $X_{k+1},...,X_n$) có a_k (theo thứ tự a_{n-k}) kết hợp trong ngoặc

b) Ta có: $\forall x \in]-\mathbb{R};\mathbb{R}[, S(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)x^n = x + (S(x))^2$,

bởi tích *Cauchy* của hai chuỗi luỹ thừa.

c) 1) Theo các KTCLT(0) thường dùng, f ktđCTL(0), có bán kính $\frac{1}{4}$ và với mọi $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)...\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!}(-1)^n(4x)^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n-3)(2n-5)...3.1}{2^{n+1}n!}4^n x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}x^n .$$

2) Ký hiệu $b_0 = 0$ và $b_n = \frac{1}{2}C_{2n-2}^{n-1}$ với $n \ge 1$.

Vì f thoả mãn $\left(\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[, \left((f(x))^2 - f(x) + x = 0\right)\right)$, dãy $(b_n)_{n\ge 0}$ thoả mãn cùng công thức quy nạp như $(a_n)_{n\ge 0}$: $b_0 = 0, b_1 = 1, b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$. Suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n$.

◊ C5.2

1) a) Ở đây ta giả sử chuỗi số $\sum_{n\ge 1} a_n$ phân kỳ và ký hiệu R là bán kính của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\ge 1} a_n z^n$; khi đó ta có: $R \le 1$.

- Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < R$ (vậy $|z| < 1$).

Vì $1 - z^n \xrightarrow[n\infty]{} 1$ nên $\left|a_n \frac{z^n}{1-z^n}\right| \underset{n\infty}{\sim} \left|a_n z^n\right|$.

Do $\sum_{n\ge 1} a_n z^n$ hội tụ tuyệt đối, suy ra chuỗi Lambert $\sum_{n\ge 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ hội tụ tuyệt đối.

- Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| > R$ và $|z| \ne 1$.

Trường hợp 1: $|z| < 1$.

Khi đó $\left|a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}\right| \underset{n\infty}{\sim} |a_n z^n|$ và $(a_n z^n)_{n\geq 1}$ không bị chặn (vì $|z| > R$) nên $\left(a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}\right)_{n\geq 1}$

không bị chặn và chuỗi Lambert $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$ phân kỳ.

Trường hợp 2: $|z| > 1$.

Giả sử $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$ hội tụ.

Khi đó chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{1-z^n} Z^n$ (biến Z) có bán kính $\geq |z|$ nên hội tụ tại điểm $Z = 1$ (vì

$|z| > 1$) và vậy chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{1-z^n}$ hội tụ (tuyệt đối).

Nhưng vì: $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{a_n}{1-z^n} - \dfrac{a_n z^n}{1-z^n}$ nên suy ra chuỗi $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ hội tụ và ta có mâu thuẫn.

Điều đó chứng tỏ *rằng* chuỗi Lambert $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$ phân kỳ.

2) a) Xem lời giải bài tập 5.2.5, sử dụng một dãy kép khả tổng.

b) 1) Lấy $a_n = (-1)^{n-1}, b_p = 1$, ta được:

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} z^n = \frac{z}{1+z} \text{ và } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z},$$

từ đó $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n B(z^n) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} b_p A(z^p) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{z^p}{1+z^p}$.

2) Lấy $a_n = n, b_p = 1$, ta được:

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = z \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \frac{z}{(1-z)^2} \text{ và } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}$$

từ đó $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{z^p}{(1-z^p)^2}$.

3) Lấy $a_n = (-1)^{n-1} n, b_p = 1$, ta được:

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n z^n = -z \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n\right) = \frac{z}{(1+z)^2} \text{ và } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z},$$

từ đó $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{z^p}{(1+z^p)^2}$.

4) Lấy $a_n = \dfrac{1}{n}, b_p = 1$, ta được:

$$A(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x) \text{ và } B(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}x^p=\frac{x}{1-x},$$

từ đó $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{1-x^n}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\ln(1-x^p)$.

5) Lấy $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}, b_p=1$, ta được:

$$A(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x) \text{ và } B(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}x^p=\frac{x}{1-x},$$

từ đó $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{p=1}^{+\infty}\ln(1+x^p)$.

6) Lấy $a_n=\frac{1}{n!}, b_p=1$, ta được:

$$A(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n=e^z-1 \text{ và } B(z)=\sum_{p=1}^{+\infty}z^p=\frac{z}{1-z},$$

từ đó $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(e^{z^p}-1\right)$.

c) Lấy $a_n=\alpha^n$ và $b_p=1$, ta có thể áp dụng *a)* và:

$$A(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^n z^n=\frac{\alpha z}{1-\alpha z} \text{ và } B(z)=\sum_{p=1}^{+\infty}z^p=\frac{z}{1-z},$$

từ đó $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^n\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nB(z^n)=\sum_{p=1}^{+\infty}b_pA(z^p)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\alpha z^p}{1-\alpha z^p}$.

3) a) Cho $z\in\mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$.

Xét dãy kép $(a_nz^{np})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Vì: $\forall(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2, \left|a_nz^{np}\right|=\left|a_nz^n\right||z|^{n(p-1)}\le\left|a_nz^n\right||z|^{p-1}$

và vì các chuỗi $\sum_{n\ge1}\left|a_nz^n\right|$ và $\sum_{p\ge1}|z|^{p-1}$ hội tụ nên dãy kép $(a_nz^{np})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng (xem Tập 3, 3.4.2 3) Mệnh đề 3).

Nói riêng, theo định lý về hoán vị các tổng:

$$\sum_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}a_nz^{np}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}a_nz^{np}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{z^n}{1-z^n}.$$

Với mọi $N\in\mathbb{N}^*$, ký hiệu $J_N=\left\{\forall(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2; np\le N\right\}$ thì rõ ràng $(J_N)_{N\ge1}$ là một dãy tăng những bộ phận hữu hạn của $(\mathbb{N}^*)^2$ và hợp bằng $(\mathbb{N}^*)^2$.

Với mọi $N \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\sum_{(n,p)\in J_N} a_n z^{np} = \sum_{q=1}^{N}\left(\sum_{n|q} a_n z^q\right) = \sum_{q=1}^{N}\left(\sum_{n|q} a_n\right) z^q = \sum_{q=1}^{N} A_q z^q .$$

Vậy, vì $(a_n z^{np})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ khả tổng, nên chuỗi $\sum_{q=1}^{N} A_q z^q$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là

$$\sum_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2} a_n z^{np} .$$

Cuối cùng: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n z^n$.

Trình bầy một cách sơ đồ, ta có thể viết $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{np}$ với $n = 1, 2, \ldots$, thành những dòng theo thứ tự, rồi cộng dọc các đơn thức của z có cùng số mũ:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1 \frac{z}{1-z} = & a_1 z + & a_1 z^2 + & a_1 z^3 + & a_1 z^4 + & a_1 z^5 & + \ldots \\
a_2 \frac{z^2}{1-z^2} = & & a_2 z^2 & & + a_2 z^4 & & + \ldots \\
a_3 \frac{z^3}{1-z^3} = & & & a_3 z^3 & & & + \ldots \\
a_4 \frac{z^4}{1-z^4} = & & & & a_4 z^4 & & + \ldots \\
a_5 \frac{z^5}{1-z^5} = & & & & & a_5 z^5 & + \ldots \\
\ldots & & & & & &
\end{array}$$

$$\sum a_n \frac{z^n}{1-z^n} = a_1 z + (a_1 + a_2) z^2 + (a_1 + a_3) z^3 + (a_1 + a_2 + a_4) z^4 + (a_1 + a_5) z^5 + \ldots$$

$$= A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + \ldots$$

b) Cho $k \in \mathbb{N}$.

Với $n \geq 1$, ký hiệu $a_n = n^k$ thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$A_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n) .$$

Vì: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq A_n \leq n.n^k = n^{k+1}$ nên chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1} A_n z^n$ có bán kính 1. Áp dụng *a)* thì với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, ta được:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_k(n) z^n .$$

Nói riêng, do $\sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1 = d(n)$ và do $\sigma_1(n) = \sigma(n)$, nên với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$, ta có:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n \text{ và } \sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma(n)z^n .$$

4) a) α) • Các hệ thức $\mu(p)=-1$ (với p nguyên tố) và $\mu(p^r)=0$ (với p nguyên tố và $r\geq 2$) là hiển nhiên

• Cho $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ sao cho UCLN$(m,n)=1$. Nếu có p nguyên tố sao cho $p^2\mid m$ hay $p^2\mid n$ thì $\mu(m)=\mu(n)=0$ và do $p^2\mid mn$ nên $\mu(mn)=0$.

Nếu không có thì do UCLN$(m,n)=1$, có $M,N\in\mathbb{N};p_1,...,p_M;q_1,...,q_N$ nguyên tố và phân biệt từng cặp sao cho: $m=\prod_{i=1}^{M}p_i, n=\prod_{j=1}^{N}q_j$. Khi đó ta có: $\mu(m)=(-1)^M,\mu(n)=(-1)^N$ và $mn=p_1...p_Mq_1...q_N$ nên $\mu(mn)=(-1)^{M+N}=(-1)^M(-1)^N=\mu(m)\mu(n)$

β) Việc khảo sát trường hợp $n=1$ là đơn giản. Giả sử $n\geq 2$ và giả sử $n=\prod_{i=1}^{N}p_i^{r_i}$ là phân tích thành thừa số nguyên tố của n ($N\in\mathbb{N}^*;p_1,...,p_N$ nguyên tố và phân biệt từng cặp $r_1,...,r_N\in\mathbb{N}^*$).

Các ước của n là $\prod_{i=1}^{N}p_i^{s_i}$, trong đó với mọi $i\in\{1,...,N\},0\leq s_i\leq r_i$. Vậy ta có:

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{\substack{0\leq s_1\leq r_1\\ \dots\\ 0\leq s_N\leq r_N}}\mu\left(\prod_{i=1}^{N}p_i^{s_i},\right)=\sum_{s_i=0}\prod_{i=1}^{N}\mu\left(p_i^{s_i}\right)=\prod_{i=1}^{N}\sum_{s_i=0}^{r_i}\mu\left(p_i^{s_i}\right)=0$$

vì với mọi $i\in\{1,...,N\},\sum_{s_i=0}^{r_i}\mu\left(p_i^{s_i}\right)=\mu(1)+\mu(p_i)+\mu(p_i^2)+...=1+(-1)+0+...=0$.

γ) $\Rightarrow$:

Giả sử: $\forall n\in\mathbb{N}^*,A_n=\sum_{d\mid n}a_d$.

Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$$\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)A_d=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{u\mid d}a_u=\sum_{d\mid n}\sum_{u\mid d}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_u .$$

Chứng minh rằng ánh xạ $(d,u)\mapsto(d',u')=\left(u,\frac{n}{d}\right)$ là một song ánh từ $\left\{(d,u)\in(\mathbb{N}^*)^2;d\mid n \text{ và } u\mid d\right\}$ lên $\left\{(d',u')\in(\mathbb{N}^*)^2;u'\mid n \text{ và } d'\mid\frac{n}{u'}\right\}$.

Từ đó, ta có:

$$\sum_{d\mid n}\sum_{u\mid d}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_u=\sum_{u'\mid n}\left(\sum_{d'\mid\frac{n}{u'}}\mu(u')\right)a_{d'}=\sum_{u'\mid n}\varepsilon\left(\frac{n}{u'}\right)a_{d'}=a_n .$$

$\Leftarrow$:

Giả sử: $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d$.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$\sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n}\sum_{u|d} \mu\left(\frac{d}{u}\right) A_u.$$

Chứng minh rằng ánh xạ $(d,u) \mapsto (d',u') = \left(\frac{d}{u}, u\right)$ là một song ánh từ $\left\{(d,u) \in (\mathbb{N}^*)^2; d \mid n \text{ và } u \mid d\right\}$ lên $\left\{(d',u') \in (\mathbb{N}^*)^2; u' \mid n \text{ và } d' \mid \frac{n}{u'}\right\}$.

Từ đó, ta có: $$\sum_{d|n}\sum_{u|d} \mu\left(\frac{d}{u}\right) A_u = \sum_{u'|n}\left(\sum_{d'|\frac{n}{u'}} \mu(d')\right) A_{u'} = \sum_{u'|n} \varepsilon\left(\frac{n}{u'}\right) A_{u'} = A_n.$$

b) Cho $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $|a_n| = \left|\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d\right| \le \sum_{d|n}\left|\mu\left(\frac{n}{d}\right)\right| |A_d| \le \sum_{d|n} |A_d| \le \sum_{d=1}^{n} |A_d|$

vậy: $$\left|a_n z^n\right| \le \left(\sum_{d=1}^{n} |A_d|\right)|z|^n \le \sum_{d=1}^{n}\left|A_d z^d\right| \le \sum_{d=1}^{+\infty}\left|A_d z^d\right|.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\sum_{n\ge1} a_n z^n$ hội tụ tuyệt đối, vậy chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\ge1} a_n z^n$ có bán kính ≥ 1.

Khi đó có thể áp dụng 3)*a)* và 4)*a)γ)*, suy ra chuỗi Lambert $\sum_{n\ge1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ hội tụ tuyệt đối và:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n z^n.$$

c)1) Lấy $a_n = \mu(n)$ thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$A_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} \mu(d) = \varepsilon(n).$$

Vậy chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\ge1} A_n z^n$ có bán kính $\infty(\ge 1)$ nên theo b), với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n) \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon(n) z^n = z.$$

2) Lấy $a_n = \varphi(n)$ thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $A_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$, xem Tập 5, bài tập 4.4.79 *a)*.

Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\ge1} A_n z^n$ có bán kính 1 nên theo *b)*, với mọi $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}nz^n=z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\right)=z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{z}{(1-z)^2}.$$

◊ **C5.3.**

Trước hết, để thuận lợi, ta đưa về trường hợp $z_0=1$ bằng phép đổi biến $Z=\frac{z}{z_0}$. Áp dụng biến đổi Abel (tập 3, *C* 3.7 1)), với z cố định với $u_n=z^n$, $v_n=a_n$ và vậy $\sigma_{p,q}=\sum_{k=p+1}^{q}a_k$

Khi đó với mọi $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ sao cho $q\geq p+1$:

$$\sum_{k=p+1}^{q}a_kz^k=z^q\sigma_{p,q}+\sum_{k=p+1}^{q-1}(z^k-z^{k+1})\sigma_{p,k}=z^q\sigma_{p,q}+(1-z)\sum_{k=p+1}^{q-1}z^k\sigma_{p,k}$$

Cho $\varepsilon>0$ cố định.

Vì $\sum_n a_n$ hội tụ nên có $N\in\mathbb{N}$ sao cho:

$$(p,q)\in\mathbb{N}^2,\left(k\geq p+1\geq N\Rightarrow\left|\sigma_{p,k}\right|\leq\varepsilon\right).$$

Khi đó với mọi $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ sao cho $q\geq p+1\geq N$ và mọi $z\in\mathbb{C}$ sao cho $|z|<1$:

$$\sum_{k=p+1}^{q-1}a_kz^k=|z|^q\varepsilon+|1-z|\sum_{k=p+1}^{q-1}|z|^k\varepsilon=\varepsilon|z|^q+|1-z||z|^{p+1}\frac{1-|z|^{q-p-1}}{1-|z|}$$

$$\leq\varepsilon\left(1+\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)=\varepsilon\left(1+\frac{|1-z|(1+|z|)}{1-|z|^2}\right)\leq\varepsilon\left(1+2\frac{|1-z|}{1-|z|^2}\right).$$

Nếu $z\in D_\alpha-\{1\}$: $1-z=\rho e^{i\theta},0\leq\rho\leq\cos\alpha,|\theta|\leq\alpha$, từ đó

$$\frac{|1-z|}{1-|z|^2}=\frac{\rho}{1-\left|1-\rho e^{i\theta}\right|^2}=\frac{1}{2\cos\theta-\rho}\leq\frac{1}{\cos\alpha}$$

(vì $\cos\theta\geq\cos\alpha$ và $\rho\leq\cos\alpha$).

Vậy, ta được: $\quad z\in D_\alpha-\{1\},\left|\sum_{k=p+1}^{q-1}a_kz^k\right|\leq\varepsilon\left(1+\frac{2}{\cos\alpha}\right),$

và bất đẳng thức cũng đúng khi $z=1$.

Ta đã chứng minh được:

$$\forall\varepsilon'>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\forall z\in D_\alpha,\left(q\geq p+1\geq N\Rightarrow\left|\sum_{k=p+1}^{q}a_kz^k\right|\leq\varepsilon'\right)$$

Vậy chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq0}\left(z\mapsto a_nz^n\right)$ thoả mãn điều kiện cần và đủ của *Cauchy* về hội tụ đều (4.3.1, Định lý), và cuối cùng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq0}a_nz^n$ hội tụ đều trên D_α

Theo (4.3.3 Định lý), do mọi $z \mapsto a_n z^n$ liên tục trên D_α suy ra ánh xạ $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ liên tục trên D_α.

Ứng dụng:

a) Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ có bán kính 1, hội tụ tại điểm -1. Theo kết quả trên $(R = 1, z_0 = -1, \alpha = 0)$, $A: [-1;1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, liên tục tại -1.

Vì: $\forall x \in]-1;1[,\ A(x) = -\ln(1-x)$, ta kết luận:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = A(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} A(x) = -\ln 2 .$$

b) Lập luận tương tự như ở *a)*, sử dụng:

$$\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} x .$$

◊ **C5.4**

1) Bất đẳng thức mong muốn là hệ quả của tính lồi của $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $a \mapsto a^r\ (r \geq 1)$

2) Ánh xạ B_s có đạo hàm trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall t \in]0;+\infty[,\ B_s'(t) = \frac{1}{t^2} C(t \ln s)$$

trong đó C: $]-\infty,0] \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall u \in]-\infty;0],\ C(u) = e^u(1-u) - 1 .$$

Ánh xạ C có đạo hàm và $\forall u \in]-\infty;0[,\ C'(u) = -ue^u > 0$.

Vì $C(0) = 0$, ta kết luận: $\forall u \in]-\infty;0[,\ C(u) < 0$, từ đó: $\forall t \in]0;+\infty[,\ B_s'(t) < 0$.

3) Trước hết, hãy kiểm nghiệm bất đẳng thức đòi hỏi là một đẳng thức hiển nhiên khi $p = 2$ (vậy $q = 2$) hay $t = 0$ hay $t = 1$. Vậy giả sử $p \in]1;2[$ và $t \in]0;1[$. Ký hiệu $s = \frac{1-t}{1+t}$ (vậy $t = \frac{1-s}{1+s}$) thì bất đẳng thức đòi hỏi trở thành:

$$\forall s \in]0;1[, 1 + s^q \leq \frac{\left((1+s)^p + (1-s)^p\right)^{\frac{q}{p}}}{2^{\frac{q}{p}}}$$

tức là: $\forall s \in]0;1[,\ \frac{1}{2}\left((1+s)^p + (1-s)^p\right) \geq (1+s^q)^{p-1}$.

Sử dụng những KTCLT(0), bán kính 1 và ký hiệu:

$$\alpha_{r,k} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = 0,\ r \in \mathbb{R} \\ \dfrac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!} & \text{nếu } k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

thì với mọi $s \in]0;1[$, ta được:

$$\frac{1}{2}\Big((1+s)^p+(1-s)^p\Big)-(1+s^q)^{p-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{p,k}s^k+\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{p,k}(-1)^k s^k\right)-\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{p-1,k}(s^q)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{p,2k}s^{2k}-\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{p-1,k}s^{qk}=\sum_{k=1}^{+\infty}u^k$$

trong đó

$$u_k=\alpha_{p,2k}s^{2k}-\alpha_{p-1,2k-1}s^{(2k-1)q}-\alpha_{p-1,2k}s^{2kq}$$

$$=\frac{(p-2)(p-3)...(p-2k)}{(2k-1)!}\left(\frac{p(p-1)}{2k(p-2k)}s^{2k}-\frac{p-1}{p-2k}s^{(2k-1)q}-\frac{p-1}{2k}s^{2kq}\right)$$

$$=\frac{(p-2)(p-3)...(p-2k)}{(2k-1)!}s^{2k}\left(-\frac{p-1}{2k-p}+\frac{p-1}{2k}-\frac{p-1}{p-2k}s^{(2k-1)q-2k}-\frac{p-1}{2k}s^{2k(q-1)}\right)$$

$$=-\frac{(p-2)(p-3)...(p-2k)}{(2k-1)!}s^{2k}\left(B_s\left(\frac{2k-p}{p-1}\right)-B_s\left(\frac{2k}{p-1}\right)\right).$$

- Ta có: $-(p-2)(p-3)...(p-2k)\geq 0$ vì $p\in\,]1;2[$.
- Áp dụng *2)* với nhận xét rằng $\dfrac{2k-p}{p-1}\leq\dfrac{2k}{p-1}$, ta có:

$$B_s\left(\frac{2k-p}{p-1}\right)-B_s\left(\frac{2k}{p-1}\right)\geq 0.$$

Vậy: $\left(\forall k\in\mathbf{N}^*, u_k\geq 0\right)$ từ đó có bất đẳng thức mong muốn.

4)a) Trường hợp v = 0 được khảo sát đơn giản và do u, v có vai trò đối xứng, ta có thể đưa về trường hợp: $|u|\geq v>0$. Ký hiệu $\dfrac{v}{u}=re^{i\theta}$ trong đó $r\in\,]0;1]$, $\theta\in[-\pi;\pi]$. Bất đẳng thức mong muốn trở thành:

$$\forall r\in]0;1],\forall\theta\in[-\pi;\pi],\left|\frac{1+re^{i\theta}}{2}\right|^q+\left|\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right|^q\leq\left(\frac{1+r^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Với $r\in\,]0;1]$, xét ánh xạ f_r: $[-\pi;\pi]\to\mathbf{R}$ xác định bởi:

$$\forall\theta\in[-\pi;\pi], f_r(\theta)=\left|1+re^{i\theta}\right|^q+\left|1-re^{i\theta}\right|^q=(1+2r\cos\theta+r^2)^{\frac{q}{2}}+(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Trước hết, nhận xét rằng: $\forall\theta\in[-\pi;\pi]$, $f_r(\pi-\theta)=f_r(-\theta)=f_r(\theta)$.

Vậy chỉ cần khảo sát f_r trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ánh xạ f_r có đạo hàm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và :

$$\forall\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], f_r'(\theta)=qr\sin\theta\left(-(1+2r\cos\theta+r^2)^{\frac{q}{2}-1}+(1-2r\cos\theta+r^2)^{\frac{q}{2}-1}\right)\leq 0$$

vì $\cos\theta\geq 0,\sin\theta\geq 0,\frac{q}{2}-1\geq 0$.

Vậy: $$\sup_{\theta\in[-\pi;\pi]} f_r(\theta)=f_r(0)=(1+r)^q+(1-r)^q=2^q\left(\left(\frac{1+r}{2}\right)^q+\left(\frac{1-r}{2}\right)^q\right)\leq 2^q\left(\frac{1+r^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

theo *3)*.

b) Áp dụng *a)* vào q thay cho p và sử dụng *1)*, ta được:

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^p+\left|\frac{u-v}{2}\right|^p\le\left(\frac{|u|^q+|v|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}}=\left(\frac{|u|^q+|v|^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Vì $p\ge 2$, ta có $\frac{p}{q}\ge 1$ nên theo 1):

$$\left(\frac{|u|^q+|v|^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}}\le\frac{1}{2}\left(\left(|u|^q\right)^{\frac{p}{q}}+\left(|v|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)\le\frac{1}{2}\left(|u|^p+|v|^p\right).$$

5) Ký hiệu $(x_n)_{n\ge 0}=x$, $(y_n)_{n\ge 0}=y$:

a) • Theo *4)b)*, ta có:

$$\forall n\in\mathbb{N},\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^p+\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^p\le\frac{1}{2}\left(|x_n|^p+|y_n|^p\right),$$

từ đó, lấy tổng, ta được:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p\le\frac{1}{2}\left(\|x_n\|_p^p+\|y_n\|_p^p\right).$$

• Ký hiệu $\alpha=\left(\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^q\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\beta=\left(\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^q\right)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc $l^{\frac{p}{q}}$. Khi đó, ta có:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}}+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$=\|\alpha\|_{p-1}+\|\beta\|_{p-1}\ge\|\alpha+\beta\|_{p-1},$$

do $p-1\ge 1$ (bất đẳng thức tam giác trong l^{p-1}, xem Tập 3, C3.5).

Mặt khác, áp dụng *4)a)* vào q thay cho p và ký hiệu $w=u+v$, $z=u-v$ thì ta được:

$$\forall w,z\in\mathbb{C}^2,\left|\frac{w}{2}\right|^p+\left|\frac{z}{2}\right|^p\le\left(\frac{\left|\frac{w+z}{2}\right|^q+\left|\frac{w-z}{2}\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

tức là:

$$\forall w,z\in\mathbb{C}^2,\left|\frac{w+z}{2}\right|^q+\left|\frac{w-z}{2}\right|^q\ge 2^{1-q}\left(|w|^p+|z|^p\right)^{q-1}.$$

Khi đó:

$$\|\alpha+\beta\|_{p-1}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|^q+\left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|^q\right)^{p-1}\right)^{q-1}\ge\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2^{1-q}\left(|x_n|^p+|y_n|^p\right)^{q-1}\right)^{p-1}\right)^{q-1}$$

$$=2^{1-q}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(|x_n|^p+|y_n|^p\right)\right)^{q-1}=\left(\frac{1}{2}\left(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p\right)\right)^{q-1}.$$

b) Lập luận tương tự như ở lời giải của *a)*.

6) Theo *5)*, ta có điều kiện mong muốn khi lấy $\delta = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{r}\right)^{1/r}$, trong đó

$$r = \mathrm{Max}(p,q) = \begin{cases} p \text{ nếu } p \geq 2 \\ q \text{ nếu } 1 < p \leq 2 \end{cases}.$$

7) Các dãy $x = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0,\ldots,0,\ldots\right)$ và $y = \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0,\ldots,0,\ldots\right)$ thuộc l^1 và:

$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1, \qquad \|x-y\|_1 = 1, \qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = 1.$$

Các dãy $x = (1,1,0,0,\ldots,0,\ldots)$ và $y = (1,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$ thuộc l^∞ và:

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \qquad \|x-y\|_\infty = 1, \qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1.$$

◊ **Trả lời:** l^1 và l^∞ không lồi đều.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 6

6.1.1 Ta kiểm nghiệm dễ dàng rằng các hàm số đang xét đúng thuộc $\mathcal{CM}_T$

a) $c_n(g)=\frac{1}{T}\int_{[T]}e^{iN\omega t}f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{[T]}f(t)e^{-i(n-N)\omega t}dt=c_{n-N}(f)$.

◊ **Trả lời:** $\forall n\in\mathbf{Z}, c_n(g)=c_{n-N}(f)$.

b) $$c_n(f_N)=\frac{1}{T}\int_{[T]}f(Nt)e^{-in\omega t}dt \underset{u=Nt}{=} \frac{1}{NT}\int_0^{NT}f(u)e^{-in\omega\frac{u}{N}}du=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT}^{(k+1)T}f(u)e^{-\frac{in\omega u}{N}}du$$

$$\underset{v=u-kT}{=}\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^T f(v)e^{-\frac{in\omega v}{N}-\frac{ink\omega T}{N}}dv=\frac{1}{NT}\left(\sum_{k=0}^{N-1}e^{-\frac{2i\pi n}{N}k}\right)\int_0^T f(v)e^{-\frac{in\omega v}{N}}dv.$$

• Nếu $N\nmid n$ thì $e^{-\frac{2i\pi n}{N}k}$ là một căn bậc N của 1 khác 1 nên $\sum_{k=0}^{N-1}e^{-\frac{2i\pi n}{N}k}=\frac{e^{-2i\pi n}-1}{e^{-\frac{2i\pi n}{N}k}-1}=0$, từ đó $c_n=0$.

• Nếu $N\mid n$ thì $c_n(f_N)=\frac{1}{NT}N\int_0^T f(v)e^{-i\frac{n}{N}\omega v}dv=c_{\frac{n}{N}}(f)$.

◊ **Trả lời:** $\forall n\in\mathbf{Z}, c_n(f_N)=\begin{cases}c_{\frac{n}{N}}(f) & \text{nếu } N\mid n\\ 0 & \text{nếu } N\nmid n.\end{cases}$

c) $$c_n(g_N)=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^T f\left(\frac{t}{N}+\frac{kT}{N}\right)e^{-in\omega t}dt \underset{u=\frac{t}{N}+\frac{kT}{N}}{=}\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{(k+1)T}{N}}f(u)e^{-in\omega(Nu-kT)}du$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{(k+1)T}{N}}f(u)e^{-inN\omega u}du\right)e^{2ink\pi}=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)e^{-inN\omega u}du=c_{nN}(f).$$

◊ **Trả lời:** $\forall n\in\mathbf{Z}, c_n(g_N)=c_{nN}(f)$.

6.1.2

• $\forall n\in\mathbf{N}^*, |a_n|=\frac{2}{T}\left|\int_{[T]}f(t)\cos n\omega t\,dt\right|\le\frac{2}{T}\int_{[T]}|f(t)||\cos n\omega t|dt\le\frac{2}{T}\int_{[T]}|f(t)|dt=a_0$ vì $f\ge 0$.

• Nếu có đẳng thức trong bất đẳng thức mong muốn thì $\int_{[T]}|f(t)|(1-|\cos n\omega t|)dt=0$. Do f liên tục và $t\mapsto 1-|\cos n\omega t|$ liên tục, ≥ 0 và chỉ triệt tiêu tại một số hữu hạn điểm (trên một chu kỳ), ta suy ra f triệt tiêu trên $[0;T]$, trừ một số hữu hạn điểm. Nhưng do f liên tục, ta kết luận $f=0$ và có mâu thuẫn.
Lập luận tương tự cho bất đẳng thức kia.

6.1.3 • $\forall n\ge 2, |b_n|=\left|\frac{2}{T}\int_{[T]}f(t)\sin n\omega t\,dt\right|\le\frac{2}{T}\int_{[T]}|f(t)||\sin n\omega t|dt$.

Theo bài tập 7.8.3, Tập 2:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R},\ |\sin n\omega t| \le n|\sin \omega t|,$$

từ đó: $\forall n \ge 2, |b_n| \le \frac{4n}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \mathrm{d}t = nb_1$.

• Do $g_n : \underset{t\ \mapsto\ |f(t)|(n\sin\omega t - |\sin n\omega t|)}{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$ liên tục và ≥ 0, nếu có đẳng thức trong bất đẳng thức mong muốn thì g_n triệt tiêu trên $\left[0;\frac{T}{2}\right]$. Nhưng do $f \in C_T$ và do $t \mapsto n\sin\omega t - |\sin n\omega t|$ chỉ triệt tiêu tại một số hữu hạn điểm, ta kết luận $f = 0$ và có mâu thuẫn.

6.1.4 *a)* $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} f(t)\sin nt \mathrm{d}t$

$$\underset{u=t-\frac{k\pi}{n}}{=} \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)\sin(nu+k\pi)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\int_0^{\frac{\pi}{n}} f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)\sin nu \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left(f\left(u+\frac{2p\pi}{n}\right) - f\left(u+\frac{(2p+1)\pi}{n}\right)\right)\sin nu \mathrm{d}u .$$

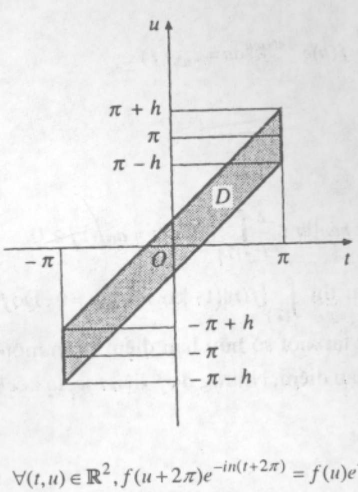
b) Do *f* giảm trên $]0;2\pi[$, ta có:

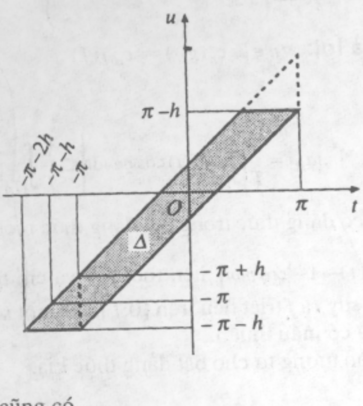
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \{0,...,n-1\}, \forall u \in \left]0;\frac{\pi}{n}\right[,\quad f\left(u+\frac{2p\pi}{n}\right) - f\left(u+\frac{(2p+1)\pi}{n}\right) \ge 0 ;$$

mặt khác: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \left[0;\frac{\pi}{n}\right], \sin nu \ge 0$. Ta kết luận: $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) \ge 0$.

6.1.5 Cho $n \in \mathbb{Z}$, ta có: $c_n(f_h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h} f(u)\mathrm{d}u\right)e^{-\mathrm{i}n\pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi h}\iint_D f(u)e^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$,

trong đó: $D = \left\{(t,u) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -\pi \le t \le \pi \\ t-h \le u \le t+h \end{cases}\right\}$.





Vì: $\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2, f(u+2\pi)e^{-in(t+2\pi)} = f(u)e^{-\mathrm{int}}$, ta cũng có

$$c_n(f_h) = \frac{1}{4\pi h}\iint_\Delta f(u)e^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\mathrm{d}u .$$

trong đó: $\Delta = \left\{(t,u) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} -\pi - h \le u \le \pi - h \\ u - h \le t \le u + h \end{cases}\right\}$.

Sử dụng định lý Fubini (Tập 2, 13.2.4, suy rộng vì ở đây f liên tục từng khúc), ta được:

$$c_n(f_h) = \frac{1}{4\pi h} \int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(u)\left(\int_{u-h}^{u+h} e^{-in\pi t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.$$

• Nếu $n \neq 0$ thì

$$c_n(f_h) = \frac{1}{4\pi h}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(u)\frac{e^{-in(u+h)} - e^{-in(u-h)}}{-in}\mathrm{d}u = \frac{2i\sin nh}{4\pi hin}\int_{[2\pi]} f(u)e^{-inu}\mathrm{d}u = \frac{\sin nh}{nh}c_n(f).$$

• Nếu $n = 0$, $c_0(f_h) = \dfrac{1}{4\pi h}\displaystyle\int_{-\pi-h}^{\pi-h} 2hf(u)\mathrm{d}u = c_0(f)$.

Cách khác: Nhận xét rằng f_h thuộc lớp C^1 từng khúc và $f_h' = \dfrac{1}{2h}(\tau_{-h}f - \tau_h f)$, từ đó với mọi $n \in \mathbb{Z}$: $c_n(f_h) = \dfrac{1}{2h}\left(c_n(\tau_{-h}f) - c_n(\tau_h f)\right)$, rồi sử dụng các công thức 6.1.2.4.)

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{Z}^*, c_n(f_h) = \dfrac{\sin nh}{nh}c_n(f) \\ c_0(f_h) = c_0(f). \end{cases}$

6.2.1 • $f \in \mathcal{D}_T$ vì f là tổ hợp tuyến tính của $e_{-N}, \ldots, e_N$.

• Với mọi $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]}\sum_{k=-N}^{N}\gamma_k e^{i(k-n)\omega t}\mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N}\gamma_k\left(\frac{1}{T}\int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t}\mathrm{d}t\right),$$

và $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{[T]} f(t)e^{i(k-n)\omega t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = n \\ 0 & \text{nếu } k \neq n \end{cases}$ (xem 6.2.2, Mệnh đề 1).

◊ **Trả lời:** $c_n(f) = \begin{cases} \gamma & \text{nếu } |n| \le N \\ 0 & \text{nếu } |n| > N. \end{cases}$

6.2.2 *a)* Rõ ràng rằng g liên tục, thuộc lớp C^1 từng khúc. Hơn thế:

$$\forall t \in \mathbf{R}, g(t+T) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u + \int_t^{t+T} f(u)\mathrm{d}u = g(t) + Tc_0(f) = g(t),$$

vậy g là T - tuần hoàn.

Theo định lý về hội tụ chuẩn tắc (xem 6.3.1, Định lý), chuỗi Fourier của g hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ và có tổng là g.

6.3.1 *a)*

• $S_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đơn}} f$ và mỗi S_n là T - tuần hoàn, vậy f là T - tuần hoàn.

• $S_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ và mỗi S_n liên tục, vậy f liên tục.

b) Vì các S_n liên tục trên $[0;T]$ và vì $S_n \xrightarrow[n\infty]{\text{đều}} f$ nên ta có thể hoán vị $\displaystyle\int_0^T$ và $\lim\limits_{n\infty}$ (xem 4.3.4 Định lý), từ đó với mọi $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[T]}\left(\lim_{n\infty}\sum_{k=-m}^{m}\gamma_k e^{ik\omega t}\right)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T} \lim_{m\infty} \int_{[T]} \left(\sum_{k=-m}^{m} \gamma_k \int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t} dt \right) dt = \gamma_n$$

do $\frac{1}{T} \int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \neq n \\ 1 & \text{nếu } k = n. \end{cases}$

6.3.2 Có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\varepsilon_{n_0} < 1$. Rồi có $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n_1 > n_0$ và $\varepsilon_{n_1} < \frac{1}{2}$. Một lập luận bằng quy nạp đơn giản cho phép xây dựng một dãy $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sao cho:

$$\begin{cases} (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tăng nghiêm ngặt} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \varepsilon_{n_k} < \frac{1}{2^k}. \end{cases}$$

Chuỗi $\sum_{k\geq 0} \left(t \mapsto \varepsilon_{n_k} \cos(n_k t)\right)$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$; ký hiệu f là tổng của nó.

Theo bài tập 6.3.1, f liên tục, $f \in C_{2\pi}$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} \begin{cases} a_p(f) = \varepsilon_{n_k} & \text{nếu } p = n_k, k \in \mathbb{N} \\ a_p(f) = 0 & \text{nếu không phải như thế} \end{cases} \\ b_p(f) = 0, \end{cases}$$

và $\{n \in \mathbb{N}, |a_n(f)| + |b_n(f)| \geq \varepsilon_n\} = \{n_k; k \in \mathbb{N}\}$, tập này vô hạn.

6.3.3

a) Cho $h \in \mathbb{R}$ cố định, ánh xạ g: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ xác định bởi: $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(t+h) - f(t-h)$ là một phần tử của $\mathcal{D}_{2\pi}$ và với mọi $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t+h) - f(t-h)\right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_h^{h+2\pi} f(u) e^{-in(u-h)} du - \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{-h+2\pi} f(v) e^{-in(v+h)} dv \\ &= e^{inh} c_n(f) - e^{-inh} c_n(f) = 2i \sin nh\, c_n(f). \end{aligned}$$

Áp dụng công thức Parseval (6.2.3) vào g, ta được:

$$\int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t-h)|^2 dt 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|2i \sin nh\, c_n(f)|^2 + |-2i \sin nh\, c_{-n}(f)|^2 \right)$$

$$= 8\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2 nh \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right).$$

b) *α)* Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{\pi}{4N}$, ta có: $\forall n \in \{N+1, ..., 2N\}, \sin^2 nh \geq \frac{1}{2}$, từ đó

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{2N} |c_n(f)|^2 &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \sin^2 nh |c_n(f)|^2 \leq 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \sin^2 nh \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t-h)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(M(2h)^\alpha \right)^2 dt = \frac{M^2 \pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha+1}} \frac{1}{N^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

β) Theo *α)*, có $A \in \mathbb{R}_+$ sao cho: $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=N+1}^{2N} |c_n(f)|^2 \leq A N^{-2\alpha}$.

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy* - Schwarz:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=N+1}^{2N} |c_n(f)|^2 \leq \left(\sum_{n=N+1}^{2N} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=N+1}^{2N} |c_n(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{A} N^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Nói riêng: $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |c_n(f)| \le \sqrt{A}(2^p)^{\frac{1}{2}-\alpha}$ từ đó: $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=2}^{2^{p+1}} |c_n(f)| \le \sqrt{A} \sum_{q=0}^{p} (2^q)^{\frac{1}{2}-\alpha}$

Vì $\alpha > \frac{1}{2}$ nên chuỗi cấp số nhân $\sum_{q\ge 0} \left(2^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^q$ hội tụ và vậy, ta có:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{p=2}^{2^{p+1}} |c_n(f)| \le \frac{\sqrt{A}}{1-2^{\frac{1}{2}-\alpha}}.$$

Cuối cùng, với mọi $m \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, có $p \in \mathbb{N}$ sao cho $m \le 2^{p+1}$, từ đó: $\sum_{n=2}^{m} |c_n(f)| \le \frac{\sqrt{A}}{1-2^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.

Điều đó khẳng định rằng $\sum_{n\ge 1} |c_n(f)|$ hội tụ, cũng như $\sum_{n\ge 1} |c_{-n}(f)|$ hội tụ.

Ta kết luận rằng chuỗi Fourier của f hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$.

Ký hiệu S là tổng của chuỗi Fourier của f. Vì chuỗi Fourier của f hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ và vì mỗi $t \mapsto c_n(f)e^{\mathrm{i}nt} + c_{-n}(f)e^{-\mathrm{i}nt}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên S liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, rõ ràng rằng $S \in \mathcal{D}_{2\pi}$.

Sự hội tụ đều của chuỗi Fourier của f cho phép hoán vị $\int_0^{2\pi}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty}$ trong tính toán các hệ số Fourier của S và ta suy ra: $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(S) = c_n(f)$.

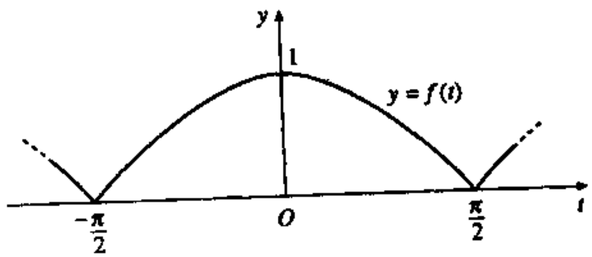
Tính liên tục của f là hệ quả của giả thiết của đề bài. Vậy $f - S$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f - S \in \mathcal{D}_{2\pi}$ và $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f-S) = 0$:

Theo công thức Parseval (6.2.3):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} |(f-S)(t)|^2\,dt = |c_0(f-S)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n(f-S)|^2 + |c_{-n}(f-S)|^2\right) = 0,$$

và cuối cùng $f = S$ (xem 6.2.3, Hệ quả 2).

- **6.4.1** *a)* Rõ ràng là f là π- tuần hoàn và liên tục, vậy $f \in \mathcal{D}_\pi$. Vì f chẵn nên:



- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\pi}\int_{[\pi]} f(t)\cos 2nt\,dt$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t \cos 2nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t\right)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{2n-1}\right)=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}.$$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n=0\\ \forall n\in\mathbb{N}, a_n=\dfrac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}.\end{cases}$

b) • Vì $|a_n|\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{\pi n^2}$ nên chuỗi Fourier của *f* hội tụ chuẩn tắc (vậy đều và đơn) trên $\mathbb{R}$.

• Vì $f\in\mathcal{D}_\pi$ và vì *f* thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$, nên có thể áp dụng định lý Dirichlet (6.3.2, Định lý), ta kết luận rằng chuỗi Fourier của *f* hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ (ta cũng vừa thấy điều này một cách khác) và tổng của nó là *f*. Vậy ta có:

$$\forall t\in\mathbb{R}, |\cos t|=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nt.$$

c) • Áp dụng kết quả trên cho t = 0 và $t=\frac{\pi}{2}$, ta được:

$$1=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\text{ và }0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

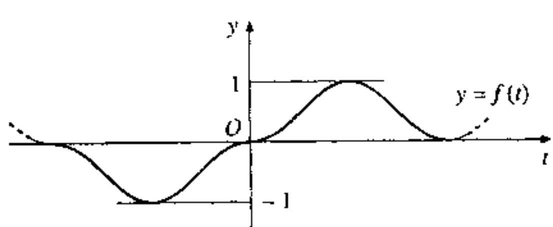
Do *f* thuộc $C\mathcal{M}_T$ nên ta có thể áp dụng công thức Parseval (6.2.3 hệ quả 2), ta kết luận rằng $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\right)^2$ hội tụ và:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{[\pi]}\left(f(t)\right)^2dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}.$$

◊ **Trả lời:** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2};\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4};\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$

6.4.2

a) Rõ ràng rằng *f* là 2π - tuần hoàn và liên tục, vậy $f\in\mathcal{D}_{2\pi}$.



Vì *f* lẻ nên: • $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=0$.

• $\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(1-\cos 2t)\sin nt\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin nt - \frac{1}{2}\left(\sin(n+2)t + \sin(n-2)t\right)\right)dt\,.$$

Nếu $n \neq 2$ thì:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n} + \frac{\cos(n+2)t}{2(n+2)} - \frac{\cos(n-2)t}{2(n-2)}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n-2)}\right).$$

Nếu n chẵn và $n \neq 2$ thì $b_n = 0$.

Nếu n lẻ thì $b_n = -\dfrac{8}{\pi n(n^2-4)}$.

Cuối cùng $b_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t\right)dt = 0$.

◊ **Trả lời:** $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ $\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, a_n = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = -\dfrac{8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)}. \end{cases}$

b) • Vì $\left|b_{2p+1}\right| \underset{p\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi p^3}$ nên chuỗi Fourier hội tụ chuẩn tắc (vậy đều và đơn) trên $\mathbb{R}$.

• Vì $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ và f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ nên ta có thể áp dụng định lý Dirichlet (6.3.2, Định lý): ta kết luận rằng chuỗi Fourier của f hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ (đó là điều ta đã vừa biết) và có tổng là f. Vậy, ta có:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)}\sin(2p+1)t$$

c) • Áp dụng kết quả bài tập trên cho $t = \dfrac{\pi}{2}$, ta được:

$$1 = \frac{-8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)}$$

• Do $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ ta có thể áp dụng công thức *Parseval* (6.2.3, Hệ quả 1); ta được:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]}\left(f(t)\right)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 t\,dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{3}{8}.$$

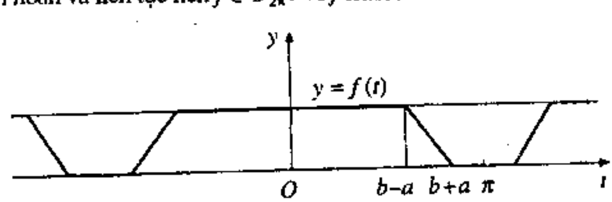
◊ **Trả lời:**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = -\frac{\pi}{8}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{((2n-1)(2n+1)(2n+3))^2} = \frac{3\pi^2}{256}.$$

6.4.3

a) Vì f 2π - tuần hoàn và liên tục nên $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$. Vì f chẵn nên:



- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{[\pi]} f(t)\cos nt\,dt = \dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{b-a}\cos nt\,dt + \int_{b-a}^{b+a}\dfrac{b+a-t}{2a}\cos nt\,dt\right)$.

Nếu $n \geq 1$, nhờ một tích phân từng phần, ta được:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{b-a} + \left[\frac{b+a-t}{2a}\frac{\sin nt}{n}\right]_{b-a}^{b+a} + \frac{1}{2a}\int_{b-a}^{b+a}\frac{\sin nt}{n}dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi an}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_{b-a}^{b+a} = \frac{\cos n(b-a) - \cos n(b+a)}{\pi an^2} = \frac{2\sin na\sin nb}{\pi an^2},$$

và $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{b-a}dt + \int_{b-a}^{b+a}\dfrac{b+a-t}{2a}dt\right) = \dfrac{2b}{\pi}$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} a_0 = \dfrac{2b}{\pi} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{2\sin na\sin nb}{\pi an^2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0. \end{cases}$

b) • Vì $|a_n| \leq \dfrac{2}{\pi an^2}$, chuỗi Fourier của *f* hội tụ chuẩn tắc (vậy đều và đơn) trên $\mathbb{R}$.

• Do $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ và f thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ nên ta có thể áp dụng định lý Dirichlet (6.3.2, Định lý): ta kết luận rằng chuỗi Fourier của *f* hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ (ta đã biết điều này) và có tổng là *f*. Vậy, ta có:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{b}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin na\sin nb}{\pi an^2}\cos nt.$$

c) • Áp dụng kết quả trên cho t = 0, ta được:

$$1 = \frac{b}{\pi} + \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na\sin nb}{n^2}.$$

• Vì $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, ta có thể áp dụng công thức *Parvesal* (6.2.3, Hệ quả 1); sau khi tính toán, ta được:

$$\frac{b^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi a}\right)^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 na\sin^2 nb}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]}(f(t))^2\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(t))^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{b-a}dt + \int_{b-a}^{b+a}\frac{1}{4a^2}(b+a-t)^2\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(b - \frac{a}{3}\right).$$

◊ **Trả lời:**
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na\sin nb}{n^2} = \frac{a(\pi - b)}{2}.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 na\sin^2 nb}{n^4} = \frac{a^2(3b\pi - a\pi - 3b^2)}{6}.$$

6.4.4 Một phân tích thành những phần tử đơn giản cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1},$$

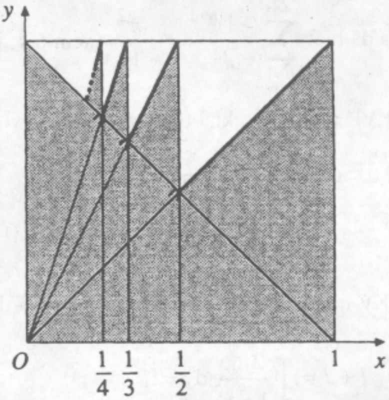
từ đó với mọi $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^2} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{(N+1)^2} - 2 + \frac{2}{N+1} \xrightarrow[N\infty]{} 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 3.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi^2 - 9}{3}$.

6.4.5 Ánh xạ $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ liên tục từng khúc trên $]0;1[$ và có giới hạn hữu hạn (1) khi $x \to 0^+$, vậy nó khả tích trên $]0;1]$.



Ta có (chứng minh sự hội tụ của các chuỗi dùng đến):

$$\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} nx\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi^2}{12}$.

6.4.6

a) Theo KTCLT(0) của $x \mapsto \ln(1+x)$ (xem 5.5.3 4)), ta có:

$$\forall x \in [0;1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n};$$

từ đó: $\forall\, x \in\ ]0;1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n}$.

• Chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 1} f_n$, trong đó $f_n : [0;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n}$ hội tụ đều trên $[0;1]$. Thực vậy, với mọi $x \in [0;1]$, chuỗi số $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ là đan dấu và $\left(|f_n(x)|\right)_{n\geq 1}$ giảm dần đến 0. Từ đó suy ra:

$$\forall (n,x)\in \mathbb{N}\times[0;1], \left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \le \left|f_{n+1}(x)\right| = \frac{x^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1},$$

vậy $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

- Vì mỗi f_n liên tục và vì $\sum_{n\ge1} f_n$ hội tụ đều trên $[0;1]$, nên ta có thể hoán vị $\int_0^1$ và $\sum_{n=1}^{+\infty}$, từ đó:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Xem thêm bài tập 4.3.23 e).

Ta đã biết $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ (xem 6.4, ví dụ 1), từ đó: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

b) Vì $x\mapsto \frac{\ln x}{1+x}$ khả tích trên $]0;1]$ và vì $\ln x\ln(1+x)$ có một giới hạn hữu hạn (0) khi x dần về 0^+, ta có thể lấy tích phân từng phần:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x = \left[\ln x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}.$$

- Ký hiệu $I = \int_0^1\frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x$, $J = \int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$, $K = \int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ (các tích phân này tồn tại), ta có: $I + J = \int_0^1\frac{2\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = 2K$.

Mặt khác: $J \underset{y=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 \frac{2\ln y}{1-y^2}2y\mathrm{d}y = 4\int_0^1\frac{(y+1)-1}{1-y^2}\ln y\mathrm{d}y = 4J-4K$.

Vậy ta được: $\begin{cases}2K - J = I\\ 4K-3J=0\end{cases}$,

từ đó $J = 2I = -\frac{\pi^2}{6}$ và $K = \frac{3}{2}I = -\frac{\pi^2}{8}$

- Một tích phân từng phần, ở đây hợp pháp cho:

$$\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = \left[\ln x\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \ln x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x = -2\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -2K = \frac{\pi^2}{4}.$$

- $$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^1\frac{\ln y}{1-y^2}\mathrm{d}y = -\frac{\pi^2}{8}.$$

- $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^1\frac{1}{y}\ln\frac{1+y}{1-y}\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{4}.$$

- $$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}.$$

- $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$

◊ **Trả lời::** $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}$, $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$, $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{8}$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{\pi^2}{4},\quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2}dx = -\frac{\pi^2}{8},\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}dx = \frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}dx = -\frac{\pi^2}{4},\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

6.4.7

$$\forall n \geq 2, \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ trong đó } f : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1-x)}{x} \end{array}.$$

Ánh xạ f liên tục trên $]0;1[$, thác triển liên tục được tại 0 vì $f(x)\xrightarrow[x\mapsto 0^+]{} -1$; f thuộc lớp C^1 trên $]0;1[$ và:

$$\forall x \in]0;1[, f'(x) = -\frac{1}{x^2}g(x), \text{ trong đó } g : \begin{array}{ccc} [0;1[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \ln(1-x)+\frac{x}{1-x} \end{array}.$$

Vì g thuộc lớp C^1 trên $[0;1[$ và vì $\forall x \in [0;1[, g'(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ nên suy ra được biến thiên của g, rồi của f và cuối cùng f giảm trên $]0;1[$.

Sau đó f khả tích trên $]0;1[$.

Sử dụng bài tập 10.1.3 của tập 2, ta suy ra:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt = -\frac{\pi^2}{6},$$

xem bài tập 6.4.6.

◊ **Trả lời:** $e^{-\frac{\pi^2}{6}}$.

6.4.8 Ký hiệu $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ (N,t) & \mapsto & \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nt}{n} \end{array}$.

Nhận xét rằng với mọi $N \in \mathbb{N}^*$, $S(N,\circ)$ là 2π- tuần hoàn và lẻ, điều đó cho phép đưa về $t \in [0;\pi]$.

1) Với mọi $(N,t) \in \mathbb{N}^* \times [0;\pi]$ ta có:

$$S(N,t) = \sum_{n=1}^{N}\int_0^t \cos nu du = \int_0^t\left(\sum_{n=1}^{N}\cos nu\right)du$$

$$= \int_0^t\left(\frac{\cos\frac{Nu}{2}\sin\frac{(N+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} - 1\right)du = \int_0^t \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du - t.$$

Vậy chỉ cần chứng minh rằng ánh xạ $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times [0;\pi] & \to & \mathbf{R} \\ (N,t) & \mapsto & \int_0^t \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du \end{array}$ bị chặn.

Xét $U : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times [0;\pi] & \to & \mathbf{R} \\ (N,t) & \mapsto & \int_0^t \frac{2\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}du \end{array}$.

2) Với $(N,t) \in \mathbb{N}^* \times [0;\pi]$, ta có: $T(N,t) - U(N,t) = \displaystyle\int_0^t \sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)u\, g(u)du$, trong đó $g:]0;\pi] \to \mathbf{R}$, $u \mapsto \frac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}$.

Chứng minh (sử dụng những khai triển hữu hạn tại 0) rằng g có một giới hạn hữu hạn (0) tại 0, rồi ánh xạ đã được thác triển như thế, mà ta cũng ký hiệu là g, thuộc lớp C^1 trên $[0;\pi]$. Sau đó, một tích phân từng phần cho:

$$|T(N,t) - U(N,t)| = \left| \left[\frac{-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{N+\frac{1}{2}} g(u) \right]_0^t + \int_0^t \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{N+\frac{1}{2}} g'(u)\mathrm{d}u \right|$$

$$\le \frac{|g(0)|+|g(t)|}{N+\frac{1}{2}} + \frac{1}{N+\frac{1}{2}} \int_0^t |g'(u)|\mathrm{d}u \le 2\|g\|_\infty + \int_0^\pi |g(u)|\mathrm{d}u .$$

Điều đó chứng tỏ T-U bị chặn trên $\mathbb{N}^* \times [0;\pi]$

3) Với mọi $(N,t) \in \mathbb{N}^* \times [0;\pi]$:

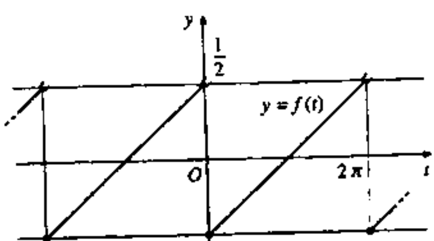
$$U(N,t) = \int_0^t \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}\mathrm{d}u \underset{v=(N+\frac{1}{2})u}{=} 2\int_0^{(N+\frac{1}{2})t} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v .$$

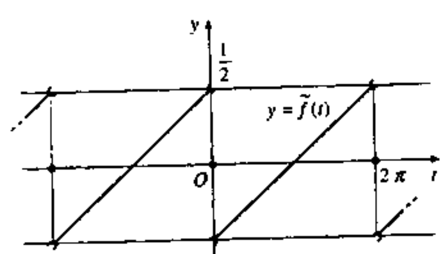
Do ánh xạ $F: X \mapsto \int_0^X \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v$ liên tục trên $]0;+\infty[$ và thừa nhận những giới hạn hữu hạn tại 0 và $+\infty$ nên F bị chặn trên $[0;+\infty[$. Từ đó suy ra U bị chặn trên $\mathbb{N}^* \times [0;\pi]$. Theo 2) và 3), $T = (T-U) + U$ bị chặn trên $\mathbb{N}^* \times [0;\pi]$.

6.4.9

1) Xét chính quy hoá $\widetilde{f}$ của *f*. Vì $\widetilde{f}$ lẻ, ta có:

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.





- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\right)\sin nt\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}\right)\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2\pi n}\cos nt\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{\pi n}$.

2) Với $p \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $f_p: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $t \mapsto f(pt)$ và với $k \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $s_k: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $t \mapsto \sin kt$.

Theo định lý Parvesal (6.2.3 Định lý) và bài tập 6.1.1 *b)*, chuỗi $\sum_{m\ge1} -\frac{1}{\pi m} S_{mq}$ hội tụ đều đến f_q trong $(\mathcal{D}_{2\pi}, (\circ|\circ))$. Do ánh xạ $g \mapsto (f_p | g)$ liên tục trên $\mathcal{D}_{2\pi}$ (xem Tập 3, 1.6.2 Mệnh đề 3), ta suy ra:

$$(f_p \mid f_q) = \sum_{m=1}^{+\infty} -\frac{1}{\pi m}(f_p \mid s_{mq}).$$

Cùng với lập luận đó: $\forall m \in \mathbb{N}^*, (f_p \mid s_{mq}) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\pi n}(s_{np} \mid s_{mq})$

vậy ta có: $(f_p \mid f_q) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\pi^2 mn}(s_{np} \mid s_{mq})$.

Chứng minh dễ dàng rằng với mọi $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$(s_m \mid s_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

Mặt khác, sử dụng định lý Gauss, chứng minh rằng:

$$\left\{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, np = mq\right\} = \left\{(\nu q_1, \nu p_1), \nu \in \mathbb{N}^*\right\}$$

trong đó: $p_1 = \frac{p}{\delta}$, $q_1 = \frac{q}{\delta}$, $\delta = \text{UCLN}(p,q)$.

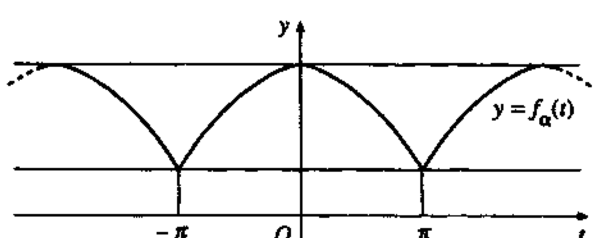
Từ đó: $(f_p \mid f_q) = \frac{1}{2\pi^2 p_1 q_1}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{\nu^2}$.

Cuối cùng: $\int_0^{2\pi} f(pt)f(qt)dt = 2\pi(f_p \mid f_q)$.

◊ **Trả lời:** $\frac{\pi}{6p_1q_1}$, trong đó $p_1 = \frac{p}{\delta}$, $q_1 = \frac{q}{\delta}$, $\delta = UCLN(p,q)$.

6.4.10

a) Rõ ràng rằng f_α 2π - tuần hoàn và liên tục nên $f_\alpha \in \mathcal{D}_{2\pi}$. Ngoài ra, f_α chẵn nên: $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.



Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha t \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n+\alpha)t + \cos(n-\alpha)t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(n+\alpha)t}{n+\alpha}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin(n-\alpha)t}{n-\alpha}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n \sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}\right) = \frac{2\alpha(-1)^{n+1}\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}.$$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{2\alpha(-1)^{n+1}\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0. \end{cases}$

b) • Vì $|a_n| \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi n^2}$ nên chuỗi Fourier của f_α hội tụ chuẩn tắc (vậy đều và đơn) trên $\mathbb{R}$

• Do $f_\alpha \in \mathcal{D}_{2\pi}$ và do f_α thuộc lớp C^1 từng khúc, ta có thể áp dụng định lý Dirichlet (6.3.2 Định lý), ta kết luận rằng chuỗi Fourier của f_α hội tụ đơn trên $\mathbb{R}$ (là điều ta đã biết) và có tổng là f_α. Vậy ta có:

$$\forall t \in \mathbf{R}, f_\alpha(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha(-1)^{n+1}\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}\cos nt.$$

c) α) Áp dụng kết quả trên cho $t = \pi$, ta được:

$$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} - \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}.$$

Phép đổi $x = \alpha\pi$ cho:

$$\forall x \in \mathbf{R} - \pi\mathbf{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \operatorname{cotan} x.$$

β) Tương tự, áp dụng kết quả của *b)* cho $t = 0$.

6.4.11

a) Vì f_r và g_r là 2π- tuần hoàn và liên tục nên ta có $f_r \in \mathcal{D}_{2\pi}$ và $g_r \in \mathcal{D}_{2\pi}$. Ngoài ra, f_r chẵn và g_r lẻ. Với mọi $t \in \mathbf{R}$, ta có:

$$f_r(t) + ig_r(t) = \frac{1 - r\cos t + ir\sin t}{(1-re^{it})(1-re^{-it})} = \frac{1}{1-re^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(re^{it})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{int},$$

vì $\left|re^{it}\right| = r < 1$.

b) Do các chuỗi ánh xạ $\sum_{n\geq 0}\left(t \mapsto r^n\cos nt\right)$ và $\sum_{n\geq 0}\left(t \mapsto r^n \sin nt\right)$ hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ (vì $r \in \,]-1;1[$), vậy đều trên $\mathbb{R}$ nên các tổng của chúng là f_r và g_r thuộc $\mathcal{D}_{2\pi}$ và các hệ số Fourier của f_r và g_r là các hệ số của các chuỗi đó (xem bài tập 6.3.1).

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} a_0(f_r) = 2; a_0(g_r) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\left(a_n(f_r)\right) = r^n; \left(a_n(g_r)\right) = 0\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\left(b_n(f_r)\right) = 0; \left(b_n(g_r)\right) = r^n\right). \end{cases}$

Các chuỗi Fourier của f_r và g_r hội tụ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$.

c) $I_n(r) = \pi a_n(f_r)$, $J_n(r) = \pi b_n(g_r)$.

◊ **Trả lời:** $I_n(r) = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } n = 0 \\ \pi r^n & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}$, $J_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 0 \\ \pi r^n & \text{nếu } n \geq 1. \end{cases}$

d) F_r thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, $F_r(0)=0$ và:

$$\forall t\in\mathbb{R}, F_r'(t)=\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}=g_r(t).$$

Cách thứ nhất:

Theo định lý về lấy tích phân các tổng của các chuỗi ánh xạ, các chuỗi Fourier của g_r hội tụ chuẩn tắc (vậy đều) trên mọi đoạn trong $\mathbb{R}$ và do $F_r(0)=\ln(1-r)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n}$,

ta suy ra: $\forall t\in\mathbb{R}, F_r(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{r^n\cos nt}{n}$.

Giống như trong *b)* và *c)*, ta được: $A_0(r)=0$ và:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, A_n(r)=\pi a_n(F_r)=-\frac{\pi r^n}{n}$$

Lập luận tương tự cho G_r bằng cách chứng minh $G_r'(t)=f_r(t)-1$

Cách thứ hai:

Nhờ một tích phân từng phần:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, A_n(r)=\left[F_r(t)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}F_r'(t)\frac{\sin nt}{n}dt=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}g_r(t)\sin nt dt=-\frac{1}{n}J_n(r).$$

Lập luận tương tự cho $B_n(r)$, $n>1$.

Cuối cùng có ngay tức khắc các giá trị $A_0(r)$ và $B_0(r)$.

◊ **Trả lời:** $A_n(r)=\begin{cases}0 & \text{nếu } n=0\\ -\dfrac{\pi r^n}{n} & \text{nếu } n\geq 1\end{cases}$, $B_n(r)=\begin{cases}0 & \text{nếu } n=0\\ \dfrac{\pi r^n}{n} & \text{nếu } n\geq 1.\end{cases}$

6.4.12 • Cho $x\in\,]0;1[$.

Theo công thức Gauss, $\dfrac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\xrightarrow[n\infty]{}\Gamma(x)$, vậy $u_n\xrightarrow[n\infty]{}\dfrac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$ trong đó ký hiệu: $u_n=\dfrac{1}{x}\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!n^x}\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(1-x+k)}{n!n^{1-x}}$

$$=\frac{\big((x+1)(x+2)...(x+n)\big)\big((1-x)(2-x)...(n-x)\big)}{(n!)^2}\frac{n+1-x}{n}=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)\right)\frac{n+1-x}{n}.$$

Do $\dfrac{n+1-x}{n}\xrightarrow[n\infty]{}1$, ta kết luận: $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\dfrac{x}{k}\right)^2\right)\xrightarrow[n\infty]{}\dfrac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$.

• Mặt khác, theo bài tập 6.4.4 *c)α)* (áp dụng cho πt thay cho x), ta có:

$$\forall t\in\,]0;1[, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{n^2-t^2}=\frac{1}{t}-\pi\,\text{cotan}\,\pi t.$$

Xét $\varphi:]0;1[\to \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t} - \pi \operatorname{cotan} \pi t$

Vì: $\varphi(t) = \dfrac{\sin \pi t - \pi t \cos \pi t}{t \sin \pi t} = \dfrac{\left(\pi t + o(t^2)\right) - \pi t\left(1 + o(t)\right)}{t \sin \pi t} = \dfrac{o(t^2)}{t \sin \pi t} = o(1)$

nên ta có thể thác triển liên tục φ tại 0 bằng cách đặt $\varphi(0) = 0$.

Ngoài ra, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ánh xạ $f_n: [0;1[\to \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{2t}{n^2 - t^2}$ liên tục và chuỗi hội tụ chuẩn tắc, vậy

đều trên mọi $[0;a]$ ($a \in [0;1[$) vì: $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;a], \ |f_n(t)| \le \dfrac{2}{n^2 - a^2}$.

Theo định lý về lấy tích phân cho chuỗi ánh xạ, với mọi $x \in [0;1[$, chuỗi $\displaystyle\sum_{n \ge 1} \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ hội tụ

và có tổng $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Ta có: $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \pi \operatorname{cotan} \pi t\right)\mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{\sin \pi t}\right]_0^x = \ln \frac{\pi x}{\sin \pi t}$,

và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: $\qquad \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = \left[-\ln(n^2 - t^2)\right]_0^x = -\ln \frac{n^2 - x^2}{n^2} = -\ln\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)$.

Vậy ta được: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right) = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}$,

từ đó, mũ hoá: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

Ta kết luận: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

Nhận xét: Thay x bởi $\dfrac{1}{2}$ trong công thức phần bù, ta thấy lại $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

6.4.13

a) Ánh xạ $\ln \circ \Gamma$ liên tục trên $]0;1]$ và vì $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ nên $\ln \circ \Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x) > 0$;

do $x \mapsto -\ln x$ khả tích trên $]0;1]$, $\ln \circ \Gamma$ khả tích trên $]0;1]$.

Phép đổi biến $t = 1 - x$ cho:

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t)\mathrm{d}t,$$

từ đó nhờ công thức phần bù:

$$2\int_0^1 \ln \Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln \Gamma(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi x \mathrm{d}x.$$

Ký hiệu $I = \displaystyle\int_0^1 \ln \sin \pi x \mathrm{d}x$, ta có:

$$I=\int_0^{1/2}\ln\sin\pi x\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1\ln\sin\pi x\mathrm{d}x\underset{y=1-x}{=}\int_0^{1/2}\ln\sin\pi x\mathrm{d}x+\int_0^{1/2}\ln\sin\pi y\mathrm{d}y.$$

Ký hiệu $A=\int_0^{1/2}\ln\sin\pi x\mathrm{d}x$, $B=\int_0^{1/2}\ln\cos\pi x\mathrm{d}x$ thì ta đã được I = 2A.

Mặt khác, phép đổi biến $t=\frac{1}{2}-x$ cho $B=A$, từ đó:

$$I=2A=A+B=\int_0^{1/2}\ln(\sin\pi x\cos\pi x)\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}\ln\frac{\sin 2\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}\ln\sin 2\pi x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\underset{y=2x}{=}\frac{1}{2}\int_0^1\ln\sin\pi y\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}\ln 2.$$

và vậy $I=-\ln 2$.

Cuối cùng: $\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

b) α) Ánh xạ $f:a\mapsto\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$ thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall a\in]0;+\infty[, f'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=\ln a.$$

Vậy có $C\in\mathbb{R}$ sao cho: $\forall a\in]0;+\infty[, f(a)=a\ln a-a+C$.

Một mặt: $f(a)\xrightarrow[a\to 0^+]{}C$.

Mặt khác, do $\ln\circ\Gamma$ khả tích trên $]0;1]$ nên $f(a)\xrightarrow[a\to 0^+]{}\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$

từ đó: $C=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

Cuối cùng: $\forall a\in]0;+\infty[, \int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=a\ln a-a+\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

β) Ta có: $\int_0^n\ln\Gamma(a+x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln\Gamma(a+x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+k}^{a+k+1}\ln\Gamma(y)\mathrm{d}y$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left((a+k)\ln(a+k)-(a+k)+\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left((a+k)\ln(a+k)-na+\frac{n}{2}\ln(2\pi)\right)-\frac{n(n-1)}{2}.$$

6.4.14 Cho $n\in\mathbb{N}^*$.

Ánh xạ $x\mapsto(\ln\Gamma(x))\cos 2\pi nx$ liên tục trên $]0;1]$ và $(\ln\Gamma(x))\cos 2\pi nx\underset{x\to 0^+}{\sim}\ln\Gamma(x)\sim-\ln x>0$ nên $x\mapsto(\ln\Gamma(x))\cos 2\pi nx$ khả tích trên $]0;1]$.

Ánh xạ $x\mapsto\cot\text{an}\,\pi x\sin 2\pi nx$ liên tục trên $]0;1[$ và $\cot\text{an}\,\pi x\sin 2\pi nx\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{\pi x}2\pi nx=2n$,

$$\cot\text{an}\,\pi x\sin 2\pi nx=-\cot\text{an}\,\pi(1-x)\sin 2\pi n(1-x)\underset{x\to\pi}{\sim}-\frac{1}{\pi(1-x)}2\pi nx(1-x)=-2n$$

nên $x\mapsto\cot\text{an}\,\pi x\sin 2\pi nx$ khả tích trên $]0;1[$.

a) Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta có: $I_n\underset{y=1-x}{=}\int_0^1\ln\Gamma(1-y)\cos 2\pi ny\mathrm{d}y$,

từ đó, dùng công thức phần bù:

$$2I_n = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2\pi nx dx + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\cos 2\pi nx dx = \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x))\cos 2\pi nx dx$$

$$= \int_0^1 \ln\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)\cos 2\pi nx dx = \ln\pi\left[\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(\sin\pi x)\cos 2\pi nx dx$$

$$= \left[-\ln(\sin\pi x)\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 dx \operatorname{cotan}\pi x \sin 2\pi nx = \frac{1}{2n}J_n,$$

(tích phân từng phần là hợp pháp).

Ta kết luận: $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{4n}J_n$.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \operatorname{cotan}\pi x(\sin 2\pi(n+1)x - \sin 2\pi nx)dx = \int_0^1 \operatorname{cotan}\pi x 2\sin\pi x \cos\pi(2n+1)x dx$$

$$= 2\int_0^1 \cos\pi x\cos\pi(2n+1)x dx = \int_0^1 (\cos 2\pi(n+1)x + \cos 2\pi nx)dx$$

$$= \left[\frac{\sin 2\pi(n+1)x}{2\pi(n+1)} + \frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1 = 0.$$

Vậy : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, J_n = J_1 = \; = 2\int_0^1 \operatorname{cotan}\pi x\sin 2\pi x dx = 2\int_0^1 \cos^2\pi x dx = 1$

Cuối cùng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = 1$ và $I_n = \frac{1}{4n}$.

6.4.15 *a)* Với mọi $a \in]0;+\infty[$, ta có:

$$\int_0^1 \psi(a+x)dx = \int_0^1 \frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}dx = [\ln\Gamma(a+x)]_0^1 = \ln\Gamma(a+1) - \ln\Gamma(a) = \ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a.$$

b) Theo bài tập 6.4.14: $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2\pi nx dx = \frac{1}{4n}$.

Một tích phân từng phần, ở đây hợp pháp, cho:

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2\pi nx dx = \left[\ln\Gamma(x)\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi n}\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi nx dx,$$

từ đó: $\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi nx dx = -\frac{\pi}{2}$.

C6.1

1)*a)* Cho $(f,g)\in(C_T)^2$

• Trước hết, nhận xét rằng với mọi $t\in\mathbb{R}$, $(f*g)(t)$ tồn tại vì $u\mapsto f(u)g(t-u)$ liên tục trên $[0;T]$.

• Ta có: $\forall t\in\mathbb{R},(f*g)(t+T)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)g(t+T-u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(u)g(t-u)\mathrm{d}u=(f*g)(t)$

vậy $f*g$ là T - tuần hoàn.

• Vì f và g liên tục nên ánh xạ $(t,u)\mapsto f(t)g(t-u)$ liên tục trên $\mathbb{R}\times[0;T]$. Theo định lý về tính liên tục dưới dấu $\int$ (tập 3, 2.3.12 1)), $f*g$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) • Ta đã biết rằng $(C_T,+,\circ)$ là một $\mathbb{C}$ - kgv và $*$ là một tích trong C_T.

• $*$ là giao hoán vì:

$$\forall(f,g)\in(C_T)^2,\forall t\in\mathbb{R},(f*g)(t)=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)g(t-u)\mathrm{d}u\underset{v=t-u}{=}-\frac{1}{T}\int_t^{t-T}g(t-v)g(v)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T g(v)f(t-v)\mathrm{d}v=(f*g)(t),$$

và sử dụng tính T - tuần hoàn của $v\mapsto f(v)g(t-v)$, xem 6.1.1 Mệnh đề - Ký hiệu 2.

• Chứng minh dễ dàng rằng $*$ có tính chất phân phối đối với + và:

$$\forall\lambda\in\mathbb{C};(f,g)\in(C_T)^2,(\lambda f)*g=\lambda(f*g)=f*(\lambda g).$$

• Cho $f,g,h\in C_T$. Sử dụng định lý Fubini về tích phân kép (tập 2, 13.2.4 Định lý) thì với mọi $t\in\mathbb{R}$, ta có:

$$((f*g)*h)(t)=\frac{1}{T}\int_0^T(f*g)(u)h(t-u)\mathrm{d}u=\frac{1}{T^2}\int_0^T\left(\int_0^T f(v)g(u-v)\mathrm{d}v\right)h(t-u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T f(v)\left(\int_0^T g(u-v)h(t-u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{T^2}\int_0^T f(v)\left(\int_{-v}^{T-v}g(w)h(t-v-w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T f(v)\left(\int_0^T g(w)h(t-v-w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{T^2}\int_0^T f(v)(g*h)(t-v)\mathrm{d}v=(f*(g*h))(t),$$

và vậy $*$ có tính chất kết hợp.

2) a)

1) $c_n(f)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t=(f*e_n)(0)$.

2) $\forall t\in\mathbf{R},(e_n*e_n)(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^{\mathrm{i}n\omega u}e^{\mathrm{i}n\omega(t-u)}\mathrm{d}u=e^{\mathrm{i}n\omega t}=e_n(t)$.

3) $\forall t\in\mathbf{R},(f*e_n)(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)e^{\mathrm{i}n\omega(t-u)}\mathrm{d}u=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(u)e^{-\mathrm{i}n\omega u}\mathrm{d}u\right)e^{\mathrm{i}n\omega t}=c_n(f)e_n(t)$.

4) $c_n(f*g)=((f*g)*e_n)(0)=(f*e_n)*(g*e_n))(0)=\left(c_n(f)e_n\right)*\left(c_n(g)e_n\right)(0)$

$\qquad=c_n(f)c_n(g)e_n(0)=c_n(f)c_n(g)$.

b) $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n((f*g)*h) = c_n(f*g)c_n(h) = \left(c_n(f)c_n(g)\right)c_n(h) = c_n(f)\left(c_n(g)c_n(h)\right)$

$= c_n(f)c_n(g*h) = c_n(f*(g*h))$

từ đó theo định lý Parseval:

$$\|(f*g)*h - f*(g*h)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n((f*g)*h) - c_n(f*(g*h))\right|^2 = 0,$$

và vậy $(f*g)*h = f*(g*h)$.

c) α) Rõ ràng rằng $f \in C_{2\pi} \subset \mathcal{D}_{2\pi}$.

Với mọi $n \in \mathbf{Z}^*$, ta có:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\text{int}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-t)e^{-\text{int}}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} te^{-\text{int}}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nt\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases}\dfrac{-2}{\pi n^2} & \text{nếu } n \text{ lẻ}\\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn}\end{cases}$$

và $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|t|\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$.

◊ **Trả lời:** $c_n(f) = \begin{cases}\dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} & \text{nếu } n \in \mathbf{Z}^*\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } n = 0\end{cases}$.

β) 1) Ta biết rằng $f*f$ là 2π- tuần hoàn. Ngoài ra, $f*f$ là chẵn vì với mọi $t \in \mathbf{R}$:

$$(f*f)(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(-t-u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-u)f(t+u)\mathrm{d}u$$

$$\underset{v=-u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(v)f(t-v)dv = (f*f)(t).$$

2) Với $t \in [0;\pi]$, phép tính $(f*f)(t)$ (xuất phát từ định nghĩa) đòi hỏi phải để ý:

$$(f*f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(t-u)\mathrm{d}u$$

và chúng ta phải thay $f(u)$ và $f(t-u)$ bởi giá trị của chúng tuỳ theo vị trí của u. Ta phải phân tích khoảng lấy tích phân $[-\pi;\pi]$ thành bốn khoảng liên tiếp có mút $-\pi$, $t-\pi$, 0, t, π, từ đó:

$$(f*f)(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{t-\pi}(-u)(2\pi - (t-u))\mathrm{d}u + \int_{t-\pi}^{0}(-u)(t-u)\mathrm{d}u + \int_0^t u(t-u)\mathrm{d}u + \int_t^{\pi} u(-(t-u))\mathrm{d}u\right).$$

Những phép đổi biến thích hợp cho:

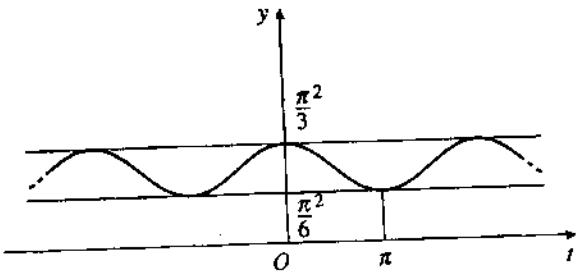
$$(f*f)(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^t(\pi - v)(\pi - t + v)\mathrm{d}v + \int_t^{\pi}(v-t)v\mathrm{d}v + \int_0^t u(t-u)du + \int_t^{\pi} u(-t+u)\mathrm{d}u\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^t(\pi(\pi - t) + 2tu - 2u^2)\mathrm{d}u + 2\int_t^{\pi} u(u-t)\mathrm{d}u\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\pi(\pi - t)u + tu^2 - \frac{2}{3}u^3\right]_0^t + 2\left[\frac{u^3}{3} - \frac{tu^2}{2}\right]_t^{\pi}\right).$$

◊ **Trả lời:** $f * f$ là 2π- tuần hoàn, chẵn và:

$$\forall t \in [0;\pi], (f * f)(t) = \frac{1}{6\pi}(2t^3 - 3\pi t^2 + 2\pi^3).$$



Đồ thị của $f * f$

$\gamma)$ • Vì $f * f \in C_T \subset \mathcal{D}_T$ và vì $f * f$ thuộc lớp C^1 từng khúc trên $\mathbb{R}$ (và ngay cả lớp C^1 trên $\mathbb{R}$) nên định lý Dirichlet chứng tỏ rằng dãy $(S_n(f * f))_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f * f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f * f)e_k$$

hội tụ đơn đến $f * f$ trên $\mathbb{R}$ (có cả hội tụ chuẩn tắc, xem 6.3.1, Định lý).

Theo 2)a)4): $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n(f * f) = (c_n(f))^2$.

Khi đó, sử dụng các kết quả của 2)c)α), ta được:

$$\forall t \in \mathbf{R}, (f * f)(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)\cos nt = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^4}.$$

Nói riêng, khi thay t bằng 0:

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

• Tương tự, do $f * f \in \mathcal{D}_T$, định lý *Parvesal* cho:

$$(f * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left((f * f)(t)\right)^2 dt = |c_0(f * f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n(f * f)|^2 + |c_{-n}(f * f)|^2\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{16} + \frac{32}{\pi^4}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^8},$$

và $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left((f * f)(t)\right)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{36\pi^2}(2t^3 - 3\pi t^2 + 2\pi^3)^2 dt$

$$= \frac{1}{36\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}(4t^6 + 12\pi t^5 + 9\pi^2 t^4 + 8\pi^3 t^3 - 12\pi^4 t^2 + 4\pi^6)dt = \frac{83\pi^4}{35.36}$$

từ đó suy ra giá trị của $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^8}$.

◊ **Trả lời:** $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$, $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^8}=\frac{17\pi^4}{161.280}$.

3)a) Giả sử có $\varepsilon \in C_T$ sao cho: $\forall f \in C_T, f * \varepsilon = f$;

Nói riêng: $\forall n \in \mathbf{Z}, e_n * \varepsilon = e_n$ và vậy $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n(\varepsilon) = (e_n * \varepsilon)(0) = e_n(0) = 1$.

Nhưng, theo định lý Parseval, do $\varepsilon \in \mathcal{D}_T$ nên $\sum_{n\in Z}|c_n(\varepsilon)|^2$ hội tụ, vậy $c_n(\varepsilon)\xrightarrow[n\infty]{}0$ và ta có mâu thuẫn.

b) Với mọi $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho $p \neq q$, ta có: $\forall t \in \mathbf{R}, (e_p * e_q)(t) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(p-q)\omega u}du\right)e_q(t) = 0$.

Nói riêng: $e_0 * e_1 = 0; e_0 \neq 0; e_1 \neq 0$.

◊ **Trả lời:** Có như thế.

4)a) •Cho $f \in C_T$ sao cho $f * f = f$. Khi đó ta có: $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n(f) = c_n(f * f) = \left(c_n(f)\right)^2$, vậy $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n(f) \in \{0;1\}$. Nhưng do $f \in C_T \subset \mathcal{D}_T$ nên $c_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ và $c_n(f)\xrightarrow[n\to-\infty]{}0$. Vậy có một tập con hữu hạn X của $\mathbb{Z}$ sao cho $f = \sum_{n\in X} e_n$

• Phần đảo có ngay tức khắc.

◊ **Trả lời:** $\left\{\sum_{n\in X} e_n; X \text{ là tập con hữu hạn của } \mathbf{Z}\right\}$.

b) Cho $f \in C_T$ sao cho $P(f) = 0$. Khi đó ta có:

$\forall n \in \mathbf{Z}, P(c_n(f)) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\left(c_n(f)\right)^k = c_n(P(f)) = 0$ và vậy $\{c_n(f); n \in \mathbf{Z}\} \subset Z(P)$ trong đó $Z(P)$ là tập các không điểm của P (trong $\mathbb{C}$).

Để ý rằng $0 \in Z(P)$ và ký hiệu $U = Z(P) - \{0\}$. Do U là tập con hữu hạn của $\mathbb{C}$ không chứa 0 nên có $\rho > 0$ sao cho:

$\forall z \in U, |z| \geq \rho$.

Vậy, ta có: $\forall n \in \mathbf{Z}, \left(c_n(f) = 0 \text{ hay } |c_n(P(f)| \geq \rho\right)$.

Mặt khác $f \in C_T \subset \mathcal{D}_T$ nên $c_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ và $c_n(f)\xrightarrow[n\to-\infty]{}0$.

Suy ra có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $\forall n \in \mathbf{Z}, \left(|n| \geq n_0 \Rightarrow c_n(f) = 0\right)$.

Khi đó ta có: $f = \sum_{n=-n_0}^{n_0} c_n(f)e_n$.

Đảo lại, nếu X là một tập con hữu hạn của $\mathbb{Z}$ và nếu $(c_n)_{n\in X}$ thoả mãn $\left(\forall n \in X, P(c_n) = 0\right)$ thì khi ký hiệu $f = \sum_{n\in X} c_n e_n$ ta có: $P(f) = 0$.

◊ **Trả lời:**

$\left\{\sum_{n\in X} c_n e_n; X \text{ là một tập con hữu hạn của } \mathbf{Z} \text{ và } (c_n)_{n\in X} \in \mathbf{C}^X \text{ sao cho:} \forall n \in X, P(c_n) = 0\right\}$.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 7

7.2.1 Vì $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2}\end{array}$ thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbf{R}^2$ nên với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một nghiệm cực đại duy nhất, ký hiệu là y, và khoảng xác định I của y là khoảng mở (định lý Cauchy – Lipschitz 7.2.1,4)).

Giả sử I bị chặn trên và ký hiệu mút phải của I là β.

Vì $y' = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \geq 0$ nên y tăng, vậy tại β^- có giới hạn hữu hạn hoặc $+\infty$. Theo 7.2.1.6) a)

Mệnh đề, y không thể có giới hạn hữu hạn tại β^-, vậy $y \xrightarrow[\beta^-]{} +\infty$. Từ đó

$$y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \xrightarrow[\beta^-]{} 0 .$$

Vậy tồn tại $\alpha \in \,]-\infty; \beta[\, \cap I$ và $M_1 \in \mathbf{R}_+$ sao cho $\forall x \in [\alpha; \beta[$: $\quad |y'(x)| < M_1$.

Từ đó, với mọi x thuộc $[\alpha; \beta[$: $|y(x)| = \left| y(\alpha) + \int_\alpha^x y'(t)dt \right| \leq |y(\alpha)| + (\beta - \alpha)M_1$, mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ I không bị chặn trên.

Vì y tăng trên I nên y có tại $+\infty$ giới hạn hữu hạn hoặc $+\infty$. Nếu $y \xrightarrow[+\infty]{} l \in \mathbf{R}$ thì

$y' = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Từ đó, một cách cổ điển $y(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ (xem Tập 1, bài tập 5.28).

7.2.2 *a)* • Giả sử y là một nghiệm trên khoảng I. Nếu tồn tại $x_1 \in I$ sao cho $y(x_1) = 0$ thì $x_1^2 = x_1 y(x_1) y'(x_1) - (y(x_1))^2 = 0$. Điều này chứng tỏ rằng $\forall x \in \mathbf{R}^* \cap I, y(x) \neq 0$.

• Ta giải PTVP trên một khoảng bị bao hàm trong $]-\infty;0[$ hoặc trong $]0;+\infty[$.

Đây là một PTVP đẳng cấp (xem Tập 2, 11.3.3); ta xét hàm $t: x \to t = \dfrac{y}{x}$. PTVP trên được đưa về $tt'x = 1$, nghĩa là $\dfrac{t^2}{2} + C = \ln|x|$ $(C \in \mathbf{R})$, hay là $t = \varepsilon\sqrt{2\ln\left|\dfrac{x}{\lambda}\right|}$, $(\varepsilon \in \{-1;1\}, \lambda \in \mathbf{R}^*)$.

Ký hiệu: $f_{\varepsilon,\lambda} : \begin{array}{l}[\lambda; +\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \varepsilon x\sqrt{2\ln\frac{x}{\lambda}}\end{array}$ nếu $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbf{R}_+^*$

$f_{\varepsilon,\lambda} : \begin{array}{l}]-\infty; \lambda] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \varepsilon x\sqrt{2\ln\frac{x}{\lambda}}\end{array}$ nếu $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbf{R}_-^*$.

- Giả sử $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại và giá trị một nghiệm cực đại của giả- bài toán Cauchy (C) $\begin{cases} xyy' - (x^2 + y^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (PTVP của đầu bài không chuẩn hoá).

1) Nếu $\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 \neq 0 \end{cases}$. Rõ ràng là (C) không có nghiệm.

2) Trường hợp $x_0 = y_0 = 0$.
Giả sử rằng (C) có một nghiệm y, xác định trên một khoảng I chứa 0 và, giả sử, chẳng hạn I là lân cận bên phải của 0.
Ta có: $y(x) = xy'(0) + \underset{x\to 0^+}{o}(x)$.
Nếu $y'(0) \neq 0$, thì $y(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} xy'(0)$, từ đó $x^2 + (y(x))^2 \underset{x\to 0^+}{\sim} (1 + (y'(0))^2)x^2$ và

$xy(x)y'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} y'(0)x^2y'(x)$, vậy $y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{1 + (y'(0))^2}{y'(0)}$.

Theo định lý "giới hạn của đạo hàm" y' liên tục tại 0 và $y'(0) = \dfrac{1 + (y'(0))^2}{y'(0)}$, mâu thuẫn.

Nếu $y'(0) = 0$, thì $y(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(x)$ và $xy(x)y'(x) = x^2 + (y(x))^2 \underset{x\to 0^+}{\sim} x^2$. Vậy $|y'(x)| \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$.
Từ đó suy ra y không khả vi bên phải điểm 0, mâu thuẫn.
Ta kết luận là PTVP không có nghiệm trên bất kỳ một khoảng nào chứa 0.

3) Trường hợp $x_0 \neq 0$ và $y_0 \neq 0$.

Ta giải phương trình $f_{\varepsilon,\lambda}(x_0) = y_0$, ẩn là (ε, λ) thuộc $\{-1;1\} \times \mathbb{R}^*$ và thu được $\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)$,

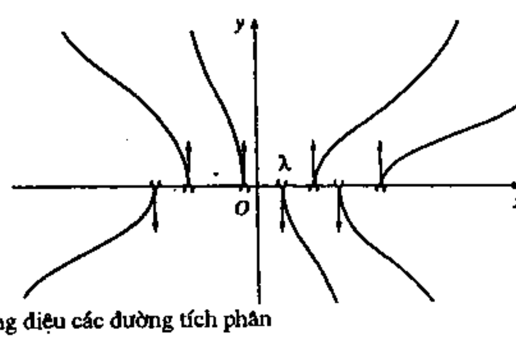
$\lambda = x_0 e^{-\frac{y_0^2}{2x_0^2}}$. Ánh xạ $f_{\varepsilon,\lambda}$ thu được bằng cách đó là nghiệm của (C), xác định trên $]\lambda; +\infty[$ (nếu $\lambda > 0$) hoặc $]-\infty;\lambda[$ (nếu $\lambda<0$) và không thể nới rộng tại λ thành một hàm khả vi vì $\left|f'_{\varepsilon,\lambda}\right| \xrightarrow[x\to\lambda]{} +\infty$.

Mặt khác, vì ánh xạ

$(x,y) \mapsto \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

thuộc lớp C^1 trên miền mở $(\mathbb{R}^*)^2$, nên Định lý Cauchy-Lipschitz (7.2.1.4) chỉ ra rằng bài toán Cauchy:

$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm cực đại, đó là $f_{\varepsilon,\lambda}$ đã được xác định ở trên.



Dáng điệu các đường tích phân

◊ **Trả lời:** Các nghiệm là các (thu hẹp trên các khoảng của các) hàm số:

- $\begin{array}{l}]\lambda;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \varepsilon x\sqrt{2\ln\frac{x}{\lambda}} \end{array}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbb{R}_+^*$

- $\begin{array}{l}]-\infty;\lambda[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto \varepsilon x\sqrt{2\ln\frac{x}{\lambda}} \end{array}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbb{R}_-^*$

b) Lập luận như trong *a)*.

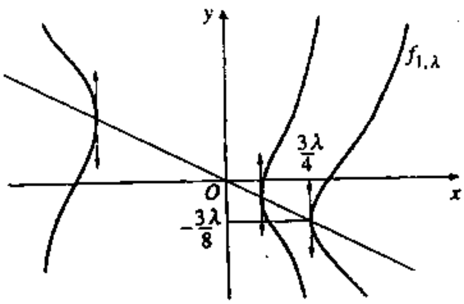
◊ **Trả lời:** Các nghiệm là các (thu hẹp trên các khoảng của các) hàm số:

$f_{\varepsilon,\lambda}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbb{R}^*$, xác định trên $\left]\frac{3\lambda}{4};+\infty\right[$ nếu $\lambda > 0$, $\left]-\infty;\frac{3\lambda}{4}\right[$ nếu $\lambda < 0$, sao cho

chẳng hạn với $\lambda > 0$ các đường cong biểu diễn $f_{1,\lambda}$ và $f_{-1,\lambda}$ là các bộ phận của đường cong (γ_λ)

có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = \lambda(1+t+t^2) \\ y = \lambda t(1+t+t^2) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ nằm ở hai phía của điểm có tiếp tuyến song

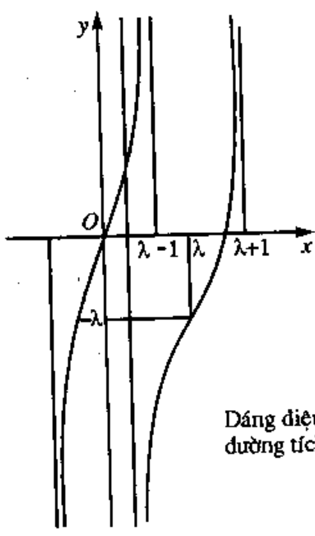
song với $(y'y)$.



Dáng điệu các đường tích phân

c) Phép biến đổi ẩn hàm $z = x + y$ đưa PTVP trong đề bài về PTVP $z' = \text{ch}z + 1$ có biến số phân ly (xem Tập 2, 11.3.2); hơn nữa $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}t + 1 \neq 0$.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là $y : \begin{array}{l}]\lambda-1;\lambda+1[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto -x+\ln\frac{x-(\lambda-1)}{(\lambda+1)-x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Dáng điệu các đường tích phân

d) Đây là PTVP Bernoulli (Tập 2, 11.3.4) chuẩn hóa.

- Trước hết, ta tìm các nghiệm y trên một khoảng I sao cho $\forall x \in I,\ y(x) \neq 0$.

Phép biến đổi ẩn hàm $z = \dfrac{1}{y}$ dẫn tới PTVP tuyến tính cấp 1: $z'+z+1 = 0$ mà nghiệm tổng quát

là: $z:\ x \mapsto -1+\lambda e^{-x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, từ đó $y:\ x \mapsto \dfrac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$.

Với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta xét ánh xạ f_λ xác định bởi $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$ có tập hợp xuất phát là $\mathbb{R}$ nếu

$\lambda \le 0$, $\mathbb{R} - \{\ln\lambda\}$ nếu $\lambda > 0$.

- Ánh xạ $(x,y) \mapsto y + y^2$ thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở $\mathbb{R}^2$.

Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, định lý Cauchy - Lipschitz chỉ ra rằng bài toán Cauchy

C_{x_0,y_0} $\quad \begin{cases} y' = y + y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm cực đại.

Nếu $y_0 = 0$ thì rõ ràng là nghiệm cực đại đó bằng 0.

Giả sử $y_0 \neq 0$. Phương trình $f_\lambda(x_0) = y_0$; ẩn là $\lambda \in \mathbb{R}$ có một và chỉ một nghiệm

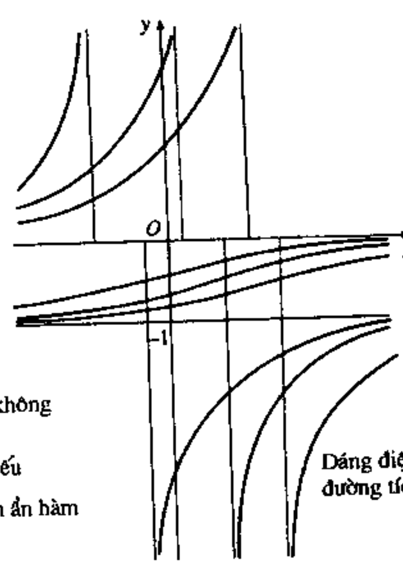
$\lambda_0 = \dfrac{1+y_0}{y_0} e^{x_0}$.

Nếu $\lambda_0 \le 0$ thì f_{λ_0} là một nghiệm của C_{x_0,y_0} trên $\mathbb{R}$, vậy là nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0}.

Nếu $\lambda_0 > 0$, nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0} là thu hẹp của f_{λ_0} trên một trong hai khoảng $]-\infty, \ln\lambda_0[$, $]\ln\lambda_0; +\infty[$ có chứa x_0.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là:

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}_-$
- $]-\infty; \ln\lambda[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
- $]\ln\lambda; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$



Dáng điệu các đường tích phân

e) Đây là PTVP Bernoulli (Tập 2, 11.3.4) không chuẩn hóa.

Nếu $y: I \to \mathbb{R}$ là nghiệm trên khoảng I và nếu $0 \notin I$ và $(\forall x \in I,\ y(x) \neq 0)$, thì việc đổi biến ẩn hàm $z = \dfrac{1}{y^2}$ dẫn đến phương trình tuyến tính

$xz' - 2z + 2x = 0$ có nghiệm tổng quát

$z: x \mapsto 2x + \lambda x^2$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, từ đó $y^2 = \dfrac{1}{2x + \lambda x^2}$.

Với mọi (x_0, y_0) thuộc $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, bài toán Cauchy:

C_{x_0,y_0} $\begin{cases} y' = \dfrac{-y + xy^3}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm cực đại vì ánh xạ

$(x,y) \mapsto \dfrac{-y+xy^3}{x}$ thuộc lớp C^1 trên bộ phận mở của $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$.

Nếu $y_0 = 0$ thì rõ ràng nghiệm cực đại ấy là $x \mapsto 0$, xác định trên $]-\infty; 0[$ nếu $x_0 < 0$, hoặc trên $]0;+\infty[$ nếu $x_0 > 0$.

Giả sử $y_0 \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbb{R}$ sao cho $f_{\varepsilon,\lambda}(x_0) = y_0$, trong đó

$f_{\varepsilon,\lambda} = \varepsilon\sqrt{\dfrac{1}{x+\lambda x^2}}$ xác định trên một khoảng thích hợp. Vì các hàm $f_{\varepsilon,\lambda}$ này có các giá trị giới hạn vô hạn tại các mút thực (nếu có) của các khoảng xác định của chúng nên chúng là điều kiện cần đối với các nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0}. Việc nối tại 0 chỉ có thể thực hiện được đối với hàm 0.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là

- $\begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2x}} \end{array}$, $\varepsilon \in \{-1;1\}$

- $\begin{array}{l} \left]0;-\frac{2}{\lambda}\right[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x+\lambda x^2}} \end{array}$,

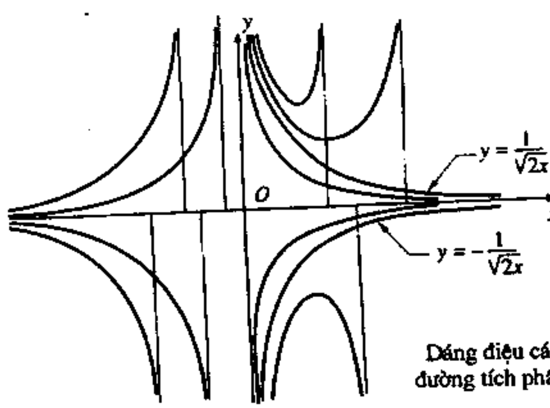
  $(\varepsilon,\lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbf{R}_-^*$

- $\begin{array}{l} \left]+\infty;-\frac{2}{\lambda}\right[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x+\lambda x^2}} \end{array}$

  $(\varepsilon,\lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbf{R}_+^*$

- $\begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$

- $\begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x+\lambda x^2}} \end{array}$, $(\varepsilon,\lambda) \in \{-1;1\} \times \mathbf{R}_+^*$.

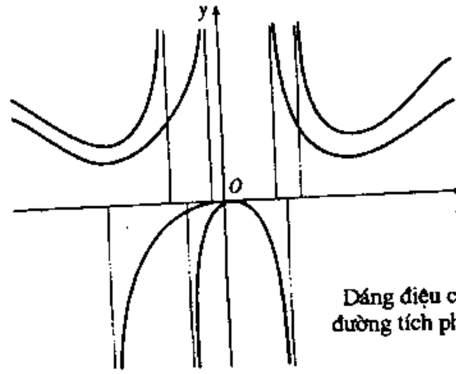


Dáng điệu các đường tích phân

f) Đây là một phương trình Bernoulli (xem Tập 2, 11.3. 4) không chuẩn hoá: Cùng phương pháp với *d)* hoặc *e)* nhưng ở đây có mối nối do tính khả vi tại 0 của mọi nghiệm xác định tại 0.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là:

- $\begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$



Dáng điệu các đường tích phân

- $\left]-\infty; e^{-\lambda}\right[\to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  $x \mapsto \dfrac{x}{\lambda+\ln(-x)}$
- $\left]e^{-\lambda}; +\infty\right[\to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  $x \mapsto \dfrac{x}{\lambda+\ln x}$
- $]-\infty; e^{-\lambda}[\to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ \dfrac{x}{\lambda+\ln x} & \text{nếu } x>0 \end{cases}$
- $]e^{-\lambda}; +\infty[\to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda+\ln(-x)} & \text{nếu } x<0 \\ 0 & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases}$
- $]-e^{-\lambda}; e^{-\mu}[\to \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda+\ln(-x)} & \text{nếu } -e^{-\lambda}<x<0 \\ 0 & \text{nếu } x=0 \\ \dfrac{x}{\mu+\ln x} & \text{nếu } 0<x<e^{-\mu} \end{cases}$

g) Đây là PTVP Riccati (xem Tập 2, 11.3.5) chuẩn hoá.

- Một nghiệm "hiển nhiên" là $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Vì vậy, ta thực hiện phép đổi biến ẩn hàm $z = y - \dfrac{1}{x}$, để đưa về PTVP Bernoulli (xem Tập 2, 11.3.4) $z' + \dfrac{1}{x}z + z^2 = 0$. Giả sử z không triệt tiêu, thực hiện phép đổi biến ẩn hàm $u = \dfrac{1}{z}$, đưa về PTVP tuyến tính $u' - \dfrac{1}{x}u - 1 = 0$ mà nghiệm tổng quát là $x \mapsto x\ln x + \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), từ đó

$y:\ x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\ln x + \lambda x}$.

Với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $f_\lambda : x \to \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\ln x + \lambda x}$, miền xác định của f_λ là $]0; e^{-\lambda}[\cup]e^{-\lambda}; +\infty[$.

- Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Vì ánh xạ $(x,y) \mapsto \dfrac{y}{x} - y^2 - \dfrac{1}{x^2}$ thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, nên theo định lý Cauchy – Lipschitz (7.2.1 Định lý), bài toán Cauchy

C_{x_0,y_0} $\quad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} - y^2 - \dfrac{1}{x^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một nghiệm cực đại duy nhất.

Nếu $x_0y_0 = 1$, thì rõ ràng là $\underset{x \mapsto \frac{1}{x}}{]0;+\infty[\to \mathbb{R}}$ là nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0} .

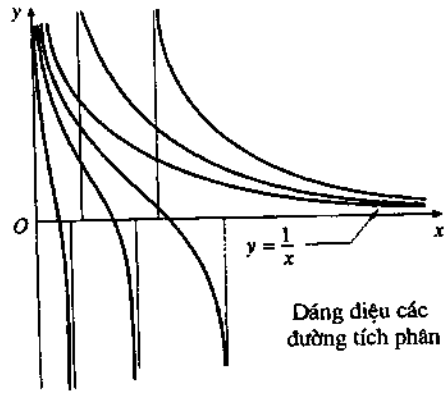
Vậy ta giả sử $x_0y_0 \ne 1$. Phương trình $f_\lambda(x_0) = y_0$ ẩn là $\lambda \in \mathbb{R}$ có một nghiệm duy nhất

$\lambda_0 = \dfrac{1}{x_0y_0 - 1} - \ln x_0$. Đặt x_0 ứng với $e^{-\lambda_0}$. Thu hẹp của f_{λ_0} trên một trong các khoảng

$]0;e^{-\lambda_0}[$, $]e^{-\lambda_0};+\infty[$ có chứa x_0 là nghiệm cực đại của C_{x_0,y_0} , vì nó có giới hạn vô hạn tại 0 hoặc (và) $e^{-\lambda_0}$.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là:

- $\begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{1}{x} \end{array}$
- $\begin{array}{l}]0;e^{-\lambda}[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x+\lambda x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\begin{array}{l}]e^{-\lambda};+\infty[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x+\lambda x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

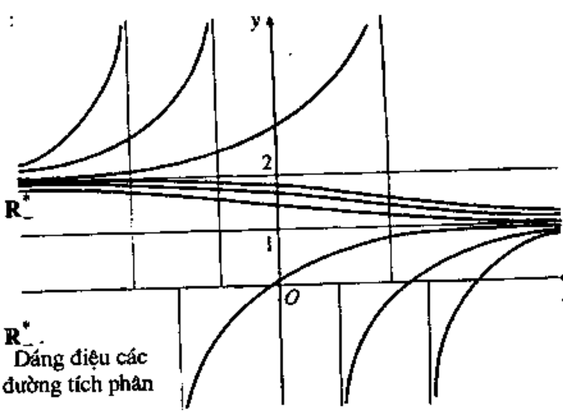


Dáng điệu các đường tích phân

h) Cùng cách làm như ở *g)*.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là:

- $\begin{array}{l} \mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ x\mapsto 1 \end{array}$
- $\begin{array}{l} \mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ x\mapsto 1+\frac{1}{1+\lambda\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$
- $\begin{array}{l} \left]-\infty;\frac{\lambda^2-1}{2\lambda}\right[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto 1+\frac{1}{1+\lambda\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$
- $\begin{array}{l} \left]\frac{\lambda^2-1}{2\lambda};+\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto 1+\frac{1}{1+\lambda\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.



Dáng điệu các đường tích phân

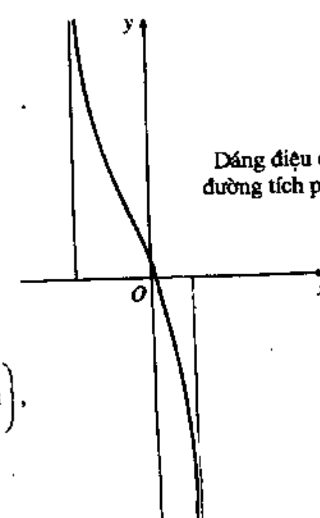
i) Đây là PTVP có biến phân ly (xem Tập 2, 11.3.2).
Giả sử y là một nghiệm trên khoảng *I*.

Vì ($\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2+t+1>0$), nên ta có $\dfrac{y'}{y^2+y+1}=-1$.

Nhờ phép tính nguyên hàm ta suy ra tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\forall x \in I,\quad -x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\dfrac{2y(x)+1}{\sqrt{3}}+\lambda$ và vì vậy:

$$\forall x \in I,\quad y(x)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\frac{(x+\lambda)\sqrt{3}}{2}+1\right).$$

Với $\lambda \in \mathbb{R}$, ký hiệu $f_\lambda:\ x\mapsto -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\dfrac{(x+\lambda)\sqrt{3}}{2}+1\right)$,



Dáng điệu các đường tích phân

trong đó miền xác định của f_λ là $\mathbf{R} - \left\{\dfrac{\pi + 2n\pi}{\sqrt{3}} - \lambda \; ; \; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

• Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Ánh xạ $(x,y) \mapsto -(y + y^2 + 1)$ thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbf{R}^2$. Vậy, theo định lý Cauchy - Lipschitz (7.2.1.4 Định lý) bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = -(y + y^2 + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm cực đại.

Đặt $\lambda_0 = -x_0 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \dfrac{2y_0 + 1}{\sqrt{3}}$. Thu hẹp của f_{λ_0} trên $\left]-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda_0; \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda_0\right[$ là nghiệm của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' = -(y + y^2 + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ và vì nó có giới hạn vô hạn ở các mút của khoảng nên đó là nghiệm cực đại.

Các nghiệm cực đại được suy ra từ cái nọ ra cái kia do sự tịnh tiến biến số.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là:

$$\begin{array}{l} \left]-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda_0; \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda_0\right[\to \mathbf{R} \\ \qquad x \mapsto -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\dfrac{(x+\lambda)\sqrt{3}}{2} + 1\right) \end{array}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

◊ *j)* **Trả lời:** Các nghiệm cực đại là:

- $\begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto -1 \end{array}$
- $\begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto -\dfrac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1} \end{array}$, $\lambda \in \mathbf{R}_-$
- $\begin{array}{l}]-\infty; -\ln\lambda[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto -\dfrac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1} \end{array}$, $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$
- $\begin{array}{l}]-\ln\lambda; +\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto -\dfrac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1} \end{array}$, $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$.

k) Đây là PTVP vắng x (xem Tập 2, 11.3.6) không chuẩn hoá. Theo Tập 2, 11.3.6 ta có thể tìm một số nghiệm bằng cách tham số hoá đường cong của phương trình $F(u,v) = 0$, trong đó $F : (u,v) \mapsto v - \ln v + u$. Bằng cách tham số hoá hiển nhiên là $\begin{cases} u = t - \ln t \\ v = t \end{cases}$, $t > 0$.

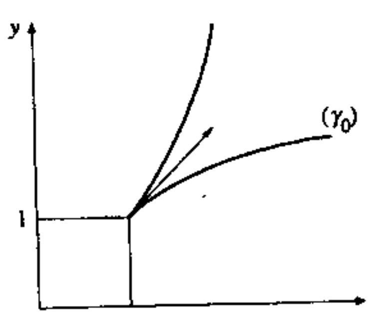
Khi đó, ta có $y = t - \ln t$, $y' = \dfrac{dy}{dx} = t$, từ đó

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)$ và vì vậy

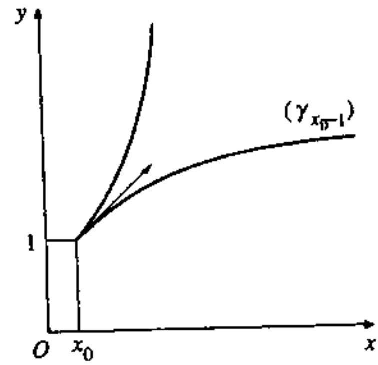
$x = \dfrac{1}{t} + \ln t + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Một biểu diễn tham số của một số đường cong tích phân (γ_C) do đó, có dạng

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \ln t + C \\ y = t - \ln t \end{cases}$, $t \in]0; +\infty[$ là tham số, $C \in \mathbb{R}$.



Vẽ đường cong (γ_0); còn (γ_C) suy ra từ (γ_0) bằng cách tịnh tiến theo vectơ $C\vec{i}$.



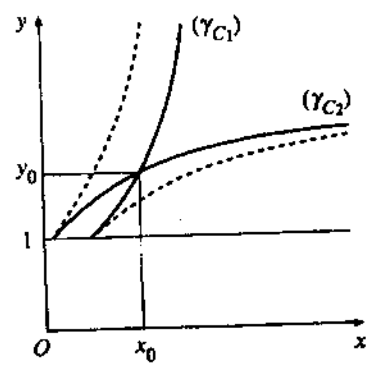
◊ **Trả lời:** Các nghiệm là các (thu hẹp trên các khoảng của các) hàm số ứng với hai nhánh của đường cong (γ_C) có biểu diễn tham số:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \ln t + C \\ y = t - \ln t \end{cases}, t \in]0;+\infty[\ (C \in \mathbb{R}).$$

Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Nếu $y_0 < 1$ thì không tồn tại nghiệm y sao cho $y(x_0) = y_0$.
- Nếu $y_0 > 1$ thì tồn tại hai nghiệm (cực đại) ứng với hai nhánh của (γ_C) trong đó $C = x_0 - 1$.
- Nếu $y_0 > 1$, thì tồn tại đúng hai nghiệm "cực đại" ứng với hai nhánh của đường cong (γ_{C1}), (γ_{C2}), trong đó, C_1, C_2 là hai số thực nhận được bằng cách khử t trong:

$$\begin{cases} \frac{1}{t} + \ln t + C = x_0 \\ t - \ln t = y_0 \\ t > 0. \end{cases}$$



Các nghiệm của PTVP không thể "biểu diễn" bằng các hàm thông thường; tuy nhiên, ta có thể dùng hàm ngược trên một số khoảng (t là hàm của x trong $x = \frac{1}{t} + \ln t + C$).

7.2.3 PTVP $y' = \dfrac{3x^4 + y^4}{4x^3 y}$ là một PTVP đẳng cấp (xem Tập 2, 11.3.3) chuẩn hoá.

- Trước hết, ta tìm một số nghiệm bằng cách thay đổi ẩn hàm $t = \dfrac{y}{x}$, khi đó ta có $t'x = \dfrac{t^4 - 4t^2 + 3}{4t}$. Bằng phép tính nguyên hàm từ $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{4t dt}{t^4 - 4t^2 + 3}$ cho ta $x = \lambda \dfrac{t^2 - 3}{t^2 - 1}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Rút t ra rồi thay vào $y = tx$ ta có $y = \varepsilon x \sqrt{\dfrac{x - 3\lambda}{x - \lambda}}$, $\varepsilon \in \{-1;1\}$.

- Việc giải phương trình $2 = \varepsilon \sqrt{\dfrac{1 - 3\lambda}{1 - \lambda}}$ (ứng với $(y(1) = 2)$ ẩn là (ε, λ) cho ta $\varepsilon = 1$, $\lambda = 3$.

Ta xét $f : \begin{array}{l}]0;3[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sqrt{\frac{9-x}{3-x}} \end{array}$.

Theo sự khảo sát ở trên, f là nghiệm của $\begin{cases} y' = \dfrac{3x^4 + y^4}{4x^3 y}, & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$.

Vì đầu bài cho $x > 0$ và mặt khác, vì $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, ta kết luận f là nghiệm cực đại (sử dụng định lý Cauchy – Lipschitz, 7.2.1.4 và Mệnh đề 7.2.1.3).

◊ **Trả lời:** $y: \begin{array}{l}]0;3[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto x\sqrt{\frac{9-x}{3-x}} \end{array}$.

7.2.4 • Giả sử (x,y,z) thoả mãn . Khi đó ta có $\begin{cases} \forall t \in I, & z(t) \neq 0 \\ xy = z^2 \end{cases}$, từ đó ($\forall\, t \in I,\ x(t) \neq 0$),

do đó $y = \dfrac{z^2}{x}$, tiếp theo ta có : $x'y' = z'^2 \Leftrightarrow 2zz'xx' - z^2x'^2 = x^2z'^2 \Leftrightarrow (xz' - x'z)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow xz' - x'z = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{z}\right)' = 0.$$

Vậy tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \lambda z$. Ta suy ra $y = \dfrac{z^2}{x} = \dfrac{1}{\lambda} z$.

• Phần đảo dễ dàng thấy ngay.

◊ **Trả lời:** $\left\{\left(\lambda z, \frac{1}{\lambda}z, z\right);\ \lambda \in \mathbf{R}^*,\ \ z: I \to \mathbf{R} \text{ khả vi sao cho } \left(\forall t \in I,\ z(t) \neq 0\right)\right\}$.

7.2.5 1) Giả sử f thoả mãn. Hệ thức của đề bài cho phép suy ra (bằng một phép truy hồi) f thuộc lớp C^∞ .

Ký hiệu $a = F(0)$, $\varphi = F - a$.

Điều kiện của đề bài chỉ ra là f chẵn, vậy φ lẻ. Ta có:

$$\forall x \in]-\alpha;\alpha[,\quad \varphi'(x) = f(x) = \left(a + \varphi(x)\right)^2 + \left(a - \varphi(x)\right)^2 = 2a^2 + 2\left(\varphi(x)\right)^2 .$$

Theo 7.2.1.3) Mệnh đề và định lý Cauchy – Lipschitz 7.2.1.4 Định lý; bài toán Cauchy

$\begin{cases} y' = 2a^2 + 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm cực đại.

Nếu $a = 0$ thì rõ ràng nghiệm cực đại này bằng 0.

Giả sử $a \neq 0$. Khi đó ta có : $\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $\dfrac{\varphi'(x)}{2a^2 + 2\left(\varphi(x)\right)^2} = 1$, từ đó bằng phép tính nguyên hàm suy ra sự tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ sao cho: $\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{\varphi(x)}{a}\right) = 2ax + \lambda$.

Ta có $\lambda = 0$ vì $\varphi(0) = 0$; từ đó: $\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $\varphi(x) = a\tan 2ax$.

Điều kiện ($\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $2ax \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$) được diễn giải bởi $\alpha \leq \dfrac{\pi}{4|a|}$.

2) Phần đảo dễ thấy ngay.

◊ **Trả lời:** Các (α, f) thoả mãn là :

- $\alpha \in \mathbb{R}$, $f = 0$
- $\alpha \in \left]0;\dfrac{\pi}{4|a|}\right[$, $f: \begin{array}{l}]-\alpha;\alpha[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2a^2\left(1 + \tan^2(2ax)\right) \end{array}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

7.3.1 *a)* ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto e^{x\ln x} + \lambda e^{x\ln x - x};\quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

b) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{\lambda + \text{Argsh}x}{\sqrt{1+x^2}};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Phép đổi biến xác định bởi $t = e^x$ đưa PTVP cần giải về PTVP: $t^2(t+1)z' + t(2+t)z + 1 = 0$, trong đó ta đặt $z: t \mapsto z(t) = y(x)$.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto e^{-2x} + \lambda(e^{-x} + e^{-2x});\quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

d) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{x - \text{Arctan}x + \lambda}{x^2};\quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $0 \notin I$.

$$S_I = \left\{x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x - \text{Arctan}\,x}{x^2} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}\right\} \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

e) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}-1} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{-x}};\quad \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $I \subset\ ]-\infty;-1[$

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} + \frac{\beta}{\sqrt{-x}};\quad \beta \in \mathbb{R}\right\} \text{ nếu } I \subset\ ]-1;0[$$

$$S_I = \left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\text{Arctan}\sqrt{x} + \frac{\gamma}{\sqrt{x}};\quad \gamma \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{nếu } I \subset\ ]0;+\infty[$$

$$S_I = \left\{x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} & \text{nếu} \quad x < 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}\text{Arctan}\sqrt{x} & \text{nếu} \quad x > 0 \end{cases}\right\} \text{ nếu } 0 \in I \subset\ ]-1;+\infty[.$$

f) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto 1 + \lambda\ e^{\frac{1}{2x}};\quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $0 \notin I$

$$S_I = \left\{x \mapsto \begin{cases} 1 + \lambda\ e^{\frac{1}{2x}} & \text{nếu} \quad x < 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x \geq 0 \end{cases}\right\} \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

g) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto 1 + \dfrac{\lambda x}{x+1};\quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $-1 \notin I$

$$S_I = \{x \mapsto 1\} \quad \text{nếu } -1 \in I.$$

h) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto \dfrac{\lambda - 3x^2}{x^2 - 4};\quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $-2 \notin I$ và $2 \notin I$

$$S_1 = \{x \to -3\} \quad \text{nếu } -2 \in I \text{ hoặc } 2 \in I.$$

i) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto x + 2 + \dfrac{2}{x} + \lambda\dfrac{e^x}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $I \subset\ ]-\infty;0[$

$$S_I = \left\{x \mapsto x + \mu x e^{-x};\quad \mu \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{nếu } I \subset\ ]0;+\infty[$$

$$S_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} x+2-2\dfrac{e^x-1}{x} & \text{nếu} \quad x<0 \\ x-xe^x & \text{nếu} \quad x \geq 0 \end{cases} \right\} \quad \text{nếu } 0 \in I.$$

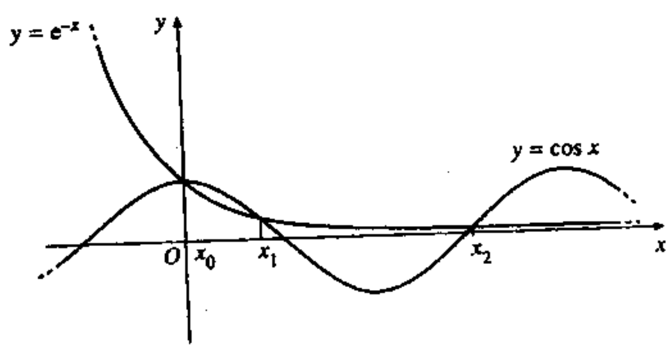
j) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{ x \mapsto \dfrac{x(\lambda+\ln|x|)}{x-1}; \quad \lambda \in \mathbf{R} \right\}$ nếu $I \subset]-\infty;0[$ hay $I \subset]1;+\infty[$

$$S_I = \left\{ x \mapsto -\frac{x-1}{x}\ln|x-1| + \frac{1}{x} + \mu\frac{x-1}{x}; \quad \mu \in \mathbf{R} \right\}, \quad \text{nếu } I \subset]0;1[$$

$$S_I = \varnothing \quad \text{nếu } 0 \in I \text{ hoặc } 1 \in I.$$

k) ◊ **Trả lời:** $S_I = \{ x \mapsto \cos x + \lambda \sin x; \quad \lambda \in \mathbf{R} \}$.

l) Để khảo sát các không điểm của $\varphi: x \mapsto e^{-x} - \cos x$ ta khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto 1 - e^x \cos x$. Chứng minh rằng các không điểm của φ lập thành một dãy tăng ngặt $(x_n)_{n\in N}$ sao cho $x_n \underset{n\infty}{\to} +\infty$.



- Giải PTVP trên một khoảng không chứa điểm x_n nào.

Ta thu được $y: x \mapsto \dfrac{1+\lambda e^{-x}}{e^{-x}-\cos x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Nối tại x_n, $n \in \mathbb{N}$ cố định.

Giả sử $x_n \in I$ và ta xét $y: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1+\lambda_{n-1}e^{-x}}{e^{-x}-\cos x} & \text{nếu} \quad x < x_n \\ \dfrac{1+\lambda_n e^{-x}}{e^{-x}-\cos x} & \text{nếu} \quad x > x_n \end{cases}$, xác định tại lân cận x_n (trừ điểm x_n).

Rõ ràng là y có giới hạn hữu hạn tại x_n khi và chỉ khi $\lambda_{n-1} = \lambda_n = -e^{-x_n}$. Do đó, ta xét

$y: x \mapsto \dfrac{1-e^{x_n-x}}{e^{-x}-\cos x}$ (nếu $x \neq x_n$).

Lập KTHH$_1(x_n)$ với ký hiệu $h = x - x_n$:

$$y(x) = \frac{1-e^{-h}}{e^{-x_n-h}-\cos(x_n+h)} = \frac{1-\dfrac{h}{2}+o(h)}{\left(-e^{-x_n}+\sin x_n\right)+\dfrac{1}{2}\left(e^{-x_n}+\cos x_n\right)h+o(h)}.$$

Nếu $-e^{-x_n}+\sin x_n = 0$ thì, vì $e^{-x_n}=\cos x_n$ nên tồn tại $k\in\mathbf{N}$ sao cho $x_n=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ và

$e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}=\sqrt{2}$, từ đó $k=\frac{\ln 2}{4\pi}-\frac{1}{8}$ là điều không thể xảy ra.

Như vậy thì: $\forall n\in\mathbf{N},\ -e^{-x_n}+\sin x_n\neq 0$.

Vậy y có KTHH$_1$(x_n) và $y(x_n)=\dfrac{1}{-e^{-x_n}+\sin x_n}$ (do mở rộng).

Bằng cách thay trở lại ta thấy PTVP cũng thoả mãn tại x_n.

◊ **Trả lời:** Bằng cách ký hiệu $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là dãy tăng ngặt các không điểm của $x\mapsto e^x-\cos x$ ($x_0=0$), ta có:

- $S_I=\left\{x\mapsto\dfrac{1+\lambda e^{-x}}{e^{-x}-\cos x};\quad \lambda\in\mathbf{R}\right\}$ nếu $I\cap\{x_n;\ n\in\mathbf{N}\}\neq\varnothing$
- $S_I=\left\{x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1-e^{x_n-x}}{e^{-x}-\cos x} & \text{nếu}\quad x\neq x_n\\ \dfrac{1}{\sin x_n-e^{-x_n}} & \text{nếu}\quad x=x_n\end{cases}\right\}$ nếu I chứa một và chỉ một x_n
- $S_I=\varnothing$ nếu I chứa ít nhất hai x_n ($n\geq 0$).

7.3.2 Nghiệm tổng quát của (E_0) $xy'-(2x^2+1)y=0$ trên $]0;+\infty[$ là $x\mapsto\lambda xe^{x^2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Để tìm một nghiệm của (E) $xy'-(2x^2+1)y=x^2$ trên $]0;+\infty[$ ta áp dụng phương pháp biến thiên hằng số: Tìm một nghiệm của y dưới dạng $y(x)=\lambda(x)xe^{x^2}$. Ta thu được $\lambda'(x)=e^{-x^2}$. Nghiệm tổng quát của (E) trên $]0;+\infty[$ là : $y:x\to\left(\lambda+\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)xe^{x^2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Nếu y có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$ thì, vì $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ hội tụ nên điều kiện cần là $\lambda=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$.

- Đảo lại, ánh xạ y: $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$ xác định bởi : $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $y(x)=-xe^{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$ tăng (vì $y'=\frac{1}{x}\left((2x^2+1)y+x^2\right)\geq 0$) và có dấu âm, do vậy có một giới hạn hữu hạn tại $+\infty$.

◊ **Trả lời :** $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $y(x)=-xe^{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$.

7.3.3 *a)* Nghiệm tổng quát của (E_α) trên $]0;+\infty[$ là :

$$y:x\mapsto e^x\left(A+\int_0^x t^\alpha e^{-t}dt\right),\ A\in\mathbb{R}.$$

Vì $t\mapsto t^\alpha e^{-t}$ khả tích trên $]0;+\infty[$ nên ta có :

$$e^{-x}y(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \lambda \Leftrightarrow A = \lambda - \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt\,.$$

◊ **Trả lời:** $\begin{array}{l} f_\lambda :]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x\left(\lambda - \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt\right) \end{array}$

b) Với mọi $x \in]0;+\infty[$, $f_\lambda'(x) = e^x g_\lambda'(x)$, trong đó: $g_\lambda(x) = x^{\alpha}e^{-x} + \lambda - \int_x^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt$.

Ánh xạ g_λ thuộc lớp C^1 và : $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g_\lambda'(x) = \alpha x^{\alpha-1}e^{-x} > 0$, vậy g_λ tăng ngặt. Hơn nữa

$\lim\limits_{0^+} g = \lambda - \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt$ và $\lim\limits_{+\infty} g_\lambda = \lambda$.

◊ **Trả lời:** • Nếu $\lambda \le 0$ hoặc $\lambda \ge \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt$ thì phương trình $f_\lambda'(x) = 0$ (ẩn là $x \in]0;+\infty[$) không có nghiệm.

• Nếu $0 < \lambda < \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt$ thì phương trình có một và chỉ một nghiệm.

7.3.4 *1)* Giả sử f thoả mãn. Bằng cách lấy đạo hàm theo x (với y cố định) ta được:

$$\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2, \quad \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) = xf'(x)\,.$$

Trường hợp riêng : $\forall (y) \in]0;+\infty[$, $\quad yf'(y) = f'(1)$.

Vậy tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\forall (y) \in]0;+\infty[$, $\quad f(y) = \lambda \ln y + \mu$.

2) Nghiên cứu phần đảo.

◊ **Trả lời:** $\left\{ \begin{array}{l} f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}; \\ x \mapsto \lambda \ln x \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

7.3.5 *a)* Ký hiệu $a = \mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\quad g = f' + \alpha f$.

Giải PTVP $y' + \alpha y = g$ bằng phương pháp biến thiên hằng số. Ta suy ra là tồn tại $\lambda \in \mathbf{C}$ sao cho: $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-\alpha x}\left(\lambda + \int_0^x e^{\alpha t} g(t)dt\right)$.

Cho $\varepsilon > 0$ cố định. Vì $g \underset{+\infty}{\to} 0$, nên tồn tại $x_0 \in \mathbf{R}_+$ sao cho $\forall\, t \in [x_0;+\infty[$, $|g(t)| \le \dfrac{\varepsilon a}{2}$. Với mọi x thuộc $]x_0;+\infty[$ ta có:

$$\left|\int_{x_0}^x e^{\alpha t}g(t)dt\right| \le \int_{x_0}^x e^{at}|g(t)|dt \le \frac{\varepsilon a}{2}\int_{x_0}^x e^{at}dt = \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{ax} - e^{ax_0}\right) \le \frac{\varepsilon}{2}e^{ax}\,.$$

Mặt khác, vì $e^{-ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ nên tồn tại $x_1 \in [x_0;+\infty[$ sao cho :

$$\forall x \in [x_1;+\infty[,\ e^{-ax}\left(|\lambda| + \left|\int_0^{x_0} e^{\alpha t}g(t)dt\right|\right) \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Từ đó $\forall x \in [x_1;+\infty[$, $|f(x)| \le \varepsilon$ và cuối cùng $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) Quy nạp theo n.

Trường hợp $n = 1$ đã được xét tại *a)*.

Giả sử tính chất đã đúng với một n cố định và giả sử f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thuộc lớp C^{n+1} và $P \in \mathbb{C}[X] + \{0\}$ là chuẩn tắc có bậc $n+1$, mà các không điểm $z_1, ..., z_{n+1}$ có các phần thực < 0, sao cho $(P(D))(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Ký hiệu $Q = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ và $g = (Q(D))(f)$. Ta có: $g' - z_{n+1}g = (P(D))(f) \underset{+\infty}{\to} 0$.

Theo *a)* ta suy ra $g \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Sau đó, theo giả thiết quy nạp, vì Q bậc n chuẩn tắc nên tồn tại các không điểm có phần thực < 0 và vì $(P(D))(f) = g \xrightarrow[+\infty]{} 0$, nên ta kết luận $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

7.3.6 *a)* **Phương pháp 1:**

Bằng cách ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix}$ hệ thống vi phân cần xét được đưa về :

$X' = AX + B$.

Chéo hoá A: $A = PDP^{-1}$, trong đó $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ký hiệu $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ta có : $X = AX + B \Leftrightarrow Y' = DY + P^{-1}B \Leftrightarrow \begin{cases} u' = u \\ v' = -v - t^2 \end{cases}$. Giải hai PTVP tuyến tính cấp 1 đó, rồi trở lại với x,y bởi $X = PY$.

Phương pháp 2:

Nếu (x,y) thoả mãn, thì (x,y) thuộc lớp C^2 và: $\begin{cases} x'' = y' + 2t = x - t^2 + 2t \\ y'' = x' - 2t = y + t^2 - 2t \end{cases}$.

Giải hai PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng số đó (xem Tập 2, 11.2.3 Định lý) rồi xét phần nghịch đảo.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = \lambda e^t - \mu e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{cases}$, $\quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ khả chéo trong $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. $A = PDP^{-1}$, trong đó $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = t^2 + t + 4\lambda e^{-3t} - \mu e^{2t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \lambda e^{-3t} + \mu e^{2t} \end{cases}$, $\quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$

c) Bằng cách ký hiệu $z = x + iy$, hệ vi phân đã cho được đưa về PTVP tuyến tính $z' = (1 - im)z + (a + ib)t$ có nghiệm tổng quát là $z : t \mapsto -\frac{a+ib}{1-im}t - \frac{a+ib}{(1-im)^2} + \lambda e^{(1-im)t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

◊ **Trả lời:**

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{a - bm}{1 + m^2}t - \dfrac{a(1 - m^2) - 2bm}{(1 + m^2)^2} + e^t(A\cos mt + B\sin mt) \\ y(t) = \dfrac{b + am}{1 + m^2}t - \dfrac{b(1 - m^2) + 2am}{(1 + m^2)^2} + e^t(B\cos mt - A\sin mt) \end{cases}, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

d) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng $\chi_A : \lambda \mapsto (\lambda - 2)^2$. Không gian vectơ con riêng tương ứng với trị riêng 2 có số chiều là 1, cảm sinh bởi $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ta sẽ tam giác hoá A.

Chọn $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sao cho $AV_2 = V_1 + 2V_2$.

Ta có thể lấy $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Như vậy: $A = PTP^{-1}$, trong đó $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$,hệ vi phân đã cho được đưa về:

$$\begin{cases} u' = 2u + v + \sin t & (1) \\ v' = 2v - \sin t & (2). \end{cases}$$

Giải (2), rồi thế vào (1). Ta được : $\begin{cases} u(t) = -\dfrac{1}{25}(9\cos t + 13\sin t) + \lambda t e^{2t} + \mu e^{2t} \\ v(t) = \dfrac{1}{5}(\cos t + 2\sin t) + \lambda e^{2t} \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Trở lại với x,y nhờ $X = PY$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{25}(9\cos t + 13\sin t) + \lambda t e^{2t} + \mu e^{2t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{25}(4\cos t + 3\sin t) + \lambda t e^{2t} + (\lambda + \mu) e^{2t} \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

e) ◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = \left(-\dfrac{1}{2}t^2 + (1-\lambda)t + (\lambda + \mu)\right)e^{2t} - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{4} \\ y(t) = \left(\dfrac{1}{2}t^2 + \lambda t - \mu\right)e^{2t} - \dfrac{1}{4}t \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

f) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ khả chéo trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

$A = PDP^{-1}$, trong đó $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = \left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{9} + \mu + \nu\right)e^{-t} + \lambda e^{2t} \\ y(t) = \left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{9} - \mu\right)e^{-t} + \lambda e^{2t} \\ z(t) = \left(-\dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{9} - \nu\right)e^{-t} + \lambda e^{2t} \end{cases}$ $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

g) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ khả chéo trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$: $A = PDP^{-1}$,

trong đó $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = \lambda e^{2t} + (\mu + \nu)e^{3t} - \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) \\ y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} - \left(\frac{2}{3}t + \frac{2}{9}\right) \\ z(t) = \lambda e^{2t} + \nu e^{3t} + \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) \end{cases}$ $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$

h) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -18 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ khả chéo trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ và : $A = PDP^{-1}$,

trong đó $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} + 3\nu e^{-3t} + t - 1 \\ y(t) = -2\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} + 2t + 1 \\ z(t) = \lambda e^{-t} + \nu e^{-3t} + t + 2 \end{cases}$ $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

i) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng $\chi_A : \lambda \mapsto (\lambda - 2)^3$.

vậy $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2\}$. Không gian con tương ứng với giá trị riêng 2 có số chiều là 1,

cảm sinh bởi $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Chọn $\alpha \in \mathbb{R}$ và $V_2 \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sao cho $AV_2 = 2V_2 + \alpha V_1$. Ta có thể lấy $\alpha = 2$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tiếp

theo ta tìm $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ và $V_3 \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sao cho $AV_3 = 2V_3 + \beta V_1 + \gamma V_2$. Ta có thể lấy $\beta = 0$,

$\gamma = 2$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Như vậy, A khả tam giác trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. $A = PTP^{-1}$,

trong đó $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bằng cách ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, ta có :

$$X' = AX + B \Leftrightarrow Y' = TY + P^{-1}B \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 2u + 2v + \frac{1}{2}(-1 + e^t) & (1) \\ v' = 2v + 2w + \frac{1}{2}(1 - e^t) & (2) \\ w' = 2w + \frac{1}{2}(1 + e^t) & (3). \end{cases}$$

Giải (3) ta được $w(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^t + \nu e^{2t}$ $\qquad \nu \in \mathbb{R}$.

Thay vào (2) rồi giải (2) (ẩn là v) ta được $v(t) = \frac{3}{2}e^t + 2\nu t e^{2t} + \mu e^{2t}$ $\quad \mu \in \mathbb{R}$.

Thay vào (1) rồi giải (1) (ẩn là u) ta được $u(t) = \frac{1}{4} - \frac{7}{2}e^t + (2\nu t^2 + 2\mu t)e^{2t} + \lambda e^{2t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cuối cùng trở về x, y, z bởi $X = PY$.

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = \left(2\nu t + (\mu + \nu)\right)e^{2t} - \frac{1}{4} + e^t \\ y(t) = \left(2\nu t^2 + 2\mu t + (\lambda + \nu)\right)e^{2t} - 4e^t \\ z(t) = \left(2\nu t^2 + (\mu + \nu)t + (\lambda + \mu)\right)e^{2t} + \frac{1}{4} - 2e^t. \end{cases}$

j) Ta có thể lưu ý rằng ma trận A của hệ thống khả chéo trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ vì A đối xứng thực (xem Tập 6).

Các giá trị riêng của A là -2 và 2, kép. Một cơ sở của không gian con riêng tương ứng với -2 là (V_1, V_2) trong đó $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$. Một cơ sở của không gian con riêng tương ứng với 2 là (V_3, V_4) trong đó: $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$. Theo 7.3.6.1) *a)* Định lý

$$X(t) = \sum_{i=1}^{4} C_i e^{\lambda_i t} V_i, \ (C_1, \ldots C_4) \in \mathbb{R}^4, \ \lambda_1 = \lambda_2 = -2; \ \lambda_3 = \lambda_4 = 2.$$

◊ **Trả lời:** $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_3 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^{-2t} + C_4 e^{2t} \\ z(t) = (-2C_1 + \sqrt{3}C_2)e^{-2t} + (2C_3 + \sqrt{3}C_4)e^{2t} \\ w(t) = (\sqrt{3}C_1 - 2C_2)e^{-2t} + (\sqrt{3}C_3 + 2C_4)e^{2t} \end{cases}$, $\qquad (C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$

7.3.7 Ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, ta có $X = XA + BX \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = x + 2y \\ z' = -x - z \\ u' = -y + z + u \end{cases}$. Giải liên tiếp bốn PTVP này.

◊ **Trả lời:** $X(t)=\begin{pmatrix} A & -\dfrac{A}{2}+Be^{2t} \\ -A+Ce^{-t} & \dfrac{A}{2}-Be^{2t}-\dfrac{C}{2}e^{-t}+De^{t} \end{pmatrix}$, $\quad (A,B,C,D)\in\mathbb{R}^4$

7.3.8 Phương pháp thứ nhất

$$\|X\|^2=({}^tXX)'={}^tX'X+{}^tXX'={}^t(AX)X+{}^tXAX=2{}^tXAX\geq 0.$$

Phương pháp thứ hai

Vì A đối xứng thực nên A khả chéo (xem Tập 6). Ký hiệu $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ là các trị riêng của A và $(V_1,\ldots,V_n)$ là một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng tương ứng, nghiệm tổng quát của $X'=AX$ là (theo 7.3.6.1)*a)* Định lý):

$$X: t\mapsto\sum_{k=1}^{n}C_ke^{\lambda_kt}V_k \qquad (C_1,\ldots,C_n)\in\mathbb{R}^n$$

Khi đó, với mọi $t\in\mathbb{R}$ ta có: $\|X(t)\|^2=\sum_{k=1}^{n}C_k^2e^{2\lambda_kt}$, điều đó chứng tỏ rằng, vì các $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ đều ≥ 0 (A đối xứng dương), $\|X(t)\|^2$ tăng.

7.3.9 Tính A, A^2, A^3, A^4. Chứng minh bằng phép quy nạp đơn giản:

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} A^{2p}=(-1)^p\mathrm{I} \\ A^{2p+1}=(-1)^pA. \end{cases}$$

Từ đó : $e^{tA}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}t^nA^n=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^pt^{2p}}{(2p)!}\mathrm{I}+\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^pt^{2p+1}}{(2p+1)!}A.$

◊ **Trả lời:** $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$

7.3.10 Bằng cách lấy đạo hàm hai lần đối với t :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad (A+B)^2e^{t(A+B)}=A^2e^{tA}e^{tB}+2Ae^{tA}Be^{tB}+e^{tA}B^2e^{tB}.$$

Bằng cách thay t bởi 0: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

Nhưng $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$, từ đó $AB=BA$.

7.3.11 Theo 7.3.6.3) Định lý) nghiệm tổng quát của $X'=AX+B$ được cho bởi

$$X(t)=e^{tA}\int_0^te^{-sA}B(s)ds+e^{tA}Y_0 \qquad Y_0\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

Cho $t\in\mathbb{R}$, ta có $X(t+T)=X(t)$

$$\Leftrightarrow e^{tA}e^{TA}\int_0^{t+T}e^{-sA}B(s)ds+e^{tA}e^{TA}Y_0=e^{tA}\int_0^te^{-sA}B(s)ds+e^{tA}Y_0$$

$$\Leftrightarrow e^{TA}\int_0^Te^{-sA}B(s)ds+e^{TA}\int_T^{t+T}e^{-sA}B(s)ds-\int_0^te^{-sA}B(s)ds=(\mathrm{I}_n-e^{TA})Y_0.$$

Phép đổi biến $u=s-T$ và tính T-tuần hoàn của B chỉ ra rằng:

$$e^{TA}\int_T^{t+T} e^{-sA}B(s)ds = \int_0^t e^{-uA}B(u)du.$$

Như vậy X là T- tuần hoàn khi và chỉ khi $e^{TA}\int_0^T e^{-sA}B(s)ds = (\mathrm{I}_n - e^{TA})Y_0$.

Theo giả thiết $\mathrm{I}_n - e^{TA} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, vậy tồn tại Y_0 duy nhất sao cho X là T–tuần hoàn và:

$Y_0 = (\mathrm{I}_n - \mathrm{e}^{TA})^{-1}\mathrm{e}^{TA}\int_0^T \mathrm{e}^{-sA}B(s)\mathrm{d}s$.

7.4.1 *a)* ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto (\lambda e^t + \mu)e^{-2e^t}; \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$

b) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto e^t + \lambda e^{e^{-t}} + \mu e^{-e^{-t}}; \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$

c) Phép đổi biến u = Arctan t, và do đó ẩn hàm $y: u \mapsto y(u) = x(t)$ đưa PTVP đã cho về : $y''(u) + y(u) = \dfrac{1}{\cos^4 u}$. Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số, tìm một nghiệm y dưới dạng $y(u) = \lambda(u)\cos u + \mu(u)\sin u$, trong đó

$$\begin{cases}\lambda'(u)\cos u + \mu'(u)\sin u = 0\\ -\lambda'(u)\sin u + \mu'(u)\cos u = \dfrac{1}{\cos^4 u}.\end{cases}$$

Từ đó suy ra $\lambda'(u) = -\dfrac{\sin u}{\cos^4 u}$, $\mu'(u) = \dfrac{1}{\cos^3 u}$, rồi lấy, chẳng hạn:

$$\lambda(u) = -\frac{1}{3\cos^3 u},\quad \mu(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin u}{1-\sin u} + \frac{\sin u}{\cos^2 u}\right).$$

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \dfrac{t^2-2}{6} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + \dfrac{\lambda+\mu t}{\sqrt{t^2+1}}; \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

d) Ký hiệu $x(t) = y(u)$; PTVP đã cho được đưa về

$$(1+t^2)\varphi'^2(t)y''(u) + \Big((1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t)\Big)y'(u) + a^2 y(u) = 0.$$

Bằng cách chọn $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ta thấy $(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0$. Vì vậy phép đổi biến $u = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$ đưa PTVP cần xét về : $y''(u) + a^2 y(u) = 0$.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \lambda\cos\left(a\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right) + \mu\sin\left(a\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right); \ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$

e) 1) Giả sử tồn tại (x_1,x_2) thoả mãn. Suy ra $x_1x_1' + x_2x_2' = 0$ và $x'^2_1 + x'^2_2 = \cos^2 t$.

Bằng cách ký hiệu $W = x_1x_2' - x_1'x_2$, Wronskien của (x_1,x_2), ta có: $\cos t.W' + \sin t.W = 0$. Vậy tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $W(t) = \lambda\cos t$.

Suy ra $\begin{cases}\lambda x'_1 = -x_2\cos t\\ \lambda x'_2 = x_1\cos t\end{cases}$, tiếp đó $\lambda^2\cos^2 t = \lambda^2(x'^2_1 + x'^2_2) = (x'^2_2 + x'^2_1)\cos^2 t = \cos^2 t$, từ đó (dù có phải đổi chỗ x_1, x_2): $\lambda = 1$.

Ký hiệu $z = x_1 + ix_2$, ta thu được $z' = i\cos t.z$, từ đó $z = \alpha e^{i\sin t}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ và sau đó

$x_1 = \cos(\sin t), x_2 = \sin(\sin t)$ bằng cách chọn $\alpha = 1$.

2) Xác định cặp (x_1, x_2) thoả mãn và độc lập.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \lambda\cos(\sin t) + \mu\sin(\sin t); \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

f) Giả sử φ: $]-1;1[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Để x_1: $t \mapsto \cos\varphi(t)$ và x_2: $t \mapsto \sin\varphi(t)$ là nghiệm của PTVP đã cho thì điều kiện đủ là: $\begin{cases} -(1-t^2)\varphi'^2(t) + 9 = 0 \\ -(1-t^2)\varphi''^2(t) + t\varphi'(t) = 0. \end{cases}$

Ánh xạ φ: $t \mapsto 3\text{Arcsin}t$ thoả mãn.

Cuối cùng, rõ ràng là họ (x_1, x_2) là độc lập.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \lambda(1-4t^2)\sqrt{1-t^2} + \mu(3t-4t^3); \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

g) Để x_1 và tx_1 là nghiệm của PTVP đã cho, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} x_1'' + x_1'\tan t + x_1\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\tan^2 t\right) = 0 \\ (tx_1'' + 2x_1') + (tx_1' + x_1)\tan t + tx_1\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\tan^2 t\right) = 0, \end{cases}$$

nghĩa là $\begin{cases} 2x_1' + x_1\tan t = 0 & (1) \\ x_1'' + x_1'\tan t + x_1\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\tan^2 t\right) = 0 & (2). \end{cases}$

Chứng minh rằng (2) suy ra từ (1) và từ phương trình "đạo hàm" của (1). Giải (1).

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu)\sqrt{\cos t}; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

h) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \lambda t^3 + \mu t^2; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $0 \notin I$

$$S_I = \left\{t \mapsto \begin{cases} \lambda_1 t^3 + \mu t^2 & \text{nếu} \quad t \le 0 \\ \lambda_2 t^3 + \mu t^2 & \text{nếu} \quad t \ge 0 \end{cases}; \quad (\lambda_1,\lambda_2,\mu) \in \mathbb{R}^3\right\} \quad \text{nếu } 0 \in I,$$

i) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \lambda(t^2+1) + \mu t; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

j) ◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto \lambda(t^2+1) + \mu e^t; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $1 \notin I$

$$S_I = \left\{t \mapsto \begin{cases} \lambda_1(t^2+1) + \mu e^t & \text{nếu} \quad t \le 1 \\ \lambda_2(t^2+1) + \left(\dfrac{2\lambda_1}{e} - \dfrac{2\lambda_2}{e} + \mu_1\right)e^t & \text{nếu} \quad t > 1 \end{cases}; \quad (\lambda_1,\lambda_2,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \text{nếu } 1 \in I.$$

k) $t \mapsto t$ là nghiệm.

Ta tìm nghiệm thứ hai dưới dạng $x = \lambda t$, λ là hàm chưa biết. Thay vào PTVP đã cho, ta đưa về phương trình $t(t+1)\lambda'' + 2\lambda' = 0$ trên $]-\infty;0[$ và $]0;+\infty[$.

Từ đó, chẳng hạn $\lambda(t) = t + 2\ln|t| - \dfrac{1}{t}$, rồi $x(t) = t^2 + 2t\ln|t| - 1$.

Nghiên cứu các mối nối tại -1 và 0.

◊ **Trả lời:**

$S_I = \{t \to \lambda t + \mu(t^2 + 2t\ln|t| - 1)\ ; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ nếu $-1 \notin I$ và $0 \notin I$.

$$S_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda t + \mu_1(t^2 - 2t\ln|t| - 1) & \text{nếu } t \le -1 \\ \lambda t + \mu_2(t^2 + 2t\ln|t| - 1) & \text{nếu } t \ge -1 \end{cases}; \quad (\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \text{ nếu } -1 \in I \text{ và } 0 \notin I.$$

$S_I = \{t \to \lambda t;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ nếu $0 \in I$.

l) • $t \mapsto t^3$ là nghiệm.

• Việc tìm nghiệm "thứ hai" dưới dạng $x = \lambda t^3$ (λ là hàm chưa biết) dẫn tới PTVP $\lambda t'' + (t+4)\lambda' = 0$, từ đó chẳng hạn $\lambda'(t) = \dfrac{e^{-t}}{t^4}$, rồi sau cách tính tích phân từng phần

$$\lambda(t) = \frac{1}{6t^3}(t^2 - t + 2)e^{-t} + \frac{1}{6}\int \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Để có mối nối tại 0 sử dụng Tập 3, 2.5.3.2) Mệnh đề 2 để chứng minh :

$$\int_{-1}^{t} \frac{e^{-u}}{u}du \underset{t\to 0^-}{\sim} \ln(-t), \int_{-1}^{t} \frac{e^{-u}}{u}du \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln t.$$

◊ **Trả lời:**

$$S_I = \left\{ t \mapsto \lambda\left(\frac{t^2 - t + 2}{6}e^{-t} + \frac{t^3}{6}\int_{-1}^{t}\frac{e^{-u}}{u}du\right) + \mu t^3; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ nếu } I \subset \left]-\infty; 0\right[$$

$$S_I = \left\{ t \mapsto \lambda\left(\frac{t^2 - t + 2}{6}e^{-t} + \frac{t^3}{6}\int_{1}^{t}\frac{e^{-u}}{u}du\right) + \mu t^3; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{nếu } I \subset \left]0; +\infty\right[$$

$$S_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{t^2 - t + 2}{6}e^{-t} + \dfrac{t^3}{6}\displaystyle\int_{-1}^{t}\frac{e^{-u}}{u}du\right) + \mu_1 t^3 & \text{nếu } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{3} & \text{nếu } t = 0; \\ \lambda\left(\dfrac{t^2 - t + 2}{6}e^{-t} + \dfrac{t^3}{6}\displaystyle\int_{1}^{t}\frac{e^{-u}}{u}du\right) + \mu_2 t^3 & \text{nếu } t > 0 \end{cases} \quad (\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \text{ nếu } 0 \in I.$$

m) Chỉ dẫn của đề bài cho thấy $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ là nghiệm. PTVP thu được theo y là: $ty'' + y' = 0$.

◊ **Trả lời:**

$$S_I = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda \ln|t| + \mu}{1+t}; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad \text{nếu } -1 \notin I \text{ và } 0 \notin I$$

$$S_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda \ln(-t)}{1+t} & \text{nếu } t \ne -1 \\ -\lambda & \text{nếu } t = -1 \end{cases}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{nếu } -1 \in I \text{ và } 0 \notin I$$

$$S_I = \left\{ t \mapsto \frac{\mu}{1+t}; \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{nếu } -1 \notin I \text{ và } 0 \in I$$

$$S_I = \{0\} \qquad \text{nếu } -1 \in I \text{ và } 0 \in I$$

n) Bằng cách ký hiệu $\varepsilon = \operatorname{sgn}(t)$ và thay x bởi $(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} y$ trong PTVP đã cho, ta có $y'' - y = 0$.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{ t \mapsto \dfrac{\lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ nếu $0 \notin I$

$S_I = \{0\}$. nếu $0 \in I$.

o) • Nếu x và $\frac{1}{x}$ là các nghiệm thì $\begin{cases}(1-\cos 4t)x''+2x'\sin 4t-8x=0\\ (1-\cos 4t)\left(\dfrac{2x'^2}{x^3}-\dfrac{x''}{x^2}\right)-2\dfrac{x'}{x^2}\sin 4t-\dfrac{8}{x}=0,\end{cases}$

từ đó $\left(\frac{x'}{x}\right)^2=\frac{8}{1-\cos 4t}=\frac{4}{\sin^2 2t}$.

Giải $x'-\frac{2}{\sin 2t}x=0$; ta được, chẳng hạn $x(t)=\tan t$.

• Kiểm tra lại rằng $t\mapsto \tan t$ và $t\mapsto \text{cotan}\, t$ là các nghiệm của PTVP đã cho trên toàn bộ khoảng I sao cho $I\cap\left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)=\varnothing$.

• Nghiên cứu các mối nối tại $\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ và tại $n\pi\,(n\in\mathbb{Z})$.

◊ **Trả lời:** $S_I=\{t\mapsto \lambda\tan t+\mu\text{cotan}\,t;\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\}$ nếu $I\cap\left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)=\varnothing$

$S_I=\{t\mapsto\lambda\tan t;\quad \lambda\in\mathbb{R}\}$ nếu $I\cap\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)=\varnothing$ và $I\cap(\pi\mathbb{Z})\neq\varnothing$

$S_I=\{t\mapsto\mu\text{cotan}\,t;\quad \mu\in\mathbb{R}\}$ $I\cap\pi\mathbb{Z}=\varnothing$ và $I\cap\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\neq\varnothing$

$S_I=\{0\}$ nếu $I\cap\pi\mathbb{Z}\not\in\varnothing$ và $I\cap\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\neq\varnothing$.

p) Cùng cách làm như ở *f)*. Để $t\mapsto\cos\varphi(t)$ và $t\mapsto\sin\varphi(t)$ là nghiệm của PTVP đã cho, điều kiện đủ là: $\begin{cases}-t\varphi''(t)+\varphi'(t)=0\\ -\varphi'^2(t)+t^2=0\end{cases}$. Ánh xạ $\varphi: t\mapsto\frac{t^2}{2}$ thoả mãn.

◊ **Trả lời:** $S_I=\left\{t\mapsto\lambda\cos\frac{t^2}{2}+\mu\sin\frac{t^2}{2};\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

q) ◊ **Trả lời:** $S_I=\left\{t\mapsto\frac{-1+\lambda\text{ch}t+\mu\text{sh}t}{t^2};\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$ nếu $0\notin I$

$$S_I=\left\{t\mapsto\begin{cases}\dfrac{\text{ch}t-1}{t^2} & \text{nếu}\quad t\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu}\quad t=0\end{cases};\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}\qquad\text{nếu } 0\in I.$$

r) • Một nghiệm của PTVP (e_0) không có vế hai là $x_1\cdot t\mapsto t^2-t$.

• Tìm một nghiệm của (e_0) dưới dạng $x=\lambda x_1$, λ là hàm chưa biết. Ta có PTVP: $t(t+1)\lambda''+(3t-1)\lambda'=0$, đối với phương trình này ta có thể lấy $\lambda'(t)=\frac{1}{t(t-1)^2}$,

$\lambda(t)=\ln|t|-\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}$.

• Một nghiệm của PTVP có vế hai là $t\mapsto t^2$.

◊ **Trả lời:** $S_I=\left\{t\mapsto\lambda(t^2-t)+\mu(t^2-t)\left(\ln|t|-\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right);\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$

nếu $0\notin I$ và $1\notin I$

$S_I = \left\{t \mapsto \lambda(t^2 - t); \quad \lambda \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $0 \in I$ hoặc $1 \in I$.

s) PTVP (e_0) $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$ là một PTVP Euler. Ta thực hiện phép đổi biến $u = \ln|t|$, do đó có sự đổi hàm $y(u) = x(t)$. PTVP thu được theo y là: $y'' - 4y' + 4y = 0$ với nghiệm tổng quát là $y: u \mapsto (\lambda u + \mu)e^{2u}$, do đó nghiệm tổng quát của (e_0) trên toàn khoảng mở I không chứa 0 là $x: t \mapsto (\lambda \ln|t| + \mu)t^2$.

• Tìm một nghiệm dạng đa thức của PTVP có vế hai. Ánh xạ $t \to t^3$ thoả mãn.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{t \mapsto t^3 + (\lambda \ln|t| + \mu)t^2; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $0 \notin I$

$S_I = \left\{t \mapsto t^3 + \mu t^2; \quad \mu \in \mathbb{R}\right\}$ nếu $0 \in I$.

t) • $x_1: t \mapsto \sin t$ và $x_2: t \mapsto \sin 2t$ là các nghiệm của PTVP, vì khi đó định thức có hai hàng như nhau.

• Hệ số của x'' trong PTVP là $2\sin^3 t$; nghiên cứu mối nối tại $n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$.

◊ **Trả lời:**

$S_I = \left\{t \mapsto \lambda \sin t + \mu \sin 2t; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $I \cap \pi\mathbb{Z} = \varnothing$

$$S_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_1 \sin t + \mu \sin 2t & \text{nếu } t < n\pi \\ 0 & \text{nếu } t = n\pi; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \\ \lambda_2 \sin t + \left(\mu + \dfrac{(-1)^n}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)\right)\sin 2t & \text{nếu } t > n\pi \end{cases} \right\}$$

nếu $I \cap \pi\mathbb{Z} = \{n\pi\}$

$S_I = \left\{t \mapsto \lambda \sin t + \mu \sin 2t; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $I \cap \pi\mathbb{Z}$ chứa ít nhất hai phần tử.

7.4.2 *a)* Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là một chuỗi nguyên có bán kính > 0, y là tổng của nó. Chứng minh rằng để y thoả mãn PTVP thì điều kiện cần và đủ là: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$,

nghĩa là $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2^n}{(2n)!}a_0$. Ở đây ta công nhận phép khai triển thành chuỗi nguyên tại 0.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm của PTVP KTTCN(0) là các hàm $y: x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{(2n)!}x^n$. Bán kính hội tụ của các chuỗi nguyên này là $+\infty$. Hơn nữa :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} a_0 \cos(\sqrt{-2x}) & \text{nếu } x \leq 0 \\ a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2x}) & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

b) Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là một chuỗi nguyên có bán kính > 0, y là tổng của nó. Chứng minh rằng để y thoả mãn PTVP, điều kiện cần và đủ là: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \dfrac{4n^2 + 2n + 1}{2(n+1)(2n+1)}a_n$.

◊ **Trả lời:** Các nghiệm của PTVP KTTCN(0) là các hàm $y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, trong đó $a_0 \in \mathbb{R}$ và $(a_n)_{n\geq 0}$ được xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{4n^2+2n+1}{2(n+1)(2n+1)} a_n$; bán kính là 1 (nếu $a_0 \neq 0$).

c) Giả sử $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là một chuỗi nguyên có bán kính > 0, y là tổng của nó. Chứng minh rằng để y thoả mãn PTVP, điều kiện cần và đủ là $\forall n \in \mathbb{N},\quad (n+\lambda)a_{n+1} = (n+1)a_n$.

◊ **Trả lời:**

1) Nếu $\lambda \notin \mathbb{Z}_-$ thì các nghiệm của PTVP KTTCN(0) là các hàm $y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, trong đó $a_0 \in \mathbb{R}$ và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+\lambda} a_n$; nếu $a_0 \neq 0$, bán kính là 1.

Đặc biệt, với $\lambda = 1$, ta có các chuỗi nguyên $a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ($a_0 \in \mathbb{R}$ cố định) có tổng là $\dfrac{a_0}{1-x}$.

2) Nếu $\lambda \in \mathbb{Z}_-$ thì các nghiệm của PTVP KTTCN(0) là các hàm $y: x \mapsto \sum_{n=-\lambda+1}^{+\infty} a_n x^n$, trong đó $a_{-\lambda+1} \in \mathbb{R}$ và $(a_n)_{n\geq -\lambda+1}$ được xác định bởi: $\forall n > -\lambda+1,\quad a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+\lambda} a_n$.

7.4.3 *a)* Nghiệm tổng quát của (E_0) $y'' - 6y' + 9y = 0$ là $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{3x}$ và một nghiệm riêng của (E) là $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

◊ **Trả lời:** $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \dfrac{1}{x} + (\lambda x + \mu)e^{3x};\quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

b) Giải $\begin{cases} y'' + y = -2x & \text{trên} \quad]-\infty; -\frac{\pi}{2}[\\ y'' + y = \pi & \text{trên} \quad]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ y'' + y = 2x & \text{trên} \quad]\frac{\pi}{2}; +\infty[\end{cases}$ rồi nối các nghiệm tại $-\dfrac{\pi}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}$.

◊ **Trả lời:**

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} -2x + (\lambda+2)\cos x + \mu \sin x & \text{nếu} \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \pi + \lambda \cos x + \mu \sin x & \text{nếu} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \\ 2x + (\lambda+2)\cos x + \mu \sin x & \text{nếu} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases} \right\}.$$

c) Giải $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = xe^{-x} & \text{trên} \quad]-\infty; 0] \\ y'' - 3y' + 2y = xe^{x} & \text{trên} \quad [0; +\infty[\end{cases}$ rồi nối các nghiệm tại 0.

◊ **Trả lời:**

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\begin{cases}\dfrac{6x+5}{36}e^{-x}+\lambda e^{x}+\mu e^{2x} & \text{nếu}\quad x\le 0\\ -(\dfrac{1}{2}x^2+x)e^{x}+(\lambda-\dfrac{3}{4})e^{x}+(\mu+\dfrac{8}{9})e^{2x}. & \text{nếu}\quad x\ge 0\end{cases};\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

d) Nghiệm tổng quát của (E_0) $y''-5y'+6y=0$ là $y\colon x\to\lambda e^{2x}+\mu e^{3x}$. Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để có một nghiệm của (E): tìm một nghiệm y của (E) dưới dạng $y=\lambda e^{2x}+\mu e^{3x}$, trong đó λ, μ là các hàm chưa biết. Giải $\begin{cases}\lambda' e^{2x}+\mu' e^{3x}=0\\ 2\lambda' e^{2x}+3\mu' e^{3x}=\dfrac{e^{x}}{\mathrm{ch}^2x}\end{cases}$ cho

$$\begin{cases}\lambda'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{\mathrm{ch}^2x}\\ \mu'(x)=-\dfrac{e^{2x}}{\mathrm{ch}^2x}.\end{cases}$$

Phép tính nguyên hàm cho ta $\lambda(x)=-2\mathrm{Arctan}(e^{x})-\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$ và $\mu(x)=4x-2\ln(e^{2x}+1)+\dfrac{2}{e^{2x}+1}$.

◊ **Trả lời:**

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto -2e^{2x}\mathrm{Arctan}(e^{x})+(4x-2\ln(e^{2x}+1))e^{3x}+\lambda e^{2x}+\mu e^{3x};\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

e) Nghiệm tổng quát của (E_0) $y''+y=0$ là $y\colon x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$. Để tìm một nghiệm của (E) $y''+y=\cot x$, ta dùng phương pháp biến thiên hằng số.

◊ **Trả lời:** $S_{]0;\pi[}=\left\{x\mapsto -\dfrac{1}{2}\sin x\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}+\lambda\cos x+\mu\sin x;\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$

f) ◊ **Trả lời:**

$$S_{]0;+\infty[}=\left\{x\mapsto\frac{1}{2}e^{x}\int_1^x e^{-t}\ln t\,dt+\frac{1}{2}e^{-x}\int_1^x e^{t}\ln t\,dt+\lambda e^{x}+\mu e^{-x};\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

g) ◊ **Trả lời:** $S_{]0;+\infty[}=\left\{x\mapsto -e^{x}\ln x+\lambda e^{x}+\mu e^{3x};\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$

7.4.4 *a)* ◊ **Trả lời:**

$$y(x)=\begin{cases}x^2-(\pi^2+2)-(\pi^2+6)\cos x-4\pi\sin x & \text{nếu}\quad x\le-\pi\\ -x^2+(\pi^2+2)-(\pi^2+2)\cos x & \text{nếu}\quad -\pi\le x\le\pi\\ x^2-(\pi^2+2)-(\pi^2+6)\cos x+4\pi\sin x & \text{nếu}\quad \pi\le x.\end{cases}$$

b) Như trong việc nghiên cứu PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng số (Tập 2, 11.2.2), tập hợp các nghiệm của PTVP $y'''+2y''+y'+2y=0$ là một $\mathbb{R}$- không gian vectơ có số chiều là 3, cảm sinh bởi $x\mapsto\cos x$, $x\mapsto\sin x$, $x\mapsto e^{-2x}$, vì "phương trình đặc trưng" $r^3+2r^2+r+2=0$ có 3 nghiệm đơn trong $\mathbb{C}$: i, $-i$, -2. Vậy $y\colon x\mapsto A\cos x+B\sin x+Ce^{-2x}$ $(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$. Tính A, B, C để thoả mãn điều kiện tại 0.

◊ **Trả lời:** $y(x)=\dfrac{1}{5}(3\cos x+9\sin x+2e^{-2x})$.

7.4.5 Chú ý rằng $(y''' + y')\cos x - (y'' + y)\sin x = \dfrac{d}{dx}\big((y'' + y)\cos x\big)$. Giải $y'' + y = \dfrac{C}{\cos x}$ $(C \in \mathbb{R})$ trên mỗi khoảng $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$, bằng cách sử dụng phương pháp biến thiên hằng số, rồi nghiên cứu mối nối tại $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

◊ **Trả lời:** $S_I = \left\{x \mapsto C(\cos x \ln|\cos x| + x\sin x) + \lambda\cos x + \mu\sin x; \quad (C, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3\right\}$

nếu $I \cap (\dfrac{\pi}{2} + \pi Z) = \varnothing$

$S_I = \left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ nếu $I \cap (\dfrac{\pi}{2} + \pi Z) \neq \varnothing$.

7.4.6 Tìm nghiệm tổng quát của PTVP $y'' - y = a|x| + b$ trên $\mathbb{R}$. Ta thu được:

$y(x) = \begin{cases} ax - b + (\lambda - a)e^{x} + (\mu + a)e^{x} & \text{nếu} \quad x \le 0 \\ -ax - b + \lambda e^{x} + \mu e^{-x} & \text{nếu} \quad x \ge 0 \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Để đường cong biểu diễn (C) của y có các tiệm cận tại $-\infty$ và $+\infty$, thì điều kiện cần và đủ là: $\lambda = 0$ và $\mu + a = 0$.

◊ **Trả lời:** $y: x \mapsto -\left(a|x| + b + ae^{-|x|}\right)$.

7.4.7 *1)* Giả sử (f,g) thoả mãn. Vậy f, g thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = 1 + g'(x) \\ g(x) = 1 + f'(x). \end{cases}$

Từ đó suy ra f, g thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$ và là nghiệm của $y'' - y = -1$.

Vì vậy tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ sao cho $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = 1 + \alpha\cos x + \beta\sin x \\ g(x) = 1 + \gamma\cos x + \delta\sin x. \end{cases}$

2) Nghiên cứu phần đảo.

◊ **Trả lời:** $\{(1,1)\}$.

7.4.8 Nghiệm tổng quát của $y'' + \omega^2 y = f$ là (xem 7.4.3.2) Ví dụ 1):

$$y: x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u + \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ta có: $y(0) = y(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu\sin\omega a = -\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^a f(u)\sin\omega(a-u)\mathrm{d}u. \end{cases}$

◊ **Trả lời:** Nếu $\omega a \notin \pi\mathbb{Z}$, thì bài toán $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm :

$$y: x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u - \frac{1}{\omega}\frac{\sin\omega x}{\cos\omega a}\int_0^a f(u)\sin\omega(a-u)\mathrm{d}u.$$

• Nếu $\omega a \in \pi\mathbb{Z}$ và $\displaystyle\int_0^a f(u)\sin\omega(a-u)\mathrm{d}u \neq 0$, thì bài toán không có nghiệm.

• Nếu $\omega a \in \pi\mathbb{Z}$ và $\displaystyle\int_0^a f(u)\sin\omega(a-u)\mathrm{d}u = 0$ thì các nghiệm của bài toán $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$ là các ánh xạ $y: x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^x f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u + \mu\sin\omega x$, $\quad \mu \in \mathbb{R}$.

7.4.9 Theo (7.4.3.2) Ví dụ 1), nghiệm tổng quát của $y'' + \omega^2 y = f$ trên $\mathbb{R}$ là

$$y : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u + \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x, \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Với bất kỳ x thuộc $\mathbb{R}$, ta có:

$$y(x+T) - y(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^{x+T} f(u)\sin\omega(x+T-u)\mathrm{d}u - \frac{1}{\omega}\int_0^x f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_x^{x+T} f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}\int_0^T f(u)\sin\omega(x-u)\mathrm{d}u$$

$$= \left(\frac{1}{\omega}\int_0^T f(u)\sin\omega u\mathrm{d}u\right)\cos\omega x - \left(\frac{1}{\omega}\int_0^T f(u)\cos\omega u\mathrm{d}u\right)\sin\omega x.$$

7.4.10 *1)* **Tính duy nhất**

Nếu $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ thoả mãn, thì $N = \deg(P)$ và ta có một hệ tuyến tính với ma trận tam giác khả đảo, ẩn là $(a_n, \ldots, a_0)$.

2) **Sự tồn tại**

Chuỗi $\sum_{n\ge 0}(-1)^n \frac{d^{2n}P}{dx^{2n}}(x)$ và các phần tử bắt đầu bằng 0 từ một số hạng nào đó. Ký hiệu $N = \deg(P)$ và $y = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n P^{(2n)}$, ta có $y'' = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n P^{2(n+1)} = \sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}P^{(2m)}$. Từ đó $y'' + y = P$.

7.4.11 1) Giả sử (f, g, h) thoả mãn.

• Vì $(\forall\, y \in \mathbb{R}, f(y) = g(0)h(y))$ nên f liên tục.

Ký hiệu $F : x \mapsto \int_0^x f$, $H : x \mapsto \int_0^x h$, đều thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$. Với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2$ ta có :

$$F(x+y) = \int_0^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+y} f(t)dt = F(x) + \int_0^y f(u+x)du$$

$$= F(x) + \int_0^y g(x)h(u)du = F(x) + g(x)H(y).$$

• Nếu $h = 0$, thì $f = 0$và g bất kỳ. Giả sử $h \neq 0$, khi đó $H \neq 0$. Tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $H(y_0) \neq 0$.

Ta có: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{H(y_0)}\big(F(x+y_0) - F(x)\big)$, điều đó chứng tỏ g thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

• Có thể đổi chỗ g và h trong các giả thiết: ta kết luận f, g, h đều thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x+y) = g'(x)h(y) = g(x)h'(y)$ và trường hợp riêng :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(y_0)g'(x) - h'(y_0)g(x) = 0.$$

Do đó tồn tại $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda e^{\alpha x}$.

Cũng như vậy, tồn tại $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho: $\forall y \in \mathbb{R},\ h(y) = \mu e^{\beta y}$.

2) Nghiên cứu phần đảo.

◊ **Trả lời:**

$S = (\{0\} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) \cup \{(x \mapsto x^{\alpha x}, x \mapsto \lambda e^{\alpha x}, x \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\alpha x});$

$(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$.

7.4.12 *a)* Theo (7.4.3.2) Ví dụ 1), nghiệm tổng quát của (E) trên $\mathbb{R}_+$ là :

$y: x \mapsto y_0(x) + \lambda\cos x + \mu\sin x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, trong đó $y_0 : x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$. Bằng cách lấy tích phân từng phần ta có:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ y_0(x) = f(x) - f(0)\cos x - z(x), \text{ trong đó } z : x \mapsto \int_0^x f'(t)\cos(x-t)dt.$$

Vì f đơn điệu, dù phải thay (f, y) bởi $(-f, -y)$, nên ta có thể giả sử $f' \geq 0$.
Vậy:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad |z(x)| \leq \int_0^x f'(t)|\cos(x-t)|dt \leq \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0).$$

Vì f liên tục trên $[0;+\infty[$ và có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$ nên ta suy ra f bị chặn trên $\mathbb{R}_+$, rồi z, y_0, y bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

b) Ta đã thấy ở trên, nghiệm tổng quát của (E) trên $\mathbb{R}_+$ là:

$$y : x \mapsto f(x) - f(0)\cos x - \left(\int_0^x f'(t)\cos t dt\right)\cos x - \left(\int_0^x f'(t)\sin t dt\right)\sin x + \lambda\cos x + \mu\sin x,$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Chú ý rằng các ánh xạ $t \mapsto f'(t)\cos t$ và $t \mapsto f'(t)\sin t$ đều khả tích trên $[0;+\infty[$.

Các ánh xạ f, $x \mapsto \lambda - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t dt$, $x \mapsto \mu - \int_0^x f'(t)\sin t dt$ có các giới hạn hữu hạn tại $+\infty$. Để y có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \lambda - f(0) - \int_0^{+\infty} f'(t)\cos t dt = 0 \\ \mu - \int_0^{+\infty} f'(t)\sin t dt = 0. \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của y_1, hơn nữa với mọi x thuộc $\mathbb{R}_+$

$$y_1(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)dt = \int_x^{+\infty} f(t)\sin(x-t)dt$$

◊ **Trả lời:** $y_1 : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\sin(x-t)dt$.

7.4.13 *a)* Quy nạp theo n.

• Tính chất đúng với $n = 1$ vì $\left(y_1^p y_2^q\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+q=1} = (y_1, y_2)$.

• Giả sử tính chất đúng với một $n \in \mathbb{N}^*$ cố định.

Cho $(\alpha_0, ..., \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ sao cho : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} = 0$.

Lấy đạo hàm ta được $uy'_1 + vy'_2 = 0$, trong đó

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} i\alpha_i y_1^{i-1} y_2^{n+1-i}, \quad v = \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i y_1^i y_2^{n-i}.$$

Hơn nữa:

$$uy_1 + vy_2 = \sum_{i=1}^{n+1} i\alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} = (n+1)\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} = 0.$$

Vì (y_1, y_2) là một họ độc lập của hai nghiệm của (E) nên Wronskien $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$ không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào của I (xem 7.4.1, Mệnh đề 2). Từ đó ta suy ra $u = v = 0$

Theo giả thiết quy nạp, vì : $\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j+1)\alpha_{j+1} y_1^j y_2^{n-j} = \sum_{i=1}^{n+1} i\alpha_i y_1^{i-1} y_2^{n+1-i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i y_1^i y_2^{n-i} = 0 \end{cases}$

nên ta kết luận : $\forall\, i \in \{0, ..., n+1\}$, $\alpha_i = 0$.

b) ◊ **Trả lời:** Không; phản ví dụ: $n = 2$, $f_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\end{array}$, $f_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x^3|\end{array}$

c) ◊ **Trả lời:** Không; phản ví dụ: $a = b = c = 0$, $n = 2$, $y_1 : x \mapsto 1$, $y_2 : x \mapsto x$, $y_3 : x \mapsto x^2$.
Vì $y_1 y_3 = y_2^2$ nên họ $(y_1^p y_2^q y_3^r)_{(p,q,r)\in\mathbb{N}^3, p+q+r=2}$ phụ thuộc.

7.4.14 *a)* • Bằng sơ đồ

$$\left.\begin{array}{l} y C^2 \\ f C^1 \\ y'' = fy \end{array}\right\} \Rightarrow y'' C^1 \Rightarrow y C^3 \Rightarrow Y C^3.$$

Sau đó $Y = y^2$, $Y' = 2yy'$; $Y'' = 2fy^2 + 2y'^2$, $Y''' = 2f'y^2 + 8fyy' = 2f'Y + 4fY'$.

◊ **Trả lời:** $a = 0$, $b = 4f$, $c = 2f'$.

b) Vì y, z là nghiệm của (E), $y + z$ và $y - z$ cũng là nghiệm của (E) nên $(y+z)^2$ và $(y-z)^2$ là nghiệm của (F). Vậy $yz = \frac{1}{4}\left((y+z)^2 - (y-z)^2\right)$ là nghiệm của (F).

c)

• $W_{Y_1,Y_2,Y_3} = \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_2^2 \\ 2y_1y'_1 & y_1y'_2 + y'_1y_2 & 2y_2y'_2 \\ 2fy_1^2 + 2y_1'^2 & 2fy_1y_2 + 2y'_1y'_2 & 2fy_2^2 + 2y_2'^2 \end{vmatrix} \underset{D_3 \leftarrow D_3 - 2fD_1}{=} 2\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_2^2 \\ 2y_1y'_1 & y_1y'_2 + y'_1y_2 & 2y_2y'_2 \\ y_1'^2 & y'_1y'_2 & y_2'^2 \end{vmatrix}.$

Khai triển định thức cuối ta được:

$$W_{Y_1,Y_2,Y_3} = 2\left(y_1^3 y_2'^3 - 3y_1^2 y_1' y_2 y_2'^2 + 3y_1 y_1'^2 y_2^2 y_2' - y_1'^3 y_2^3\right) = 2\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)^3 = 2W_{y_1,y_2}^3 .$$

• Vì (y_1, y_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$ - kgv các nghiệm của (E), $W_{y_1,y_2} \neq 0$.

Vậy $W_{Y_1,Y_2,Y_3} = 2W_{y_1,y_2}^3 \neq 0$, do đó (xem 7.4.1. Mệnh đề 2) (Y_1,Y_2,Y_3) là độc lập. Cuối cùng, các nghiệm của (F) lập thành một $\mathbb{R}$ - kgv có số chiều là 3.

7.4.15 *a)* Chú ý rằng y_2 nhận được từ y_1 bằng cách áp dụng phương pháp Lagrange (xem 7.4.22).

b) 1) Sự tồn tại của w.

Vì $u(0) \neq 0$ và u liên tục tại 0 nên $u(x) \underset{x\to 0+}{\sim} u(0)$.

Theo (chẳng hạn) định lý về tích phân của các quan hệ so sánh (Tập 3, 2.5.3.1) Mệnh đề 2) ta suy ra:

$$\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} \underset{x\to 0+}{\sim} \int_0^x \frac{dt}{(u(0))^2} = \frac{x}{(u(0))^2} \text{ và } v(x) \underset{x\to 0+}{\sim} \frac{x}{u(0)}.$$

Rồi, theo một định lý khác về tích phân các quan hệ so sánh (Tập 3, 2.5.3.2) Mệnh đề 2):

$$\int_\alpha^x \frac{dt}{(v(t))^2} \underset{x\to 0+}{\sim} \int_\alpha^x \frac{(u(0))^2}{t^2} dt = (u(0))^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x}\right),$$

do đó $w(x) \underset{x\to 0+}{\sim} xu(0)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0+]{} -u(0)$.

Như vậy, w có thể được kéo dài liên tục tại 0 bằng cách đặt $w(0) = -u(0)$.

2) Bằng cách ký hiệu $a = 0$, $b = -\frac{u''}{u}$, u là nghiệm của (E) $y'' + ay' + by = 0$ trên $[0;+\infty]$.

Theo *a)* v (thay cho y_2) cũng là nghiệm của (E) trên $[0;+\infty[$. Hơn nữa, $\forall t \in]0;+\infty[$, $v(t) \neq 0$. Vậy, cũng lập luận như ở *a)* (bằng cách thay $[0;+\infty[$ bởi $]0;+\infty[$) w là nghiệm của (E) trên $]0;+\infty[$. Vì $\mathbb{R}$- không gian vectơ các nghiệm của (E) trên $]0;+\infty[$ có số chiều bằng 2, mà các thu hẹp của u và v trên $]0;+\infty[$ lập thành một cơ sở và w thuộc không gian đó, nên tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ w(x) = \lambda u(x) + \mu v(x).$$

Hơn nữa, vì u, v, w liên tục tại 0, ta suy ra :

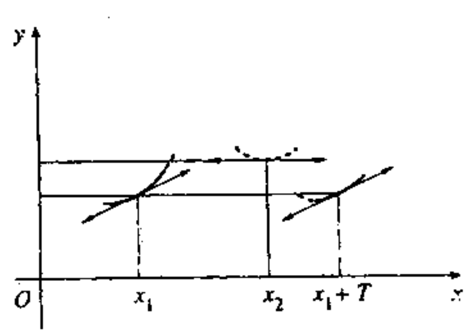
$$\forall x \in [0;+\infty[,\ w(x) = \lambda u(x) + \mu v(x).$$

3) Trong trường hợp riêng $w(0) = \lambda u(0)$ (vì $v(0) = 0$); nhưng ta đã biết $w(0) = -u(0)$ và $u(0) \neq 0$. Từ đó suy ra $\lambda = -1$, cuối cùng $0 = w(\alpha) = -u(\alpha) + \mu v(\alpha)$.

◊ **Trả lời:** $\lambda = -1$, $\mu = \left(\int_0^\alpha \frac{dt}{(u(t))^2}\right)^{-1}$.

7.4.16 Lập luận bằng phản chứng

Giả sử rằng $y'' + py = 0$ có một nghiệm T -tuần hoàn là y khác 0. Khi đó tồn tại $x_1 \in \mathbb{R}$ sao cho $y(x_1) \neq 0$. Dù phải đổi y thành $-y$, ta có thể giả sử $y(x_1) > 0$. Vì y thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $x_2 \in [x_1; x_1 + T]$ sao



cho $y(x_2) = \sup\limits_{x\in[x_1;x_1+T]} y(x) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x)$ và ta có $y'(x_2) = 0$.

Vậy $y(x_2) \geq y(x_1) > 0$, từ đó $y''(x_2) = -p(x_2)y(x_2) > 0$, y' tăng ngặt trong một lân cận của x_2. Vì $y'(x_2) = 0$, nên ta suy ra tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho $\forall\ x \in]x_2;x_2 + \alpha[,\ y(x) > y(x_2)$, điều mâu thuẫn với định nghĩa x_2.

7.4.17 • Các ánh xạ $Y_1 : \begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto y_1(x+T)\end{array}$ và $Y_2 : \begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto y_2(x+T)\end{array}$ rõ ràng là các nghiệm của $y'' + py = 0$ trên $\mathbb{R}$. Vậy, tồn tại $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ sao cho : $\begin{cases} Y_1 = ay_1 + by_2 \\ Y_2 = cy_1 + dy_2. \end{cases}$

• Xét Wronskien W của y_1, y_2: $W = y_1y'_2 - y'_1y_2$. W khả vi trên $\mathbb{R}$ và $W' = y_1y''_2 - y''_1y_2 = 0$. Vậy tồn tại $A \in \mathbb{R}$ sao cho: $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $W(x) = A$. Vì (y_1, y_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$ - kgv các nghiệm của $y'' + py = 0$ trên $\mathbb{R}$ nên ta biết (theo 7.4.1, Mệnh đề) $W \neq 0$, vậy $A \neq 0$.

Ta có: $\forall\ x \in \mathbb{R},\ W_{Y_1,Y_2}(x) = Y_1(x)Y_2'(x) - Y_1'(x)Y_2(x) = W(x+T) = W(x) = A$.

Nhưng $W_{Y_1,Y_2}(x) = (ay_1 + by_2)(cy_1' + dy_2') - (ay_1' + by_2')(cy_1 + dy_2) = (ad - bc)W$.

Ta kết luận $ad - bc = 1$.

7.4.18 Giả sử α là một không điểm không cô lập của y trong I. Tồn tại một dãy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ các phần tử của I sao cho:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \neq \alpha. \\ x_n \underset{n\infty}{\to} \alpha. \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad y(x_n) = 0. \end{cases}$$

Ta có $\dfrac{y(x_n) - y(\alpha)}{x_n - a} \xrightarrow[n\infty]{} y'(\alpha)$, vậy $y'(\alpha) = 0$. Vậy y là nghiệm trên I của bài toán Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$. Theo (7.4.1 Định lý) bài toán Cauchy này chỉ có một nghiệm duy nhất trên I; mặt khác 0 là nghiệm hiển nhiên. Ta kết luận $y = 0$, mâu thuẫn.

7.4.19 *a)* Theo bài tập 7.4.18, các không điểm của y_1 cô lập trong I. Cho u_1, v_1 là hai không điểm liên tiếp của y_1. Vì y_1 liên tục trên $[u_1;v_1]$ nên theo định lý về giá trị trung gian, dù phải thay y_1 bởi $-y_1$, ta có thể giả sử: $\forall\ x \in]u_1;v_1[,\ y_1(x) > 0$.

Lập luận bằng phản chứng : Giả sử y_2 không có một không điểm nào trong $[u_1;v_1]$ dù phải thay y_2 bởi $-y_2$, khi đó theo định lý về giá trị trung gian ta có thể giả thiết : $\forall\ x \in [u_1;v_1]$, $y_2(x) > 0$.

Xét Wonskien W của y_1, y_2: $W = y_1y'_2 - y'_1y_2$; ở đây y_1, y_2 không phải (do cho trước) là các nghiệm của cùng một PTVP tuyến tính chuẩn hoá cấp 2. Ánh xạ W khả vi trên I và:

$$\forall x \in [u_1;v_1],\quad W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) = (p_1(x) - p_2(x))y_1(x)y_2(x) \leq 0,$$

do đó W giảm trên $[u_1;v_1]$.

Mặt khác : $W(u_1) = -y'_1(u_1)y_2(u_1)$, $W(v_1) = -y'_1(v_1)y_2(v_1)$. Ta có:

$(\forall x \in [u_1;v_1], \dfrac{y_1(x) - y_1(u_1)}{x - u_1} \geq 0)$; từ đó $y'_1(u_1) \geq 0$; cũng vì vậy: $y'_1(v_1) \leq 0$.

Vậy ta có: $W(u_1) \leq 0$, $W(v_1) \geq 0$, do đó : $\forall\, x \in [u_1;v_1]$, $W(x) = 0$.

Tiếp đó là: $\forall x \in\,]u_1;v_1[$, $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'(x) = -\dfrac{W(x)}{(y_1(x))^2} = 0$.

Vậy, tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall x \in [u_1;v_1]$, $y_2(x) = ky_1(x)$. Nhưng như vậy thì $y_2(u_1) = 0$, mâu thuẫn.

b) Áp dụng *a)* cho $p_1 = m$, $p_2 = p$, $y_1 : t \mapsto \sin(t\sqrt{m})$.

c) Lập luận bằng phản chứng: Giả sử y có hai không điểm liên tiếp u_2, v_2 sao cho $v_2 - u_2 > \pi$. Khi đó, tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho: $u_2 < \alpha < \alpha + \pi < v_2$. Ánh xạ $y_1 : \begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x-\alpha)\end{array}$ là nghiệm của

$y'' + y = 0$ trên $\mathbb{R}$, triệt tiêu tại α, $\alpha + \pi$ và $y \neq 0$.

Vì $(\forall x \in \mathbb{R},\ e^{|x|} \geq 1)$ nên theo *a)* y_2 có ít nhất một không điểm trong $]u_2;v_2[$, mâu thuẫn.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 8

8.0.1 *a)* $f(0,y)=\dfrac{1}{y}\xrightarrow[y\to 0^{\pm}]{}\pm\infty$.

◊ **Trả lời:** f không có giới hạn tại (0,0).

b) $f(x,0)=0\xrightarrow[x\to 0]{}0$ và $f\left(x,x^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\xrightarrow[x\to 0^{+}]{}\dfrac{1}{2}$

◊ **Trả lời:** f không có giới hạn tại (0,0).

c) Bằng cách đặt $X = |x|^3$, $Y=y^4$ và $\rho = (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}$ ta có :

$$|f(x,y)|=\frac{X^{\frac{4}{3}}Y^{\frac{3}{4}}}{X^2+Y^2}\le\rho^{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-2}=\rho^{\frac{1}{12}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0.$$

◊ **Trả lời:** $f\xrightarrow[(0,0)]{}0$.

d) $f(x,0)=-x^2\xrightarrow[x\to 0]{}0$ và $f(x,-x+x^2)=\dfrac{(-x+x^2)^2-x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}-1$.

◊ **Trả lời:** f không có giới hạn tại (0,0).

e) Vì $1-\cos t\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{t^2}{2}$ nên tồn tại $\alpha>0$ sao cho : $\forall\, t\in\,]-\alpha;\alpha[,\ 0\le 1-\cos t\le t^2$.

Do đó với mọi $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ sao cho $|x|<\alpha$ và $|y|<\alpha$, ta có : $|f(x,y)|\le|x|$.

Cuối cùng $|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.

◊ **Trả lời:** $f\xrightarrow[(0,0)]{}0$.

f) Bằng cách đặt $v=\mathrm{Max}(|x|,|y|)$, với mọi $(x,y)\in(\mathbf{R}^*)^2$, ta có: $\sqrt{x^2+y^2}\ge v$ và

$|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}\le 2v^{\frac{3}{2}}$, từ đó : $f(x,y)\ge\dfrac{1}{2v^{\frac{1}{2}}}$.

◊ **Trả lời:** $f\underset{(0,0)}{\to}+\infty$.

8.0.2 *a)* • f liên tục trên $(\mathbb{R}^*)^2$ theo các định lý cơ bản.

• Cho $x_0\in\mathbb{R}^*$. Ánh xạ $(x,y)\mapsto x\sin\dfrac{1}{y}$ không có giới hạn tại $(x_0,0)$, và

$y\sin\dfrac{1}{x}\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{}0$, vậy f không có giới hạn tại $(x_0,0)$.

Cũng như vậy đối với $(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}^*$.

• $x\sin\dfrac{1}{y}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ và $y\sin\dfrac{1}{x}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$, vậy $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.

◊ **Trả lời:** $(\mathbf{R}^*)^2\cup\{(0,0)\}$.

b) • f liên tục trên miền mở $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|\neq|y|\}$ theo các định lý cơ bản.

•Cho $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $|x_0| = |y_0|$. Ta có: $f(x,y)\xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |x|\le|y|}]{} x_0^2 = f(x_0,y_0)$ và

$f(x,y)\xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |x|>|y|}]{} y_0^2 = x_0^2$, vậy f liên tục tại (x_0, y_0).

◊ **Trả lời:** $\mathbb{R}^2$.

c) • f liên tục trên miền mở $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |y|\neq x^2\}$ theo các định lý cơ bản.

• Cho $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $|y_0| = x_0^2$.

Nếu $x_0\neq 0$, thì ta có: $\dfrac{(x^4-y^2)^2}{x^6}\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$.

Giả sử $x_0 = 0$ (vậy $y_0 = 0$). Cho $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $x\neq 0$ và $|y|<x^2$. Ta có:

$|f(x,y)| = (x^2-y)\dfrac{(x^2-y)(x^2+y)^2}{x^6}$ và $0\le\dfrac{(x^2-y)(x^2+y)^2}{x^6}\le\dfrac{(x^2+|y|)^3}{x^6}\le 8$,

vì $|y|<x^2$ nên $|f(x,y)|\le 8(x^2-y)\xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |y|<x^2}]{} 0$.

◊ **Trả lời:** $\mathbb{R}^2$.

8.0.3 $f(t,0,0,0) = t\xrightarrow[t\to 0]{} 0$ và $f(t+t^2,-t+t^2,t,-t) = 3+t^2\xrightarrow[t\to 0]{} 3$.

◊ **Trả lời:** Không.

8.0.4 • Nếu f và g liên tục trên $\mathbb{R}$ thì F liên tục trên $\mathbb{R}^2$ do :

$$(x,y)\mapsto\big(f(x),g(y)\big)\mapsto f(x)+g(y).$$

• Đảo lại, nếu F liên tục trên $\mathbb{R}^2$ thì f và g liên tục trên $\mathbb{R}$ do :

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, & f(x) = F(x,0)-g(0)\\ \forall x\in\mathbb{R}, & g(y) = F(0,y)-f(0).\end{cases}$$

8.0.5 Cho $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ và $\varepsilon>0$.

Vì $f(\bullet, y_0)$ liên tục tại x_0 nên tồn tại $\alpha>0$ sao cho:

(1) $\qquad \forall x\in\mathbb{R},\quad \left(|x-x_0|\le\alpha\Rightarrow|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\le\dfrac{\varepsilon}{4}\right).$

Sau đó, vì $f(x_0-\alpha, \bullet)$ và $f(x_0+\alpha, \bullet)$ đều liên tục tại y_0 nên tồn tại $\beta>0$ sao cho:

(2) $$\forall y\in\mathbb{R},\quad \left(|y-y_0|\le\beta\Rightarrow\begin{cases}|f(x_0-\alpha,y)-f(x_0-\alpha,y_0)|\le\dfrac{\varepsilon}{4}\\ |f(x_0+\alpha,y)-f(x_0+\alpha,y_0)|\le\dfrac{\varepsilon}{4}\end{cases}\right)$$

Ký hiệu $V = [x_0-\alpha; x_0+\alpha]\times[y_0-\beta; y_0+\beta]$, đó là một lân cận của (x_0, y_0) trong $\mathbb{R}^2$. Cho $(x,y)\in V$. Với mọi $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ta ký hiệu $[a;b]$ là khoảng đóng có mút a và b (mà ta có $a\le b$

hoặc $b \le a$).

Vì $f(\bullet, y)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) \in \left[f(x_0-\alpha,y);f(x_0+\alpha,y)\right],$$

sau đó, vì $f(x_0-\alpha, \bullet)$ và $f(x_0+\alpha, \bullet)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ nên :

$$\begin{cases} f(x_0-\alpha,y) \in \left[f(x_0-\alpha,y_0-\beta);f(x_0-\alpha,y_0+\beta)\right] \\ f(x_0+\alpha,y) \in \left[f(x_0+\alpha,y_0-\beta);f(x_0+\alpha,y_0+\beta)\right]. \end{cases}$$

Ký hiệu m và M tương ứng là các phần tử bé nhất và phần tử lớn nhất của

$$\left\{f(x_0+u\alpha,y_0+v\beta); \quad (u,v)\in\{-1;1\}^2\right\}.$$

- Khi đó ta có $f(x,y) \in [m,M]$ và trường hợp riêng $f(x_0, y_0) \in [m,M]$, từ đó
$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right| \le M-m\,.$$
- Tồn tại (u_1,v_1), (u_2,v_2) trong $\{-1;1\}^2$ sao cho
$$m = f(x_0+u_1\alpha,y_0+v_1\beta)\,;\ \ M = f(x_0+u_2\alpha,y_0+v_2\beta)\,.$$

Theo (2) ta có: $$\begin{cases} f(x_0+u_1\alpha,y_0+v_1\beta)-f(x_0+u_1\alpha,y_0)\le\dfrac{\varepsilon}{4} \\ f(x_0+u_2\alpha,y_0+v_2\beta)-f(x_0+u_2\alpha,y_0)\le\dfrac{\varepsilon}{4}, \end{cases}$$

sau đó theo (1): $$\begin{cases} \left|f(x_0+u_1\alpha,y_0)-f(x_0,y_0)\right|\le\dfrac{\varepsilon}{4} \\ \left|f(x_0+u_2\alpha,y_0)-f(x_0,y_0)\right|\le\dfrac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra, nhờ bất đẳng thức tam giác : $(0 \le)\ M-m \le \varepsilon$.

Cuối cùng, ta đã chứng minh:

$$\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2,\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists V\in\mathcal{V}_{\mathbf{R}^2}(x_0,y_0),\quad \forall(x,y)\in V,\ \left|(f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|\le\varepsilon\,,$$

nghĩa là: f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

8.0.6 Với mọi x thuộc $[0;1]$, $f(x,\bullet)$ liên tục trên compăc $[0;1]$, vậy nó bị chặn dưới, từ đó tồn tại $g(x)$. Lập luận tương tự đối với h.

a) Cho $\varepsilon > 0$. Vì f liên tục trên compăc $[0;1]^2$, theo định lý Heine, f liên tục đều trên $[0;1]^2$. Vậy tồn tại $\eta > 0$ sao cho:

$$\forall\ x,\ y, x', y' \in [0;1],\ \left(\begin{cases}\left|x-x'\right|\le\eta \\ \left|y-y'\right|\le\eta\end{cases} \Rightarrow \left|f(x,y)-f(x',y')\right|\le\varepsilon\right)$$

Cho $(x,x') \in [0;1]^2$ sao cho $|x-x'| \le \eta$. Khi đó, ta có :

$$\forall\ y\in[0;1],\ f(x,y)-\varepsilon \le f(x',y) \le f(x,y)+\varepsilon,$$

từ đó: $g(x)-\varepsilon \le g(x') \le g(x)+\varepsilon$,

tức là $|g(x)-g'(x)| \le \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ g liên tục đều trên $[0;1]$, vậy liên tục trên $[0;1]$. Cũng như vậy đối với h.

b) Sự tồn tại của α và β được đảm bảo bởi sự liên tục của g và h trên compăc $[0;1]$.

Hơn nữa, α và β đều đạt được tương ứng bởi g và h.

α) $$\left(\forall y\in[0;1],\quad (\forall x\in[0;1],\quad g(x)\ \le f(x,y)\right)\Rightarrow\left(\forall y\in[0;1],\quad \alpha\ \le \sup_{x\in[0;1]} f(x,y)=h(y)\right)$$

$$\Rightarrow\left(\alpha\ \le \inf_{y\in[0;1]} h(y)=\beta\right).$$

β) 1) Giả sử $\alpha = \beta$. Khi đó tồn tại $(x_0, y_0) \in [0;1]^2$ sao cho $g(x_0) = \alpha$ và $h(y_0) = \beta$ và do đó

$$\forall\,(x,y) \in [0;1]^2,\quad f(x,y_0) \le h(y_0) = g(x_0) \le f(x_0,y).$$

2) Đảo lại, nếu tồn tại $(x_0, y_0) \in [0;1]^2$ sao cho $\forall\,(x,y) \in [0;1]^2$, $f(x,y_0) \le f(x_0,y)$ thì:

$$\forall\, y \in [0;1],\ \beta = h(y_0) = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} f(x,y_0) \le f(x_0,y),$$

từ đó $\beta \le \operatorname*{Inf}_{x\in[0;1]} f(x_0,y) = \alpha$, và cuối cùng $\alpha = \beta$.

8.0.7 *1)* **Đơn ánh**

Cho $x,y,u,v \in \mathbb{R}$ sao cho $F(x,y) = F(u,v)$. Vậy ta có:

$\begin{cases} x + g(y) = u + g(v) \\ y + f(x) = v + f(u) \end{cases}$, từ đó: $\begin{cases} |x-u| = |g(v)-g(y)| \le k'|v-y| \\ |v-y| = |f(x)-f(u)| \le k|x-u|, \end{cases}$

và do đó $|x-u| \le kk'|x-u|$. Vì $0 \le kk' < 1$ nên ta suy ra $x = u$, rồi $y = v$.

2) **Toàn ánh**

Cho $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Xét $\varphi: \begin{matrix}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + g(b - f(x))\end{matrix}$ và $\psi: \begin{matrix}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y + f(a - g(y))\end{matrix}$.

- φ và ψ liên tục trên $\mathbb{R}$, vì f và g có tính Lipschitz, nên liên tục

- Cho $x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$|g(b-f(x))| \le k'|b-f(x)| + |g(0)| \le k'b + k'\big(k|x| + |f(0)|\big) + |g(0)|.$$

Vì $0 \le kk' < 1$ nên ta suy ra $x + g(b-f(x)) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$, và vì vậy $\varphi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$,

$\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Định lý về giá trị trung gian cho phép kết luận φ là toàn ánh, cũng như vậy, ψ là toàn ánh

- Như vậy, tồn tại $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho: $a = \varphi(x)$ và $b = \psi(y)$.

Ta có :

$$|y-b+f(x)| = |f(x) - f(a-g(y))| \le k|x-a+g(y)| = k|g(y) - g(b-f(x)| \le kk'|y-b+f(x)|.$$

Vì $0 \le kk' < 1$ nên ta suy ra $y - b + f(x) = 0$, và cũng như vậy $x - a + g(y) = 0$.

Cuối cùng, $(a,b) = (x + g(y),\, y + f(x)) = F(x,y)$.

8.1.1 *a)* Theo các định lý cơ bản, f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$.

1) **Liên tục**

Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$: $|f(x,y) - f(0,0)| \le \dfrac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} \le |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, vậy f liên tục tại $(0,0)$.

2) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 1,\ \text{vậy } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ tồn tại và bằng } 1.$$

Cũng như vậy $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ tồn tại và bằng -1.

3) **Sự liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\Big(3x^2\cos(x^3)(x^2+y^2) - 2x(\sin(x^3) - \sin(y^3))\Big),$$

từ đó $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\frac{3}{2}\cos(x^3)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{3}{2}\neq\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, và vì vậy $\frac{\partial f}{\partial x}$ không liên tục tại (0,0). Cũng như vậy $\frac{\partial f}{\partial y}$ không liên tục tại (0,0).

◊ **Trả lời:**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- f có các đạo hàm riêng cấp 1 trên $\mathbb{R}^2$.
- Hai đạo hàm riêng cấp 1 đều liên tục trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, nhưng không liên tục tại (0,0).

b) Theo các định lý cơ bản, f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

1) **Liên tục**

Cho $y_0\in\mathbb{R}$. Với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ta có: $|f(x,y)-f(0,y_0)|=|f(x,y)|\leq|x|$

và $|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,y_0)]{}0$, vậy f liên tục tại $(0,y_0)$.

2) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**

Cho $y_0\in\mathbb{R}$.

- Xét $f(\cdot,y_0):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$x\mapsto\begin{cases}x\sin\frac{y_0}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Nếu $y_0\neq 0$, $f(\cdot,y_0)$ không khả vi tại 0, thì $h\mapsto\frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h}=\sin\frac{y_0}{h}$ không có giới hạn khi $h\to 0$.

Nếu $y_0=0$ thì $f(\cdot,y_0)=0$, vậy $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ tồn tại và bằng 0, vì $f(0,\cdot)=0$.

3) **Sự liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

- Với $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$; trường hợp riêng khi $x\in\mathbb{R}^*$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\sin 1-\cos 1$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ không liên tục tại (0,0).

- Ta có : $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\cos\frac{y}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0.\end{cases}$

Rõ ràng là $\frac{\partial f}{\partial y}$ không có giới hạn tại mọi $(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}^*$.

Và $\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t)=\cos\frac{1}{t}$ không có giới hạn khi t dần tới 0.

◊ **Trả lời:**

- f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- Miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial x}$ là $\left(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right)\cup\{(0,0)\}$. Miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial y}$ là $\mathbb{R}^2$.

• Các đạo hàm riêng cấp 1 đều liên tục trên $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ và không liên tục tại mọi điểm khác.

c) Theo các định lý cơ bản, *f* thuộc lớp C^1 trên miền mở $U = \mathbb{R}^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi Z\right) \times \{0\}\right)$

1) **Liên tục**

Cho $n \in \mathbb{Z}$. Ta có: $f(x,0) = 1 \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}+n\pi]{} 1 \neq f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$, vậy f không liên tục tại $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$.

2) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**

• $f(\cdot,0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{nếu } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{cases}$, vậy với mọi $n \in \mathbb{Z}$, $f(\bullet,0)$ không khả vi tại $\frac{\pi}{2} + n\pi$

• Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \cdot\right): \mathbb{R} \underset{y \mapsto 0}{\to} \mathbb{R}$, vậy $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ tồn tại và bằng 0.

3) **Sự liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

Với mọi $(x,y) \in U$ ta có $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^2 x + y^2\sin^2 x)^2}$, từ đó với

$$(n,t) \in \mathbb{Z} \times \left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[- \{0\}\right): \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + t, t\right) = -\frac{2t\sin^2 t\cos^2 t}{(\cos^2 t + t^2\sin^2 t)^2} \underset{t \to 0}{\sim} -\frac{1}{2t}.$$

Điều này chứng tỏ rằng $\frac{\partial f}{\partial y}$ không liên tục tại $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$.

◊ **Trả lời:**

• Tập hợp liên tục của *f* là $U = \mathbf{R}^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right) \times \{0\}\right)$.

• Miền xác định của $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = U$. Miền xác định của $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbf{R}^2$.

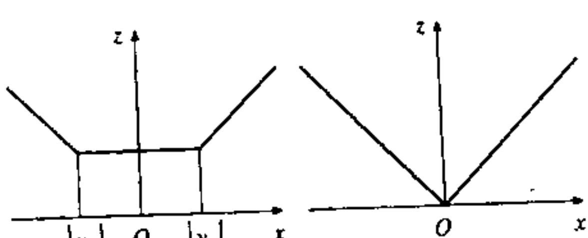
• Các đạo hàm riêng cấp 1 đều liên tục trên *U* và không liên tục tại các điểm khác.

d) Theo các định lý cơ bản, *f* thuộc lớp C^1 trên miền mở $U = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ |x| \neq |y|\right\}$.

1) **Liên tục**

Vì $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x| + |y| + \left||x| - |y|\right|\right)$, nên *f* liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

2) **Tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1**



Trường hợp $y_0 \neq 0$ Trường hợp $y_0 = 0$

Biểu diễn đồ thị $f(\bullet, y_0)$

Cho $y_0 \in \mathbb{R}$. Ánh xạ $f(\cdot, y_0): \underset{x \mapsto \mathrm{Max}(|x|, |y_0|)}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$, không khả vi tại $-|y_0|$, và tại $|y_0|$, do đó $\frac{\partial f}{\partial x}(-|y_0|, y_0)$ và $\frac{\partial f}{\partial x}(|y_0|, y_0)$ không tồn tại.

Cũng như vậy đối với $\frac{\partial f}{\partial y}$.

◊ **Trả lời:**

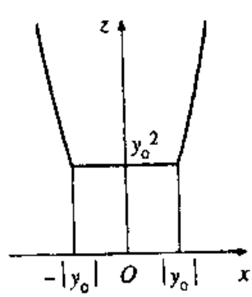
• f liên tục trên $\mathbb{R}^2$

• Miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial x}$ = miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial y}$ = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \neq |y|\}$ ký hiệu là U.

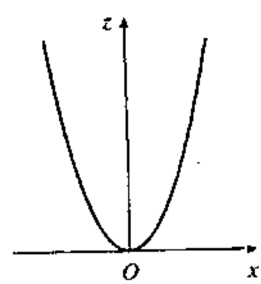
• $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ đều liên tục trên U.

e) Theo các định lý cơ bản, f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và thuộc lớp C^1 trên miền mở $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \neq y^2\}$.

1) Sự tồn tại các đạo hàm riêng cấp 1



Trường hợp $y_0 \neq 0$



Trường hợp $y_0 = 0$

Biểu diễn đồ thị $f(\bullet, y_0)$

Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $x_0^2 = y_0^2$.

Nếu $y_0 \neq 0$, ánh xạ $f(\cdot, y_0)$: $\underset{x \mapsto \mathrm{Max}(x^2, y_0^2)}{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$ không khả vi tại y_0 (không cả tại $-y_0$) (vì chẳng hạn với $y_0 > 0$): $(f(\cdot, y_0))'_g(y_0) = 0$ và $(f(\cdot, y_0))'_d(y_0) = 2y_0 \neq 0$.

Và $f(\cdot, y_0): \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto x^2]{} \mathbb{R}$ khả vi tại 0 và $(f(\cdot, 0))'(0) = 0$.

Điều này chỉ ra: miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial x}$ là $U \cup \{(0,0)\}$. Cũng như vậy đối với $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Sự liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1

Ánh xạ $\frac{\partial f}{\partial x}: U \cup \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x^2 < y^2 \\ 2x & \text{nếu } x^2 > y^2 \\ 0 & \text{nếu } x = y = 0. \end{cases}$$

Rõ ràng là $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Cũng vậy đối với $\frac{\partial f}{\partial y}$.

◊ **Trả lời:**

• f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

• Miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial x}$ = miền xác định của $\frac{\partial f}{\partial y}$ $= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad |x|\neq|y|\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ đều liên tục trên miền xác định.

8.1.2 *1)* f thuộc lớp C^2 trên miền mở $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản.

2) **Liên tục**

Vì φ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$, nên tồn tại $M\in\mathbb{R}_+$ sao cho:

$\forall\, t\in[-1;1],\ \left|\varphi(t)-(\varphi(0)+t\varphi'(0)\right|\le Mt^2$.

Khi đó, với mọi (x,y) thuộc $[-1;1]^2-\{(0,0)\}$, ta có:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{x^2+y^2}\left|x\left(\varphi(y)-y\varphi'(0)\right)-y\left(\varphi(x)-x\varphi'(0)\right)\right| \le \frac{1}{x^2+y^2}\left(|x|My^2+|y|Mx^2\right)$$

$$= M\frac{|xy|}{x^2+y^2}(|x|+|y|)\le\frac{1}{2}M(|x|+|y|)\text{ , vì vậy } x^2+y^2\ge 2|xy|,$$

và do đó $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$, điều chứng tỏ f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

3) Với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\Big(\big(\varphi(y)-y\varphi'(x)\big)(x^2+y^2)-2x\big(x\varphi(y)-y\varphi(x)\big)\Big).$$

Trường hợp riêng :

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0\xrightarrow[x\to0]{}0$

• $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\frac{\varphi(y)-y\varphi'(0)}{y^2}=\frac{1}{2}\varphi''(0)+\underset{y\to0}{o(1)}\underset{y\to0}{\to}\frac{1}{2}\varphi''(0)\neq0.$

Điều này chứng tỏ $\frac{\partial f}{\partial x}$ không liên tục tại (0,0) và do đó f không thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

8.1.3 Với $(u,y)\in I^2$, ký hiệu $g(u,y)=\int_a^y f(u,v)dv$, tồn tại vì $f(u,\bullet)$ liên tục trên đoạn nối a và y.

1) Với $y\in I$ cố định, ánh xạ $g(\bullet,y)$ liên tục trên I, vậy (Tập 1, 6.4.1, Hệ quả 1) $F(\cdot,y):x\mapsto\int_a^x\big(g(\cdot,y)\big)(u)du$ thuộc lớp C^1 trên I và:

$\forall\, x\in I,\ \big(F(\cdot,y)\big)'(x)=g(x,y)=\int_a^y f(x,v)dv$.

Điều này chứng tỏ $\frac{\partial F}{\partial x}$ tồn tại trên I^2 và: $\forall\,(x,y)\in I^2$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\int_a^y f(x,v)dv$. Theo Tập 3, 2.3.12.1) Mệnh đề vì f liên tục trên I^2 nên $\frac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên I^2.

2) Sử dụng định lý Fubini: $\forall\ (x,y) \in I^2,\ F(x,y) = \int_a^y \left(\int_a^x f(u,v)dv \right) du$,

1) chỉ ra là $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên I^2.

◊ **Trả lời:** F thuộc lớp C^1 trên I^2 và :

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_a^y f(x,v)dv \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_a^x f(u,y)du \end{cases}.$$

8.1.4 *a)* Theo các định lý cơ bản, f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^* \times \mathbf{R}$.

***1)* Sự tồn tại của các đạo hàm riêng cấp 1**

Cho $y_0 \in \mathbb{R}$.

• Ta có: $\forall h \in \mathbf{R}^*,\ \dfrac{F(h,y_0) - F(0,y_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_h^{hy_0} f - (y_0 - 1)f(0)\right) = \dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_h^{hy_0}\big(f - f(0)\big)$.

Vì f khả vi tại 0 nên tồn tại một ánh xạ $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbf{R},\quad f(h) = f(0) + hf'(0) + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \end{cases}$$

Vậy: $\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_h^{hy_0}\big(f - f(0)\big) = \dfrac{1}{2}(y_0^2 - 1)f'(0) + \dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_h^{hy_0} t\varepsilon(t)dt \underset{h\to 0}{\to} \dfrac{1}{2}(y_0^2 - 1)f'(0)$.

Điều này chứng tỏ rằng $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,y_0)$ tồn tại và bằng $\dfrac{1}{2}(y_0^2 - 1)f'(0)$.

Mặt khác: $F(0,\cdot) : \begin{array}{l}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ y \mapsto (y-1)f(0)\end{array}$, vậy $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,y_0)$ tồn tại và bằng $f(0)$.

***2)* Sự liên tục của các đạo hàm riêng cấp 1**

• Theo Tập 1, 6.1.4, Hệ quả 2 (hàm tích phân của cận trên) với mọi (x,y) thuộc $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2}\int_x^{xy} f + \frac{1}{x}(yf(xy) - f(x)).$$

Bằng cách sử dụng ánh xạ ε định nghĩa trong 1), với mọi (x,y) thuộc $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, ta thu được :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)f'(0) + y^2\varepsilon(xy) - \varepsilon(x) - \frac{1}{x^2}\int_x^{xy} t\varepsilon(t)dt,$$

và vì vậy $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,y_0)]{} \dfrac{1}{2}(y_0^2 - 1)f'(0) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(0,y_0)$,

điều này chỉ ra rằng $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ liên tục tại $(0,y_0)$ đối với mọi y_0 thuộc $\mathbf{R}$.

Cuối cùng, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

• Ta có (xem Tập 1, 6.4.1 ở trên):

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{nếu } x \neq 0 \\ f(0) & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Vì f liên tục tại 0, nên ta được:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,y_0)]{} f(0)=\frac{\partial F}{\partial y}(0,y_0)$$

với mọi y_0 thuộc $\mathbb{R}$. Cuối cùng, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) Giả sử f thoả mãn. Khi đó ta có : $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$, nghĩa là, theo *a)*:

$$\begin{cases}\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}, & -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_x^{xy} f+\dfrac{1}{x}(yf(xy)-f(x))=0\\ \forall y\in\mathbb{R}, & \dfrac{1}{2}(y^2-1)f'(0)=0.\end{cases}$$

Thay y bởi 0, ta suy ra :

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^*, & \displaystyle\int_0^x f-xf(x)=0\\ f'(0)=0.\end{cases}$$

Vì ($\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$) và vì f liên tục trên $\mathbb{R}$, nên suy ra (xem Tập 1, 6.4.1) f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^*$.

Bằng cách lấy đạo hàm, ta được: $\forall\ x\in\mathbb{R}^*, f(x)-(f(x)+xf'(x))=0$. Suy ra $f'=0$ và xác minh mệnh đề đảo.

◊ **Trả lời:** f thoả mãn khi và chỉ khi f là hằng số.

8.1.5 *1)* Giả sử g liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Khi đó f' liên tục trên $\mathbb{R}$ như hàm hợp $x\mapsto(x,x)\mapsto g(x,x)=f'(x)$.

2) Đảo lại, giả sử f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

Theo các định lý cơ bản, g thuộc lớp C^1 (vậy liên tục) trên miền mở $U=\mathbb{R}^2-\{(x,x);\ x\in\mathbb{R}\}$.

Cho $a\in\mathbb{R}$, ta sẽ chứng minh g liên tục tại (a,a).

Cho $\varepsilon>0$. Vì f' liên tục tại a nên tồn tại $\eta>0$ sao cho:

$$\forall\ t\in\mathbb{R},\ \left(|t-a|\le\eta\Rightarrow|f'(t)-f'(a)|\le\varepsilon\right).$$

Cho $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $|x-a|\le\eta$ và $|y-a|\le\eta$

- Nếu $x=y$ thì $|g(x,y)-g(a,a)|=|f'(x)-f'(a)|\le\varepsilon$.
- Nếu $x\ne y$, thì theo định lý về số gia hữu hạn, tồn tại $t\in[x;y]$ sao cho $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(t)$,

và ta cũng có $|t-a|\le\eta$ do đó:

$$|g(x,y)-g(a,a)|=|f'(t)-f'(a)|\le\varepsilon .$$

Ta đã chứng minh: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \eta>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\left(\begin{cases}|x-a|\le\eta\\|y-a|\le\eta\end{cases}\Rightarrow|g(x,y)-g(a,a)|\le\varepsilon\right)$, và do đó g liên tục tại (a,a).

Cuối cùng, g liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Có một phương pháp khác, bằng cách sử dụng tích phân phụ thuộc tham số (xem Tập 3, bài tập 2, 3.4.4) .

8.1.6

Xét $f : \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\} \longrightarrow \mathbf{R}$.
$\vec{x} \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((\vec{x}-\vec{a})^2\right)$

Ánh xạ f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\}$ và với mọi $\vec{x}$, $\vec{h}$ thuộc $\mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\}$

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = \frac{1}{2}\ln\left((\vec{x}+\vec{h}-\vec{a})^2\right) = \frac{1}{2}\ln\left((\vec{x}-\vec{a})^2 + 2 < \vec{x}-\vec{a},\vec{h} > +\overrightarrow{h^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((\vec{x}-\vec{a})^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + 2\frac{< \vec{x}-\vec{a},\vec{h} >}{(\vec{x}-\vec{a})^2} + \frac{\vec{h}^2}{(\vec{x}-\vec{a})^2}\right)$$

$$= f(\vec{x}) + < \frac{\vec{x}-\vec{a}}{\left\|\vec{x}-\vec{a}\right\|^2}, \vec{h} > + \underset{h\to 0}{o}(\|\vec{h}\|) .$$

Điều chứng tỏ : $\forall x \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{a}\}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}-\vec{a}}{\left\|\vec{x}-\vec{a}\right\|^2}$.

◊ **Trả lời:** Một ánh xạ f thoả mãn là : $\vec{x} \to \frac{1}{2}\ln\left((\vec{x}-\vec{a})^2\right) = \ln\left\|\vec{x}-\vec{a}\right\|$.

8.1.7 Chứng minh, bằng quy nạp trên k:

$$\begin{cases} f_k \text{ khả vi trên } \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ \forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad d_X f_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i \end{cases}$$

(trong đó $X^0 = \mathrm{I}_n$ theo quy ước).

Tính chất được thấy ngay nếu $k = 1$.

Giả sử tính chất đúng với một k thuộc $\mathbb{N}^*$. Ta có với $X, H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f_{k+1}(X+H) = (X+H)f_k(X+H) = (X+H)\left(X^k + d_X f_k(H) + \underset{H\to 0}{o}(\|H\|)\right)$$

$$= X^{k+1} + (X d_X f_k(H) + HX^k) + o(\|H\|) = X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} X^{k-i} H X^i + o(\|H\|),$$

điều chỉ ra rằng f_{k+1} khả vi trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ và $d_X f_{k+1} : H \to \sum_{i=0}^{k} X^{k-i} H X^i$.

◊ **Trả lời:** $\forall x \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), (d_X f_k)(H) = \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i$.

8.1.8 Với $A = (a_{ij})_{ij}$, $H = (h_{ij})_{ij}$ của $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, ta có :

$$f(A+H) = \det\left((a_{ij}+h_{ij})_{ij}\right) = \det A + \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij} h_{ij} + \underset{H\to 0}{o}(\|H\|) .$$

Bằng cách khai triển với tính đa tuyến tính và luân phiên với ký hiệu A_{ij} chỉ phần bù đại số của vị trí (i,j) của A.

Vì ánh xạ $H=(h_{ij})_{ij}\in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})\mapsto \sum\limits_{1\le i,j\le n} A_{ij}h_{ij}$ là tuyến tính nên ta suy ra f khả vi và

$(d_Af)(H)=\sum\limits_{1\le i,j\le n} A_{ij}h_{ij}=tr\left(({}^t\mathrm{com}A)H\right)$.

◊ **Trả lời:** $\forall A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\forall H\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R}),(d_Af)(H)=tr({}^t\mathrm{com}(A))$.

8.1.9 *a)* Trước hết, f liên tục trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản.

Chú ý rằng: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|f(x,y)|\le |y|$, và từ đấy suy ra: $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0)$.

b) Ký hiệu $(a,b)=v$.

- Nếu $a\neq 0$, ta có $\left|\dfrac{f(tv)-f(0,0)}{t}\right|=\left|\dfrac{b^3t^2}{\sqrt{a^2t^2+b^4t^4}}\right|\le\left|\dfrac{b^3}{a}\right||t|$, điều đó chứng tỏ

$\dfrac{f(tv)-f(0,0)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}0$.

- Nếu $a=0$, thì $\dfrac{f(tv)-f(0,0)}{t}=b\xrightarrow[t\to 0]{}b$.

Vậy, f có đạo hàm cấp 1 tại (0,0) theo v và $D_vf(0,0)=\begin{cases}0 & \text{nếu } a\neq 0\\ b & \text{nếu } a=0.\end{cases}$

c) Ký hiệu ε: $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi :

$$\varepsilon(h,k)=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k\right)=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^4}}-k\right).$$

Ta có $\varepsilon(k^2,k)=\dfrac{1}{|k|\sqrt{k^2+1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\right)k\xrightarrow[k\to 0^+]{}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\neq 0$.

Vậy $\varepsilon(h,k)\underset{(h,k)\to(0,0)}{\not\to}0$ và f không khả vi tại (0,0).

8.1.10 Giả sử $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$.

1) Vì φ liên tục trên compăc $\left[-\|x\|_\infty;\|x\|_\infty\right]$ nên tồn tại $M\in\mathbb{R}_+$ sao cho :

$$\forall t\in\left[-\|x\|_\infty;\|x\|_\infty\right],\quad |\varphi(t)|\le M$$

Vậy ta có: $\forall n\in N$, $\left|\dfrac{1}{2^n}\varphi(x_n)\right|\le\dfrac{M}{2^n}$. Vì $\sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{M}{2^n}$ hội tụ nên suy ra $\sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{1}{2^n}\varphi(x_n)$ hội tụ tuyệt đối, vậy hội tụ. Điều này chứng tỏ $f(x)$ tồn tại.

2) Vì φ' liên tục trên compăc $X=\left[-\|x\|_\infty-1;\|x\|_\infty+1\right]$ nên φ' liên tục đều trên x (Định lý Heine).

Cho $\varepsilon>0$. Tồn tại $\eta\in\,]0;1[$ sao cho: $\forall(u,v)\in X^2$, $\left(|u-v|\le\eta\Rightarrow|\varphi'(u)-\varphi'(v)|\le\varepsilon\right)$.

Cho $h=(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ sao cho $\|h\|_\infty\le\eta$.

Theo định lý về số gia hữu hạn, với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại t_n thuộc $]x_n;x_n+h_n[$ sao cho:

$\varphi(x_n+h_n)=\varphi(x_n)+h_n.\varphi'(t_n)$; vậy ta có $|t_n-x_n|\le|h_n|\le\eta$, và $t_n\in X$.

Chuỗi $\sum_{n\ge0}\frac{1}{2^n}h_n\varphi'(x_n)$ hội tụ (như trong 1) và :

$$\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h_n\varphi'(x_n)\right|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h_n\left(\varphi'(t_n)-\varphi'(x_n)\right)\right|$$

$$\le\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}|h_n||\varphi'(t_n)-\varphi'(x_n)|\le\varepsilon\|h\|_\infty\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=2\varepsilon\|h\|_\infty .$$

Điều này chứng minh: $f(x+h)\ =\ f(x)+L_x(h)+\underset{h\to0}{o}\|h\|$ trong đó: L_x: $E\to\mathbb{R}$ được xác định bởi : $L_x(h)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h_n\varphi'(x_n)$. Rõ ràng là L_x tuyến tính.

Hơn nữa, $\forall x\in E$, $|L_x(h)|\le\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}|\varphi'(x_n)|\right)\|h\|_\infty$. Vậy (xem Tập 3, 1.2.6) $L_x\in\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})$

◊ **Trả lời:** f khả vi trên E và ;

$$\forall x\in E,\ \forall h=(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ (d_xf)(h)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}h_n\varphi'(x_n).$$

8.1.11 Vì φ và f liên tục, nên $\varphi\circ f$ liên tục trên $[0;1]$, vậy $\Phi(f)$ tồn tại.

Giả sử $f\in E$, $\varepsilon>0$. Vì φ' liên tục trên compăc $X=\left[-\|f\|_\infty-1;\|f\|_\infty+1\right]$ nên φ' liên tục đều trên X (Định lý Heine). Vậy tồn tại $\eta\in\ ]0;1]$ sao cho:

$$\forall\ (u,v)\in X^2,\quad \left(|u-v|\le\eta\Rightarrow|\varphi'(u)-\varphi'(v)|\le\varepsilon\right).$$

Cho $x\in[0;1]$. Theo định lý về số gia hữu hạn, tồn tại $\xi_x\in\mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases}|\xi_x-f(x)|\le|h(x)|\\ \varphi\left(f(x)+h(x)\right)=\varphi\left(f(x)\right)+h_x\varphi'(\xi_x).\end{cases}$$

Vậy ta có : $|\varphi\circ(f+h)-\varphi\circ f-(\varphi'\circ f)h)(x)|=|\varphi'(\xi_x)-\varphi'(f(x))||h(x)|\le\varepsilon\|h\|_\infty$.

Lấy tích phân:

$$\left|\phi(f+h)-\phi(f)-\int_0^1(\varphi'\circ f)(x)h(x)dx\right|\le\varepsilon\|h\|_\infty .$$

Điều này chỉ ra $\phi(f+h)=\phi(f)+L_f(h)+\underset{h\to0}{o}\left(\|h\|_\infty\right)$, trong đó L_f: $E\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $L_f(h)=\int_0^1(\varphi'\circ f)(x)h(x)dx$. Rõ ràng là L_f tuyến tính.

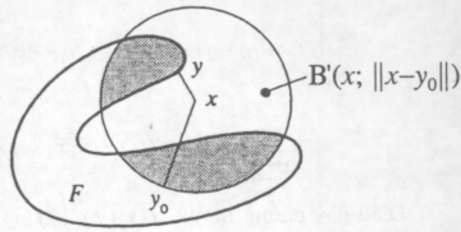
Hơn nữa, $\forall h\in E$, $|L_f(h)|\le\int_0^1|(\varphi'\circ f)(x)||h(x)|dx\le\left(\int_0^1|(\varphi'\circ f)(x)|dx\right)\|h\|_\infty$. Vậy (xem tập 3, 1.2.6) $L_f\in\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})$.

◊ **Trả lời:** ϕ khả vi trên E và:

$$\forall f \in E,\ \ \forall h \in E,\ \ (d_f\phi)(h) = \int_0^1 (\varphi' o f)(x)h(x)dx\ .$$

8.1.12 *a)* Vì $F \neq \varnothing$, nên tồn tại $y_0 \in F$.

Ánh xạ $z \mapsto \|x - z\|$ liên tục trên compăc không rỗng $B'(x;\|x-y_0\|) \cap F$ nên bị chặn dưới và đạt cận dưới.



Tồn tại $y \in F$ sao cho :

$$\forall z \in B'(x;\ \|x-y_0\|) \cap F,\ \|x-z\| \geq \|x-y\|.$$

Đặc biệt là $\|x-y_0\| \geq \|x-y\|$ và vì vậy

$$\forall x \in F,\ (\|x-z\| > \|x-y_0\| \Rightarrow \|x-z\| > \|x-y\|).$$

Cuối cùng : $\|x-y\| = \mathrm{d}(x,F)$.

b) α) Nếu $x \in F$ thì f có một cực tiểu địa phương tại x (vì $\mathrm{d}(x,F) = 0$). Vậy $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x) = 0$ (xem 8.3.2), mâu thuẫn.

β) 1) Vì f là 1–Lipschit z: $\forall\ h \in E,\ \left|f(x+h) - f(x)\right| \leq \|h\|$.

Nhưng $f(x+h) = f(x) + <\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x), h> + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$, từ đó bằng cách chọn h đồng phương với $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)$, $h = t\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(x) = 0$, $t \in \mathbb{R}$:

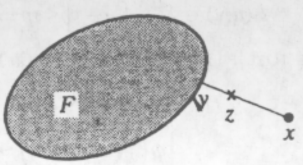
$\left| t\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)\right\|^2 + \underset{t\to 0}{o}(t)\right| \leq |t|\ \ \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)\right\|$ sau đó, giản ước cho t và cho t tiến tới 0:

$\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)\right\|^2 \leq \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)\right\|$, vậy $\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)\right\| \leq 1$.

2) • Cho $\lambda \in [0;1]$, $z = (1-\lambda)x + \lambda y$.

Giả sử tồn tại $y_1 \in F$ sao cho: $d(z,y_1) \leq d(z,y)$. Vậy:

$d(x,y_1) \leq d(x,z) + d(z,y_1) < d(x,z) + d(z,y) = \mathrm{d}(x,y)$, mâu thuẫn.



Vậy ta có: $\forall\ y_1 \in F$, $d(z,y_1) \geq d(z,y)$,
từ đó $f(z) = d(z,F) = d(z,y) = (1-\lambda)d(x,y)$.

• Điều này chứng tỏ rằng $\forall\ \lambda \in [0;1]$,
$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) = (1-\lambda)\|x-y\|$.

Bằng cách lấy đạo hàm tại 0: $<\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(x), y-x> = -\|x-y\|$. Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz ta có : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(x)\right\| \geq 1$, từ đó suy ra $\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)\right\| = 1$.

Nhưng vì $<\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x), \dfrac{x-y}{\|x-y\|}> = 1$ nên việc nghiên cứu trường hợp bằng nhau trong bất đẳng thức Cauchy–Schwarz,cuối cùng cho thấy: $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x) = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$.

γ) Nếu y, y' thoả mãn thì $\dfrac{x-y}{\|x-y\|} = \dfrac{x-y'}{\|x-y\|}$ và $\|x-y\| = \|x-y'\|$. Từ đó $y = y'$.

8.1.13 Phương pháp 1

1) Với mọi $(x,y,z) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^3$ ta có:

$$\left|\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy-z^2 \ge 0 \\ x^2+y^2-2xy-z^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-y| \le z \le x+y\,.$$

Vì a, b, c là các cạnh của một tam giác nên $|a-b| \le c \le a+b$, vậy $\operatorname{Arccos}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ tồn tại.

Cũng vậy, đối với hai đại lượng khác.

2) Ta ký hiệu $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ \ |x-y| < z < x+y; |y-z| < x < y+z; |z-x| < y < z+x\right\}$, đó là một bộ phận mở của $\mathbf{R}^3$,

$V = \left\{(x,y,z) \in (\mathbf{R}_+^*)^3;\ \ |x-y| \le z \le x+y; |y-z| \le x \le y+z; |z-x| \le y \le z+x\right\}$, $f : V \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f = f_1 + f_2 + f_3$, trong đó:

$$\forall\,(x,y,z) \in V,\quad \begin{cases} f_1(x,y,z) = \operatorname{Arccos}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy} \\ f_2(x,y,z) = \operatorname{Arccos}\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz} \\ f_3(x,y,z) = \operatorname{Arccos}\dfrac{z^2+x^2-y^2}{2zx}. \end{cases}$$

Các ánh xạ f_1, f_2, f_3 đều thuộc lớp C^1 trên U và :

$$\forall\,(x,y,z) \in U,\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{x^2-y^2+z^2}{x\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x}{\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = -\dfrac{y^2-z^2+x^2}{x\sqrt{\Delta}}, \end{cases}$$

trong đó $\Delta = (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y+z)$. Ta suy ra: $\forall\,(x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0$ và do hoán vị vòng tròn $\forall\,(x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$.

Theo Hệ quả 3 ta kết luận f là hằng số trên U (U liên thông, độc giả có thể thấy qua hình vẽ).

Hơn nữa, vì f liên tục trên V và vì $U \subset V \subset \overline{U}$ nên f cũng không đổi trên V.

Và $f(1,1,1) = 3\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \pi$. Cuối cùng $f = \pi$.

Phương pháp 2

Ta biết rằng, trong mọi tam giác ABC, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Vậy biểu thức trên có giá trị là $C + A + B$, nghĩa là π.

◊ **Trả lời:** π.

8.1.14 Ký hiệu f_1, f_2 là các ánh xạ thành phần của f: $\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right) \text{ và } A = \frac{\partial f_1}{\partial x},\ B = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Theo giả thiết: $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ J_f(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) & -B(x,y) \\ B(x,y) & A(x,y) \end{pmatrix}$ và $A^2+B^2 = 1$. Bằng cách lấy đạo hàm theo x và y, ta được: $\quad (A,B)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial x} & \dfrac{\partial A}{\partial y} \\ \dfrac{\partial B}{\partial x} & \dfrac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$

Vì: $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (A(x,y), B(x,y)) \neq (0,0)$

ta suy ra: $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = 0.$

Nhưng, sử dụng định lý Schwarz : $\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial B}{\partial x} \\ \dfrac{\partial B}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial A}{\partial x}. \end{cases}$

Vậy $\left(\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)^2 = 0$, sau đó $\dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial y} = 0$.

Vì $\mathbb{R}^2$ lồi nên Hệ quả 2 8.1.5) chỉ ra là A không đổi. Cũng như vậy, B không đổi.

Ta ký hiệu g là phép quay có tâm O(0,0), góc θ sao cho $\cos\theta = A$, $\sin\ \theta = B$. Vậy, $f-g$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ và với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$J_{f-g}(x,y) = J_f(x,y) - J_g(x,y) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = 0.$$

Theo Hệ quả 2 8.1.5 thì $f-g$ không đổi. Vậy $f = g + f(0,0)$ là hợp của một phép tịnh tiến và một phép quay, vậy là một phép quay của mặt phẳng.

8.1.15 • ϕ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^3$ theo các định lý cơ bản.

• $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ J_\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, vậy $\det(J_\phi(1,1,1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Theo định lý đảo địa phương, tồn tại $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(1,1,1)$ và $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(2,2,2)$ sao cho $\phi(U) = V$ và sao cho $\quad \phi_1 : U \xrightarrow[(x,y,z)\mapsto\phi(x,y,z)]{} V$ là một C^1–vi phôi từ U lên V.

Hơn nữa : $(J_{\phi_1^{-1}}(2,2,2)) = (J_\phi(1,1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$

◊ **Trả lời:** $\quad (J_{\phi_1^{-1}}(2,2,2)) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

8.1.16 *1)* ϕ **là song ánh.**

Với mọi x, y, X, Y của $\mathbb{R}$, ta có

$$\phi(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y = X \\ x + y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + Y \\ e^x - e^{-x+Y} - X = 0. \end{cases}$$

Ánh xạ $\varphi: \underset{x \mapsto e^x - e^{-x+Y} - X}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x + e^{-x+Y} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$\lim\limits_{-\infty} \varphi = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$. Từ đó ta suy ra φ là song ánh.

Vậy tồn tại duy nhất $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\varphi(x) = 0$, rồi $y \in \mathbb{R}$ duy nhất sao cho $y = -x + Y$

2) • ϕ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ theo các định lý cơ bản.

• $\quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\det\left(J_\phi(x,y)\right) = \begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^x + e^y \neq 0$.

Theo 8.1.6 Hệ quả) ϕ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$.

8.1.17 Cùng phương pháp như đối với bài tập 8.1.6, bằng cách sử dụng $\varphi: \underset{x \mapsto x^3 + 3xe^{x^2+Y} - X}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

8.1.18 *1)* •ϕ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ theo các định lý cơ bản.

$$\bullet \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \det\left(J_\phi(x,y)\right) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x \neq 0 .$$

Theo định lý đảo địa phương, ϕ là đơn ánh địa phương.

2) ϕ không phải là đơn ánh vì $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y + 2\pi) = \phi(x,y)$.

8.1.19 *a)* • f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ theo các định lý cơ bản.

• Bằng cách ký hiệu $u = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $v = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$, ta chú ý rằng

$f(x,y) = (\text{sh}(u+v),\ e^{u+v})$. Điều này chỉ ra $f = g \circ \phi$, trong đó:

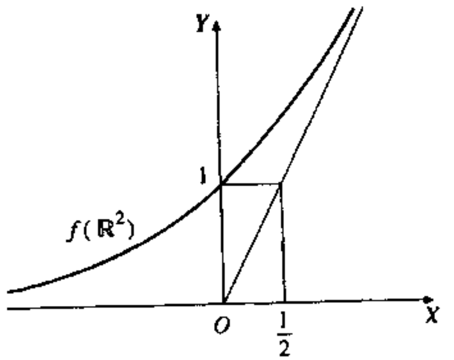
$\phi: \underset{(x,y) \mapsto \left(\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \ln(y+\sqrt{1+y^2})\right)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$, $g: \underset{(u,v) \mapsto \left(\text{sh}(u+v), e^{u+v}\right)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$.

Ta suy ra (xem 8.1.3.2) Định lý) với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2$: $\quad J_f(x,y) = J_g(\phi(x,y)) J_\phi(x,y)$.

Cuối cùng, chú ý rằng $\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\det(J_g(u,v)) = \begin{vmatrix} \text{ch}(u+v) & \text{ch}(u+v) \\ e^{u+v} & e^{u+v} \end{vmatrix} = 0$. Ta cũng có thể chú ý rằng $g(u,v)$ chỉ phụ thuộc $u + v$.

◊ **Trả lời:** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(J_f(x,y)) = 0$.

b) α) ◊ **Trả lời:**



$$f(\mathbf{R}^2)=\left\{(\operatorname{sh}t, e^t); t\in\mathbf{R}\right\}=\left\{\left(\frac{Y^2-1}{2Y}, Y\right); Y\in\mathbf{R}_+^*\right\}$$

$\beta)$ f không phải là một C^1-vi phôi từ $\mathbf{R}^2$ lên $f(\mathbf{R}^2)$ bởi ít nhất một trong hai lý do sau đây:

- f không phải là một đơn ánh, vì, chẳng hạn, $f(0,1)=f(1,0)$.
- $f(\mathbf{R}^2)$ không phải là một bộ phận mở của $\mathbf{R}^2$.

◊ **Trả lời:** Không.

8.1.20 *a)* Giả sử $(X,Y)\in\mathbf{R}^2$. Với mọi (x,y) thuộc $\mathbf{R}^2$, ta có:

$$f(x,y)=(X,Y)\Leftrightarrow\begin{cases}x+a\sin y=X\\ y+b\sin x=Y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=Y-b\sin x\\ x+a\sin(Y-b\sin x)-X=0.\end{cases}$$

Ánh xạ $\varphi:\begin{array}{l}\mathbf{R}\to\mathbf{R}\\ x\mapsto x+a\sin(Y-b\sin x)-X\end{array}$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và $\lim\limits_{-\infty}\varphi=-\infty$, $\lim\limits_{+\infty}\varphi=+\infty$.

Từ đó suy ra (định lý về giá trị trung gian) tồn tại $x\in\mathbf{R}$ sao cho $\varphi(x)=0$; tiếp đó $y=Y-b\sin x$.

b) Ánh xạ φ xác định tại *a)* thuộc lớp C^1 và : $\forall\, x\in\mathbf{R}$,

$$\varphi'(x)=1-ab.\cos x.\cos(Y-b\sin x).$$

- Trường hợp $|ab|\le 1$.

Khi đó $\varphi'\ge 0$ và $\varphi'^{-1}(\{0\})\subset\pi\mathbb{Z}$, vậy φ là song ánh, x duy nhất, và y cũng vậy bởi

$y=-b\sin x+Y$. Vậy $f_{a,b}$ là đơn ánh.

- Trường hợp $|ab|>1$.

Lấy $y=0$ và $x_1=n\pi$ (trong đó $n\in\mathbb{Z}$ và sao cho $\cos x=\operatorname{sgn}(ab)$). Ta có $\varphi'(x_1)<0$. Vậy φ nhận cùng một giá trị ít nhất 3 lần và $f_{a,b}$ không phải là đơn ánh.

◊ **Trả lời:** $f_{a,b}$ là đơn ánh khi và chỉ khi $|ab|\le 1$.

c) 1) Giả sử $f_{a,b}$ là một C^1- vi phôi từ $\mathbf{R}^2$ lên $\mathbf{R}^2$. Khi đó $f_{a,b}$ là song ánh và $|ab|\le 1$ (xem *b*).

Hơn nữa: $\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $J_{f_{a,b}}(x,y)\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, từ đó $\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $1-ab\cos x.\cos y\ne 0$, vậy $|ab|\ne 1$.

2) Đảo lại, giả sử $|ab|<1$.

- Theo *a)* và *b)* $f_{a,b}$ là song ánh.
- $\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\det\left(J_{f_{a,b}}(x,y)\right)=\begin{vmatrix}1 & a\cos y\\ b\cos x & 1\end{vmatrix}=1-ab\cos x.\cos y\ne 0$. Theo (8.1.6 Hệ quả)

$f_{a,b}$ là một C^1-vi phôi từ $\mathbf{R}^2$ lên $\mathbf{R}^2$.

◊ **Trả lời:** $f_{a,b}$ là một C^1–vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi $|ab| < 1$.

8.1.21 Các giả thiết chỉ ra rằng $f(\mathbb{R})$ là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ và $\begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}$ là một C^1–vi phôi.

• Rõ ràng là $\phi(\mathbb{R}^2) \subset f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$

Cho $\phi_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto (f_1(x), y - xf_1(x)) \end{array}$, $\Psi_1 : \begin{array}{c} f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) \mapsto (f^{-1}(X), Y + Xf^{-1}(X)) \end{array}$.

Chứng minh rằng ϕ_1 và Ψ_1 đều thuộc lớp C^1 và là các song ánh ngược nhau.

8.1.22 *a)* ◊ **Trả lời:** $f(x,y) = A\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

b) ◊ **Trả lời:** $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^4 + y^4} + A\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

c) Kiểm tra rằng $(x,y) \mapsto (x^2 - 2xy - y^2, y)$ là một C^1-vi phôi từ U lên $V = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ \ u + 2v^2 > 0\right\}$.

◊ **Trả lời:** $f(x,y) = A(x^2 - 2xy - y^2)$, $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

d) ◊ **Trả lời:** $f(x,y) = -xy^2 + A(xy)$, $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

e) $\phi : (\theta,\rho) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ là một C^1–vi phôi từ $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\times \left]0;+\infty\right[$ lên U. Với các ký hiệu cổ điển:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\rho\sin\theta d\theta + \cos\theta d\rho \\ dy = \rho\cos\theta d\theta + \sin\theta d\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}dx + \dfrac{\cos\theta}{\rho}dy \\ d\rho = \cos\theta dx + \sin\theta dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta, & \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta. \end{cases}$$

Ta cũng có thể thu được các công thức trên bằng cách nghịch đảo ma trận Jacobi của $(\theta,\rho) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Từ đó, bằng cách ký hiệu $F(\theta, \rho) = f(x,y)$ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta}.\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\rho}.\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} + \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} + \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho}. \end{cases}$$

PTĐHR1 đã cho được đưa về $\dfrac{\partial F}{\partial x} = aF$.

◊ **Trả lời:** $f(x,y) = \lambda\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)e^{a\text{Arctan}\frac{y}{x}}$, λ: $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

f) Trong ví dụ này, ánh xạ $(x,y) \mapsto (u,v)$ không tường minh, nó có thể biểu diễn ở dạng tường bằng các căn thức. Ở đây, ta sẽ thực hiện các phép tính bằng cách tránh việc lấy đạo hàm các căn thức đó.

Bằng cách ký hiệu $F(u,v) = f(x,y)$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} = u\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = v\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{u}{v^2}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}, \text{ từ đó } \begin{cases} 2x\dfrac{\partial f}{\partial x} = u\dfrac{\partial F}{\partial u} + v\dfrac{\partial F}{\partial v} \\ (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = v\dfrac{\partial F}{\partial u} - u\dfrac{\partial F}{\partial v} \end{cases}.$$

PTĐHR1 đã cho được đưa về $\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0$.

◊ **Trả lời:** $f(x,y) = A\left(y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\right)$ $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

8.1.23 Với mọi k thuộc $\{1, ..., n\}$, ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} m_{ik} \frac{\partial F}{\partial X_i}.$$

Vậy f là nghiệm của (E) trên $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ik} \frac{\partial F}{\partial X_i} \right) = 0$, nghĩa là :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k m_{ik} \right) \frac{\partial F}{\partial X_i} = 0.$$

Chỉ cần chứng minh rằng có thể chọn M sao cho : $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k m_{ik} \neq 0 \\ \forall i \in \{2,..,n\}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k m_{ik} = 0. \end{cases}$

Thử lại rằng $M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\dfrac{A_2}{A_1} & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ -\dfrac{A_n}{A_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thoả mãn.

Cuối cùng, nghiệm tổng quát của $\dfrac{\partial F}{\partial X_i} = 0$ trên $\mathbb{R}^n$ là $F : (X_1, ..., X_n) \mapsto \varphi(X_2, ..., X_n)$ trong đó $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

◊ **Trả lời:** Nghiệm tổng quát của (E) trên $\mathbb{R}^n$ được cho bởi:

$f(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_2 - \dfrac{A_2}{A_1}x_1, ..., x_n - \dfrac{A_n}{A_1}x_1)$, trong đó $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

Trong ví dụ : $f(x,y,z) = \varphi(y-2x,\ z-3x)$, trong đó $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1.

8.2.1 Theo các định lý cơ bản, f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^3$. Bằng cách ký hiệu:

$\rho : (x,y,z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ với các ký hiệu lạm dụng cổ điển ta thu được:

$$f'_x = \frac{1}{1+\rho^2}.\frac{x}{\rho}\text{, rồi } f"_{x^2} = \frac{1}{\rho(1+\rho^2)} - \frac{1+3\rho^2}{\rho^3(1+\rho^2)^2}x^2\text{ , } f''_{xy} = -\frac{1+3\rho^3}{\rho^3(1+\rho^2)^2}xy \ldots$$

Từ đấy, ta suy ra định thức cần tìm bằng $\frac{1}{\left(\rho(1+\rho^2)\right)^3}\det(I_3 + \gamma V'V)$, trong đó

$$\gamma = -\frac{1+3\rho^3}{\rho^2(1+\rho^2)} \text{ và } V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bằng cách ký hiệu (e_1, e_2, e_3) là cơ sở chính tắc của $M_{3,1}(\mathbb{R})$ và khai triển ra các định thức đa tuyến tính và luân phiên:

$$\det(I_3 + \gamma V'V) = \det_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1 + \gamma xV,\ e_2 + \gamma yV,\ e_3 + \gamma zV)$$

$$= 1 + \gamma x \det_{(e_1, e_2, e_3)}(V,\ e_2,\ e_3) + \gamma y \det_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1, V,\ e_3) + \gamma z \det_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1,\ e_2,\ V)$$

$$= 1 + \gamma(x^2 + y^2 + z^2).$$

◊ **Trả lời:** $-\frac{1}{\rho(1+\rho^2)^4}$, trong đó $\rho = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$.

8.2.2 F thuộc lớp C^2 trên U và, bằng cách sử dụng nhiều lần định lý Schwarz

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}x_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i},$$

sau đó: $\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i} + \sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}x_j\frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2\partial x_i}$,

từ đó: $\Delta F = 2\sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}x_j\frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_i}$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\sum_{1\le i, k\le n}(a_{ik}+a_{ki})\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i} + \sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x}(\Delta f).$$

Theo các giả thiết đối với A: $\Delta F = 2a_{11}\Delta f + \sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f) = 0$. Các ví dụ đưa ra nâng cao thêm một cách rõ ràng việc nghiên cứu tổng quát ở trên.

8.2.3 *a)* Bằng cách ký hiệu $F = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ta thu được :

$$\Delta F = 2\Delta f + \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f) = 0.$$

b) Ta có : $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ \frac{\partial}{\partial x_i}(Rf) = 2x_i f + R\frac{\partial f}{\partial x_i}$,

rồi: $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(Rf) = 2f + 4x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, từ đó : $\Delta(Rf) = 2nf + 4\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, vì $\Delta f = 0$.

Sử dụng *a)* ta kết luận: $\Delta(\Delta(Rf)) = 0$.

8.2.4 Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{z^2}\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{z^2}\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{2(x^2+y^2)}{z^3}\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$.

Từ đó:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{4x^2}{z^4}\varphi''\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \dfrac{2}{z^2}\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{4y^2}{z^4}\varphi''\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \dfrac{2}{z^2}\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{4(x^2+x^2)^2}{z^6}\varphi''\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \dfrac{6(x^2+y^2)}{z^4}\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right), \end{cases}$$

và vì vậy: $\Delta f = \dfrac{4}{z^6}(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\varphi''\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \left(\dfrac{4}{z^2} + \dfrac{6(x^2+y^2)}{z^4}\right)\varphi'\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$.

Bằng cách đặt: $t = \dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ ta có:

$$\Delta f = 0 \Leftrightarrow (\forall\, t \in]0;+\infty[,\ 2t(t+1)\varphi''(t) + (2+3t)\varphi'(t) = 0).$$

Giải PTVP tuyến tính cấp 1 theo φ' có được ở trên.

◊ **Trả lời:** $\left\{\begin{matrix}]0;+\infty[\to \mathbf{R} \\ t \mapsto \lambda \ln\left(\dfrac{\sqrt{t+1}+1}{\sqrt{t+1}-1}\right) + \mu \end{matrix} ;\quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

8.2.5 *a)* • f thuộc lớp C^∞ trên miền mở $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản.

• $f(\cdot,0): \mathbf{R} \underset{x \mapsto 0}{\to} \mathbf{R}$, vậy $f'_x(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

$f(0,\cdot): \mathbf{R} \underset{y \mapsto y^2}{\to} \mathbf{R}$, vậy $f'_y(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

• Ký hiệu $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ta có:

$$|f'_x(x,y)| = \left|-\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 2\rho \text{ và } |f'_y(x,y)| = \left|\frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 4\rho.$$

vậy $f'_x(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ và $f'_y(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

Cuối cùng f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$.

b) $f'_x(0,\cdot): \mathbf{R} \underset{y \mapsto 0}{\to} \mathbf{R}$, vậy $f''_{xy}(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

$f'_x(\cdot,0): \mathbf{R} \underset{x \mapsto 0}{\to} \mathbf{R}$, vậy $f''_{yx}(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

c) Sau khi tính toán ta có : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\begin{cases} f''_{xy}(x,y) = -\dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ f''_{yx}(x,y) = \dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$

Đặc biệt là: $\begin{cases} f''_{xy}(x,y) = -1 \underset{x\to 0}{\to} -1 \neq 0 \\ f''_{yx}(x,y) = 1 \underset{x\to 0}{\to} 1 \neq 0 \end{cases}$, và vì vậy f''_{xy} và f''_{yx} không liên tục tại (0,0).

8.2.6 *a) 1)* • f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản và với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ta có:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(x^2-y^2)(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ f'_y(x,y) = \frac{-2y(x^2-y^2)(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• $f'_x(\cdot,0): \mathbb{R} \xrightarrow[x\mapsto x^2]{} \mathbb{R}$, vậy $f'_x(0,0)$ tồn tại và bằng 0. Tương tự $f'_y(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

• Chuyển sang toạ độ độc cực ($\rho = \sqrt{x^2+y^2}$), với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ta có:

$|f'_x(x,y)| \le 6\rho$,

vậy $f'_x(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f'_x(0,0)$.

Cũng như vậy đối với f'_y.

Như vậy f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$

2) Sau khi tính toán ta có: $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$,

$$f''_x(x,y) = -8xy(x^4+4x^2y^2-2y^4)(x^2+y^2)^{-3}.$$

Đặc biệt : $f''_{xy}(x,x) = -3 \underset{x\to 0}{\not\to} 0$, vậy f''_{xy} không liên tục tại (0,0).

◊ **Trả lời:** f thuộc lớp C^1 chính xác (nghĩa là thuộc lớp C^1 nhưng không thuộc lớp C^2) trên $\mathbb{R}^2$.

b) 1)• f liên tục trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản.

• Để chứng minh tính liên tục tại (0,0) ta sử dụng phép đổi biến $X = x$, $Y = y - x^2$, rồi chuyển sang toạ độ độc cực $X = \rho\cos\theta$, $Y = \rho\sin\theta$.

Ta thu được:

$$|f(x,y)| = (\sin\theta + \rho\cos^2\theta)^2\rho|\cos\theta| \le (1+\rho)^2\rho \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

2) • $f(\cdot,0): \mathbb{R} \underset{x\mapsto 0}{\to} \mathbb{R}$, vậy $f'_x(0,0)$ tồn tại và bằng 0.

• f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản và: $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$,

$$f'_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+(y-x^2)^2 - x(2x-4x(y-x^2)))}{(x^2+(y-x^2)^2)^2}.$$

Đặc biệt : $f'_x(x,2x) = \frac{12}{25} \underset{x\to 0}{\not\to} 0$.

◊ **Trả lời:** f thuộc lớp C^0 chính xác trên $\mathbb{R}^2$.

c) 1) Xét $\varphi: t \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{t^2}-1}{t^2} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } t = 0. \end{cases}$

Rõ ràng là φ có thể KTTCN(0) có bán kính ∞, vậy φ thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa, φ không triệt tiêu tại bất kỳ điểm nào, vậy $\dfrac{1}{\varphi}$ cũng thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = g(x,y)\dfrac{1}{\varphi(x)}.\dfrac{1}{\varphi(y)}$, trong đó $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ được xác định bởi :

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{nếu}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vì φ và $\dfrac{1}{\varphi}$ đều thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$, nên f và g cùng thuộc đúng một lớp .

2) Chứng minh rằng g thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ và không thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ (cùng cách làm như đối với *a)*).

◊ **Trả lời:** f thuộc lớp C^1 chính xác trên $\mathbb{R}^2$.

d) 1) **Khảo sát** φ

• φ liên tục trên $\mathbb{R}$, khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và:

$$\forall\, t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi'(t)=4t^3\sin\frac{1}{t}-t^2\cos\frac{1}{t}.$$

Vì $\varphi'(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$, định lý "giới hạn của đạo hàm" (Tập 1.5.22, Hệ quả), nên φ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và $\varphi'(0)=0$.

• φ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^*$ và :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}^*,\ \varphi''(t)=12t^2\sin\frac{1}{t}-6t\cos\frac{1}{t}-\sin\frac{1}{t}.$$

Vì φ'' không có giới hạn tại 0, nên φ không thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$.

2) • Do cấu tạo, f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$.

• Nếu f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$, thì do $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=f(x,1)-x\varphi(1)$, nên φ sẽ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$, mâu thuẫn.

3) Ta có thể chú ý thêm rằng, trong ví dụ này, f''_{xy} và f''_{yx} đều liên tục trên $\mathbb{R}^2$ vì:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=\varphi'(x)+\varphi'(y).$$

◊ **Trả lời:** f thuộc lớp C^1 chính xác trên $\mathbb{R}^2$.

8.2.7 Chú ý rằng: $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=\varphi(x-y)e^y$, trong đó $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, xác định bởi:

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & \text{nếu}\quad t\neq 0\\ 1 & \text{nếu}\quad t=0.\end{cases}$$

Vì φ có thể KTTCN(0), có bán kính vô hạn nên φ thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$ và do hợp hàm và tích, f thuộc lớp C^{∞} trên $\mathbb{R}$.

8.2.8 Chứng minh: $\forall\ (x,y) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2$, $f(x,y)=\dfrac{\cos\frac{x+y}{2}\cos x\cos y}{\cos\frac{x-y}{2}}$.

◊ **Trả lời:** f thuộc lớp C^∞ trên $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2$.

8.2.9 *a)* • f thuộc lớp C^∞ trên $(\mathbb{R}^*)^2$ theo các định lý cơ bản .

• Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $k+l$ rằng, với mọi $(k,l)\in\mathbb{N}^2$, $\dfrac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}$ tồn tại trên $\mathbb{R}^2$, và tồn tại $\alpha_{k,l}\in\mathbb{N}$, $\beta_{k,l}\in\mathbb{N}$ và một đa thức $P_{k,l}$ có bốn biến với các hệ số thực sao cho:

$$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{P_{k,l}\left(x,y,e^{-\frac{1}{x^4}},e^{-\frac{1}{y^4}}\right)e^{-\frac{1}{x^2y^2}}}{x^{\alpha_{k,l}}y^{\beta_{k,l}}\left(e^{-\frac{1}{x^4}}+e^{-\frac{1}{y^4}}\right)^{k+l+1}} & \text{nếu}\quad xy\neq 0\\ 0 & \text{nếu}\quad xy=0.\end{cases}$$

1) Tính chất này đúng với $k+l=0$ (nghĩa là $k=l=0$).

2) Giả sử tính chất đúng với một (k,l) cố định thuộc $\mathbb{N}^2$.

α) Theo các định lý cơ bản, $\dfrac{\partial^{k+l+1}f}{\partial x^{k+1}\partial y^l}$ được xác định trên $(\mathbb{R}^*)^2$ và có dạng cần thiết.

β) $\dfrac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(\cdot,0):\mathbb{R}\underset{x\mapsto 0}{\to}\mathbb{R}$, vậy với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^{k+l+1}f}{\partial x^{k+1}\partial y^l}(x,0)$ tồn tại và bằng 0.

Cũng như vậy, với mọi y thuộc $\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial^{k+l+1}f}{\partial x^{k+1}\partial y^l}(0,y)$ tồn tại và bằng 0

Lập luận như trên vẫn đúng đối với $\dfrac{\partial^{k+l+1}f}{\partial x^k\partial y^{l+1}}$. Điều này chứng tỏ tính chất này đúng đối với $(k+1,l)$ và $(k,l+1)$.

Cuối cùng, f có các đạo hàm riêng liên tiếp đến mọi cấp và đối với mọi vị trí tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y)=\frac{1}{2}\underset{x\to 0}{\not\to} 0=f(0,0)$.

8.2.10 *a) 1)* **Sự hội tụ**

• $\sum_{n\geq 1}f_n$ hội tụ trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ và phân kỳ tại (0,0).

• Với mọi $\delta>0$, $\sum_{n\geq 1}f_n$ hội tụ chính quy, vậy hội tụ đều trên $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\geq\delta\right\}$.

• $\sum_{n\geq 1}f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ vì :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}} \left|f_n(x,y)\right| = 1.$$

2) **Nghiên cứu về tổng**

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{-n(x^2+y^2)}\end{array}$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^2$, và nhờ phép quy nạp theo $k+l$, với mọi (k,l) thuộc $\mathbb{N}^2$ tồn tại $P_{n,k,l} \in \mathbb{R}[X,Y]$ sao cho:

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x,y) = P_{n,k,l}(x,y)e^{-n(x^2+y^2)}.$$

Với mọi $\delta > 0$ ta có thể sử dụng định lý về đạo hàm của tổng của một chuỗi các ánh xạ (4.3.Định lý) trên mọi miền mở U_δ của $\mathbb{R}^2$ có dạng $U_\delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > \delta\right\}$, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Từ đó suy ra rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ thuộc lớp C^∞ trên U_δ với mọi $\delta > 0$, sau đó $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

◊ **Trả lời:** *1)* • Tập hợp các điểm hội tụ đơn giản của $\sum_{n\geq 1} f_n$ là $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

• $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ chính quy (vậy hội tụ đều) trên mọi $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq \delta\right\}$, $\quad \delta > 0$.

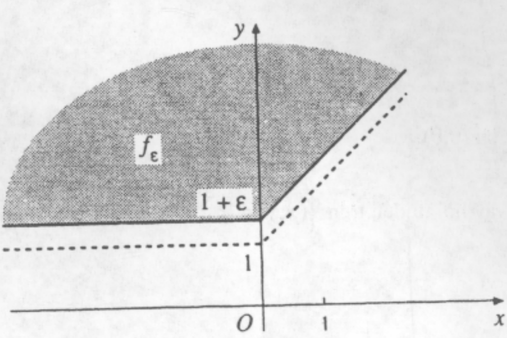
• $\sum_{n\geq 1} f_n$ không hội tụ đều trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

2) $\sum_{n\geq 1} f_n$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

b) 1) **Sự hội tụ**

• Bằng cách phân ra các trường hợp tuỳ theo dấu của x và y, chứng minh rằng $\sum_{n\geq 1} f_n(x,y)$ hội tụ khi và chỉ khi: $(x,y) \in U$, trong đó $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \left|\begin{array}{l}(x \leq 0 \quad \text{và} \quad y > 1) \\ \text{hoặc} \\ (x > 0 \quad \text{và} \quad y > x+1)\end{array}\right.\right\}$.

• Ta xét, với mọi $\varepsilon > 0$: $F_\varepsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \left|\begin{array}{l}(x \leq 0 \quad \text{và} \quad y \geq 1+\varepsilon) \\ \text{hoặc} \\ (x > 0 \quad \text{và} \quad y > x+1+\varepsilon)\end{array}\right.\right\}$.



Cho $(x,y) \in F_\varepsilon$. Nếu ($x \leq 0$ và $y \geq 1 + \varepsilon$) thì $\left|f_n(x,y)\right| \leq \dfrac{2}{1+n^{1+\varepsilon}}$.

Nếu ($x > 0$ và $y \geq x + 1 + \varepsilon$) thì $\left|f_n(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{1+n^{1+\varepsilon}} + \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

Vậy : $\forall\, (x,y) \in F_\varepsilon$, $\left|f_n(x,y)\right| \leq \dfrac{2}{n^{1+\varepsilon}}$ và vì thế $\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ chính quy trên F_ε

• Giả sử $N \in \mathbf{N}^*$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $x > 0$ và $y > x+1$.

Ta có: $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x,y) \geq \sum_{n=N+1}^{2N} f_n(x,y) \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{1+n^y} \geq \frac{N}{1+(2N)^y}$.

Vì $\displaystyle\frac{N}{1+(2N)^y} \xrightarrow[y \to 1^+]{} \frac{1}{2}$ nên ta suy ra: $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in U}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x,y)\right| \geq \frac{1}{2}$, vậy $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ không hội tụ đều trên U.

2) Nghiên cứu về tổng

Với mọi n thuộc $\mathbf{N}^*$, f_n thuộc lớp C^∞ trên U và với mọi l thuộc $\mathbf{N}$, tồn tại một đa thức P_l với các hệ số thực có bậc $\leq l$ sao cho:

$$\forall\,(x,y) \in U,\quad \frac{\partial^l f_n}{\partial y^l}(x,y) = (1+n^x)\frac{(\ln n)^l P_l(n^y)}{(1+n^y)^{l+1}},$$

sau đó, với mọi k thuộc $\mathbf{N}^*$: $\forall\,(x,y) \in U,\quad \dfrac{\partial^{k+l} f_n}{\partial x^k \partial y^l}(x,y) = n^x(\ln\quad x)^{k+l}\dfrac{P_l(n^y)}{(1+n^y)^{l+1}}$.

Như ở 1) ta đã chứng minh rằng, với mọi (k,l) thuộc $\mathbf{N}^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^{k+l} f_n}{\partial x^k \partial y^l}$ hội tụ chính quy

trên $\mathring{F}_\varepsilon$

Định lý về đạo hàm đối với chuỗi các ánh xạ (4.3.5 Định lý) cho phép suy ra rằng $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

thuộc lớp C^∞ trên $\mathring{F}_\varepsilon$ với mọi $\varepsilon>0$, và thuộc lớp C^∞ trên U.

◊ **Trả lời:** *1)* • Tập hợp các điểm hội tụ đơn giản của $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ là

$$U = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad \left|\begin{array}{l}(x\leq 0 \quad \text{và} \quad y>1)\\ \text{hoặc}\\ (x>0 \quad \text{và} \quad y>x+1)\end{array}\right.\right\}.$$

• $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ hội tụ chính quy trên toàn bộ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad \left|\begin{array}{l}(x\leq 0 \text{ và } y\geq 1+\varepsilon)\\ \text{hoặc}\\ (x>0 \text{ và } y>x+1+\varepsilon)\end{array}\right.\right\}$, $\varepsilon>0$.

• $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ không hội tụ đều trên U.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ thuộc lớp C^∞ trên U.

8.2.11 *a)* Với X, Y, Z, cố định, giải $\begin{cases} x+y=X\\ \dfrac{y}{x}=Y\\ \dfrac{z}{x}=Z\end{cases}$ ẩn là (x, y, z) rồi biểu thị $x>0$ và $x+y>0$

nhờ X và Y.

Bằng cách tương tự, ta có thể tường minh hoá f^{-1}.

◊ **Trả lời:** $f(U) = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3;\ X > 0$ và $1+Y > 0\}$.

b) • f thuộc lớp C^∞ trên miền mở U theo các định lý cơ bản .

• f là song ánh từ U vào $f(U)$ và $f^{-1} : f(U) \xrightarrow[(X,Y,Z)\mapsto\left(\frac{X}{1+Y},\frac{XY}{1+Y},\frac{XZ}{1+Y}\right)]{} U$ thuộc lớp C^∞ trên miền mở $f(U)$ theo các định lý cơ bản.

8.2.12 *a)* Cho $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Với mọi (x,y) thuộc U ta có:

$$(X,Y) = f(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ \dfrac{y^3}{3} - Xy + Y = 0. \end{cases}$$

Vậy $(X,Y) \in f(U)$ khi và chỉ khi $X > 0$ và ánh xạ $P : t \mapsto \dfrac{t^3}{3} - Xt + Y$ có ít nhất một không điểm trong $\left]-\sqrt{X};\sqrt{X}\right[$.

Vì P giảm ngặt và liên tục trên $\left]-\sqrt{X};\sqrt{X}\right[$ và vì $P(-\sqrt{X}) = \dfrac{2}{3}X\sqrt{X} + Y$,

$P(\sqrt{X}) = -\dfrac{2}{3}X\sqrt{X} + Y$, nên ta được: $(X,Y) \in f(U) \Leftrightarrow \begin{cases} X > 0 \\ |Y| < \dfrac{2}{3}X\sqrt{X} \end{cases}$

Hơn nữa, nếu $\begin{cases} X > 0 \\ |Y| < \dfrac{2}{3}X\sqrt{X} \end{cases}$ thì P có một không điểm duy nhất trong $\left]-\sqrt{X};\sqrt{X}\right[$, từ đó y là duy nhất; sự duy nhất của x là hiển nhiên.

◊ **Trả lời:** $f(U) = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2;\ X > 0 \quad \text{và} \quad 9Y^2 < 4X^3\right\}$.

Hơn nữa, f thực hiện một song ánh từ U lên $f(U)$.

b) Ký hiệu $f_1 : U \xrightarrow[(x,y)\mapsto f(x,y)]{} f(U)$.

• f_1 thuộc lớp C^∞ trên miền mở U theo các định lý cơ bản

• f_1 là song ánh (xem *a)*.

• $\forall\ (x,y) \in U,\ \det\left(J_{f_1}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x - y^2 \end{vmatrix} = x - y^2 \neq 0$

Ta kết luận f_1 là một C^∞–vi phôi từ U lên $f(U)$.

8.2.13 *a)* • $\phi : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \xrightarrow[(x,y)\mapsto(\ln x,\ln y)]{} \mathbb{R}^2$ là một C^2- vi phôi.

• Ký hiệu $F(u,v) = f(x,y)$, ta có liên tiếp:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Từ đó ta suy ra f là nghiệm của PTĐHR 2 cần xét khi và chỉ khi F là nghiệm trên $\mathbb{R}^2$ của:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0.$$

Theo (8.2.5.2 Ví dụ 1) nghiệm tổng quát trên $\mathbb{R}^2$ của $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$ là F: $(u,v)\mapsto \alpha(u+v)+\beta(u-v)$, trong đó α,β: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

◊ **Trả lời**: $f(x,y)=A(xy)+B\left(\frac{y}{x}\right)$, $A,B:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

b)• $\phi(x,y)\mapsto(x^2-y,x^2+y)$ là một C^2 – vi phôi từ U lên $\phi(U)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ u+v>0\}$

• Ký hiệu $F(u,v)=f(x,y)$, ta có liên tiếp.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)+2x\left(2x\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+4x\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+2x\frac{\partial F}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

Từ đó, ta suy ra f là nghiệm trên U của PTĐHR2 đã cho khi và chỉ khi F là nghiệm trên $\phi(U)$ của $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0$. Cũng như ở (8.2.5.2 Ví dụ 1) nghiệm tổng quát của $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0$ trên $\phi(U)$ là : F: $(u,v)\mapsto A(u)+B(v)$, A,B: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

◊ **Trả lời:** $f(x,y)=A(x^2-y)+B(x^2+y)$, A,B: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$.

8.2.14 • Chứng minh $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{x}{\rho}$.

Ta thu được liên tiếp: $p=\frac{x}{\rho}\phi'(\rho)$, $q=\frac{y}{\rho}\phi'(\rho)$, $r=\frac{x^2}{\rho^2}\varphi''(\rho)+\frac{y^2}{\rho^3}\varphi'(\rho)$,

$s=\frac{xy}{\rho^2}\varphi''(\rho)-\frac{xy}{\rho^3}\varphi'(\rho)$, $t=\frac{y^2}{\rho^2}\varphi''(\rho)+\frac{x^2}{\rho^3}\varphi'(\rho)$.

Sau khi tính toán ta thấy f là nghiệm của (E) trên U_α khi và chỉ khi ϕ là nghiệm trên $]\alpha;+\infty[$ của phương trình vi phân:

$$y'(\rho)+\frac{1}{\rho}y(\rho)+\frac{1}{\rho}y^3(\rho)=0.$$

• Đây là PTVP Bernoulli (xem Tập 2, 11.3.4). Ánh xạ bằng 0 là một nghiệm hiển nhiên. Giả sử y là một nghiệm của PTVP vectơ sao cho $y\neq 0$. Khi đó, ta sẽ chứng minh: $\forall\,\rho\in\,]\alpha;+\infty[$, $y(\rho)\neq 0$.

Giả sử tồn tại $\rho_1\in\,]\alpha;+\infty[$ sao cho $y(\rho_1)=0$.

Định lý Cauchy-Lipschitz (7.2.1.4) Định lý) cho thấy bài toán Cauchy $\begin{cases} y(\rho_1)=0 \\ y'+\dfrac{1}{\rho}y+\dfrac{1}{\rho}y^3=0 \end{cases}$ có một và chỉ một nghiệm cực đại được ký hiệu là y_1 và mọi nghiệm của bài toán Cauchy đều là thu hẹp của y_1.

Rõ ràng là $y_1=0$, vậy $y=0$, mâu thuẫn.

Bây giờ ta có thể xét $z:]\alpha;+\infty[\xrightarrow[\rho\mapsto \frac{1}{(y(\rho))^2}]{} \mathbb{R}$.

Ánh xạ y là nghiệm của (E) trên $]\alpha;+\infty[$ khi và chỉ khi z là nghiệm trên $]\alpha;+\infty[$ của PTVP tuyến tính cấp 1: $z'-\dfrac{2}{\rho}z-\dfrac{2}{\rho}=0$. Nghiệm tổng quát theo z là z: $\rho\mapsto\lambda\rho^2-1$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Vì $z>0$, ta có : $\lambda>\dfrac{1}{\alpha^2}$ (vậy $\lambda>0$). Sau đó theo định lý về giá trị trung gian, vì φ' liên tục trên $]\alpha;+\infty[$ và không triệt tiêu, nên tồn tại $\varepsilon\in\{-1;1\}$ sao cho $\forall\ \rho\in]\alpha;+\infty[$, $\varphi'(\rho)=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\rho^2-1}}$. Từ đó suy ra φ.

◊ **Trả lời:** $\varphi(\rho)=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\ln(\rho\sqrt{\lambda}+\sqrt{1+\rho^2\lambda})+\mu$.

$$f(x,y)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\ln\left(\rho\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}+\sqrt{1+\lambda(x^2+y^2)}\right)+\mu,\quad (\lambda,\mu)\in\left]\frac{1}{\alpha^2};+\infty\right[\times\mathbb{R}.$$

8.3.1 Phương pháp 1: sử dụng định lý Taylor–Young tới cấp 2

Ánh xạ f thuộc lớp C^2 trên $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ và :

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{y}{x}e^{y\ln x} \\ f'_y(x,y)=\ln x\ \ e^{y\ln x} \end{cases}, \text{ từ đó } \begin{cases} f'_x(1,0)=0 \\ f'_y(1,0)=0 \end{cases},$$

tiếp đó:
$$\begin{cases} f''_{x^2}(x,y)=-\dfrac{y}{x^2}e^{y\ln x}+\dfrac{y}{x^2}e^{y\ln x} \\ f''_{xy}(x,y)=\dfrac{1}{x}e^{y\ln x}+\dfrac{y\ln x}{x}e^{y\ln x} \\ f'_{y^2}(x,y)=(\ln x)^2\ \ e^{y\ln x} \end{cases}, \text{ từ đó } \begin{cases} f''_{x^2}(1,0)=0 \\ f''_{xy}(1,0)=1 \\ f''_{y^2}(1,0)=0. \end{cases}$$

Cuối cùng: $f(x,y)=f(1,0)+\left((x-1)f'_x(1,0)+yf'_y(1,0)\right)+$

$$+\frac{1}{2}\left((x-1)^2f''_{x^2}(1,0)+2(x-1)yf''_{xy}(1,0)+y^2f''_{y^2}(1,0)\right)+\underset{(x,y)\to(1,0)}{o}\left((x-1)^2+y^2\right).$$

Phương pháp 2: Lập khai triển hữu hạn theo một biến

Ta có:

$$f(x,y)=e^{y\ln x}=e^{y((x-1)+(x-1)\varepsilon_0(x))}=1+y(x-1)+y(x-1)\varepsilon_1(x)+\|(x-1\ ,y)\|^2\varepsilon_2(x,y).$$

Trong đó $\varepsilon_1\xrightarrow[0]{}0$, $\varepsilon_2\xrightarrow[(0,0)]{}0$.

◊ **Trả lời:** $x^y=1+y(x-1)+\underset{(x,y)\to(1,0)}{o}\left((x-1)^2+y^2\right)$.

8.3.2 *a)* • **Cực trị địa phương:**
f thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$ và điểm tới hạn duy nhất là (0,0). Hơn nữa, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và tại (0,0), $s^2-rt=0$. Nhưng:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \left(f(x,0)=2x^4>0,\quad f(x,\frac{3}{2}x^2)=-\frac{x^4}{4}<0\right).$$

• **Cực trị toàn cục**

$$f(x,0)=2x^4 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ và } f(x,\frac{3}{2}x^2)=-\frac{x^4}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty .$$

◊ **Trả lời:** f không có cực trị địa phương và không có cực trị toàn cục.

b)• f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^2$ và điểm tới hạn duy nhất là $(4^{-\frac{1}{3}},4^{-\frac{1}{3}})$. Hơn nữa, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và tại $(4^{-\frac{1}{3}},4^{-\frac{1}{3}})$, ta có $r=8$, $s=4$, $t=8$, vậy $s^2-rt<0$ và $r>0$

• $f(x,x)=4x^2+\frac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ và $f(x,x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$.

◊ **Trả lời:** • f có một cực trị địa phương và chỉ một tại $(4^{-\frac{1}{3}},4^{-\frac{1}{3}})$ đó là một cực tiểu ngặt và $f(4^{-\frac{1}{3}},4^{-\frac{1}{3}})=12.4^{-\frac{2}{3}}$.

• f không có cực trị toàn cục.

c) Tương tự như ở *a)*.

◊ **Trả lời:** f không có cực trị địa phương và không có cực trị toàn cục.

d) • f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^2$, các điểm tới hạn là (0,0) và (3,3). Hơn nữa, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và:

$$\begin{cases} \text{tại } (0,0),\ r=0,\ s=-9,\ t=0, \text{ vậy } s^2-rt>0 \\ \text{tại } (3,3),\ r=18,\ s=-9,\ t=18, \text{ vậy } s^2-rt<0 \text{ và } r>0. \end{cases}$$

• $(\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x,0)=x^3+27)$. Vậy f không bị chặn trên, không bị chặn dưới.

◊ **Trả lời:** • f có một và chỉ một cực trị địa phương tại (3,3); đó là một cực tiểu địa phương ngặt và $f(3,3)=0$.

• f không có cực trị toàn cục.

e) • f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^2$ và có đúng 3 điểm tới hạn : $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,1)$. Cũng chú ý rằng:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(-x,-y)=f(x,y).$$

Hơn nữa, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và tại (1,1) $r=-10$, $s=2$ và $t=-10$, vậy $s^2-rt<0$ và $r<0$.

Tại (0,0), $s^2-rt=0$, điều không cho phép kết luận. Nhưng với mọi x thuộc $]0;1[$:

$$f(x,-x+x^2)=-(x-x^2)^4<0 \text{ và } f(x,0)=x^2-x^4>0,$$

điều đó chứng tỏ f không có cực trị địa phương tại (0,0),

◊ **Trả lời:** • f có đúng hai cực trị địa phương, tại (1;1) và $(-1,-1)$, đấy là các cực đại địa phương ngặt và $(f(1,1)=f(-1,-1)=2$.

• f không có cực trị toàn cục

f) • f thuộc lớp C^1 trên miền mở $(\mathbf{R}_+^*)^2$ và:

$$\forall\,(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \begin{cases} f'_x(x,y)=\ln y-\dfrac{y}{x}\\[2mm] f'_y(x,y)=\dfrac{x}{y}-\ln x.\end{cases}$$

Ta có, với $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$: $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1\\ y=\dfrac{x}{\ln x}\\ \ln x-\ln(\ln x)-\dfrac{1}{\ln x}=0.\end{cases}$

Nghiên cứu sự biến thiên của $\varphi:\ \begin{array}{c}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ t\mapsto t-\ln t-\frac{1}{t}\end{array}$. Từ đó suy ra φ triệt tiêu một và chỉ một lần tại 1.

Như vậy f có một và chỉ một điểm tới hạn là (e,e).

Hơn nữa, f thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^2$ và tại (e,e): $r=\frac{1}{e}$, $s=0$, $t=-\frac{1}{e}$, vậy $s^2-rt>0$.

- $f(x,e)=x-e\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ và $f(x,x^2)=2\ln x-x^2\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

◊ **Trả lời:** f không có cực trị địa phương và không có cực trị toàn cục.

g) • f thuộc lớp C^1 trên miền mở $(\mathbb{R}_+^*)^2$ và:

$$\forall\,(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \begin{cases} f'_x(x,y)=xy^2-\lambda y-\dfrac{1}{x^2}\\[2mm] f'_y(x,y)=x^2y-\lambda x-\dfrac{1}{y^2}.\end{cases}$$

Việc giải $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$ dẫn tới việc giải $\begin{cases} y=x\\ x^5-\lambda x^3-1=0\end{cases}$.

Xét sự biến thiên của $P:\ ]0;+\infty[\ \underset{x\to x^5-\lambda x^3-1}{\to}\ \mathbb{R}$

x	0		$\sqrt{\frac{3\lambda}{5}}$		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	-1	↘		↗	$+\infty$

Từ đó suy ra rằng f chỉ có một điểm tới hạn duy nhất (α,α). Trong đó, α là không điểm duy nhất của P trong $]0;+\infty[$. Hơn nữa, f thuộc lớp C^2 trên $(\mathbb{R}_+^*)^2$ và tại (α,α), $r=t=\alpha^2+\dfrac{2}{\alpha^3}$,

$s=2\alpha^2-\lambda$, từ đó $s^2-rt=\left(3\alpha^2-\lambda+\dfrac{2}{\alpha^3}\right)\left(\alpha^2-\lambda-\dfrac{2}{\alpha^3}\right)=-\dfrac{1}{6}(5\alpha^2-3\lambda)(\alpha^2-\lambda)<0$, vì

$\lambda=\alpha^2-\dfrac{1}{\alpha^3}$ và $\alpha^2>\lambda>\dfrac{3\lambda}{5}$.

- $f(x,1)=\dfrac{1}{2}x^2-\lambda x+\dfrac{1}{x}+1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, vậy f không bị chặn trên.

• Ta có: $\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(x,y) = \frac{1}{2}(xy-\lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > -\frac{\lambda^2}{2}$, điều đó chỉ ra rằng f bị chặn dưới.

Ta sẽ chứng minh $f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$.

Cho $A \in]\lambda;+\infty[$ cố định.

Nếu $xy \geq A$ thì $f(x,y) \geq \frac{1}{2}(A-\lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{2}$.

Nếu $0 < xy < A$ thì $f(x,y) \geq -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{x}{A} + \frac{y}{A}$.

Từ đấy suy ra:

$$\forall\ B > 0, \exists\ C > 0, \forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \left(\|(x,y)\| > C \Rightarrow f(x,y) > B\right),$$

nghĩa là: $f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$.

Hơn nữa, vì f liên tục trên $(\mathbb{R}_+^*)^2$, ta có thể áp dụng (8.3.4 Mệnh đề): f có một cực tiểu toàn cục. Vì f cũng có một cực tiểu địa phương duy nhất tại (α, α) nên cực tiểu toàn cục đạt được tại (α, α) và chỉ tại điểm đó.

◊ **Trả lời:** • f có một cực trị địa phương duy nhất tại (α, α), trong đó $\alpha \in]0;+\infty[$ là không điểm duy nhất của $x^5 - \lambda x^3 - 1$ trong $]0;+\infty[$, đấy là một cực tiểu ngặt.

• f không có cực đại toàn cục

• f có một cực tiểu toàn cục, cực tiểu toàn cục này đạt được tại một điểm duy nhất là (α, α).

h) f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^2$, và có đúng hai điểm tới hạn là (2,0) và (−2,0),

• Việc tính các đạo hàm riêng cấp hai trở nên vô nghĩa. Cho nên chú ý rằng với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(x,y) - f(2,0) = \dfrac{2((x-2)^2 + y^2)}{3((x+1)^2 + y^2 + 3)} \\ f(-x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)}. \end{cases}$$

◊ **Trả lời:** • f có đúng hai cực trị địa phương : tại (2,0) (tương ứng (− 2,0)); đó là một điểm cực tiểu (tương ứng cực đại) ngặt. Hơn nữa $f(2,0) = \frac{1}{3}$, $f(-2,0) = 3$.

• f có một cực tiểu toàn cục (chỉ đạt tại (2,0)) và một cực đại toàn cục (chỉ đạt tại (−2,0)).

i) • f thuộc lớp C^1 trên miền mở $\mathbb{R}^3$, qua tính toán, điểm tới hạn duy nhất là (1,1,−1).

Phương pháp 1 : (không sử dụng Định lý 8.3.3.2) *a)*)

Với mọi $(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$ ta có, sau các tính toán:

$$\delta(h,k,l) = f(1+h, 1+k, -1+l) - f(1,1,-1) = \frac{1}{2}h^2 - hk + hl + kl + hkl\ .$$

Đặc biệt là : $\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^*, & \delta(h,0,0) = \frac{1}{2}h^2 > 0 \\ \forall k \in \mathbb{R}^*, & \delta(0,k,-k) = -k^2 < 0. \end{cases}$

Vậy, f không có cực trị địa phương tại (1,1,−1).

Phương pháp 2: (sử dụng Định lý 8.3.3.2) *a)*).

Ở đây, định lý Taylor–Young tới cấp 2 cho :

$$f(1+h,1+k,-1+l)=f(1,1,-1)+\frac{1}{2}(h^2-2hk+2hl+2kl)+\underset{(h,k,l)\to(0,0,0)}{o}(\|(h,k,l)\|^2).$$

Ta phân tích dạng toàn phương $Q:(h,k,l)\mapsto h^2-2hk+2hl+2kl$ bằng phương pháp Gauss:

$$h^2-2hk+2hl+2kl \;=\; (h-k-l)^2-k^2+4kl-l^2=(h-k+l)^2-(k-2l)^2+3l^2\,.$$

Ký số của Q là (2,1). Vậy Q không xác định dương và không xác định âm. Theo (8.3.3.2) Định lý) f không có cực trị địa phương tại $(1,1,-1)$.

- Vì $(\forall\, y\in\mathbb{R}, f(0,y,0)=y)$ nên rõ ràng là f không có cực trị toàn cục.

◊ **Trả lời:** f không có cực trị địa phương và không có cực trị toàn cục

8.3.3 *a)* Chứng minh rằng: $\forall\,(x,y)\in[0;1]^2,\ (1-x)(1-y)\le(1-\sqrt{xy})^2$.

Từ đó suy ra, với mọi (x,y) thuộc $[0;1]^2-\{(1;1)\}$:

$$0\le f(x,y)\le\frac{xy(1-\sqrt{xy})^2}{1-xy}=\frac{xy}{1+\sqrt{xy}}(1-\sqrt{xy}),$$

vậy $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(1,1)]{}0$.

b) • Ta có: $\begin{cases}\forall\,(x,y)\in \text{biên của }[0;1]^2, f(x,y)=0\\ \forall\,(x,y)\in[0;1]^2, f(x,y)\ge 0.\end{cases}$

- f thuộc lớp C^1 trên miền mở $]0;1[^2$ và:

$$\forall\,(x,y)\in[0;1]^2,\ \begin{cases}f'_x(x,y)=\dfrac{y(1-y)}{(1-xy)^2}(1-2x+x^2y)\\[2mm] f'_y(x,y)=\dfrac{x(1-x)}{(1-xy)^2}(1-2y+xy^2).\end{cases}$$

Từ đó: $\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x+x^2y=0\\ 1-2y+xy^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\ 1-2x+x^3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt5-1}{2}.$

Như vậy f có một điểm tới hạn duy nhất trong $[0;1]^2$.

Vì f liên tục trên compăc $[0;1]^2$, nên f bị chặn trên và đạt cận trên chính xác M trong $[0;1]^2$.

Vì $M>1$, nên việc khảo sát trên chỉ ra : $M=f\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2},\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{5\sqrt5-11}{2}\approx 0{,}09017$.

8.3.4 *1)* **Tìm các điểm tới hạn của f**

Ánh xạ f thuộc lớp C^1 trên miền mở $(\mathbf{R}_+^*)^n$ và với mọi i thuộc $\{1,\dots,n\}$ và mọi $(x_1,\dots,x_n)$ thuộc $(\mathbf{R}_+^*)^n$:

$$f'_{x_i}(x_1,\dots,x_n)=-\frac{1}{x_i^2}\prod_{j=1}^{n}(1+x_j)+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right)\prod_{j/j\neq i}(1+x_j)=\left(\prod_{j/j\neq i}(1+x_j)\right)\left(-\frac{1+x_i}{x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right).$$

Vì ánh xạ $\mathbf{R}_+^*\xrightarrow[t\mapsto\frac{1+t}{t^2}]{}\mathbb{R}$ là đơn ánh (khảo sát sự biến thiên) nên ta có :

$$\left(\forall i \in \{1,...,n\},\ f'_{x_i}(x_1,...,x_n)=0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = ... = x_n \\ \dfrac{1+x_1}{x_1^2} = \dfrac{n}{x_1} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = ... = x_n = \frac{1}{n-1}.$$

Điều này chứng minh rằng f chỉ có một điểm tới hạn duy nhất $\left(\frac{1}{n-1}, \ . \ . \ ., \frac{1}{n-1}\right)$; hơn nữa, nếu ký hiệu:

$M_n = f\left(\frac{1}{n-1}, \ . \ . \ ., \frac{1}{n-1}\right)$ thì $M_n = n(n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}$

2) Cho $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$; ta có : $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$,

$\left(f(x_1,...,x_n) \geq \frac{1}{x_i} \text{ và } f(x_1,...,x_n) \geq 1 + x_i\right)$. Bằng cách ký hiệu $P_n = \left[\frac{1}{M_n+1}; M_n\right]^n$, ta có: $\forall\ (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n - P_n; f(x_1, ..., x_n) \geq M_n+1$.

Mặt khác $f\,|_{P_n}$ liên tục trên miền compăc P_n, vậy y bị chặn dưới và y đạt cận dưới chính xác của nó.

Theo *1)* ta có: $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(x_1,...,x_n)\in P_n} f(x_1,...,x_n) = f\left(\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1}\right)$.

3) f không bị chặn trên vì $f(x_1,...,x_n) \geq \frac{1+x_1}{x_2}$.

◊ **Trả lời:**

- f có một cực tiểu toàn cục, đạt được duy nhất tại một điểm $\left(\frac{1}{n-1}, \ . \ . \ ., \frac{1}{n-1}\right)$ và bằng $\frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}$.
- f không có cực đại toàn cục.

8.4.1 Xem thêm Tập 2, 12.6.2, Ví dụ, và bài tập 12.6.2

◊ **Trả lời:**

a) $-x + o(x^2)$ *b)* $-3(x-1)-\frac{9}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$

c) $1+(x-1)+o\left((x-1)^2\right)$ *d)* $-1+o\left((x-1)^2\right)$.

8.5.1 Xem thêm Tập 2, 12.7.4 và bài tập 12.7.1.

◊ **Trả lời:**

a) w chính xác trên $U = \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}-(\frac{\pi}{2}+n\mathbb{Z})\right)$ và các nguyên hàm của w trên U là các ánh xạ:

$(x,y) \mapsto -\frac{\tan y}{1+x^2} + C_n$ nếu $(x,y) \in \mathbb{R}\times\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $C_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

b) w chính xác trên $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ và các nguyên hàm của w trên U là các ánh xạ:

$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x+y)^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

c) • w không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một thừa số tích phân của w trên $\mathbb{R}^2$ là $(x,y)\mapsto e^x$.

• w_1 chính xác trên $\mathbb{R}^2$ và các nguyên hàm của w_1 trên $\mathbb{R}^2$ là các ánh xạ :

$(x,y)\mapsto e^x\sin(x+y)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

d) • w không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một thừa số tích phân của w trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ là $(x,y)\mapsto\dfrac{1}{y^2}$.

• w_1 chính xác trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ và các nguyên hàm của w_1 trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ là các ánh xạ :

$(x,y)\mapsto\dfrac{x}{y}-\dfrac{x^2}{2}+\ln|y|+C_i$ nếu $(x,y)\in U_i$, trong đó $U_1=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_+$, $U_2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_-$, $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$.

e) • w không đóng trên $\mathbb{R}^2$

• Một thừa số tích phân của w trên $\mathbb{R}^2$ là $(x,y)\mapsto e^x$.

• w_1 chính xác trên $\mathbb{R}^2$ và các nguyên hàm của w_1 trên $\mathbb{R}^2$ là các ánh xạ :

$(x,y)\mapsto(x^2+y^2)e^x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

f) • w không đóng trên $\mathbb{R}^2$.

• Một thừa số tích phân của w trên $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2-1\neq0\}$ là $(x,y)\mapsto\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$.

• w_1 chính xác trên U và các nguyên hàm của w_1 trên U là các ánh xạ :

$(x,y)\mapsto-\dfrac{y-1}{x^2-1}+C_i$ nếu $(x,y)\in U_i$, với $U_1=]-\infty;-1[\times\mathbb{R}$, $U_2=]-1;1[\times\mathbb{R}$, $U_3=]1;+\infty[\times\mathbb{R}$. $(C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3$.

8.5.2 *a)* ◊ **Trả lời:**

• w không đóng trên $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*$.

• Một thừa số tích phân của w trên $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*$ là $(x,y)\mapsto\dfrac{1}{x^2}$.

• Dạng vi phân của w_1 được xác định bởi: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*$, $w_1(x,y)=\dfrac{1}{x^2}w(x,y)$ là chính xác trên $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*$ và các nguyên hàm của w_1 trên $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}^*$ là các ánh xạ:

$(x,y)\mapsto-\dfrac{y+\ln x}{xy}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

b) Xem thêm Tập 2, 12.7.5 và bài tập 12.7.7.

Cho y_1: $]1;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ là một ánh xạ khả vi.

1) Nếu y_1 là nghiệm của PTVP đã cho và triệt tiêu ít nhất tại một điểm x_1 thuộc $]1;+\infty[$ thì

y_1 và 0 đều là nghiệm cực đại của bài toán Cauchy $\begin{cases} y' - \dfrac{1-\ln x}{x\ln x}y + \dfrac{1}{x\ln x}y^2 = 0 \\ y(x_1) = 0. \end{cases}$

Do đó $y_1 = 0$ (Định lý Cauchy – Lipschit z 7.2.1.4 Định lý).

2) Giả sử $y_1 \neq 0$; theo 1): $\forall x \in]1;+\infty[$, $y_1(x) \neq 0$.

Vì y_1 liên tục trên khoảng $]1;+\infty[$, định lý các giá trị trung gian chỉ ra rằng y_1 có một dấu cố định trên $]1;+\infty[$. Từ đó ta suy ra, cũng như ở *a)* rằng, để y_1 là nghiệm của PTVP đã cho trên $]1;+\infty[$, điều kiện cần và đủ là tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x \in]1;+\infty[\ ,\ -\frac{y_1(x)+\ln x}{xy_1(x)} + C = 0 .$$

◊ **Trả lời:**

$$\left\{ \begin{array}{l}]1;+\infty[\underset{x \mapsto \frac{\ln x}{Cx-1}}{\longrightarrow} \mathbb{R}; \quad C \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[\\ \end{array} \right\} \cup \{0\} .$$

8.5.3 ◊ **Trả lời:** Ta có thể chọn $Q:(x,y) \mapsto \dfrac{y}{x^2+y^2}$; một nguyên hàm của w trên $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ khi đó là : $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

8.5.4 ◊ **Trả lời:** Các nguyên hàm của w trên $(\mathbb{R}_+^*)^3$ là các ánh xạ

$(x,y,z) \mapsto \ln\dfrac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

C8.1 *1)* ◊ **Trả lời:**

a) f đẳng cấp cấp $\dfrac{1}{2}$

b) f đẳng cấp cấp -1

c) f đẳng cấp cấp 0.

2) a) Cho $x \in C$ cố định, ánh xạ $\varphi: \lambda \mapsto f(\lambda x)$ thuộc lớp C^1 trên $]0;+\infty[$ và:

$$\forall \lambda \in]0;+\infty[,\quad \varphi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} x_i f'_{x_i}(\lambda x) .$$

1) Giả sử f là α-đẳng cấp. Khi đó ta có : $\forall \lambda \in]0;+\infty[$, $\varphi(\lambda) = f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x)$,

từ đó: $\forall \lambda \in]0;+\infty[$, $\varphi'(\lambda) = \alpha\lambda^{\alpha-1} f(x)$.

Vậy thì: $\forall x \in C$, $\forall \lambda \in]0;+\infty[$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i f'_{x_i}(\lambda x) = \alpha\lambda^{\alpha-1} f(x)$.

Trường hợp riêng, thay λ bởi 1 ta được: $\forall\, x \in C,\ \sum_{i=1}^{p} x_i f'_{x_i}(\lambda x) = \alpha f(x)$.

2) Đảo lại, giả sử: $\forall\, x \in C,\ \sum_{i=1}^{p} x_i f'_{x_i}(x) = \alpha f(x)$.

Khi đó, với mọi x thuộc C ta có:

$$\forall\, \lambda \in\ ]0;+\infty[,\ \lambda\varphi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda x_i f'_{x_i}(\lambda x) = \alpha f(\lambda x) = \alpha\varphi(\lambda).$$

Việc giải PTVP như trên chỉ ra rằng : $\forall\, \lambda \in\ ]0;+\infty[,\ \varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha}\varphi(1)$. Khi đó ta có:

$$\forall x \in C, \forall\, \lambda \in\ ]0;+\infty[,\quad f(\lambda x) = \varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha}\varphi(1) = \lambda^{\alpha} f(x)$$

và do đó f là α – đẳng cấp

b) Theo *a)* : $\forall (x,y) \in C:\ xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = \alpha f(x,y)$.

Lấy đạo hàm theo x và theo y ta được:

$$\forall\, (x,y) \in C,\ \begin{cases} f'_x(x,y) + xf''_{x^2}(x,y) + yf''_{xy}(x,y) = \alpha f'_x(x,y) \\ xf''_{xy}(x,y) + f'_y(x,y) + yf''_{y^2}(x,y) = \alpha f'_y(x,y). \end{cases}$$

Bằng cách nhân liên tiếp với x và y rồi cộng lại ta có:

$$\begin{aligned} \forall\, (x,y) \in C,\ & x^2 f''_{x^2}(x,y) + 2xyf''_{xy}(x,y) + y^2 f''_{y^2}(x,y) \\ &= (\alpha-1)(xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y)) \\ &= \alpha(\alpha-1)f(x,y). \end{aligned}$$

Điều đảo lại của tính chất này thì sai vì ví dụ sau đây:

$$C \in \mathbb{R}^2,\ \alpha = 0,\ f : \underset{(x,y)\mapsto 1+x}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}.$$

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 9

9.1.1 *a)* Chuyển sang toạ độ trụ ($dS = 1.d\theta dz$, xem 9.1.2, Ví dụ 1).

$$\iint_S f(M)dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 (\cos\theta\sin\theta\ \ e^{\cos\theta\, z}dz\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(e^{\cos\theta}-1)d\theta = [-e^{\cos\theta}+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

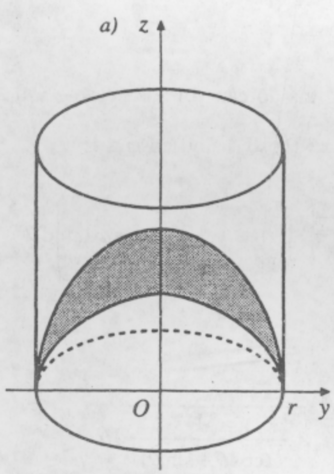
◊ **Trả lời:** e –2.

b) Chuyển sang toạ độ cầu ($dS = 1^2.\cos\varphi\, d\theta d\varphi$, xem 9.1.2 Ví dụ 3):

$$\iint_S f(M)dS = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi\right)d\theta = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln t dt.$$

◊ **Trả lời:** $-\pi(1-\ln 2)$.

9.2.1

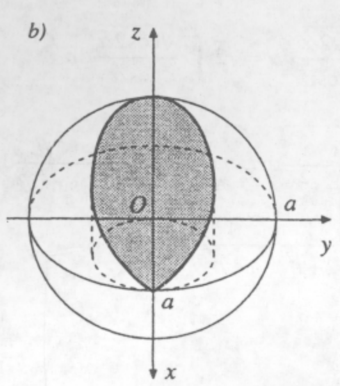


Chuyển sang toạ độ trụ:

$$\mathcal{A}(S) = \iint_S dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\alpha\, r\cos\theta}^{\beta\, r\cos\theta} r dz\right)d\theta$$

$$= (\beta-\alpha)r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

◊ **Trả lời:** $2(\beta-\alpha)r^2$.



Chuyển sang toạ độ cầu với : $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ và $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Vậy: $x^2+y^2-ax\le 0 \Leftrightarrow \varphi\ge\theta$.

Chú ý đến cả sự đối xứng đối với xOz.

Từ đó: $\mathcal{A}(S) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\varphi d\varphi\right)d\theta$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta = 2a^2\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

◊ **Trả lời:** $(\pi-2)a^2$.

c) Một biểu diễn tham số của S là $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\vec{F}(u,v) = (a\cos u, b\sin u, \frac{ab}{c} v\cos u\sin u)\text{, trong đó } D = [-\pi;\pi]\times[0;1].$$

Ta có: $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -a\sin u \\ b\cos u \\ \dfrac{ab}{c} v\cos 2u \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{ab}{c}\cos u\sin u \end{pmatrix}$.

Từ đó: $\left\| \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial v} \right\| = \dfrac{ab}{c}|\cos u\sin u|\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}$.

Vậy:

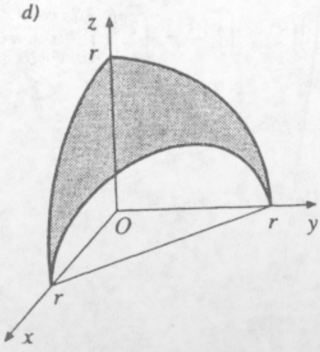
$$S = \iint_D \frac{ab}{c}|\cos u\sin u|\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\,du = 4\frac{ab}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\sin u\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\,du$$

$$\underset{t=\sin^2 u}{=} \frac{2ab}{c}\int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2-b^2)t}\,dt \underset{u=\sqrt{b^2+(a^2-b^2)t}}{=} \frac{4ab}{c(a^2-b^2)}\int_b^a u^2 du.$$

(Xem riêng trường hợp $a=b$).

◊ **Trả lời:** $\dfrac{4ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)c}$.

d)



Chuyển sang toạ độ cầu với : $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

và $x + y \le r \Leftrightarrow (\cos\theta + \sin\theta)\cos\varphi \le 1$.

Ta có:

$$\mathcal{A}(S) = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\mathrm{Arccos}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right)d\theta$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} - r^2 I.$$

trong đó: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\mathrm{Arccos}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}}\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta \underset{\alpha=\theta-\frac{\pi}{4}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sqrt{2}\cos\alpha}d\alpha = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}d\alpha$$

$$\underset{u=\sin\alpha}{=} \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{1-2u^2}}{1-u^2}du \underset{v=u\sqrt{2}}{=} \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-v^2}}{2-v^2}dv \underset{\beta=\mathrm{Arccos}v}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\beta}{2-\sin^2\beta}d\beta$$

$$\underset{t=\tan\beta}{=} 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(2+t^2)(1+t^2)} = 2\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2+t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \left[-\sqrt{2}\,\mathrm{Arc}\tan\frac{t}{\sqrt{2}} + 2\,\mathrm{Arc}\tan t\right]_0^{+\infty}.$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}r^2$.

e) Theo toạ độ cầu: $x = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$ và $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ (vì $x \ge 0$),

$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (vì $z \ge 0$).

Hơn nữa : • $x^2+y^2+z^2-2ax = 0 \Leftrightarrow \rho = 2a\cos\theta\cos\varphi$.

• $x^2+y^2 \le z^2\tan^2\alpha \Leftrightarrow \tan^2\varphi \ge \dfrac{1}{\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}-\alpha \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy S có biểu diễn tham số $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$\vec{F}(\theta,\varphi) = 2a\cos\theta\cos\varphi(\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\vec{j} + \sin\varphi\vec{k}) = 2a\cos\theta\cos\varphi(\cos\varphi\vec{u} + \sin\varphi\vec{k})$,

trong đó: $D = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[\dfrac{\pi}{2}-\alpha;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ (và $\vec{v} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$).

Vậy: $$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} = 2a\cos\varphi(-\sin\theta\cos\varphi\vec{u} + \cos\theta\cos\varphi\vec{v} - \sin\theta\sin\varphi\vec{k}) \\ \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi} = 2a\cos\theta(-\sin 2\varphi\vec{u} + \cos 2\varphi\vec{k}), \end{cases}$$

từ đó :

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi} = 4a^2\cos\varphi\cos\theta(\cos\theta\cos\varphi\cos 2\varphi\vec{u} + (\sin\theta\cos\varphi\cos 2\varphi + \sin\theta\cos\varphi\sin 2\varphi)\vec{v}$$
$$+ \cos\theta\cos\varphi\sin 2\varphi\vec{k})$$
$$= 4a^2\cos^2\varphi\cos\theta(\cos\theta\cos 2\varphi\vec{u} + \sin\theta\vec{v} + \cos\theta\sin 2\varphi\vec{k}),$$

và vì thế $\left\|\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\varphi}\right\| = 4a^2\cos\theta\cos^2\varphi$.

Vậy $$\mathcal{A}(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos\theta\cos^2\varphi d\varphi\right)d\theta = 4a^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\right).$$

◊ **Trả lời:** $4a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$.

9.3.1 *a)* Ta đã thấy yếu tố diện tích của mặt cầu S tâm O, bán kính 1 được cho bởi $dS = \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi$ theo toạ độ cầu. Từ đó:

$$\iint_S \left(\overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n}\right)dS = \iint_{[-\pi;\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\cos\varphi d\theta d\varphi$$
$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi\right).$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{4\pi}{3}$.

b) S có biểu diễn tham số $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$\overrightarrow{F}(x,y)=(x,y,2-x-2y)\text{, trong đó } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\geq 0; y\geq 0; 2-x-2y\geq 0\right\}.$$

Ta có: $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial y}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, từ đó $\left\|\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial x}\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial y}\right\|=\sqrt{6}$.

Mặt khác, vì S phẳng, nên ta có (chính xác đến dấu): $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Từ đó :

$$\iint_S\left(\overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n}\right)\mathrm{d}S=\iint_D\begin{pmatrix}y\\x\\x+y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^{2-2y}(3x+2y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1(6-8y+2y^2)\mathrm{d}y.$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{8}{3}$.

c) S có biểu diễn tham số $\overrightarrow{F}:D\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$\overrightarrow{F}(\theta,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$, trong đó $D=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0;h]$.

Ta có: $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}-a\sin\theta\\a\cos\theta\\0\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, từ đó $\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\theta}\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial z}=\begin{pmatrix}a\cos\theta\\a\sin\theta\\0\end{pmatrix}$, và vì vậy: $\vec{n}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}$.

Vậy :

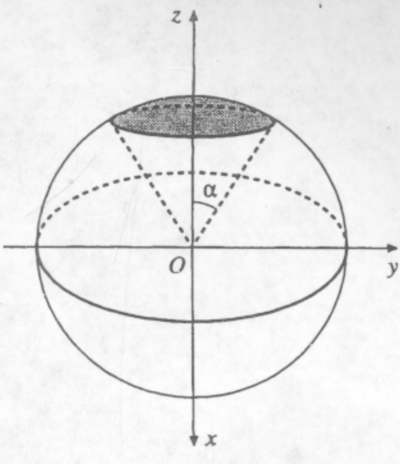
$$\iint_S\left(\overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n}\right)\mathrm{d}S=\iint_D\begin{pmatrix}a^2\sin^2\theta\\a^2\cos^2\theta\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}a\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=a^3\left(\int_0^h\mathrm{d}z\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta\cos\theta+\cos^2\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right).$$

◊ **Trả lời:** $\dfrac{2}{3}a^3h$.

9.3.2

$$\left|\iint_S\left(\overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n}\right)\mathrm{d}S\right|\leq\iint_S\left|\overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n}\right|\mathrm{d}S\leq\iint_S\left\|\overrightarrow{\phi(M)}\right\|\mathrm{d}S\leq\left(\operatorname*{Sup}_{M\in S}\left\|\overrightarrow{\phi(M)}\right\|\right)\iint_S\mathrm{d}S.$$

9.3.3



$$\Omega=A(S)=\iint_S\mathrm{d}S$$
$$=\iint_{[-\pi;\pi]\times\left[\frac{\pi}{2}-\alpha;\frac{\pi}{2}\right]}\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right).$$

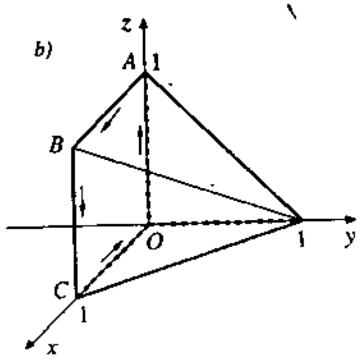
◊ **Trả lời:** $2\pi(1-\cos\alpha)$.

9.3.4 *a)* Rôta của (P,Q,R) theo định nghĩa là (xem Tập 2, 12.8.1):

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

◊ **Trả lời:** $\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\phi(x,y,z)}=\begin{pmatrix}-(x+2y)e^{x^2+xy+y^2}\\(2x+y)e^{x^2+xy+y^2}\\0\end{pmatrix}$

b)



Áp dụng định lý Stokes vào S, mà đường biên có hướng là hình vuông $O(0,0,0)$; $A(0,0,1)$; $B(1,0,1)$; $C(1,0,0)$.

- $\int_{OA}\overrightarrow{\phi(M)}.\overrightarrow{dM}=\int_0^1\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}dz=\frac{1}{2}.$

- $\int_{AB}\overrightarrow{\phi(M)}.\overrightarrow{dM}=\int_0^1\begin{pmatrix}2xe^{x^2}\\xe^{x^2}\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}dx=e-1\,.$

- $\int_{BC}\overrightarrow{\phi(M)}.\overrightarrow{dM}=\int_1^0\begin{pmatrix}2ez\\ez\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}dz=-\frac{1}{2}\,.$

- $\int_{CO}\overrightarrow{\phi(M)}.\overrightarrow{dM}=0\,.$

◊ **Trả lời:** e–1.

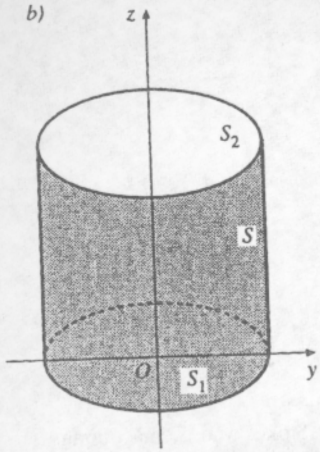
9.3.5 Áp dụng định lý Ostrogradski.
a) Ký hiệu V là hình cầu tâm O bán kính 1:

$$\iint_S\left(\overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n}\right)dS=\iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{\phi(M)}dxdydz=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz\,.$$

Chuyển sang toạ độ cầu.

◊ **Trả lời:** $\frac{4\pi}{5}$.

b)



Ký hiệu $V = \left\{ (x,y,z) \in R^3; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \right\}$

Ta có $\partial V = S \cup S_1 \cup S_2$, trong đó:

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \;\; x^2 + y^2 \le 1; \;\; z = 0 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \;\; x^2 + y^2 \le 1; \;\; z = 1 \right\}.$$

Vì $\operatorname{div}\vec{\phi} = 0$, nên ta có $\iint_{\partial V} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \, \mathrm{d}S = 0$, từ đó:

$$\iint_S \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \, \mathrm{d}S = -\iint_{S_1} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \, \mathrm{d}S - \iint_{S_2} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \, \mathrm{d}S.$$

- $$\iint_{S_1} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \, \mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ \dfrac{y^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 .$$

- $$\iint_{S_2} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \, \mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ \dfrac{y^2}{2} \\ 2x - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{[-\pi;\pi]\times[0;1]} (2\cos\theta - \sin\theta)\rho^2 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (2\cos\theta - \sin\theta) \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\rho \right) = 0 .$$

◊ **Trả lời:** 0.

c) Cũng với những ký hiệu như ở *b)* :

$$\iint_{S \cup S_1 \cup S_2} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{\phi(M)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

- Vì $\vec{\phi}$ triệt tiêu trên S_1 và trên S_2 (các thành phần của $\vec{\phi}$ chứa các nhân tử $z\,(z-1)$) nên ta có:

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \mathrm{d}S = \iint_{S_2} \overrightarrow{\phi(M)}.\vec{n} \mathrm{d}S = 0 .$$

- $$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{\phi(M)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \left(y^2 z(z-1) + x^2 z(z-1) + (3z^2 - 2z) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{[-\pi;\pi]\times[0;1]\times[0;1]} \rho \left(\rho^2 z(z-1) + (3z^2 - 2z) \right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^1 z(z-1) \mathrm{d}z \right) + 2\pi \left(\int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^1 (3z^2 - 2z) \mathrm{d}z \right).$$

◊ **Trả lời:** $-\dfrac{\pi}{12}$.

9.4.1 Sử dụng tọa độ trụ :

$$(x-a)^2 + y^2 + (z-2a)^2 \ge 4a^2 \Leftrightarrow (z-2a)^2 \ge 2a^2(1+\cos\theta) \Leftrightarrow 2a - z \ge 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

vì $0 \le z \le 2a$ và $-\pi \le \theta \le \pi$.

- $\mu(S,\sigma) = \sigma \mathcal{A}(S) = \sigma \int_{\pi}^{\pi} \left(\int_0^{2a(1-\cos\frac{\theta}{2})} a\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\theta = 2\sigma a^2 \int_{\pi}^{\pi} (1-\cos\frac{\theta}{2}) \mathrm{d}\theta = 4\sigma a^2(\pi - 2)$.

- $\mu(S,\sigma)\overrightarrow{OG} = \iint_S \sigma \overrightarrow{OM} \mathrm{d}S = \sigma a \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{2a(1-\cos\frac{\theta}{2})} (a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j} + z\vec{k})\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\theta$

$$= \sigma a \int_{-\pi}^{\pi} \left(2a\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)(a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}) + 2a^2(1-\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{k} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\sigma a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(\cos\theta - \frac{1}{2}(\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}) \right)\vec{i} + \left(\sin\theta - \frac{1}{2}(\sin\frac{3\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}) \right)\vec{j} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \right)\vec{k} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\sigma a^3 \left(-\frac{4}{3}\vec{i} + (3\pi - 8)\vec{k} \right).$$

◊ **Trả lời:** $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{6(\pi-2)}\left(-4\vec{i} + 3(3\pi-8)\vec{k}\right)$.

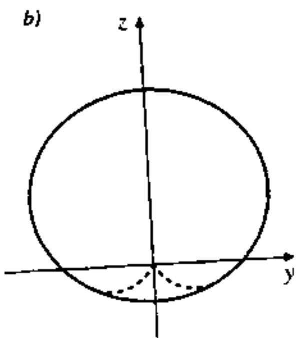
9.4.2 *a)*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 \le z \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$, vậy S là một mặt nón tròn xoay.

Áp dụng (9.4.3 Ví dụ 2) với $r = h = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

b)



Áp dụng định lý Guldin thứ nhất, trong đó C là nửa hình tim, là giao tuyến của S với nửa mặt phẳng $(x = 0, y \ge 0)$.

- $l(C) = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 4a.$$

- Trọng tâm g của dây đồng chất (C, σ) đã được xác định, là đề mục của ví dụ, trong Tập 2, (13.4.3 Ví dụ 1):

$$y_g = z_g = \frac{4a}{5}.$$

Ta được: $\mathcal{A}(S) = 2\pi.\dfrac{4a}{5}4a$.

◊ **Trả lời:** $\dfrac{32\pi a^2}{5}$.

9.4.3

- $I_{xOy} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \sigma d(M,xOy)^2\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

$$= \sigma\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= \sigma\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1\frac{1}{4}\rho^5\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\right)d\theta \underset{u=\sqrt{1+\rho^2}}{=} \frac{\pi\sigma}{2}\int_1^{\sqrt{2}}(u^2-1)^2u^2du$$

$$= \frac{\pi\sigma}{2}\left[\frac{u^7}{7}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sigma}{105}(11\sqrt{2}-4).$$

- $I_{xOz} = I_{yOz} = \iint_{x^2+y^2\le 1}\sigma d(M,yOz)^2\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

$$= \sigma\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= \sigma\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^1\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\right) = \frac{2\pi\sigma}{15}(\sqrt{2}+1).$$

- $I_{x'x} = I_{y'y} = I_{xOy} + I_{xOz} = \dfrac{\pi\sigma}{21}(5\sqrt{2}-2)$.

- $I_{z'z} = I_{xOz} + I_{yOz} = \dfrac{4\pi\sigma}{15}(\sqrt{2}+1)$.

- $I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = \dfrac{\pi\sigma}{105}(39\sqrt{2}+24)$.

◊ **Trả lời:** $I_{xOy} = \dfrac{\pi\sigma}{105}(11\sqrt{2}-4)$; $I_{xOz} = I_{yOz} = \dfrac{2\pi\sigma}{15}(\sqrt{2}+1)$;

$I_{x'x} = I_{y'y} = \dfrac{\pi\sigma}{21}(5\sqrt{2}-2)$; $I_{z'z} = \dfrac{4\pi\sigma}{15}(\sqrt{2}+1)$; $I_O = \dfrac{\pi\sigma}{105}(39\sqrt{2}+24)$.

Bảng ký hiệu

Bảng thuật ngữ

E, F

G

H

J

K

L

T

V

X, Y

W

--------***--------

Giáo trình toán tập 4
GIẢI TÍCH 4
Mã số: 7K477T6

In 1.500 cuốn, khổ16 x 24 cm tại công ty cổ phần In Phúc Yên.
Giấy phép xuất bản số: 194-2006/CXB/11-323/GD.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.

Jean-Marie Monier

GIẢI TÍCH 4

Giáo trình và 500 bài tập có lời giải

Giáo trình Toán - Tập 4

Mục tiêu của bộ giáo trình Toán này là cung cấp cho sinh viên những năm đầu của các trường đại học khoa học và kỹ thuật một tài liệu học tập, tra cứu thông dụng và có hiệu quả. Với nhiều bài tập có lời giải, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh của lý thuyết, cuốn sách còn nhằm giúp cho người học rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.

8 934980 640197

Tập 3 đề cập việc khảo sát các không gian vectơ định chuẩn, các hàm vectơ một biến thực và các chuỗi, ứng với phần đầu của môn Giải tích năm thứ hai.
Tập 4 đề cập việc khảo sát các dãy và các chuỗi ánh xạ, chuỗi nguyên, chuỗi Furier, các phương trình vi phân, hàm nhiều biến và bổ xung về phép tính tích phân, ứng với phần hai của môn Giải tích năm thứ hai.

Giá: 57.500đ