P.F.I.E.V

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán - Tập 7

HÌNH HỌC

Giáo trình và
400 bài tập có lời giải

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

DUNOD

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán
Tập 7

HÌNH HỌC

Giáo trình và 400 bài tập có lời giải

(Tái bản lần thứ hai)

Người dịch :
Nguyễn Chi

Hiệu đính :
Đoàn Quỳnh

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán mới này, với nhiều bài tập có lời giải, được biên soạn dành cho sinh viên giai đoạn I các trường đại học công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và thứ 2, mọi chuyên ngành), cho sinh viên giai đoạn I đại học khoa học, và cho các thí sinh dự thi tuyển giáo sư trung học phổ thông.

Bố cục của bộ giáo trình như sau:

Tập1 : Giải tích 1 Tập2 : Giải tích 2	***Giải tích***	năm thứ 1
Tập 3 : Giải tích 3 Tập4 : Giải tích 4	***Giải tích***	năm thứ 2
Tập 5: Đại số 1:	***Đại số***	năm thứ 1
Tập 6: Đại số 2:	***Đại số***	năm thứ 2
Tập 7: Hình học:	***Hình học***	năm thứ 1và thứ 2.

Để kiểm chứng mức độ lĩnh hội kiến thức, trong mỗi chương độc giả sẽ thấy nhiều bài tập có lời giải in ở cuối sách. Trừ một vài trường hợp đặc biệt, các bài tập này đều khác với những bài đã có trong bộ bài tập có lời giải gồm tám tập mới xuất bản.

Nhiều vấn đề ở ranh giới của chương trình được đề cập ở cuối chương, dưới dạng các bổ sung có giải.

Tác giả rất mong nhận được những lời phê bình và gợi ý của độc giả. Xin vui lòng gửi các ý kiến đến Nhà xuất bản Dunod, 5, phố Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

Lời cám ơn

Tôi xin bày tỏ ở đây lòng biết ơn đối với nhiều bạn đồng nghiệp đã vui lòng đọc lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy là : Henri Baroz,. Alain Bernard, Jean-Philippe Berne, Isabelle Bigeard, Gérard Bourgin, Gérard Cassayre, Gilles Demeusois, Catherine Dony, Hermin Durand, Marguerite Gauthier, André Gruz, Annie Michel, Michel Pernoud, René Roy, Philippe Saunois.

Sau cùng, tôi chân thành cám ơn Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic, mà năng lực cũng như lòng kiên trì đã tạo điều kiện cho các tập sách này ra đời.

Jean-Marie Monier

Mục lục

Phần thứ nhất – Giáo trình

Chương 3. - Hình học afin thực

Chương 4. - Đường cong trên mặt phẳng

Phần thứ hai - Chỉ dẫn và lời giải các bài tập

Phần thứ nhất

GIÁO TRÌNH

Chương 1

Hình học afin trong mặt phẳng và trong không gian ba chiều

1.1 Các không gian afin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

1.1.1 Nhắc lại về các $\mathbb{R}$ - kgv $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Ta sẽ xét $\mathbb{R}^3$, vì trường hợp $\mathbb{R}^2$ cũng tương tự.

Ta nhắc lại (xem Tập 5, 6.1) rằng $\mathbb{R}^3$ là một $\mathbb{R}$ - kgv đối với các luật thông thường, được xác định, với (x, y, z), (x', y', z') thuộc $\mathbb{R}^3$ và λ thuộc $\mathbb{R}$, bởi :

$$\begin{cases} (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ \lambda(x, y, z) \qquad\qquad\quad = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \end{cases}$$

và rằng : $$\begin{cases} -(x, y, z) \qquad\qquad\quad = (-x, -y, -z) \\ (x, y, z) - (x', y', z') = (x - x', y - y', z - z'). \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ được trang bị cơ sở chính tắc $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, xác định bởi : $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Phần tử $(0,0,0)$ của $\mathbb{R}^3$ được ký hiệu là $\vec{0}$ hoặc 0.

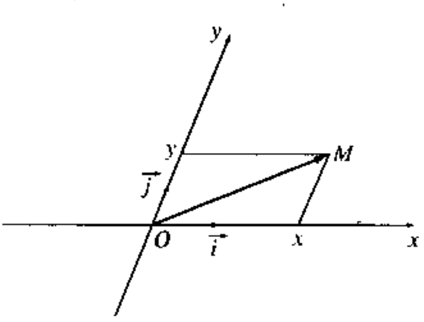
1.1.2 Các không gian afin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Ta sẽ khảo sát trường hợp $\mathbb{R}^2$, vì trường hợp $\mathbb{R}^3$ cũng tương tự.

Một phần tử (x, y) của $\mathbb{R}^2$ được biểu diễn hình học bởi một **điểm**, ký hiệu là M chẳng hạn, mà các tọa độ là x, y.

Ta ký hiệu $O = (0, 0) = \vec{0}$.

Vậy, một phần tử (x, y) của $\mathbb{R}^2$, tùy ngữ cảnh, sẽ được xem như một **vectơ**, hoặc một **điểm**.



Cho $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$M' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$

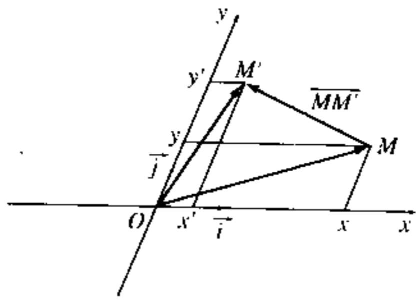
Ta ký hiệu là $\overrightarrow{MM'}$ phần tử của $\mathbb{R}^2$ xác định bởi :

$\overrightarrow{MM'} = M' - M = (x' - x, y' - y)$.

Vậy ta có :

$M' = (x', y') = (x, y) + (x' - x, y' - y)$

$= M + \overrightarrow{MM'}$.



hoặc còn là : $M' = (M' - M) + M = M + \overrightarrow{MM'}$.

Khi các phần tử của $\mathbb{R}^2$ được xem như những điểm, ta nói $\mathbb{R}^2$ được trang bị **cấu trúc afin** của nó (hoặc : $\mathbb{R}^2$ là một **không gian afin**), và không gian afin $\mathbb{R}^2$ thường được gọi là **mặt phẳng afin** (hoặc : **mặt phẳng**). Để chuẩn bị cho việc nghiên cứu các không gian afin (chương 3), ở đây ta sẽ ký hiệu $\mathcal{A}_2$ là tập hợp các điểm của $\mathbb{R}^2$ và sẽ gọi $\mathcal{A}_2$ là **(một) mặt phẳng afin.** Tương tự, ta sẽ ký hiệu $\mathcal{A}_3$ là **(một) không gian afin (ba chiều)**.

Nhằm tính đến việc đổi hệ quy chiếu (hoặc : mục tiêu) (xem 1.3, dưới đây), ta sẽ viết $M(x, y)$ thay vì $M = (x, y)$.

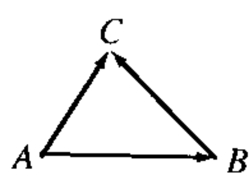
◆ **Mệnh đề 1** Với mọi A, B, C thuộc $\mathcal{A}_2$:

1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **(hệ thức Chasles)**

4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.



Chứng minh :

Ký hiệu $A = (a, a')$, $B = (b, b')$, $C = (c, c')$, ta có :

1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (b - a, b' - a') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 0 \\ b' - a' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a' = b' \end{cases} \Leftrightarrow A = B$

2) $\overrightarrow{BA} = (a - b, a' - b') = -(b - a, b' - a') = -\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b - a, b' - a') + (c - b, c' - b') = (b - a + c - b, b' - a' + c' - b')$

$= (c - a, c' - a') = \overrightarrow{AC}$

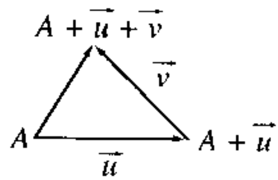
4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

♦ **Mệnh đề 2** Với mọi điểm A, B thuộc $\mathcal{A}_2$ và mọi vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ thuộc $\mathbb{R}^2$:

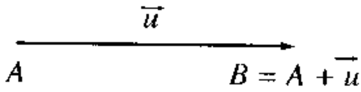
1) $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow B = A + \vec{u}$

3) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$.



Chứng minh :



1) Suy từ tính kết hợp của + trong $\mathbb{R}^2$.

Với ký hiệu $A = (a, a')$, $B = (b, b')$, $\vec{u} = (u, u')$, $\vec{v} = (v, v')$:

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow (b - a, b' - a') = (u, u') \Leftrightarrow (b, b') = (a, a') + (u, u')$

$$\Leftrightarrow B = A + \vec{u}$$

3) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a + u = a + v \\ a' + u' = a' + v' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u' = v' \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$. ■

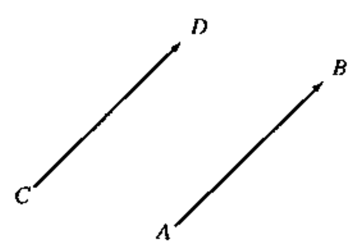
NHẬN XÉT :

Với $A \in \mathcal{A}_2$, cố định, ánh xạ $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathcal{A}_2 \\ \vec{u} & \mapsto & A + \vec{u} \end{array}$ là một song ánh.

Một **cặp - điểm** là một cặp (A, B) gồm hai điểm.

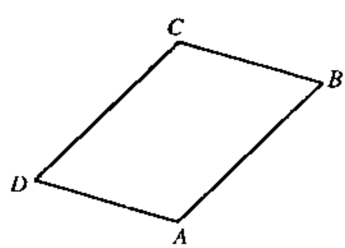
Ta nói rằng một cặp - điểm (A, B) **tương đẳng** với một cặp - điểm (C, D), và ta ký hiệu $(A, B) \sim (C, D)$, khi và chỉ khi :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$



Rõ ràng ~ là một quan hệ tương đương trong tập hợp các cặp - điểm của $\mathcal{A}_2$.

Cho $A, B, C, D \in \mathcal{A}_2$; ta nói rằng $ABCD$ là một **hình bình hành** khi và chỉ khi : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



1.2 Đường thẳng và mặt phẳng afin

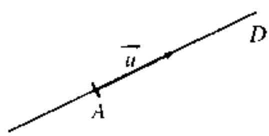
1.2.1 Đường thẳng afin trong $\mathcal{A}_2$

1) *Đại cương*

◆ **Định nghĩa 1**

1) Cho $A \in \mathcal{A}_2$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$. Tập hợp các điểm M thuộc $\mathcal{A}_2$ sao cho $\overrightarrow{AM}$ cộng tuyến với $\vec{u}$ (tức là : $\overrightarrow{AM} \in \mathbb{R}\vec{u}$) gọi là **đường thẳng afin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$**.

2) Một bộ phận D của $\mathcal{A}_2$ được gọi là **đường thẳng afin** (hoặc : **đường thẳng**) khi và chỉ khi tồn tại $(A, \vec{u}) \in \mathcal{A}_2 \times (\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\})$ sao cho D là đường thẳng afin đi qua A và được định phương bởi $\vec{u}$.



Với cách ký hiệu + giữa điểm và vectơ (xem 1.1.2), đường thẳng afin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$ là $\{A + \lambda\vec{u}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, đường thẳng này cũng được ký hiệu là $A + \mathbb{R}\vec{u}$.

Với $A \in \mathcal{A}_2$ và $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ đều cố định, ánh xạ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to A + \mathbb{R}\vec{u} \\ \lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} \end{array}$ là một song ánh.

Đặc biệt do $\mathbb{R}$ vô hạn, nên mọi đường thẳng afin là một tập hợp vô hạn.

Ta ký hiệu $\quad D = A + \mathbb{R}\vec{u}$.

Có thể thấy ngay : $\quad \forall B \in D, \quad B + \mathbb{R}\vec{u} = A + \mathbb{R}\vec{u}$.

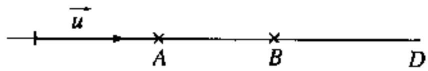
Tổng quát hơn, với mọi điểm A, B thuộc $\mathcal{A}_2$ và mọi vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác vectơ không thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$A + \mathbb{R}\vec{u} = B + \mathbb{R}\vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\vec{u}, \vec{v}) & \text{phụ thuộc} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) & \text{phụ thuộc} \end{cases}.$$

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Cho D là một đường thẳng afin của $\mathcal{A}_2$. Mọi vectơ $\vec{v}$ thuộc $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$, sao cho tồn tại một điểm A thuộc $\mathcal{A}_2$ thỏa mãn $D = A + \mathbb{R}\vec{v}$, đều cộng tuyến với cùng một vectơ $\vec{u}$ khác vectơ không. Đường thẳng vectơ $\mathbb{R}\vec{u}$ được gọi là **phương** của D và được ký hiệu là $\vec{D}$; một phần tử khác vectơ không của $\mathbb{R}\vec{u}$ được gọi là **một vectơ chỉ phương** của D.

◆ **Định nghĩa 2** Ta gọi mọi cặp $(D, \vec{u})$, trong đó D là một đường thẳng afin của $\mathcal{A}_2$ và $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của D, là **trục** của $\mathcal{A}_2$.

◆ **Định nghĩa - Ký hiệu 3** Cho $(D, \vec{u})$ là một trục, $A, B \in D$. Ta ký hiệu số thực t sao cho $\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ là $\overline{AB}$, và ta nói rằng $\overline{AB}$ là **số đo đại số của cặp - điểm** (A, B) trên trục $(D, \vec{u})$.



NHẬN XÉT :

1) Ký hiệu $(\overline{AB})_{\vec{u}}$ thay vì $\overline{AB}$ chính xác hơn, vì $\overline{AB}$ phụ thuộc việc chọn $\vec{u}$ trong $D - \{\vec{0}\}$. Với mọi $A, B, A', B' \in D$ sao cho $A' \neq B'$, số thực $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ không phụ thuộc việc chọn $\vec{u}$ thuộc $\vec{D} - \{\vec{0}\}$.

2) Các tính chất sau đây là hiển nhiên, với mọi điểm A, B, C thuộc D, các số đo đại số đều được "tính" trên trục $(D, \vec{u})$:

$$\begin{cases} \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B \\ \overline{BA} = -\overline{AB} \\ \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \qquad \textbf{(hệ thức Chasles)} \\ \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}. \end{cases}$$

◆ **Mệnh đề - Ký hiệu 2** Với hai điểm phân biệt bất kỳ M_1, M_2 thuộc $\mathcal{A}_2$, tồn tại một và chỉ một đường thẳng afin chứa M_1 và M_2 ; đường thẳng này được ký hiệu là (M_1M_2).

Chứng minh :

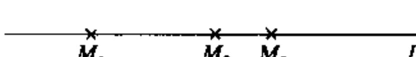
Cho D là một đường thẳng afin chứa M_1 và M_2. Khi đó $M_1 \in D$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ định phương D, vậy $D = M_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ngược lại, đường thẳng afin $M_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{M_1M_2}$ đi qua M_1 (vì $M_1 = M_1 + 0\overrightarrow{M_1M_2}$) và M_2 (vì $M_2 = M_1 + 1\overrightarrow{M_1M_2}$). ■

Vậy ta có : $(M_1M_2) = M_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 + \mathbb{R}\overrightarrow{M_2M_1}$.

◆ **Định nghĩa 4** Ba điểm M_1, M_2, M_3 thuộc $\mathcal{A}_2$ được gọi là **thẳng hàng** khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng afin D của $\mathcal{A}_2$ sao cho :

$\forall i \in \{1, 2, 3\}, M_i \in D$.



Ta có ngay mệnh đề sau.

◆ **Mệnh đề 3** Với mọi điểm $M_i(x_i, y_i)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) thuộc $\mathcal{A}_2$, các tính chất sau đây tương đương từng cặp :

1) M_1, M_2, M_3 thẳng hàng

2) $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ phụ thuộc

3) $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$

4) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Tổng quát hơn, với F là một bộ phận của $\mathcal{A}_2$, ta nói rằng các điểm của F là **thẳng hàng** (hoặc : **đều thẳng hàng**) khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng afin D sao cho $F \subset D$.

Mọi bộ ba, ký hiệu là ABC, gồm ba điểm của $\mathcal{A}_2$ gọi là **tam giác** (trong $\mathcal{A}_2$) ; thường A, B, C được giả thiết là không thẳng hàng ; khi đó, các điểm A, B, C được gọi là các **đỉnh** của tam giác ABC. Mọi bộ bốn, ký hiệu $ABCD$, gồm bốn điểm thuộc $\mathcal{A}_2$ gọi là **tứ giác** (trong $\mathcal{A}_2$) ; thường A, B, C, D được giả thiết là từng ba điểm một không thẳng hàng và lúc bấy giờ ta nói rằng đó là một **tứ giác thực sự**.

2) *Phương trình Descartes của đường thẳng trong $\mathcal{A}_2$*

1) Cho $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{A}_2$, $\vec{u} = (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$, $D = M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$. Với mọi $M(x, y)$ thuộc $\mathcal{A}_2$, ta có :

$$M \in D \Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u, v)).$$

Ta nói rằng $\left(\begin{cases} x = x_0 + \lambda u \\ y = y_0 + \lambda v \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}\right)$ là **một biểu diễn tham số** (viết tắt : BDTS) của đường thẳng D.

Rõ ràng là : $\left(\exists\lambda \in \mathbf{R} \begin{cases} x = x_0 + \lambda u \\ y = y_0 + \lambda v \end{cases}\right) \Leftrightarrow vx - uy + (uy_0 - vx_0) = 0.$

2) Ngược lại, cho $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $(a, b) \neq (0, 0)$, và $\Delta = \{M(x, y) ; ax + by + c = 0\}$. Rõ ràng là tồn tại $M_0(x_0, y_0)$ sao cho $M_0 \in \Delta$ (ta có thể chọn $(x_0, y_0) = \begin{cases} \left(-\dfrac{c}{a}, 0\right) & \text{nếu } a \neq 0 \\ \left(0, -\dfrac{c}{b}\right) & \text{nếu } b \neq 0 \end{cases}$), và khi ký hiệu $\vec{u} = (-b, a)$, ta có với mọi $M(x, y)$ thuộc $\mathcal{A}_2$:

$M \in \Delta \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{M_0M})$ phụ thuộc $\Leftrightarrow M \in M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$.

Điều này chứng tỏ Δ là một đường thẳng afin.

3) Cho $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ sao cho $(a, b) \neq (0, 0)$ và $(a', b') \neq (0, 0)$, D và D' là các đường thẳng afin xác định bởi :

$$D = \{M(x, y) ; ax + by + c = 0\},$$
$$D' = \{M(x, y) ; a'x + b'y + c' = 0\}.$$

• Giả sử $D = D'$. Vì D (tương ứng : D') được định phương bởi $(-b, a)$ (tương ứng : $(-b', a')$), nên tồn tại $k \in \mathbb{R}^*$ sao cho $(-b', a') = k(-b, a)$. Hơn nữa, tồn tại $M_0(x_0, y_0) \in D = D'$, từ đó $\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c' = 0 \end{cases}$, và vì thế $c' = kc$.

Vậy : $(a', b', c') = k(a, b, c)$.

• Ngược lại, rõ ràng là nếu tồn tại $k \in \mathbb{R}^*$ sao cho $(a', b', c') = k(a, b, c)$, thì $D = D'$.

Tóm lại :

♦ Mệnh đề - Định nghĩa

Với mọi đường thẳng afin D của $\mathcal{A}_2$, tồn tại $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$, duy nhất sai khác một hệ tử nhân khác không, sao cho :

$$D = \{M(x, y) ; ax + by + c = 0\} ;$$

ta nói rằng $ax + by + c = 0$ là **một phương trình Descartes** (viết tắt : PTD) của đường D và ký hiệu : $D | \; ax + by + c = 0$.

Ngược lại, với mỗi (a, b, c) thuộc $\mathbb{R}^3$ sao cho $(a, b) \neq (0, 0)$, tập hợp $\{M(x, y) ; ax + by + c = 0\}$ là một đường thẳng afin.

Ta xem như nhau $ax + by + c = 0$ là phương trình Descartes của D hoặc là *một* phương trình Descartes của D.

Một vectơ chỉ phương của $D | \; ax + by + c = 0$ là $(-b, a)$.

Một PTD của đường thẳng D đi qua $M_0(x_0, y_0)$ và được định phương bởi $\vec{u} = (u, v) \neq (0, 0)$, là $-v(x - x_0) + u(y - y_0) = 0$, mà ta có thể nhận được bằng cách khai triển định thức :

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & u \\ y - y_0 & v \end{vmatrix} = 0}$$

VÍ DỤ :

Lập một PTD của đường thẳng D đi qua $M_0(2, -1)$ và được định phương bởi $\vec{u} = (1, 3)$.

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & 1 \\ y + 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 2) - (y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 7 = 0. \quad \blacksquare$$

Một PTD của đường thẳng (M_1M_2), trong đó $M_1(x_1, y_2), M_2(x_2, y_2)$, là :

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_4 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0}$$

VÍ DỤ :

Lập PTD của đường thẳng D nối các điểm $M_1(2, -1)$ và $M_2(-1, 4)$.

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y+1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-2) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y - 7 = 0. \blacksquare$$

Các trường hợp riêng quan trọng :

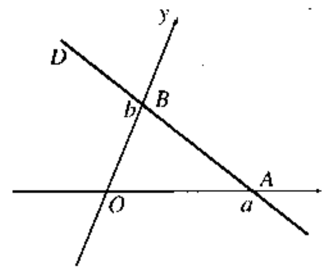
1) *PTD của đường thẳng D đi qua A(a, 0) và B(0, b)* (ta giả thiết $ab \neq 0$)

$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$ phụ thuộc

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & -a \\ y & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow bx + ay = ab$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

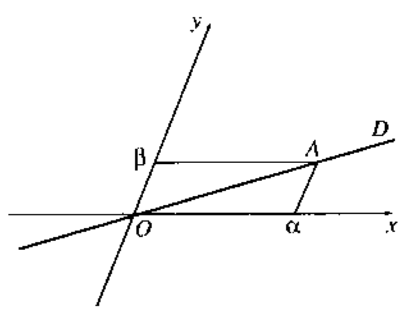


Chẳng hạn, một PTD của đường thẳng nối $A(2, 0)$ và $B(0, 3)$ là $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

2) *PTD của đường thẳng D nối O(0, 0) và một điểm bất kỳ* $A(\alpha, \beta)$ (khác điểm O).

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta x - \alpha y = 0}$$



Chẳng hạn, một PTD của đường thẳng nối $O(0, 0)$ và $A(2, 5)$ là :

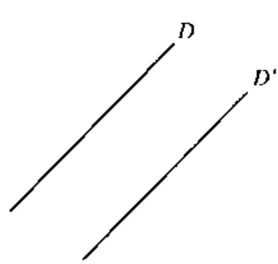
$5x - 2y = 0.$

3) *Tính song song của hai đường thẳng trong $\mathcal{A}_2$*

- **Định nghĩa 1** Cho D, D' là hai đường thẳng afin của $\mathcal{A}_2$. Ta nói rằng D song song với D', và ta ký hiệu $D \mathbin{//} D'$, khi và chỉ khi : $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D'}$.

Như vậy, D song song với D' nếu và chỉ nếu D và D' cùng phương.

Hiển nhiên quan hệ // là một quan hệ tương đương trong tập hợp các đường thẳng afin của $\mathcal{A}_2$. Đặc biệt, vì // là một quan hệ đối xứng, đáng lẽ phải nói "D song song với D'", ta có thể nói "D và D' song song".



♦ **Mệnh đề 1** Muốn cho $D \mid ax + by + c = 0$ và $D' \mid a'x + b'y + c' = 0$ song song, cần và đủ là :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Chứng minh :

D (tương ứng : D') được định phương bởi $\vec{u} = (-b, a)$ (tương ứng : $\vec{u'} = (-b', a')$), vậy :

$$D \,/\!/\, D' \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') \text{ phụ thuộc} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & b' \\ -a & -a' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -ba' + ab' = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$ ■

Một PTD của đường thẳng D' song song với một đường thẳng đã cho $D \mid ax + by + c = 0$ và đi qua một điểm cho trước $M_0(x_0, y_0)$ là :

$$\boxed{a(x - x'_0) + b(y - y_0) = 0}$$

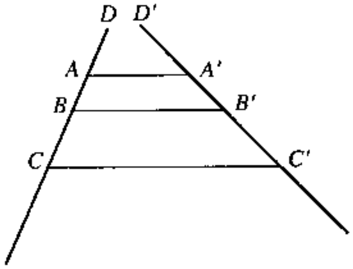
♦ **Định lý (Định lý Thalès)**

Cho $(D, \vec{u})$, $(D', \vec{u}')$ là hai trục sao cho $D \neq D'$; $(A, B, C) \in D^3$, $(A', B', C') \in D'^3$ sao cho $A \neq A', B \neq B', C \neq C', A \neq B, A' \neq B'$ và $(AA') \,/\!/\, (BB')$.

Ta có :

$$(AA') \,/\!/\, (CC') \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Chứng minh :



Một mặt $\overrightarrow{A'C'} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}$. Mặt khác, vì $\overrightarrow{BB'} = (\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AA'}$ và $(AA') \,/\!/\, (BB')$, nên tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AA'}$.

Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}(\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AA'})$$

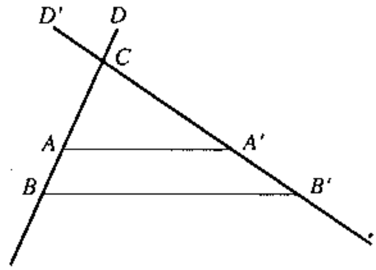
$$= \left(\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)\overrightarrow{AB} + \left(1 + \lambda\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}\right)\overrightarrow{AA'}.$$

Vì $(AB) \,/\!\!\!/\, (AA')$, ta suy ra :

$$(AA') \,/\!/\, (CC') \Leftrightarrow \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 0.$$

♦ **Hệ quả** Cho $(D, \vec{u})$, $(D', \vec{u}')$ là hai trục sao cho $D \cap D'$ là một đơn tử $\{C\}$, và cho $A, B \in D$, $A', B' \in D'$ đều khác C. Ta có :

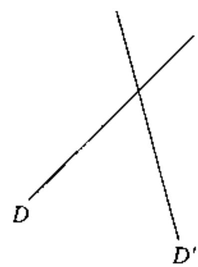
$$(AA') \mathbin{//} (BB') \Leftrightarrow \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}.$$



Giao của hai đường thẳng afin của $\mathcal{A}_2$

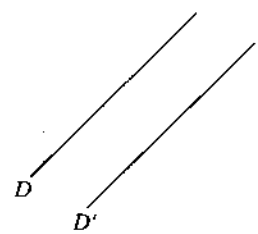
Ta có thể quy về việc giải hệ hai phương trình hai ẩn :

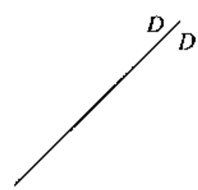
$$(S)\ \begin{cases} D \mid ax + by + c = 0 \\ D' \mid a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$



1) Nếu $D \not\parallel D'$, tức là nếu $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, thì hệ phương trình (S) là một hệ Cramer, vậy sẽ có một và chỉ một nghiệm. Trong trường hợp đó, $D \cap D'$ là một đơn tử.

2) Nếu $D \parallel D'$, tức là nếu $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, thì tồn tại $k \in \mathbb{R}^*$ sao cho $\begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \end{cases}$, và (S) tương đương với $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + \dfrac{c'}{k} = 0 \end{cases}$; vậy (S) vô nghiệm (nếu $c \neq \dfrac{c'}{k}$) hoặc có vô số nghiệm (nếu $c = \dfrac{c'}{k}$).





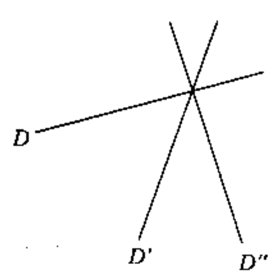
Như thế : $D \cap D' = \varnothing$ hoặc $D \cap D' = D$.

Ta tóm tắt việc khảo sát.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 2** Cho D, D' là hai đường thẳng afin.

Nếu $D \not\parallel D'$ thì $D \cap D'$ là một đơn tử, và ta nói rằng D và D' cắt nhau.

Nếu $D \parallel D'$, thì $D \cap D'$ là tập hợp rỗng (nếu $D \neq D'$) hoặc bằng D (nếu $D = D'$).



♦ **Định nghĩa 2**

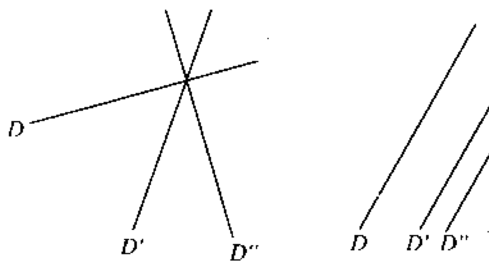
Ba đường thẳng afin D, D', D'' được gọi là **đồng quy** khi và chỉ khi :

$$D \cap D' \cap D'' \neq \varnothing.$$

Chẳng hạn (xem bài tập 1.5.1), các trung tuyến của một hình tam giác đồng quy.

Ta nói rằng ba đường thẳng afin D, D', D'' **đồng quy hoặc song song** khi và chỉ khi :

$$\left| \begin{array}{l} D, D', D'' \text{ đồng quy} \\ \text{hoặc} \\ D, D', D'' \text{ song song (từng đôi)} \end{array} \right.$$

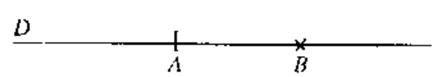


Tổng quát hơn, cho $\mathcal{D}$ một tập hợp những đường thẳng của $\mathcal{A}_2$ (có ít nhất hai phần tử). Ta nói rằng các đường thẳng thuộc $\mathcal{D}$ **đồng quy** khi và chỉ khi $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D \neq \varnothing$. Ta nói rằng các đường thẳng của $\mathcal{D}$ là **đồng quy hoặc song song** khi và chỉ khi chúng đồng quy hoặc (đều) song song.

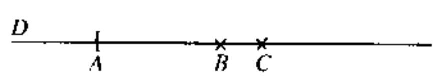
4) *Nửa đường thẳng, nửa mặt phẳng trong $\mathcal{A}_2$*

♦ **Định nghĩa** Cho D là một đường thẳng afin của $\mathcal{A}_2$, A, B là hai điểm thuộc D sao cho $A \neq B$. Tập hợp $A + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB}$ (tương ứng : $A + \mathbf{R}_+^* \overrightarrow{AB}$) gọi là **nửa đường thẳng đóng** (tương ứng : **mở**) **có gốc A và đi qua B**, và ký hiệu là $[AB)$ (tương ứng : $]AB)$).

Ta cũng nói rằng $[AB)$ (tương ứng : $]AB)$) là **nửa đường thẳng đóng** (tương ứng : **mở**) **có gốc** A **và được định phương và định hướng bởi** $\overrightarrow{AB}$.



NHẬN XÉT :



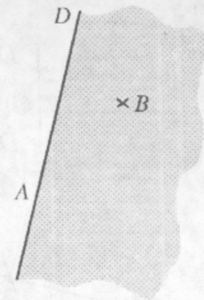
1) Rõ ràng là với mọi điểm C thuộc $]AB)$, ta có :
$[AC) = [AB)$ và $]AC) =]AB)$.

2) $]AB) = [AB) - \{A\}$.

3) Việc cho một điểm A trên đường thẳng D xác định hai nửa đường thẳng gốc A bao hàm trong D.

♦ Mệnh đề - Định nghĩa

Cho D là một đường thẳng afin, $B \in \mathcal{A}_2$ sao cho $B \notin D$. Tập hợp $D + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB}$ (tương ứng : $D + \mathbb{R}_+^* \overrightarrow{AB}$) không phụ thuộc việc chọn A thuộc D và được gọi là **nửa mặt phẳng đóng** (tương ứng : **mở**) **giới hạn bởi** D **và chứa B.**



Ta nhắc lại ký hiệu : $D + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB} = \{H + \lambda \overrightarrow{AB} \; ; (H, \lambda) \in D \times \mathbb{R}_+\}$.

Chứng minh :

Giả sử $A, A' \in D, M \in D + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB}$. Tồn tại $H \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sao cho $M = H + \lambda \overrightarrow{AB}$.
Khi đó ta có : $M = (H + \lambda \overrightarrow{AA'}) + \lambda \overrightarrow{A'B} \in D + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{A'B}$, vì $H + \lambda \overrightarrow{AA'} \in D$.
Điều này chứng tỏ $D + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB} \subset D + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{A'B}$, rồi do các vai trò đối xứng của A, A' suy ra có đẳng thức.

Cũng lập luận tương tự với $\mathbb{R}_+^*$ thay cho $\mathbb{R}_+$.

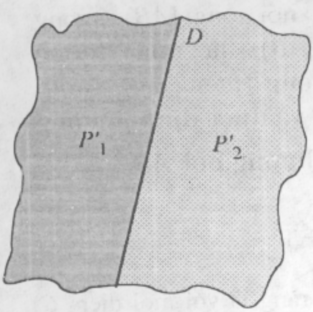
NHẬN XÉT

1) Một lập luận tương tự như trên chứng tỏ rằng, nếu ký hiệu P' (tương ứng : P) là nửa mặt phẳng đóng (tương ứng : mở) giới hạn bởi D và chứa B, thì với mọi điểm M thuộc P, P' (tương ứng : P) cũng là nửa mặt phẳng đóng (tương ứng : mở) giới hạn bởi D và chứa M.

2) Với các ký hiệu trên đây : $D \subset P'$ và $P = P' - D$.

3) Việc cho một đường thẳng D của $\mathcal{A}_2$ xác định đúng hai nửa mặt phẳng đóng P'_1, P'_2 giới hạn bởi D, và ta có :

$$P'_1 \cap P'_2 = D.$$



1.2.2 Mặt phẳng afin trong $\mathcal{A}_3$

Việc nghiên cứu các mặt phẳng afin trong $\mathcal{A}_3$ tương tự việc nghiên cứu các đường thẳng afin trong $\mathcal{A}_2$. Nói tổng quát hơn thì đó là vấn đề nghiên cứu các siêu phẳng afin của một không gian afin hữu hạn chiều (xem 3.2.1, Định nghĩa 3).

1) Đại cương

◆ **Định nghĩa**

1) Cho $A \in \mathcal{A}_3$, $\vec{P}$ là một mặt phẳng vectơ của $\mathbb{R}^3$. Ta gọi tập hợp $A + \vec{P}$ là **mặt phẳng afin đi qua A và định phương bởi $\vec{P}$**.

2) Một bộ phận P của $\mathcal{A}_3$ được gọi là **mặt phẳng afin** (hoặc : **mặt phẳng**) khi và chỉ khi tồn tại một điểm A thuộc $\mathcal{A}_3$ và một mặt phẳng vectơ $\vec{P}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho $P = A + \vec{P}$.

Ta nhắc lại rằng, theo định nghĩa :

$$A + \vec{P} = \{M \in \mathcal{A}_3 ; \exists \vec{x} \in \vec{P}, M = A + \vec{x}\} = \{M \in \mathcal{A}_3 ; \overrightarrow{AM} \in \vec{P}\}.$$

Vậy : $\forall M \in \mathcal{A}_3, \quad (M \in A + \vec{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{P})$.

Từ đó suy ra : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, (\vec{x} \in \vec{P} \Leftrightarrow (\exists M \in \mathcal{A}_3, \vec{x} = \overrightarrow{AM}))$.

Giả sử $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_3$ và $\vec{P}_2$, $\vec{P}_2$ là hai mặt phẳng vectơ, sao cho $A_1 + \vec{P}_1 = A_2 + \vec{P}_2$.

Khi đó $A_2 \in A_1 + \vec{P}_1$, vậy $\overrightarrow{A_1A_2} \in \vec{P}_1$.

Giả sử $\vec{x}_2 \in \vec{P}_2$; vì $A_2 + \vec{x}_2 \in A_2 + \vec{P}_2 = A_1 + \vec{P}_1$, nên tồn tại $\vec{x}_1 \in \vec{P}_1$ sao cho $A_2 + \vec{x}_2 = A_1 + \vec{x}_1$, từ đó $\vec{x}_2 = \overrightarrow{A_2A_1} + \vec{x}_1 \in \vec{P}_1$.

Điều này chứng tỏ $\vec{P}_2 \subset \vec{P}_1$, rồi do các vai trò đối xứng, $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$.

Ta tóm tắt việc nghiên cứu :

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Cho P là một mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$.
Tồn tại một mặt phẳng vectơ duy nhất $\vec{P}$ của $\mathbb{R}^3$, gọi là **phương** của P, sao cho tồn tại A thuộc $\mathcal{A}_3$ thỏa mãn $P = A + \vec{P}$.
Ta gọi mọi cơ sở của $\vec{P}$ là **hệ chỉ phương** của P.

NHẬN XÉT :

1) $\forall M_1, M_2 \in P, \quad \overrightarrow{M_1M_2} \in \vec{P}$.

2) $\forall B \in A + \vec{P}, \quad B + \vec{P} = A + \vec{P}$.

3) Cho $A \in \mathcal{A}_3$, $\vec{P}$ là một mặt phẳng vectơ của $\mathbb{R}^3$, $(\vec{u}, \vec{v})$ là một cơ sở của $\vec{P}$, $P = A + \vec{P}$.

Ánh xạ $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to P \\ (\lambda, \mu) \mapsto A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \end{array}$ là một song ánh

Đặc biệt, vì $\mathbb{R}^2$ là vô hạn, nên mọi mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$ là một tập hợp vô hạn. Song ánh ấy cho phép "đồng nhất" $\mathbb{R}^2$ với một mặt phẳng afin bất kỳ của $\mathcal{A}_3$ và ngược lại.

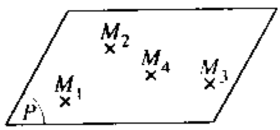
Mệnh đề sau đây là hiển nhiên

◆ **Mệnh đề - Ký hiệu 2** Cho M_1, M_2, M_3 là ba điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ không thẳng hàng (tức là sao cho $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ độc lập). Tồn tại một và chỉ một mặt phẳng afin chứa M_1, M_2, M_3 ; mặt phẳng này được ký hiệu là $(M_1M_2M_3)$, và chính đó là mặt phẳng đi qua M_1 và định phương bởi $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$.

◆ **Định nghĩa 2** Bốn điểm M_1, M_2, M_3, M_4 thuộc $\mathcal{A}_3$ được gọi là **đồng phẳng** khi và chỉ khi có một mặt phẳng P sao cho : $\forall i \in \{1, \ldots, 4\}, M_i \in P$.

Với ký hiệu $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $1 \le i \le 4$, ta có :
(M_1, M_2, M_3, M_4 đồng phẳng)
$\Leftrightarrow$ (($\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}$) phụ thuộc)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

Tổng quát hơn, với F là một bộ phận của $\mathcal{A}_3$, ta nói rằng các điểm thuộc F là **đồng phẳng** (hoặc : **đều đồng phẳng**), khi và chỉ khi có một mặt phẳng afin P sao cho $F \subset P$.

Ta gọi (trong $\mathcal{A}_3$) mọi bộ bốn, ký hiệu là $ABCD$, gồm bốn điểm thuộc $\mathcal{A}_3$, là **tứ diện**. Thường A, B, C, D được giả thiết là không đồng phẳng ; khi đó các điểm A, B, C, D được gọi là các **đỉnh** của tứ diện $ABCD$.

2) Phương trình Descartes của một mặt phẳng của $\mathcal{A}_3$

Cũng lập luận tương tự ở 1.2.2, 2), ta đi đến mệnh đề sau.

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa** Với mọi mặt phẳng afin P của $\mathcal{A}_3$, tồn tại $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, duy nhất sai khác một hệ tử nhân khác không, sao cho $P = \{M(x, y, z) \,;\, ax + by + cz + d = 0\}$; ta nói rằng $ax + by + cz + d = 0$ là **một phương trình Descartes của P**, và ta ký hiệu : $P \mid ax + by + cz + d = 0$.

Ngược lại với mọi (a, b, c, d) thuộc $\mathbb{R}^4$ sao cho $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tập hợp $\{M(x, y, z) \,;\, ax + by + cz + d = 0\}$ là một mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$.

Ta sẽ xem như nhau $ax + by + cz + d = 0$ là phương trình Descartes của P hoặc *một* phương trình Descartes của P.
Ta viết tắt "phương trình Descartes" bằng PTD.

PTD của mặt phẳng P xác định bởi một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và định phương bởi hệ độc lập $(\vec{u}, \vec{v})$, trong đó $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ phụ thuộc} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

VÍ DỤ :

Lập một PTD của mặt phẳng P đi qua $M_0(3, -1, 4)$ và định phương bởi $\vec{u} = (1, 3, -1)$ và $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ y+1 & 3 & 2 \\ z-4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(x - 3) - (y + 1) + 5(z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - y + 5z - 45 = 0.$$

■

PTD của mặt phẳng P đi qua ba điểm không thẳng hàng $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

VÍ DỤ :

Lập một PTD của mặt phẳng P đi qua các điểm $M_1(4, -1, 3)$, $M_2(3, 2, -1)$, $M_3(-1, 3, 2)$.

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -5 \\ y+1 & 3 & 4 \\ z-3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

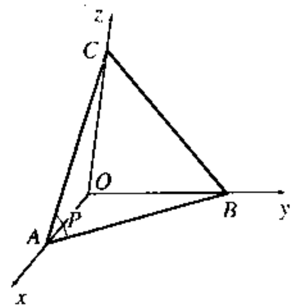
$$\Leftrightarrow 13(x - 4) + 19(y + 1) + 11(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13x + 19y + 11z - 66 = 0.$$

■

Trường hợp riêng quan trọng

PTD của mặt phẳng đi qua $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ (ta giả thiết $abc \neq 0$)



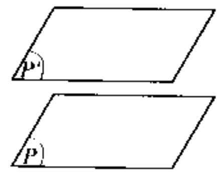
$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow bc(x - a) + acy + abz = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.}$$

3) Tính song song của hai mặt phẳng trong $\mathcal{A}_2$

◆ **Định nghĩa** Cho P, P' là hai mặt phẳng afin. Ta nói rằng P song song với P', và ký hiệu $P//P'$, khi và chỉ khi $\vec{P} = \vec{P'}$.

Hiển nhiên quan hệ // là một quan hệ tương đương trong tập hợp các mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$. Đặc biệt, vì // là một quan hệ đối xứng, nên đáng lẽ phải nói "P song song với P'", ta có thể nói "P và P' song song".



◆ **Mệnh đề** Muốn cho các mặt phẳng
$P \mid ax + by + cz + d = 0$ và $P' \mid a'x + b'y + c'z + d' = 0$
song song, cần và đủ là tồn tại $k \in \mathbb{R}^*$ sao cho :

$$a' = ka,\ b' = kb',\ c' = kc.$$

Chứng minh :

Vì $\vec{P} \mid ax + by + cz = 0$ và $\vec{P'} \mid a'x + b'y + c'z = 0$, cũng lập luận như trên đây, ta được :

$$\vec{P} = \vec{P'} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^*, (a', b', c') = k(a, b, c)).$$

NHẬN XÉT :

1) Phương trình Descartes tổng quát của một mặt phẳng P' song song với một mặt phẳng $P \mid ax + by + cz + d = 0$, là : $P' \mid ax + by + cz + d' = 0$, $d' \in \mathbb{R}$. Đặc biệt, với một điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ và một mặt phẳng $P \mid ax + by + cz + d = 0$ đã cho, tồn tại một và chỉ một mặt phẳng P' đi qua M_o và song song với P, và ta có :

$$P' \mid a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

2) Nếu P và P' là hai mặt phẳng song song, thì $P \cap P' = \varnothing$ hoặc $P = P'$. Chúng ta sẽ thấy phần đảo dưới đây.

4) Nửa không gian

Việc nghiên cứu tương tự như ở 1.2.1,4).

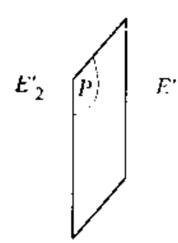
◆ **Mệnh đề - Định nghĩa** Cho P là một mặt phẳng afin, $A \in P$, $B \in \mathcal{A}_3$ sao cho $B \notin P$. Tập hợp $P + \mathbb{R}_+\overrightarrow{AB}$ (tương ứng : $P + \mathbb{R}_+^*\overrightarrow{AB}$) không phụ thuộc việc chọn A thuộc P, và được gọi là **nửa không gian đóng** (tương ứng : *mở*) **giới hạn bởi P và chứa B.**

NHẬN XÉT :

1) Ta ký hiệu E' (tương ứng : E) là nửa không gian đóng (tương ứng : mở) giới hạn bởi P và chứa B ; với mọi M thuộc E, E' (tương ứng : E) cũng là nửa không gian đóng (tương ứng : mở), giới hạn bởi P và chứa M.

2) Với các ký hiệu ở trên : $P \subset E'$ và $E = E' - P$.

3) Việc cho một mặt phẳng P xác định đúng hai nửa không gian đóng E'_1, E'_2 giới hạn bởi P, và ta có $E'_1 \cap E'_2 = P$.



1.2.3 Đường thẳng afin trong $\mathcal{A}_3$

1) Đại cương

Việc khảo sát một phần giống như đối với các đường thẳng trong mặt phẳng, xem 1.2.1, *1*).

- **Định nghĩa 1**

  1) Cho $A \in \mathcal{A}_3$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$. Ta gọi tập hợp các điểm M thuộc $\mathcal{A}_3$ sao cho $\overrightarrow{AM}$ cộng tuyến với $\vec{u}$ (tức là $\overrightarrow{AM} \in \mathbb{R}\,\vec{u}$) là **đường thẳng afin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$**.

  2) Một bộ phận D của $\mathcal{A}_3$ được gọi là **đường thẳng afin** (hoặc : **đường thẳng**) của $\mathcal{A}_3$ khi và chỉ khi tồn tại $(A, \vec{u}) \in \mathcal{A}_3 \times (\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\})$ sao cho D là đường thẳng afin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$.

Đường thẳng afin đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$ là $\{A + \lambda\vec{u}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, cũng được ký hiệu là $A + \mathbb{R}\,\vec{u}$. Ánh xạ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to A + \mathbb{R}\vec{u} \\ \lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} \end{array}$ là một song ánh.

Đặc biệt, vì $\mathbb{R}$ vô hạn, nên mọi đường thẳng afin đều là một tập hợp vô hạn.

NHẬN XÉT :
Ta có thể đồng nhất $\mathbb{R}$ với một đường thẳng bất kỳ của $\mathcal{A}_3$ nhờ ánh xạ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{A}_3 \\ \lambda \mapsto A + \lambda\vec{u} \end{array}$ với $(A, \vec{u}) \in \mathcal{A}_3 \times (\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\})$ cố định. Ngược lại, mỗi đường thẳng afin của $\mathcal{A}_3$ có thể được đồng nhất với $\mathbb{R}$.

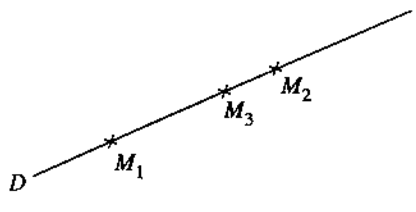
- **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Cho D là một đường thẳng afin của $\mathcal{A}_3$. Mọi vectơ $\vec{v}$ khác vectơ không sao cho tồn tại một điểm A thuộc $\mathcal{A}_3$ thỏa mãn $D = A + \mathbb{R}\vec{v}$ đều cộng tuyến với cùng một vectơ $\vec{u}$. Đường thẳng vectơ $\mathbb{R}\,\vec{u}$ được gọi là **phương** của D và được ký hiệu là $\vec{D}$.

- **Mệnh đề - Ký hiệu 2** Với hai điểm phân biệt bất kỳ M_1, M_2 thuộc $\mathcal{A}_3$, tồn tại một và chỉ một đường thẳng afin chứa M_1 và M_2 ; đường thẳng này được ký hiệu là (M_1M_2).

Vậy : $(M_1M_2) = M_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 + \mathbb{R}\overrightarrow{M_2M_1}$.

- **Định nghĩa 2** Ba điểm M_1, M_2, M_3 thuộc $\mathcal{A}_3$ được gọi là **thẳng hàng** khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng afin D sao cho :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, M_i \in D.$$



Rõ ràng rằng M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ phụ thuộc. Tổng quát hơn, với F là một bộ phận của $\mathcal{A}_3$, ta nói rằng các điểm của F là **thẳng hàng** (hoặc : **đều thẳng hàng**) khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng afin D sao cho : $F \subset D$.

Ta gọi mỗi bộ ba, ký hiệu là ABC, gồm ba điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ là **tam giác** (trong $\mathcal{A}_3$). Thường A, B, C được giả thiết là không thẳng hàng ; khi đó A, B, C được gọi là các **đỉnh** của tam giác ABC.

2) Hệ phương trình Descartes của đường thẳng afin trong $\mathcal{A}_3$

1) Giả sử $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{A}_3$, $\vec{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, $D = M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$ là đường thẳng afin đi qua M_0 và định phương bởi $\vec{u}$. Với mọi $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{A}_3$ ta có :

$$M \in D \Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda u \\ y = y_0 + \lambda v \\ z = z_0 + \lambda w \end{cases}\right).$$

Ta nói rằng $\left(\begin{cases} x = x_0 + \lambda u \\ y = y_0 + \lambda v, \lambda \in \mathbf{R} \\ z = z_0 + \lambda w \end{cases}\right)$ là **một biểu diễn tham số** (viết tắt : BDTS) của D.

- Giả thiết $w \neq 0$. Khi đó ta có thể biểu thị được λ, $\lambda = \dfrac{z - z_0}{w}$, từ đó :

$$M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{z - z_0}{w} u \\ y = y_0 + \dfrac{z - z_0}{w} v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} wx - uz + (uz_0 - wx_0) = 0 \\ wy - vz + (vz_0 - wy_0) = 0 \end{cases}$$

- Nếu $\begin{cases} w = 0 \\ v \neq 0 \end{cases}$, thì : $M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{y - y_0}{v} u \\ z = z_0 \end{cases}$

- Nếu $w = v = 0$, thì : $M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$.

2) Ngược lại, giả sử $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^8$ sao cho $((a, b, c), (a', b', c'))$ độc lập trong $\mathbb{R}^3$, và ký hiệu $\Delta = \left\{M(x, y, z); \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}\right\}$.

- Vì ma trận $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ có hạng 2, nên ta có : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$. Ta giả thiết, chẳng hạn $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Khi đó ta có thể biểu thị x và y theo z ; tồn tại $(\alpha, \beta, p, q) \in \mathbb{R}^4$ (phụ thuộc vào $(a, b, c, d, a', b', c', d')$) sao cho : $\Delta = \left\{M(x, y, z); \begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}\right\}$.

Vậy : $\quad \forall M(x, y, z) \in \mathcal{A}_3, \quad \left(M \in \Delta \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = \alpha\lambda + p \\ y = \beta\lambda + q \\ z = \lambda \end{cases} \right).$

Như thế, Δ là đường thẳng afin đi qua điểm $A(p, q, 0)$ và định phương bởi : $\vec{u}\,(\alpha, \beta, 1)$.
Ta tóm tắt việc khảo sát.

♦ Mệnh đề - Định nghĩa 1

1) Cho D là một đường thẳng afin của $\mathcal{A}_3$. Tồn tại $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^8$ sao cho $((a, b, c), (a', b', c'))$ độc lập trong $\mathbb{R}^3$ và thỏa mãn :

$$D = \left\{ M(x, y, z)\ ;\ \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \right\}.$$

Ta nói rằng $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ là **một hệ phương trình Descartes** (viết tắt : HPTD) của D.

2) Ngược lại, với mọi $(a, b, c, d, a', b', c', d')$ thuộc $\mathbb{R}^8$ sao cho $((a, b, c), (a', b', c'))$ độc lập trong $\mathbb{R}^3$, tập hợp

$\left\{ M(x, y, z); \begin{cases} ax + b + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \right\}$ là một đường thẳng afin của $\mathcal{A}_3$.

NHẬN XÉT :

1) Việc cho một đường thẳng D bằng HPTD $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ quy về việc cho D xem như giao của hai mặt phẳng afin $P \mid ax + by + cz + d = 0$, $P' \mid a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

2) Nếu một đường thẳng D có một HPTD là : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, thì phương $\overrightarrow{D}$ của D có HPTD là : $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$.

VÍ DỤ :

1) Lập một HPTD của đường thẳng D đi qua $M_0(2, -1, 3)$ và định phương bởi $\vec{u} = (1, 3, -2)$.

$$M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{R} \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \dfrac{3 - z}{2} \\ y = -1 + 3\dfrac{3 - z}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2}z + \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

2) Tìm một điểm A và một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng afin D $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$.

Để tìm được điểm A thuộc D, ta chọn (chẳng hạn) một trị của z (chẳng hạn $z = 0$) và xác định x và y : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \end{cases}$.

Một điểm của D sẽ là $A\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{11}{3}, 0\right)$, chẳng hạn.

Để thu được vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của $\vec{D}$, ta chọn (chẳng hạn) một trị của z và xác định x và y bằng hệ phương trình $\vec{D}$ $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases}$, sao cho $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Chẳng hạn, $z = 1$ và $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của D là $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{3}, 1\right)$ hoặc : $(1, 11, 3)$.

NHẬN XÉT :

Ta ký hiệu tập hợp các đường thẳng afin của $\mathcal{A}_3$ là $\mathcal{D}$ và tập hợp các đường thẳng afin D của $\mathcal{A}_3$ sao cho $\vec{D} \not\subset \overrightarrow{xOy}$ là $\mathcal{D}'$ (trong đó xOy là mặt phẳng có phương trình $z = 0$).

Ta đã thấy ở trên là mỗi đường thẳng D thuộc $\mathcal{D}'$ nhận một HPTD có dạng $\begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}$, (α, β, p, q) thuộc $\mathbb{R}^4$.

Ngược lại, với mọi (α, β, p, q) thuộc $\mathbb{R}^4$, đường thẳng afin $D \begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}$ là phần tử của $\mathcal{D}'$. Rõ ràng là ánh xạ $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{D}'$ được xác định như vậy (ánh xạ liên kết đường thẳng $D \begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}$ với (α, β, p, q) thuộc $\mathbb{R}^4$) là một song ánh.

Có thể hình dung rằng việc cho một đường thẳng không nằm ngang của $\mathcal{A}_3$ phụ thuộc bốn tham số thực độc lập.

Một đường thẳng bất kỳ của $\mathcal{A}_3$ nhận một và chỉ một HPTD thuộc một trong ba dạng sau đây :

$\begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}$	$\begin{cases} y = mx + p \\ z = z_0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$
$(\alpha, \beta, p, q) \in \mathbb{R}^4$	$(m, p, z_0) \in \mathbb{R}^3$	$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
nếu $D \not\parallel xOy$	nếu $\begin{cases} D \parallel xOy \\ D \not\parallel Oy \end{cases}$	nếu $D \parallel Oy$

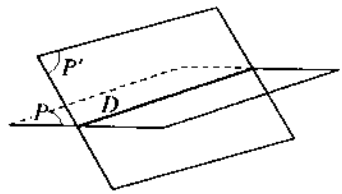
Mệnh đề 2

1) Giao của hai mặt phẳng không song song là một đường thẳng.

2) Mọi đường thẳng đều có thể xem, theo vô số cách, như giao của hai mặt phẳng không song song.

Chứng minh :

1) Nếu $P \mid ax + by + cz + d = 0$ và $P' \mid a'x + b'y + c'z + d' = 0$ không song song, thì $((a, b, c), (a', b', c'))$ độc lập trong $\mathbb{R}^3$, vậy $D = P \cap P'$ là đường thẳng có HPTD $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$.



2) Mỗi đường thẳng D nhận ít nhất một HPTD $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, trong đó $((a, b, c), (a', b', c'))$ độc lập trong $\mathbb{R}^3$, vậy $D = P \cap P'$ với P và P' là các mặt phẳng

$$P \mid ax + by + cz + d = 0,\ P' \mid a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

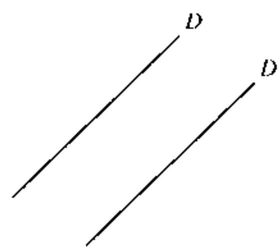
Vì $((a, b, c), (a', b', c'))$ độc lập, nên rõ ràng là với mọi λ thuộc $\mathbb{R}^*$, $((a, b, c), (a + \lambda a', b + \lambda b', c + \lambda c'))$ độc lập. Với ký hiệu P_λ là mặt phẳng afin có PTD $(a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z + (d + \lambda d') = 0$, ta có : $D = P \cap P_\lambda$. Hơn nữa, rõ ràng ánh xạ $\lambda \mapsto P_\lambda$ là đơn ánh trên $\mathbb{R}$ và rằng với mọi λ thuộc $\mathbb{R}^*$, $D = P \cap P_\lambda$.

Xem thêm bài tập 1.2.9 (khái niệm về *chùm tuyến tính các mặt phẳng*).

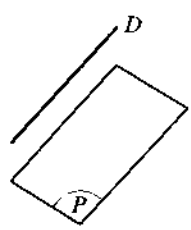
3) Tính song song của đường thẳng và mặt phẳng trong $\mathcal{A}_3$

Định nghĩa 1

1) Cho hai đường thẳng afin D, D' của $\mathcal{A}_3$. Ta nói rằng D **song song** với D', và ký hiệu $D \,//\, D'$, khi và chỉ khi $\vec{D} = \vec{D'}$.



2) Cho đường thẳng afin D của $\mathcal{A}_3$, P là một mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$. Ta nói rằng D **song song** với P (hoặc : P **song song** với D, hoặc D và P **song song**), và ta ký hiệu $D \,//\, P$ (hoặc : $P \,//\, D$), khi và chỉ khi $\vec{D} \subset \vec{P}$.

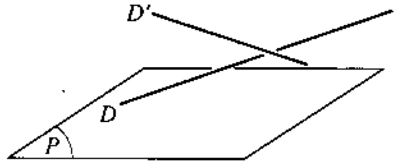


NHẬN XÉT :

1) Hiển nhiên rằng quan hệ // là một quan hệ tương đương trong tập hợp các đường thẳng afin của $\mathcal{A}_3$. Đặc biệt, vì // là một quan hệ đối xứng giữa các đường thẳng, nên đáng lẽ phải nói "D song song với D' " ta có thể nói "D và D' song song" .

2) Quan hệ // giữa đường thẳng và mặt phẳng không có tính bắc cầu. Thật vậy, với các đường thẳng D, D' và một mặt phẳng P, có thể xảy ra trường hợp :

$$\begin{cases} D \,//\, P \\ P \,//\, D' \end{cases} \text{ và } D \not\parallel D'.$$



3) Để khảo sát tính song song của hai đường thẳng D, D', trong thực hành ta xác định các vectơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{u}'$ tương ứng của D, D' và ta có :

$$D \,//\, D' \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') \text{ phụ thuộc.}$$

VÍ DỤ :

ĐKCĐ đối với $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ để cho $D \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = az - 2 \end{cases}$ và $D' \begin{cases} x = bz - 3 \\ y = 4z + 1 \end{cases}$ song song.

Một vectơ chỉ phương của D (tương ứng : D') là $\vec{u} = (2, a, 1)$ (tương ứng : $\vec{u}' = (b, 4, 1)$).

Ta có : $D \,//\, D' \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}')$ phụ thuộc $\Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} b = 2\lambda \\ 4 = \lambda a \\ 1 = \lambda \end{cases} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$

4) Để khảo sát tính song song của một đường thẳng D và một mặt phẳng P, trong thực hành ta xác định vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u, v, w)$ của D và một PTD $ax + by + cz + d = 0$ của P, và ta có :

$$D \,//\, P \Leftrightarrow \vec{D} \subset \vec{P} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{P} \Leftrightarrow au + bv + cw = 0.$$

VÍ DỤ :

ĐKCĐ đối với $a \in \mathbb{R}$ để cho $D \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = az + 1 \end{cases}$ song song với $P \mid x + 2y - 4z + 5 = 0$.

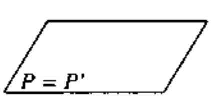
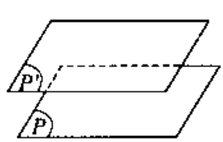
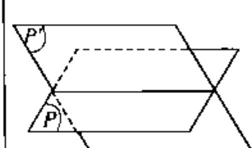
Một vectơ chỉ phương của D là $\vec{u} = (2, a, 1)$. Ta có :

$$D \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{P} \Leftrightarrow 2 + 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Giao của đường thẳng và mặt phẳng

a) Giao của hai mặt phẳng

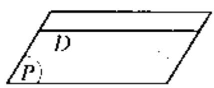
Cho hai mặt phẳng P, P'.

Nếu $P = P'$ thì $P \cap P' = P$	Nếu $P \,//\, P'$ và $P \neq P'$, thì $P \cap P' = \varnothing$	Nếu $P \not\parallel P'$ thì $P \cap P'$ là một đường thẳng afin
		

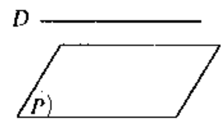
b) Giao của một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho một đường thẳng D, và một mặt phẳng P.

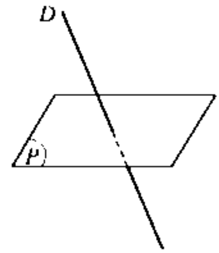
Nếu $D \subset P$, thì $D \cap P = D$



Nếu $D \,//\, P$ và $D \not\subset P$ thì $D \cap P = \varnothing$.



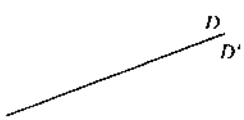
Nếu $D \not\!/\!/\, P$, thì $D \cap P$ là một đơn tử



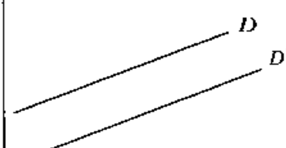
c) Giao của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng D và D'.

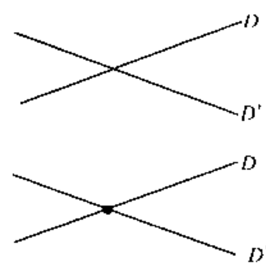
Nếu $D = D'$, thì $D \cap D' = D$



Nếu $D \,//\, D'$ và $D \neq D'$ thì $D \cap D' = \varnothing$



Nếu $D \not\!/\!/\, D'$, thì $D \cap D'$ là tập hợp rỗng hoặc một đơn tử



- **Định nghĩa 2** Hai đường thẳng D, D' được gọi là **đồng phẳng** khi và chỉ khi tồn tại một mặt phẳng P sao cho : $D \subset P$ và $D' \subset P$.

Giả sử D, D' là hai đường thẳng được cho bởi một điểm và một vectơ chỉ phương :

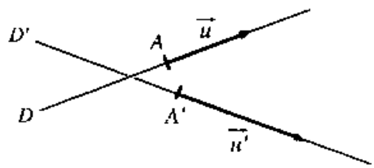
$$A \in D,\ \vec{u} \in \overrightarrow{D} - \{\vec{0}\},\quad A' \in D',\ \vec{u}' \in \overrightarrow{D}' - \{\vec{0}\}.$$

Ta có :

(D, D' đồng phẳng) $\Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}')$ phụ thuộc.

Trong thực hành, ta sẽ biểu thị điều kiện này bởi sự kiện một định thức cấp 3 triệt tiêu.



VÍ DỤ :

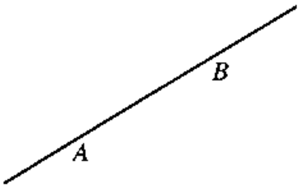
ĐKCĐ đối với $a \in \mathbb{R}$ để cho các đường thẳng $D \begin{cases} x = az - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ và $D' \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z - 1 \end{cases}$ đồng phẳng.

Đường thẳng D đi qua $A(-1, 3, 0)$ và định phương bởi $\vec{u} = (a, 2, 1)$. Đường thẳng D' đi qua $A'(-2, -1, 0)$ và định phương bởi $\vec{u}' = (1, 3, 1)$. Ta có :

$$(D, D' \text{ đồng phẳng}) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}') \text{ phụ thuộc}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

4) Nửa đường thẳng, nửa mặt phẳng trong $\mathcal{A}_3$

Dễ dàng mở rộng những khái niệm đã xét ở 1.2.1,*4*) ra $\mathcal{A}_3$.

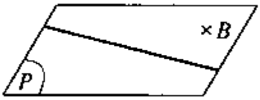


Nửa đường thẳng đóng (tương ứng: **mở) có gốc A và đi qua B** là

$[AB) = A + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{AB}$

(tương ứng : $]AB) = A + \mathbf{R}_+^* \overrightarrow{AB}$).

Nửa mặt phẳng đóng (tương ứng : **mở) giới hạn bởi đường thẳng D và chứa điểm** B $(B \notin D)$ là



$D + \mathbf{R}_+ \overrightarrow{AB}$ (tương ứng : $D + \mathbf{R}_+^* \overrightarrow{AB}$).

Bài tập

Các bài tập 1.2.1 *đến* 1.2.5 *được xét trong mặt phẳng afin $\mathcal{A}_2$, khi cần thiết được trang bị một hệ quy chiếu Descartes* $(O; \vec{i}, \vec{j})$

◊ **1.2.1** Cho bốn điểm A, B, C, D sao cho A, B, C không thẳng hàng. Chứng minh rằng các tính chất sau tương đương từng cặp:

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(ii) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

iii) (A, D) và (B, C) có cùng trung điểm

iv) $(AB) // (CD)$ và $(AC) // (BD)$.

◊ **1.2.2** Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq 4$, $A_1, ..., A_n$ là những điểm phân biệt từng cặp sao cho với mọi i thuộc $\{1, ..., n\}$ các điểm A_j $(1 \leq j \leq n$ và $j \neq i)$ thẳng hàng. Chứng minh $A_1, ..., A_n$ thẳng hàng.

◊ **1.2.3** Cho $A, B, A', B' \in \mathcal{A}_2$ sao cho $A \neq B$ và $A' \neq B'$.

Chứng minh : $[AB) = [A'B') \Leftrightarrow \begin{cases} A' = A \\ \exists k \in \mathbf{R}_+^*, \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \end{cases}$

◊ **1.2.4** Cho $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $n = p + q$ (giả thiết $n \geq 1$), $A_1,\dots,A_n$ là n điểm từng cặp phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng D của mặt phẳng tách các điểm $A_1,\dots,A_n$, sao cho về một phía có đúng p điểm và phía kia là q điểm còn lại.

◊ **1.2.5 Chùm tuyến tính các đường thẳng**

Cho hai đường thẳng phân biệt $D \mid ax + by + c = 0$, $D' \mid a'x + b'y + c' = 0$. Ta gọi tập hợp $\mathfrak{F}_{D,D'}$ các đường thẳng Δ có phương trình :

$$\alpha(ax + by + c) + \alpha'(a'x + b'y + c') = 0$$

là chùm tuyến tính các đường thẳng xác định bởi D và D' khi (α, α') chạy khắp $\mathbb{R}^2$ và $(\alpha a + \alpha' a', \alpha b + \alpha' b') \neq (0, 0)$.

Ta cần chú ý là $\mathfrak{F}_{D,D'}$, không phụ thuộc việc chọn các phương trình của D và D'.

Ta cũng xét tập hợp $\mathfrak{F}'_{D,D'}$ các đường thẳng Δ có phương trình :

$$(ax + by + c) + \lambda(a'x + b'y + c') = 0$$

khi λ chạy khắp $\mathbb{R}$ và $(a + \lambda a', b + \lambda b') \neq (0,0)$.

a) Chứng minh rằng $\mathfrak{F}_{D,D'}$ chứa D, D' và rằng: $\mathfrak{F}'_{D,D'} = \mathfrak{F}_{D,D'} - \{D'\}$.

b) Ta giả thiết rằng D và D' đồng quy tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Chứng minh rằng $\mathfrak{F}_{D,D'}$ là tập hợp các đường thẳng đi qua M_0.

c) Ta giả thiết rằng D và D' song song. Chứng minh rằng $\mathfrak{F}_{D,D'}$ là tập hợp các đường thẳng song song với D (và với D').

Các bài tập 1.2.6 đến 1.2.9 được xét trong không gian afin $\mathcal{A}_3$, khi cần thiết được trang bị một hệ quy chiếu Descartes $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

◊ **1.2.6** Cho hai hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$. Ta ký hiệu I, J, K, L là trung điểm tương ứng của các cặp điểm (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D'). Chứng minh rằng $IJKL$ là một hình bình hành.

◊ **1.2.7** Xác định giao của 3 mặt phẳng :

$P_1 \mid x - 2y + z + 3 = 0$, $P_2 \mid 2x + y - z - 2 = 0$, $P_3 \mid 4x - 3y + z + 4 = 0$.

◊ **1.2.8** Cho P, P' là các mặt phẳng được xác định bởi :

P đi qua $A\,(1, -1, 0)$ và định phương bởi $\vec{u}\ (2, 1, -1)$, $\vec{v}\ (1, 4, 1)$.

P' đi qua $A'(1, 2, 1)$ và định phương bởi $\vec{u}'\ (0, 2, -1)$, $\vec{v}'\ (1, -1, 3)$.

Chứng minh rằng P và P' cắt nhau theo một đường thẳng D và xác định một điểm và một vectơ chỉ phương của D.

◊ **1.2.9 Chùm tuyến tính các mặt phẳng**

Cho $P \mid ax + by + cz + d = 0$, $P' \mid a'x + b'y + c'z + d' = 0$ là hai mặt phẳng phân biệt. Ta gọi tập hợp $\mathfrak{F}_{P,P'}$ các mặt phẳng Π có phương trình

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \alpha'(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

là chùm tuyến tính các mặt phẳng xác định bởi P và P', khi (α, α') chạy khắp $\mathbb{R}^2$ và $(\alpha a + \alpha' a', \alpha b + \alpha' b', \alpha c + \alpha' c') \neq (0, 0, 0)$.

Ta cần lưu ý là $\mathfrak{F}_{P,P'}$ không phụ thuộc vào việc chọn các phương trình của P và P'. Ta cũng xét tập hợp $\mathfrak{F}'_{P,P'}$ các mặt phẳng Π có phương trình $(ax + by + cz + d) + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, với λ chạy khắp $\mathbb{R}$ và $(a + \lambda a', b + \lambda b', c + \lambda c') \neq (0, 0, 0)$.

a) Chứng minh rằng $\mathfrak{F}_{P,P'}$ chứa P và P' và rằng $\mathfrak{F}'_{P,P'} = \mathfrak{F}_{P,P'} - \{P'\}$.

b) Ta giả thiết P và P' cắt nhau theo đường thẳng D_0 (tức là: $P \cap P' = D_0$).

Chứng minh rằng $\mathfrak{F}_{P,P'}$ là tập hợp các mặt phẳng chứa D_0.

Ví dụ : Lập một PTĐ của mặt phẳng Π chứa đường thẳng $D\begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

và đi qua $A(1, -1, 2)$.

c) Ta giả thiết P và P' song song. Chứng tỏ rằng $\mathfrak{F}_{P,P'}$ là tập hợp các mặt phẳng song song với P (và với P').

◊ **1.2.10** *Đúng hay sai* ? (D, D' là những đường thẳng, P, P' là những mặt phẳng)

a) $\begin{cases} D \,//\, D' \\ D' \,//\, P \end{cases} \Rightarrow D \,//\, P$? c) $\begin{cases} D \,//\, P \\ P \,//\, P' \end{cases} \Rightarrow D \,//\, P'$?

b) $\begin{cases} D \,//\, P \\ P \,//\, D' \end{cases} \Rightarrow D \,//\, D'$? d) $\begin{cases} P \,//\, D \\ D \,//\, P' \end{cases} \Rightarrow P \,//\, P'$?

◊ **1.2.11** Cho hai đường thẳng song song D, D', P (tương ứng : P') là một mặt phẳng chứa D (tương ứng : D'). Ta giả thiết $P \not\parallel P'$. Chứng minh : $P \cap P' \,//\, D$.

◊ **1.2.12** Cho hai mặt phẳng song song P, P', Q là một mặt phẳng thỏa mãn $Q \not\parallel P$. Chứng minh : $P \cap Q \,//\, P' \cap Q$.

◊ **1.2.13** Cho ba mặt phẳng từng cặp không song song P, Q, R. Chứng minh rằng các giao của từng cặp trong chúng là ba đường thẳng đồng quy hoặc song song.

◊ **1.2.14** Cho hai mặt phẳng không song song P, P', $\Delta = P \cap P'$, D_1, D_2 là hai đường thẳng đồng quy (và không song song); ta ký hiệu A_1, A_2 (tương ứng : A'_1, A'_2) là các giao điểm theo thứ tự của D_1, D_2 với P (tương ứng : P'). Chứng minh rằng các đường thẳng (A_1, A_2) và (A'_1, A'_2) song song hoặc cắt nhau tại một điểm thuộc Δ.

◊ **1.2.15** Xác định $D \cap D'$ trong hai ví dụ sau, biết rằng D đi qua A và định phương bởi $\vec{u}$ và D' đi qua A' và định phương bởi $\vec{u}'$:

a) $A\,(2, 1, 0)$, $\vec{u}\,(1, -1, 2)$, $A'(0, 2, 1)$, $\vec{u}'\,(2, -1, 1)$.

b) $A(2, 0, 1)$, $\vec{u}\,(1, -1, 2)$, $A'(-1, 1, 1)$, $\vec{u}'\,(2, -1, 1)$.

◊ **1.2.16** Chứng minh rằng hai đường thẳng : $D\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$, $D'\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$

đồng phẳng và lập một PTD của mặt phẳng mà chúng xác định.

◊ **1.2.17** Cho $D\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$, $D'\begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng tồn tại một cặp mặt phẳng (P, P') duy nhất sao cho: $D \subset P$, $D' \subset P'$, $P \,//\, P'$, và lập các PTD của P và P'.

◊ **1.2.18** Cho $D\begin{cases} y = x + 2 \\ z = x \end{cases}$, $D'\begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các đường thẳng Δ trong không gian song song với xOy và cắt D, D', zz'.

◊ **1.2.19** Xác định tất cả các đường thẳng D trong không gian cắt các đường thẳng :

$$D_1\begin{cases} z = -1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}, \quad D_2\begin{cases} z = 0 \\ y = -x + 3 \end{cases}, \quad D_3\begin{cases} z = 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

và song song với mặt phẳng $P \mid x + y - z + 2 = 0$.

1.3 Hệ quy chiếu Descartes

Ta xét phần này trong $\mathcal{A}_3$, vì việc khảo sát trong $\mathcal{A}_2$ cũng tương tự.

♦ **Định nghĩa** Ta gọi mỗi cặp $(\Omega, \mathcal{B})$ trong đó $\Omega \in \mathcal{A}_3$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, là **hệ quy chiếu** (hoặc : **hệ quy chiếu Descartes**) của $\mathcal{A}_3$.

Nếu $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ta sẽ ký hiệu $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ thay vì $\left(\Omega, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right)$

Nếu P là một mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$, ta sẽ gọi mỗi cặp $(\Omega, \mathcal{B})$ với $\Omega \in P$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\vec{P}$, là **hệ quy chiếu** của P.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Cho $\mathcal{R} = \left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ là một hệ quy chiếu của $\mathcal{A}_3$.

Ánh xạ
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathcal{A}_3 \\ (x, y, z) &\mapsto M \end{aligned}$$
trong đó M được định nghĩa bởi $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

là một song ánh ; ta nói rằng x, y, z (hoặc : (x, y, z)) là các **tọa độ của M trong $\mathcal{R}$.**

Nói cách khác, các tọa độ của M trong $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ là các tọa độ (hoặc : các thành phần) của $\overrightarrow{\Omega M}$ trong $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Nếu đang xét nhiều hệ quy chiếu $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$,....., thì tiện hơn là ký hiệu, chẳng hạn, các tọa độ trong $\mathcal{R}$ của một điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ là $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$.

Giả sử $\mathcal{R} = \left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ là một hệ quy chiếu của $\mathcal{A}_3$. Ánh xạ
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathcal{A}_3 \\ M &\mapsto \Omega + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{aligned}$$
là một song ánh, nó cho phép *đồng nhất* $\mathcal{A}_3$ được trang bị $\mathcal{R}$, và $\mathbb{R}^3$.

Các thuật ngữ đã dùng (PTD của một mặt phẳng của $\mathcal{A}_3$, HPTD của một đường thẳng của $\mathcal{A}_3$), cũng áp dụng được cho $\mathcal{A}_3$ được trang bị $\mathcal{R}$. Chẳng hạn, tập hợp các điểm M có tọa độ (x, y, z) trong $\mathcal{R}$ thỏa mãn $ax + by + cz + d = 0$ (trong đó $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ cố định sao cho $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$), là một mặt phẳng afin P, và ta nói rằng P nhận PTD : $ax + by + cz + d = 0$ trong $\mathcal{R}$.

Ta gọi cặp $(O, \mathcal{B})$ trong đó $O = (0, 0, 0)$ và $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, là **hệ quy chiếu chính tắc** của $\mathbb{R}^3$.

♦ **Mệnh đề 2** **(Công thức đổi hệ quy chiếu)**

Cho $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathcal{R}' = (\Omega'; \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k})$ là hai hệ quy chiếu, (x_0, y_0, z_0) là các tọa độ của Ω' trong $\mathcal{R}$, P là ma trận chuyển từ cơ sở $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ sang cơ sở $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Với mọi điểm M thuộc $\mathcal{A}_3$, khi ký hiệu (x, y, z) là các tọa độ của M trong $\mathcal{R}$ và (x', y', z') là các tọa độ của M trong $\mathcal{R}'$, thì ta có :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Chứng minh :

Theo hệ thức Chasles, $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M}$, từ đó có kết quả bằng cách chuyển sang các thành phần trong cơ sở $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ và sử dụng công thức đổi cơ sở cho một vectơ (xem Tập 5, 8.2.2 Mệnh đề).

NHẬN XÉT

1) Như vậy ta biểu diễn các *tọa độ cũ* (x, y, z) của M theo các *tọa độ mới* (x', y', z') của nó.

2) Trong trường hợp riêng khi ta chỉ đổi gốc tọa độ, thì ta sẽ có các công thức đổi hệ quy chiếu bằng phép "đổi gốc tọa độ" :

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

VÍ DỤ :

1) PTD của một đường thẳng trong một hệ quy chiếu mới

Giả sử $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $O = (0, 0, 0)$, $\mathcal{R}_0 = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, A là điểm có các tọa độ $(1, -1, 3)$ trong $\mathcal{R}_0$, $\vec{i}' = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j}' = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{k}' = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

D là đường thẳng có HPTD trong $\mathcal{R}_0$: $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 4y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$.

Lập một HPTD của D trong $\mathcal{R}' = (A;\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

Nhận xét trước tiên rằng $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ đúng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (chẳng hạn, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$).

Các công thức đổi hệ quy chiếu biểu diễn các tọa độ cũ (x, y, z) của một điểm M bất kỳ thuộc $\mathcal{A}_3$ theo các tọa độ mới (x', y', z') của nó là :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Tức là : $$\begin{cases} x = 2x' + y' - z' + 1 \\ y = -x' + y' + 3z' - 1 \\ z = 3y' + z' + 3 \end{cases}.$$

Từ đó : $$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 5x' + 10y' - 2z' + 11 = 0 \\ 2x' + 13y' - 5z' + 19 = 0 \end{cases}.$$

2) BDTS một đường thẳng trong một hệ quy chiếu mới

Cho $\mathcal{R}_0 = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ là hệ quy chiếu chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $A(2,1,1)_{\mathcal{R}_0}$, $\vec{i}' = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{j}' = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{k}' = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, D là đường thẳng đi qua $M_0(1, -1, 3)_{\mathcal{R}_0}$, và định phương bởi $\vec{u} = (3,2,-4)$. Lập một BDTS của D trong $\mathcal{R}' = (A;\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

Ta ký hiệu $P = \mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vì P khả nghịch ($\det(P) = 4 \neq 0$), nên $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ đúng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Các công thức đổi hệ quy chiếu cho một điểm M ($(x, y, z)_{\mathcal{R}_0}$, $(x', y', z')_{\mathcal{R}'}$) bất kỳ là :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Ở đây ta phải biểu diễn x', y', z' theo x, y, z. Ta tính nghịch đảo của P :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Từ đó : $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x-y-z-4 \\ -x+3y-z \\ -x-y+3z \end{pmatrix}.$$

Vì D nhận BDTS $\left\{\begin{array}{l} x = 1+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3-4\lambda \end{array}\right|$ trong $\mathcal{R}_0$ nên D nhận BDTS trong $\mathcal{R}'$:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{4}(11\lambda - 3) \\ y' = \dfrac{1}{4}(7\lambda - 7) \\ z' = \dfrac{1}{4}(-17\lambda + 9) \end{array}\right|, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bài tập

Các bài tập 1.3.1 *và* 1.3.2 *được xét trong mặt phẳng afin* $\mathcal{A}_2$.

◊ **1.3.1** Cho A, B, C, A', B', C' là sáu điểm phân biệt từng cặp sao cho A, B, C thẳng hàng và A', B', C' thẳng hàng. Chứng minh :

$$\left\{\begin{array}{l} (AB') \,/\!/\, (BA') \\ (BC') \,/\!/\, (CB') \end{array}\right| \Rightarrow (AC') \,/\!/\, (CA').$$

◊ **1.3.2*** **Định lý Pappus**

Cho D, D' là hai đường thẳng, $(A, B, C) \in D^3$, $(A', B', C') \in D'^3$. Ta ký hiệu:

$$(AB') \cap (BA') = \{C''\},\ (BC') \cap (CB') = \{A''\},\ (CA') \cap (AC') = \{B''\}$$

(ta giả thiết rằng các đường thẳng và các điểm được xét đều tồn tại).

Chứng minh rằng A'', B'', C'' thẳng hàng.

Các bài tập 1.3.3 đến 1.3.6 được xét trong không gian afin $\mathcal{A}_3$.

◊ **1.3.3*** Cho A, B, C, D là bốn điểm không đồng phẳng, M, N, P, Q là những điểm được lấy theo thứ tự trên các đường thẳng (AB), (BC), (CD), (DA). Chứng minh rằng M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \ .$$

◊ **1.3.4*** Cho D, D', D'' là ba đường thẳng đồng quy tại điểm 0; P_1, P_2, P_3 là ba mặt phẳng song song, P_1 và P_2 không đối xứng qua O. Ta ký hiệu :

A_1, B_1, C_1 là các giao điểm theo thứ tự của P_1 với D, D', D''

A_2, B_2, C_2 là các giao điểm theo thứ tự của P_2 với D, D', D''

A_3, B_3, C_3 là các giao điểm theo thứ tự của P_3 với D, D', D''.

$(B_1C_2) \cap (B_2C_1) = \{L\}$, $(C_1A_2) \cap (C_2A_1) = \{M\}$, $(A_1B_2) \cap (A_2B_1) = \{N\}$

Chứng minh rằng các đường thẳng (LA_3), (MB_3), (NC_3) đồng quy hoặc song song.

◊ **1.3.5*** Cho A_1, A_2, A_3, A_4 là bốn điểm không đồng phẳng và M là một điểm. Ta giả thiết rằng mặt phẳng (MA_1A_2) (tương ứng : (MA_2A_3), tương ứng : (MA_3A_4), tương ứng : (MA_4A_1)) cắt đường thẳng (A_3A_4) (tương ứng (A_4A_1), tương ứng : (A_1A_2), tương ứng : (A_2A_3)) tại một điểm B_1 (tương ứng : B_2, tương ứng : B_3, tương ứng : B_4). Chứng minh rằng B_1, B_2, B_3, B_4 đồng phẳng.

◊ **1.3.6*** Cho A, B, C, A', B', C' là sáu điểm sao cho tồn tại $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ thỏa mãn :

$$\begin{cases} A, B, C \quad \text{không thẳng hàng} \\ \vec{u} \text{ không thuộc phương của mặt phẳng } (ABC) \ . \\ \overrightarrow{AA'} = \alpha\vec{u}, \qquad \overrightarrow{BB'} = \beta\vec{u}, \qquad \overrightarrow{CC'} = \gamma\vec{u} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng song song với ba mặt phẳng $(A'BC)$, $(AB'C)$, (ABC') khi và chỉ khi :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \, .$$

1.4 Ánh xạ afin

1.4.1 Đại cương

- **Định nghĩa** Một ánh xạ $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ được gọi là **ánh xạ afin** khi và chỉ khi tồn tại $A \in \mathcal{A}_3$ sao cho ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định nghĩa bởi :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{x})}$$

là tuyến tính.

Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ afin từ $\mathcal{A}_3$ vào $\mathcal{A}_3$ là Aff $(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$.

Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa khái niệm ánh xạ afin từ một không gian *vectơ* E vào một không gian *vectơ* F (xem dưới đây, 3.3.1).

Với các ký hiệu trong định nghĩa trên, với mọi B thuộc $\mathcal{A}_3$, ta có :

$\varphi(\overrightarrow{BM}) = \varphi(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{AM}) - \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(M)} - \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(B)f(M)}$.

Đặc biệt, φ không phụ thuộc vào việc chọn A (trong $\mathcal{A}_3$). Từ đó có định nghĩa sau :

- **Mệnh đề - Định nghĩa - Ký hiệu 1** Cho $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một ánh xạ afin. Tồn tại một và chỉ một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^3$, gọi là **bộ phận tuyến tính** của f (hoặc : **ánh xạ tuyến tính liên kết với** f), được ký hiệu là $\vec{f}$, sao cho :

$$\forall (A, M) \in (\mathcal{A}_3)^2, \quad \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}.$$

- **Mệnh đề 2** Cho $f \in$ Aff $(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$. Ta có :

$$\forall A \in \mathcal{A}_3, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$$

Chứng minh :

Ký hiệu $M = A + \vec{u}$, ta có :

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(M)} = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}).$$

Biểu thức Descartes của một ánh xạ afin

Cho $f \in$ Aff$(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$, $\mathcal{R} = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathcal{R}' = (\Omega'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ là hai hệ quy chiếu của $\mathcal{A}_3$, (α, β, γ) là các tọa độ của $f(\Omega)$ trong $\mathcal{R}'$.

$A = \mathrm{Mat}_{((\vec{i},\vec{j},\vec{k}),(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'))}(\vec{f})$, M là một điểm bất kỳ thuộc $\mathcal{A}_3$, (x, y, z) là các tọa độ của M trong $\mathcal{R}$, (x', y', z') là tọa độ của $f(M)$ trong $\mathcal{R}'$.

Vì $f(M) = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})$, ta có :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

◆ **Mệnh đề 3**

1) Nếu $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ và g : $\mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ đều là afin, thì $g{\circ}f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là afin, và $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

2) Cho $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là afin. Muốn cho f là song ánh, cần và đủ $\vec{f}$ cũng là song ánh, và khi đó f^{-1} là afin và $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.

Chứng minh :

1) Với mọi A, M thuộc $\mathcal{A}_3$:

$$\overrightarrow{g{\circ}f(A)g{\circ}f(M)} = \overrightarrow{g(f(A))g(f(M))} = \vec{g}(\overrightarrow{f(A)f(M)}) = \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{AM})) = \vec{g}{\circ}\vec{f}(\overrightarrow{AM})$$

Vì $\vec{g}{\circ}\vec{f}$ tuyến tính, nên suy ra rằng $g{\circ}f$ là afin và $\overrightarrow{g{\circ}f} = \vec{g}{\circ}\vec{f}$

2) Cho ánh xạ afin $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$:

• Giả sử $A \in \mathcal{A}_3$; ta ký hiệu $\alpha : \begin{array}{c}\mathcal{A}_3 \to \mathbb{R}^3\\ M \mapsto \overrightarrow{AM}\end{array}$ và $\beta : \begin{array}{c}\mathcal{A}_3 \to \mathbb{R}^3\\ M' \mapsto \overrightarrow{f(A)M'}\end{array}$. Ta có :

$$\forall M \in \mathcal{A}_3,\ (\vec{f} \circ \alpha)(M) = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$$
$$= \beta(f(M)) = \beta \circ f(M)$$

Vậy thì: $\vec{f} \circ \alpha = \beta \circ f$ (ta nói rằng biểu đồ $\begin{array}{ccc}\mathcal{A}_3 & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}_3\\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta\\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow[\vec{f}]{} & \mathbf{R}^3\end{array}$ *giao hoán*).

Khi đó rõ ràng f là song ánh khi và chỉ khi $\vec{f}$ là song ánh (vì α và β đều là song ánh).

• Giả thiết rằng f là song ánh. Cho $A', M' \in \mathcal{A}_3$; ký hiệu $A = f^{-1}(A')$, $M = f^{-1}(M')$, ta có :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}),$$

từ đó : $$\overrightarrow{f^{-1}(A')f^{-1}(M')} = \overrightarrow{AM} = (\vec{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M'}).$$

Vì $\vec{f}^{-1}$ tuyến tính, kết quả là f^{-1} là ánh xạ afin và $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ ■

Các Mệnh đề sau đây là hiển nhiên :

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 4** Tập hợp các ánh xạ afin từ $\mathcal{A}_3$ vào $\mathcal{A}_3$ là một nhóm đối với $\circ$, gọi là **nhóm afin** của $\mathcal{A}_3$, ký hiệu là GAff($\mathcal{A}_3$).

♦ **Mệnh đề 5** Cho ánh xạ afin $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$.

1) Với mọi đường thẳng D của $\mathcal{A}_3$, $f(D)$ là một đường thẳng hoặc một đơn tử của $\mathcal{A}_3$.

2) Với mọi mặt phẳng P của $\mathcal{A}_3$, $f(P)$ là một mặt phẳng hoặc một đường thẳng hoặc một đơn tử của $\mathcal{A}_3$.

Tổng quát hơn, dưới đây ta sẽ xét ảnh của một không gian afin con qua một ánh xạ afin (3.3.1, Mệnh đề 6).

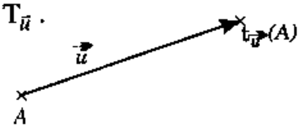
♦ **Mệnh đề 6** Cho M_1, M_2, M_3 là ba điểm thẳng hàng thuộc $\mathcal{A}_3$, $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là afin, khi đó $f(M_1), f(M_2), f(M_3)$ thẳng hàng.

Nói cách khác, các ánh xạ afin bảo toàn tính thẳng hàng. Chúng cũng bảo toàn tính đồng phẳng.

1.4.2 Các ví dụ thông thường về ánh xạ afin

1) Phép tịnh tiến

♦ **Định nghĩa** Với mọi $\vec{u}$ thuộc $\mathbb{R}^3$, ta gọi ánh xạ $\mathrm{T}_{\vec{u}} : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là
$$A \mapsto A + \vec{u}$$
phép **tịnh tiến** theo vectơ $\vec{u}$, và ký hiệu là $\mathrm{T}_{\vec{u}}$.



Các mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 1** Một ánh xạ $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một phép tịnh tiến khi và chỉ khi : f là ánh xạ afin và $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$.

♦ **Mệnh đề 2**

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^3$, $\mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{T}_{\vec{v}} = \mathrm{T}_{\vec{u}+\vec{v}}$

2) $\mathrm{T}_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}^3}$

3) Với mọi $\vec{u}$ thuộc $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ là song ánh và $(\mathrm{T}_{\vec{u}})^{-1} = \mathrm{T}_{-\vec{u}}$.

♦ **Mệnh đề 3** Tập hợp $\{\mathrm{T}_{\vec{u}} ; \vec{u} \in \mathbf{R}^3\}$ là một nhóm đối với luật $\circ$, và ánh xạ $\vec{u} \mapsto \mathrm{T}_{\vec{u}}$ là một phép đẳng cấu từ nhóm $(\mathbb{R}^3, +)$ lên nhóm đó.

♦ **Mệnh đe 4** Với mọi (A, A') thuộc $(\mathcal{A}_3)^2$, tồn tại một và chỉ một phép tịnh tiến dời A đến A', và đó là $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AA'}}$.

Mệnh đề 5

1) Cho $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

- Với mọi đường thẳng D của $\mathcal{A}_3$, $\mathrm{T}_{\vec{u}}(D)$ là một đường thẳng của $\mathcal{A}_3$ song song với D.
- Với mọi mặt phẳng P của $\mathcal{A}_3$, $\mathrm{T}_{\vec{u}}(P)$ là một mặt phẳng của $\mathcal{A}_3$ song song với P.

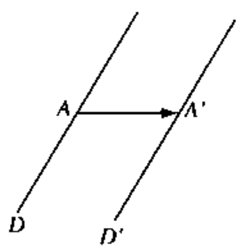
2) Ngược lại :

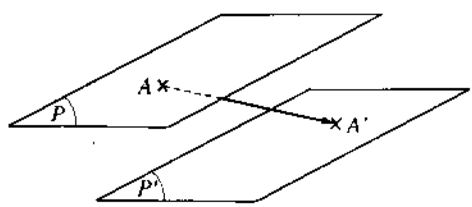
- Với những đường thẳng D, D' song song bất kỳ, ta có :

$$\forall A \in D,\ \forall A' \in D',\ \mathrm{T}_{\overrightarrow{AA'}}(D) = D'$$

- Với những mặt phẳng P, P' song song bất kỳ, ta có :

$$\forall A \in P,\ \forall A' \in P',\ \mathrm{T}_{\overrightarrow{AA'}}(P) = P'.$$





Mệnh đề 6 Cho $A \in \mathcal{A}_3, f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$. Tồn tại một cặp $(\vec{u}, g)$ duy nhất thuộc $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{Aff}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$ sao cho :

$$\begin{cases} f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g \\ g(A) = A \end{cases}.$$

Chứng minh :

1) **Tính duy nhất**

Giả sử $(\vec{u}, g)$ thích hợp. Ta có $f(A) = \mathrm{T}_{\vec{u}}(g(A)) = \mathrm{T}_{\vec{u}}(A)$, vậy $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$, rồi $g = \mathrm{T}_{-\vec{u}} \circ f$.

2) **Sự tồn tại**

Ta ký hiệu $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$, và $g = \mathrm{T}_{-\vec{u}} \circ f$.

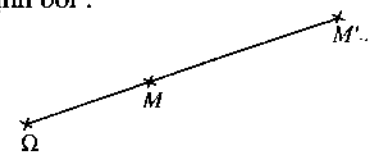
Vậy thì g là ánh xạ afin, $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g$, và $g(A) = \mathrm{T}_{-\vec{u}}(f(A)) = A$.

2) Phép vị tự

◆ **Định nghĩa** Cho $\Omega \in \mathcal{A}_3$, $k \in \mathbb{R}^*$. **Phép vị tự tâm Ω và tỷ số k**, ký hiệu $H_{\Omega,k}$, là ánh xạ $H_{\Omega,k} : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ xác định bởi :

$$M \mapsto M'$$

$$\forall M \in \mathcal{A}_3, \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$



Nói cách khác : $\forall M \in \mathcal{A}_3, H_{\Omega,k}(M) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}.$

NHẬN XÉT :

Với mọi Ω, Ω' thuộc $\mathcal{A}_3$, mọi k, k' thuộc $\mathbb{R} - \{0,1\}$, ta có :

$$H_{\Omega,k} = H_{\Omega',k'} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ k = k' \end{cases}.$$

Như vậy, một phép vị tự của $\mathcal{A}_3$ (ngoài phép đồng nhất) có một và chỉ một tâm, và một và chỉ một tỷ số. ■

Các mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề 1** Một ánh xạ $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một phép vị tự khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f \text{ là ánh xạ afin} \\ f \text{ có ít nhất là một điểm bất động} \\ \text{Tồn tại } k \in \mathbb{R}^* \text{ sao cho } \vec{f} = k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

Ta nói rằng một điểm A thuộc $\mathcal{A}_3$ là *bất động* (hoặc : *bất biến*), qua một ánh xạ $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ khi và chỉ khi $f(A) = A$.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $\Omega \in \mathcal{A}_3$. Ta có :

1) $\forall k, k' \in \mathbf{R}^*, \ H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'} = H_{\Omega,kk'}$.

2) $H_{\Omega,1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_3}$

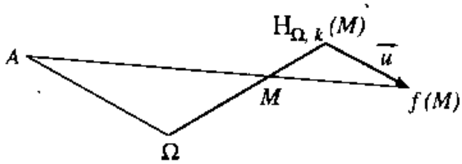
3) $\forall k \in \mathbf{R}^*, \left(H_{\Omega,k} \in \mathrm{GAff}(\mathcal{A}_3) \text{ và } H_{\Omega,k}^{-1} = H_{\Omega,k^{-1}} \right).$

Tập hợp các phép vị tự tâm Ω là một nhóm đối với $\circ$, và ánh xạ $k \mapsto H_{\Omega,k}$ là một phép đẳng cấu từ nhóm $(\mathbb{R}^*, \times)$ lên nhóm đó. ■

Ta khảo sát theo một cách tổng quát hơn, tích của hai phép vị tự có tâm khác nhau, và tích của một phép vị tự với một phép tịnh tiến.

1) Cho $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$,
$(\Omega, k) \in \mathcal{A}_3 \times \mathbf{R}^*$, $f = T_{\vec{u}} \circ H_{\Omega,k}$.

Ta tìm một điểm bất động A nếu có của f; ta có :



$$f(A) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \vec{u} + k\overrightarrow{\Omega A}.$$

Ta giả thiết $k \neq 1$ (nếu $k = 1$, thì $f = T_{\vec{u}} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{A}^3} = T_{\vec{u}}$).

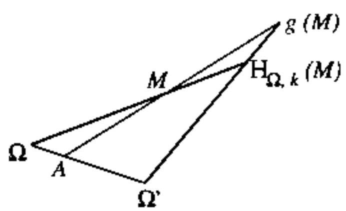
Vậy : $f(A) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}.$

Xét điểm A thuộc $\mathcal{A}_3$ xác định bởi $\overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$. Ta có, với mọi M thuộc $\mathcal{A}_3$:

$$\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{H_{\Omega,k}}(\overrightarrow{AM}) = k\overrightarrow{AM}.$$

Vậy f là phép vị tự tâm A và tỷ số k.

2) Cho $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $(\Omega, k) \in \mathcal{A}_3 \times \mathbb{R}^*$. Vì $H_{\Omega,k} \circ T_{\vec{u}} = T_{-\vec{u}} \circ H_{\Omega,k^{-1}}$, nên theo 1), $H_{\Omega,k} \circ T_{\vec{u}}$ là một phép vị tự (nếu $k \neq 1$).



3) Cho $\Omega, \Omega' \in \mathcal{A}_3$, $k, k' \in \mathbb{R}^*$, $g = H_{\Omega',k'} \circ H_{\Omega,k}$.

Ta tìm một điểm bất động A nếu có của g.

Ta có :

$$g(A) = A \Leftrightarrow \left(\exists A_1 \in \mathcal{A}_3 \begin{cases} A_1 = H_{\Omega,k}(A) \\ A = H_{\Omega',k'}(A_1) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\exists A_1 \in \mathcal{A}_3, \begin{cases} \overrightarrow{\Omega A_1} = k\overrightarrow{\Omega A} \\ \overrightarrow{\Omega' A_1} = k'\overrightarrow{\Omega' A_1} \end{cases}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega' A} = k'\left(\overrightarrow{\Omega'\Omega} + k\overrightarrow{\Omega A}\right) \Leftrightarrow \left(1 - kk'\right)\overrightarrow{\Omega A} = \left(1 - k'\right)\overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

- Nếu $kk' \neq 1$, thì g nhận một điểm bất động duy nhất A, xác định bởi $\overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1-k'}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, và ta có, với mọi M thuộc $\mathcal{A}_3$:

$$\overrightarrow{Ag(M)} = \overrightarrow{g(A)g(M)} = \vec{g}\,(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{H_{\Omega',k'}} \circ \overrightarrow{H_{\Omega,k}}(\overrightarrow{AM}) = kk'\,\overrightarrow{AM},$$

vậy $g = H_{A,kk'}$.

- Nếu $kk' = 1$, $\vec{g} = \overrightarrow{H_{\Omega',\frac{1}{k}}} \circ \overrightarrow{H_{\Omega,k}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$, vậy g là một phép tịnh tiến ; hơn nữa :

$$\overrightarrow{\Omega\, g(\Omega)} = k'\overrightarrow{\Omega\Omega'}, \text{ vậy } g = T_{k'\overrightarrow{\Omega\Omega'}}.$$

Việc khảo sát trên đây cùng với những nhận xét đơn giản cho ta Mệnh đề sau :

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 3**

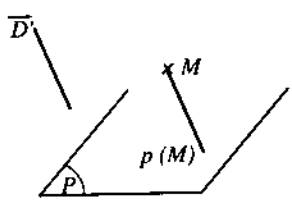
Tập hợp $\left\{T_{\vec{u}}\,;\ \vec{u}\in\mathbf{R}^3\right\}\cup\left\{H_{\Omega,\,k}\,;(\Omega,k)\in\mathcal{A}_3\times\mathbf{R}^*\right\}$ là một nhóm con của GAff($\mathcal{A}_3$), gọi là **nhóm các phép vị tự - tịnh tiến của $\mathcal{A}_3$**.

3) Phép chiếu

◆ **Định nghĩa** Cho $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ của $\mathbb{R}^3$, P là một mặt phẳng afin của $\mathcal{A}_3$, sao cho $\overrightarrow{D'}\not\subset\overrightarrow{P}$.

Phép chiếu (hoặc : **toán tử chiếu**) **lên** P **song song với** $\overrightarrow{D'}$, ký hiệu $p_{P,\overrightarrow{D'}}$ là ánh xạ từ $\mathcal{A}_3$ vào $\mathcal{A}_3$ cho ứng mỗi điểm M thuộc $\mathcal{A}_3$ với điểm M' thuộc $\mathcal{A}_3$ sao cho :

$$M'\in P \quad\text{và}\quad \overrightarrow{MM'}\in\overrightarrow{D'}.$$



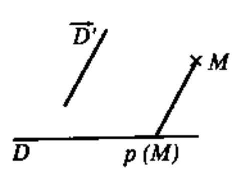
NHẬN XÉT :

1) Nếu ký hiệu A là một điểm bất kỳ của P và $\pi_{\vec{P},\vec{D}'}$ là phép (toán tử) chiếu (tuyến tính) lên $\vec{P}$ song song với $\overrightarrow{D'}$ (Xem Tập 5, 7.1.1, Ví dụ 2) thì ta có :

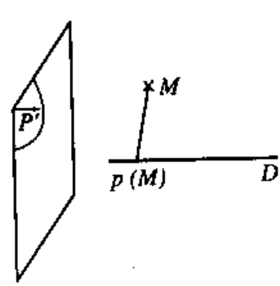
$$\forall M\in\mathcal{A}_3,\ \overrightarrow{A\mathrm{p}_{P,\vec{D}'}(M)}=\pi_{\vec{P},\vec{D}'}(\overrightarrow{AM}).$$

2) Ta định nghĩa một cách tương tự :

- Trong $\mathcal{A}_2$, phép chiếu lên D song song với $\overrightarrow{D'}$, trong đó D là một đường thẳng afin, $\overrightarrow{D'}$ là đường thẳng vectơ sao cho $\overrightarrow{D}\neq\overrightarrow{D'}$.



- Trong $\mathcal{A}_3$, phép chiếu lên D song song với $\overrightarrow{P'}$, trong đó D là một đường thẳng afin, $\overrightarrow{P'}$ là một mặt phẳng vectơ sao cho $\overrightarrow{D}\notin\overrightarrow{P'}$.



Tổng quát hơn, xem dưới đây 3.3.2, 3).

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề** Cho $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ, P là một mặt phẳng afin sao cho $\overrightarrow{D'} \not\subset \vec{P}$. Phép chiếu $p_{P,\overrightarrow{D'}}$ là ánh xạ afin, và $\overrightarrow{p_{P,\overrightarrow{D'}}}$ là một phép chiếu (tuyến tính) lên $\vec{P}$ song song với $\overrightarrow{D'}$.

Như vậy : $\overrightarrow{p_{P,\overrightarrow{D'}}} = p_{\vec{P},\overrightarrow{D'}}$.

Cho $A \in P$, $(\vec{i},\vec{j})$ là một cơ sở của P, $(\vec{k})$ là một cơ sở của $(\overrightarrow{D'})$; rõ ràng là $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Cho $M \in \mathcal{A}_3$, (x, y, z) là các tọa độ của M trong hệ quy chiếu $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Khi đó các tọa độ (x', y', z') của hình chiếu M' của M lên P song song với $\overrightarrow{D'}$ được cho bởi :

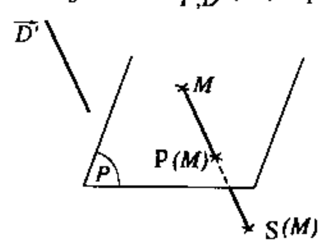
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Phép đối xứng

◆ **Định nghĩa 1** Cho P là một mặt phẳng afin, $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ, p là phép chiếu lên P song song với $\overrightarrow{D'}$.

Phép đối xứng qua P song song với $\overrightarrow{D'}$, ký hiệu là $S_{P,\overrightarrow{D'}}$, là ánh xạ từ $\mathcal{A}_3$ vào $\mathcal{A}_3$ xác định bởi :

$$\forall M \in \mathcal{A}_3, \qquad S_{P,\overrightarrow{D'}}(M) = p(M) + \overrightarrow{Mp(M)}$$

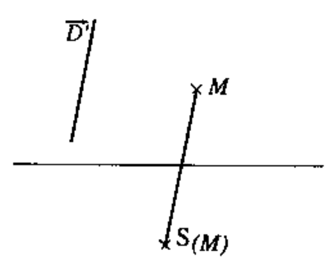


NHẬN XÉT :

1) Nếu ký hiệu A là một điểm bất kỳ của P và $\sigma_{\vec{P},\overrightarrow{D'}}$ là phép đối xứng (tuyến tính) qua $\vec{P}$ song song với $(\overrightarrow{D'})$ (xem Tập 5, 7.1.1, Ví dụ 3), thì : $\forall M \in \mathcal{A}_3, \overrightarrow{AS_{P,\overrightarrow{D'}}(M)} = \sigma_{\vec{P},\overrightarrow{D'}}(\overrightarrow{AM})$.

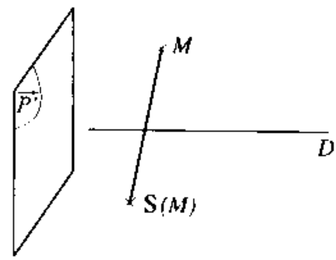
2) Ta định nghĩa một cách tương tự :

• Trong $\mathcal{A}_2$, phép đối xứng qua D song song với $\overrightarrow{D'}$ trong đó D là một đường thẳng afin, $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ sao cho $\vec{D} \neq \overrightarrow{D'}$.



• Trong $\mathcal{A}_3$, phép đối xứng qua D song song với $\overrightarrow{P'}$, trong đó D là một đường thẳng afin, $\overrightarrow{P'}$ là một mặt phẳng afin sao cho $\overrightarrow{D} \not\subset \overrightarrow{P'}$.

Tổng quát hơn, xem dưới đây 3.3.2).



3) Ký hiệu p là phép chiếu $p_{P,\vec{D}'}$ và S là phép đối xứng $S_{P,\vec{D}'}$ ta có :

• Với mọi M thuộc $\mathcal{A}_3$, p(M) là trung điểm của (M, S(M)), tức là : $\overrightarrow{M\mathrm{p}(M)} = \overrightarrow{\mathrm{p}(M)\mathrm{S}(M)}$

• $\mathrm{S} \circ \mathrm{S} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_3}$.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

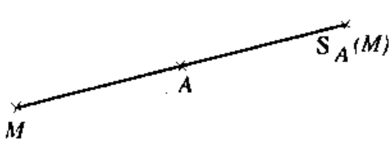
◆ **Mệnh đề** Cho $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ, P là một mặt phẳng afin sao cho $\overrightarrow{D'} \not\subset \overrightarrow{P}$. Phép đối xứng $S_{P,\vec{D}'}$ là afin, và $\overrightarrow{S_{P,\vec{D}'}}$ là phép đối xứng vectơ qua $\vec{P}$ song song với $(\overrightarrow{D'})$.

Như vậy : $\overrightarrow{S_{P,\vec{D}'}} = S_{\vec{P},\vec{D}'}$

Trong một hệ quy chiếu $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ với $A \in P$, $(\vec{i},\vec{j})$ là một cơ sở của $\vec{P}$ và $(\vec{k})$ là một cơ sở của $\overrightarrow{D'}$, các toạ độ (x', y', z') của ảnh qua $S_{P,\vec{D}'}$ của một điểm M bất kỳ với tọa độ (x, y, z) trong cùng hệ quy chiếu đó được cho bởi :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}.$$

◆ **Định nghĩa 2** Cho $A \in \mathcal{A}_3$, ánh xạ $S_A : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ cho ứng mỗi điểm M thuộc $\mathcal{A}_3$ với điểm $S_A(M)$ thuộc $\mathcal{A}_3$ xác định bởi : $\overrightarrow{AS_A(M)} = -\overrightarrow{AM}$, gọi là phép **đối xứng điểm** (hoặc : **đối xứng tâm**) tâm A, và ký hiệu là S_A.



Rõ ràng là :

• Với mọi M thuộc $\mathcal{A}_3$, A là trung điểm (xem dưới đây, 1.5.1) của (M, $S_A(M)$).

• S_A là ánh xạ afin và $\overrightarrow{S_A} = -\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$

• S_A có một và chỉ một điểm bất động, đó là điểm A.

• S_A chính là $H_{A,-1}$.

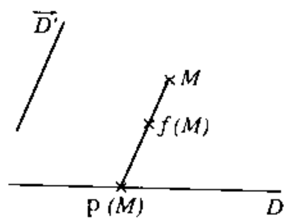
5) Phép co

Trước tiên ta hãy xét trong $\mathcal{A}_2$.

- **Định nghĩa** Cho D là một đường thẳng afin, $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ sao cho $\vec{D} \neq \overrightarrow{D'}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **Phép co** (hoặc : **co afin**) **về trục** D, **phương** $\overrightarrow{D'}$, **tỷ số** α là ánh xạ $f: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ xác định bởi :

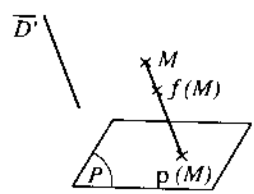
$$\forall M \in \mathcal{A}_2, \qquad \overrightarrow{\mathrm{p}(M)f(M)} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{p}(M)M}$$

trong đó p là phép chiếu lên D song song với $\overrightarrow{D'}$.

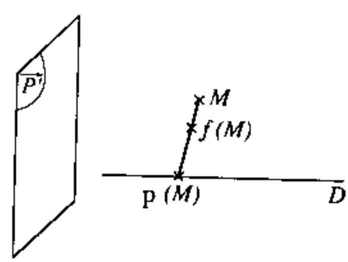


Trong $\mathcal{A}_3$, ta cũng định nghĩa tương tự :

- Phép co về trục P, phương $\overrightarrow{D'}$, tỷ số α, trong đó P là một mặt phẳng afin, $\overrightarrow{D'}$ là một đường thẳng vectơ sao cho $\overrightarrow{D'} \not\subset \vec{P}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.



- Phép co về trục D, phương $\overrightarrow{P'}$, tỷ số α, trong đó D là một đường thẳng afin, $\overrightarrow{P'}$ là một mặt phẳng vectơ sao cho $\vec{D} \not\subset \overrightarrow{P'}$, và $\alpha \in \mathbb{R}$.



Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

- **Mệnh đề** Phép co về trục D, phương $\overrightarrow{D'}$, tỷ số α, là một ánh xạ afin, và ánh xạ tuyến tính liên kết là $\alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} + (1-\alpha)\vec{\mathrm{p}}$, trong đó $\vec{\mathrm{p}}$ là phép chiếu lên $\vec{D}$ song song với $\overrightarrow{D'}$.

NHẬN XÉT :

Phép chiếu và phép đối xứng là những phép co đặc biệt ($\alpha = 0$, $\alpha = -1$).

Bài tập

Nội dung các bài tập 1.4.1 *đến* 1.4.3 *thuộc mặt phẳng afin* $\mathcal{A}_2$

◊ **1.4.1** Cho A, B, A', B' là bốn điểm thuộc $\mathcal{A}_2$ sao cho $A \neq B$ và $A' \neq B'$. Chứng minh rằng tồn tại một phép vị tự - tịnh tiến f của $\mathcal{A}_2$ sao cho $A' = f(A)$ và $B' = f(B)$ khi và chỉ khi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ phụ thuộc và khi đó f là duy nhất.

◊ **1.4.2** Cho D là một đường thẳng ; $\overrightarrow{D'}$, $\overrightarrow{D''}$ là hai đường thẳng vectơ phân biệt của $\mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\alpha\beta \neq 1$, f là phép co về trục D, phương $\overrightarrow{D'}$, tỷ số α ; g là phép co về trục D, phương $\overrightarrow{D''}$, tỷ số β.

Chứng minh rằng $g \circ f$ là một phép co và chỉ rõ trục và tỷ số của phép co đó.

◊ **1.4.3*** Cho $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ là một ánh xạ sao cho với mọi điểm M, N thuộc $\mathcal{A}_2$, họ $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}\right)$ phụ thuộc. Chứng minh rằng f là ánh xạ afin và rằng f là một phép vị tự - tịnh tiến hoặc là ánh xạ hằng.

Nội dung các bài tập 1.4.4 *và* 1.4.5 *thuộc không gian afin* $\mathcal{A}_3$, *khi cần được trang bị một hệ quy chiếu Descartes* $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

◊ **1.4.4** Chứng minh rằng một ánh xạ afin từ $\mathcal{A}_3$ vào $\mathcal{A}_3$ được xác định một cách duy nhất bởi ảnh của bốn điểm không đồng phẳng.

◊ **1.4.5** Cho $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là ánh xạ được xác định bởi :
$M(x, y, z) \mapsto f(M)(x', y', z')$.

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$$

Nhận biết f (chứng minh rằng f là một phép co) và chỉ rõ các phần tử đặc trưng của f (trục, phương, tỷ số).

1.5 Tâm tỷ cự, tính lồi

1.5.1 Tâm tỷ cự

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi họ $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1,\ldots, A_n \in \mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$), $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, là **họ hữu hạn** (hoặc : **hệ**) **điểm có trọng số trong** $\mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$).

Ta nói rằng trong họ $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$, điểm A_i có **trọng số** là α_i $(1 \le i \le n)$.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Tồn tại một điểm duy nhất G của $\mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$) sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$; điểm G này được gọi là **tâm tỷ cự** của họ $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$, và được ký hiệu :

$$G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{bmatrix}, \text{ hoặc } G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le n}$$

Hơn nữa, với mọi O thuộc $\mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$) : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$.

Chứng minh : Cho $O \in \mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$).

Với mọi M thuộc $\mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$) :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{OM}.$$

Vậy :
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}.$$

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 2**

Cho $(A_i;\alpha_i)_{1\le i\le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số thuộc $\mathcal{A}_3$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$$

G là tâm tỷ cự của họ
$\mathcal{R}$ là một hệ quy chiếu của $\mathcal{A}_3$
(x_i, y_i, z_i) là các tọa độ của A_i trong $\mathcal{R}$, $i \in \{1,\ldots, n\}$
(x_G, y_G, z_G) là các tọa độ của G trong $\mathcal{R}$.

Khi đó ta có :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

■

• **Mệnh đề 3** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

1) Với mọi λ thuộc $\mathbb{R}^*$, ta có :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots\ldots A_n \\ \lambda\alpha_1 \ldots\ldots \lambda\alpha_n \end{bmatrix}.$$

2) Với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi điểm $A_{n+1}, \ldots, A_{n+p}$, ta có :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n & A_{n+1} \ldots\ldots A_{n+p} \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n & 0 \qquad\quad 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, tâm tỷ cự không thay đổi khi thêm hoặc bớt những điểm có trọng số 0.

3) Với mọi hoán vị σ của $\{1, \ldots, n\}$ ta có :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_{\sigma(1)} \ldots\ldots\ldots A_{\sigma(n)} \\ \alpha_{\sigma(1)} \ldots\ldots\ldots \alpha_{\sigma(n)} \end{bmatrix}.$$

Như vậy, tâm tỷ cự không thay đổi nếu ta thay đổi thứ tự các điểm có trọng số ; ta nói rằng khái niệm tâm tỷ cự có tính *giao hoán*.

4) Với mọi phân hoạch $\{I_1, \ldots, I_k\}$ của $\{1, \ldots, n\}$ sao cho :

$$\forall j \in \{1, \ldots\ldots, k\}, \quad \sum_{i \in I_j} \alpha_i \neq 0,$$

ta có :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i \in I_1} \ldots\ldots \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i \in I_k} \\ \sum_{i \in I_1} \alpha_i \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{i \in I_k} \alpha_i \end{bmatrix}.$$

Ta nói rằng khái niệm tâm tỷ cự có tính **kết hợp**.

Chứng minh :
Các tính chất 1), 2), 3) là hiển nhiên.
Với 4), ta ký hiệu :

$$G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix},\ G_j = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i\in I_j} \quad \text{với } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

$$G' = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} G_1 \ldots\ldots\ldots G_k \\ \sum\limits_{i\in I_1}\alpha_i \ldots\ldots \sum\limits_{i\in I_k}\alpha_i \end{bmatrix}.$$

Ta có, theo định nghĩa của G': $\overrightarrow{GG'} = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\sum\limits_{i\in I_j}\alpha_i\right)}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\sum\limits_{i\in I_j}\alpha_i\right)\overrightarrow{GG_j}$

và, với mọi j thuộc $\{1,\ldots,k\}$, theo định nghĩa của G_j: $\left(\sum\limits_{i\in I_j}\alpha_i\right)\overrightarrow{GG_j} = \sum\limits_{i\in I_j}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$

Suy ra : $$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\sum\limits_{i\in I_j}\alpha_i\right)}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i\in I_j}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right)$$

Vì $\{I_1,\ldots, I_k\}$ là một phân hoạch của $\{1, \ldots, n\}$, nên ta được :

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Suy ra : $G = G'$. ■

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ Mệnh đề 4

1) Cho $A, B \in \mathcal{A}_3$ sao cho $A \neq B$. Ta có :

$$(AB) = \left\{\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{bmatrix};\ (\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2\ ,\ \alpha+\beta\neq 0\right\}$$
$$= \left\{\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix};\ t\in\mathbf{R}\right\}$$

$$[AB) = \left\{\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix};t\in\mathbf{R}_+\right\}$$

2) Cho $A, B, C \in \mathcal{A}_3$ không thẳng hàng. Ta có :

$$(ABC) = \left\{\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3\ ,\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0\right\},$$

và nửa mặt phẳng đóng giới hạn bởi (AB) và chứa C chính là :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix};(\alpha,\beta,\gamma)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+\ ,\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0\ \Big\}$$

3) Cho $A, B, C, D \in \mathcal{A}_3$ không đồng phẳng.

- Ta có :

$$\mathcal{A}_3=\left\{\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix},(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in \mathbf{R}^4\ ,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0\right\}$$

- Nửa không gian đóng giới hạn bởi mặt phẳng (ABC) và chứa D chính là :

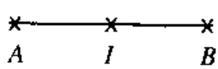
$$\left\{\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix},(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in \mathbf{R}^3\times\mathbf{R}_+\ ,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0\right\}.$$

♦ **Định nghĩa 2** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$). Ta gọi tâm tỷ cự của $(A_i, 1)_{1\le i\le n}$ là **tâm đẳng tỷ cự** (hoặc : **trọng tâm**) của $(A_1, ..., A_n)$.

Như vậy tâm đẳng tỷ cự của $(A_1, ..., A_n)$ được xác định bởi $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$,

và, với mọi điểm O thuộc $\mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$) ta có $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$.

Nói riêng, với $A, B \in \mathcal{A}_3$ (hoặc $\mathcal{A}_2$), tâm đẳng tỷ cự của (A,B) được gọi là **trung điểm** của (AB) ; như vậy trung điểm I của (A, B) được đặc trưng bởi : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



■

♦ **Mệnh đề 5** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, $G=\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1,...,A_n \\ \alpha_1,...,\alpha_n \end{bmatrix}$, $f:\mathcal{A}_3\to\mathcal{A}_3$ là ánh xạ afin.

Khi đó : $$f(G)=\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} f(A_1),...,f(A_n) \\ \alpha_1\ ,...,\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Chứng minh :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{f(G)f(A_i)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{f}(\overrightarrow{GA_i})=\vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right)=\vec{f}(\vec{0})=\vec{0}.$$

NHẬN XÉT :

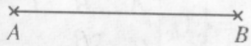
Ngược lại, nếu một ánh xạ f "bảo toàn" khái niệm tâm tỷ cự, thì f là ánh xạ afin, xem bài tập 3.5.2.

1.5.2 Tính lồi

Ta khảo sát mục này trong $\mathcal{A}_2$, do việc khảo sát trong $\mathcal{A}_3$ cũng tương tự.

◆ **Định nghĩa 1** Cho $A, B \in \mathcal{A}_2$. Bộ phận của $\mathcal{A}_2$ được xác định bởi :

$$[AB] = \left\{ \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix} ;\ t \in [0;1] \right\}.$$



được gọi là **đoạn thẳng có các đầu mút** A, B và ký hiệu là $[AB]$.

NHẬN XÉT :

1) $[AA] = \{A\}$.

2) Nếu $A \neq B$, đoạn thẳng $[AB]$ bao hàm trong đường thẳng (AB).

3) $[AB] = [CD] \Leftrightarrow \left(\begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = D \\ B = C \end{cases} \right) \Leftrightarrow \{A, B\} = \{C, D\}.$

◆ **Định nghĩa 2** Một bộ phận Γ của $\mathcal{A}_2$ được gọi là **lồi** khi và chỉ khi :

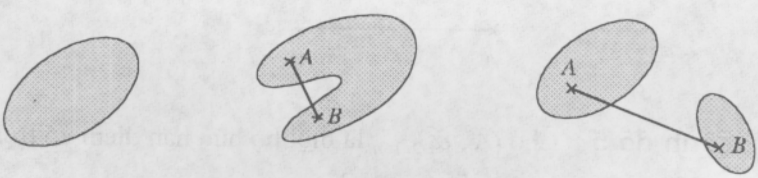
$$\forall A, B \in \Gamma, \quad [AB] \subset \Gamma.$$

VÍ DỤ :

1) $\varnothing$ và $\mathcal{A}_2$ đều lồi.

2) Mọi đơn tử, đường thẳng, nửa đường thẳng (đóng hoặc mở), nửa mặt phẳng (đóng hoặc mở) đều lồi.

3)



Lồi　　　Không lồi　　　Không lồi

◆ **Mệnh đề 1** Với mọi họ $(\Gamma_i)_{i\in I}$ những bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$, $\bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

Chứng minh :

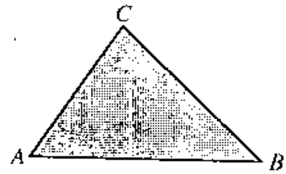
Giả sử $A, B \in \bigcap_{i\in I} \Gamma_i$. Ta có : $\quad \forall i \in I, \quad (A \in \Gamma_i \text{ và } B \in \Gamma_i),$

từ đó, do mọi Γ_i đều lồi : $\quad \forall i \in I, \quad [AB] \subset \Gamma_i$

Vậy : $\quad [A, B] \in \bigcap_{i\in I} \Gamma_i.$

VÍ DỤ :

Cho A, B, C là ba điểm thuộc $\mathcal{A}_2$ không thẳng hàng. Giao của ba nửa mặt phẳng đóng giới hạn bởi (AB), (BC), (CA) và theo thứ tự chứa C, A, B, là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$, được gọi là miền trong ("gồm cả biên") của tam giác ABC. Các đoạn thẳng $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ được gọi là các cạnh của tam giác ABC; tùy theo ngữ cảnh, các đường thẳng (AB), (BC), (CA) cũng được gọi là các cạnh của tam giác ABC.



NHẬN XÉT :

Hợp của hai bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$ có thể không phải là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ là một ánh xạ afin.

1) Với mọi bộ phận lồi Γ của $\mathcal{A}_2$, ảnh $f(\Gamma)$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

2) Với mọi bộ phận lồi Γ' của $\mathcal{A}_2$, ảnh ngược $f^{-1}(\Gamma')$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

Ta nhắc lại rằng , theo định nghĩa (xem Tập 5, 1.3.5, Định nghĩa) :

$$f(\Gamma) = \{A' \in \mathcal{A}_2 ;\ \exists A \in \Gamma, A' = f(A)\},$$
$$f^{-1}(\Gamma') = \{A \in \mathcal{A}_2 ;\ f(A) \in \Gamma'\}.$$

Chứng minh :

Trước tiên ta chú ý rằng, với mọi đoạn thẳng $[AB]$ của $\mathcal{A}_2$, ta có :

$$f([AB]) = [f(A)f(B)].$$

Quả vậy, với mọi điểm M' thuộc $\mathcal{A}_2$:

$$M' \in [f(A)f(B)] \Leftrightarrow \left(\exists t \in [0;1], M' = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} f(A) & f(B) \\ 1-t & t \end{bmatrix}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists t \in [0;1], M' = f\left(\mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}\right)\right) \Leftrightarrow M' \in f([AB]).$$

1) Cho Γ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$, và $A', B' \in f(\Gamma)$. Tồn tại $A, B \in \Gamma$ sao cho $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Vậy :

$$[A'B'] = [f(A)f(B)] = f([AB]) \subset f(\Gamma),$$

điều này chứng tỏ $f(\Gamma)$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

2) Cho Γ' là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$ và $A, B \in f^{-1}(\Gamma')$. Khi đó $f(A) \in \Gamma'$ và $f(B) \in \Gamma'$, do vậy $f([AB]) = [f(A)f(B)] \subset \Gamma'$, vậy $[AB] \subset f^{-1}(\Gamma')$, điều này chứng tỏ rằng $f^{-1}(\Gamma')$ là một bộ phận lồi của $\mathcal{A}_2$.

Bài tập

Nội dung các bài tập 1.5.1 *đến* 1.5.5 *thuộc mặt phẳng afin* $\mathcal{A}_2$

◊ **1.5.1 Trung tuyến của tam giác**

Cho ABC là một tam giác, M, N, P là các trung điểm theo thứ tự của BC, CA, AB. Các đường thẳng (hoặc các đoạn thẳng) $(AM), (BN), (CP)$ được gọi là các **trung tuyến** của tam giác ABC.

Chứng minh rằng ba trung tuyến của ABC đồng quy tại trọng tâm G của ABC, và rằng :

$$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB},\ \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}.$$

◊ **1.5.2** Cho A, B, C, A', B', C' là sáu điểm thuộc $\mathcal{A}_2$, D, E, F, G, G', H là các tâm đẳng tỷ cự theo thứ tự của $BCA', CAB', ABC', ABC, A'B'C', DEF$. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{HG'} = -2\overrightarrow{HG}.$$

◊ **1.5.3** Cho ABC là một tam giác ; A', B', C' là các trung điểm theo thứ tự của BC, CA, AB; G là trọng tâm của ABC, M là một điểm thuộc $\mathcal{A}_2$, P, Q, R theo thứ tự là các đối xứng của M qua A', B', C', K là trọng tâm của PQR. Chứng minh rằng :

a) G là trung điểm của MK

b) Các cặp điểm AP, BQ, CR, GK có cùng trung điểm.

◊ **1.5.4** Cho ABC là một tam giác. Một điểm M chạy khắp đoạn AB và một điểm N chạy khắp AC. Quỹ tích của trung điểm của MN là gì ?

◊ **1.5.5** Bốn điểm P, Q, R, S theo thứ tự chạy khắp các cạnh AB, BC, CD, DA của một tứ giác $ABCD$ của $\mathcal{A}_2$.

Tập hợp các tâm đẳng tỷ cự của $PQRS$ là gì ?

Nội dung các bài tập từ 1.5.6 *đến* 1.5.11 *thuộc không gian afin* $\mathcal{A}_3$

◊ **1.5.6** Cho A, B, C, D là bốn điểm của $\mathcal{A}_3$. I, J, K, L, M, N lần lượt là các trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC.

Chứng minh rằng các cặp điểm IJ, KL, MN có cùng trung điểm.

◊ **1.5.7** Giả sử A, B, C, D là bốn điểm của $\mathcal{A}_3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, M, N, P, Q là các điểm được xác định bởi :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DN} = \lambda\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BQ} = \mu\overrightarrow{BC}.$$

Chứng minh rằng các đường thẳng (MN) và (PQ) đồng phẳng.

◊ **1.5.8** Giả sử $ABCDA'B'C'D'$ là một hình hộp, tức là một bộ tám của $\mathcal{A}_3$ sao cho :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} \text{ và } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}.$$

Ta giả thiết rằng A, B, A', D không đồng phẳng.

Mặt phẳng (BDA') cắt đường chéo (AC') tại một điểm M và mặt phẳng $(B'D'C)$ cắt đường chéo (AC') tại một điểm N.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC'}$.

◊ **1.5.9** Cho A, B, C, D là bốn điểm thuộc $\mathcal{A}_3$. Chứng minh rằng tồn tại (I, J, K, L) duy nhất sao cho A, B, C, D theo thứ tự là trọng tâm của tam giác JKL, KLI, LIJ, IJK.

◊ **1.5.10*** Cho A_1, A_2, A_3, A_4 là bốn điểm không đồng phẳng, D là một đường thẳng. Với mọi k thuộc $\{1, 2, 3, 4\}$, ta ký hiệu P_k là mặt phẳng xác định bởi các $A_i (1 \le i \le 4, i \ne k)$, B_k là giao điểm của D với P_k, C_k là trung điểm của $A_k B_k$.

Chứng minh rằng C_1, C_2, C_3, C_4 đồng phẳng.

◊ **1.5.11** Giả sử A, B, C, D là bốn điểm không đồng phẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} - \{-1\}$, E, F, G, H là các điểm xác định bởi :

$$E = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad F = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} B & C \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \quad G = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} C & D \\ 1 & \gamma \end{bmatrix} \quad H = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} D & A \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$$

a) Xác định một ĐKCĐ đối với $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ để E, F, G, H đồng phẳng.

b) Xác định một ĐKCĐ đối với $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ để bốn mặt phẳng (ECD), (FDA), (GAB), (HBC) có ít nhất một điểm chung.

Chương 2

Hình học afin Euclide trong mặt phẳng và trong không gian ba chiều

2.1 Nhắc lại về hình học vectơ Euclide trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Xem Tập 5, chương 10.

2.1.1 Tích vô hướng chính tắc

Ta sẽ khảo sát $\mathbb{R}^3$, do trường hợp $\mathbb{R}^2$ cũng tương tự.

Ta trang bị cho $\mathbb{R}^3$ **tích vô hướng thông thường** (hoặc : **chính tắc**) cho ứng với hai phần tử $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ của $\mathbb{R}^3$ một số thực, ký hiệu là $u.v$, xác định bởi :

$$u.v = xx' + yy' + zz'.$$

Ánh xạ $\begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\\ (u,v) \mapsto u.v\end{array}$ là **song tuyến tính** và **đối xứng,** tức là :

$$\begin{cases} \forall (u,v) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, & v.u = u.v \\ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall (u,v,w)(\mathbb{R}^3)^3, & u.(\alpha v + w) = \alpha\, u.v + u.w \end{cases}$$

Hơn nữa :
$$\begin{cases} \forall u \in \mathbf{R}^3, & u.u \geq 0 \\ \forall u \in \mathbb{R}^3, & (u.u = 0 \Leftrightarrow u = 0) \end{cases}$$

Với mỗi $u = (x, y, z)$ thuộc $\mathbb{R}^3$ ta ký hiệu $\|u\|_2 = \sqrt{u.u} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ánh xạ $\begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\\ u \mapsto \|u\|_2\end{array}$ được gọi là **chuẩn Euclide thông thường** trên $\mathbb{R}^3$.

Với mọi α thuộc $\mathbb{R}$ và u, v thuộc $\mathbb{R}^3$; ta có :

$$\begin{cases} \|u\|_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ \|\alpha u\|_2 = |\alpha|\, \|u\|_2 \\ \|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2 \end{cases}$$

(**bất đẳng thức tam giác,** hoặc : **bất đẳng thức Minkowski**).

Nếu ngữ cảnh cho phép, ta ký hiệu $\|.\|$ thay cho $\|.\|_2$.

Ta có **bất đẳng thức Cauchy - Schwarz** :

$$\forall (u, v) (\mathbb{R}^3)^2, \ |u.v| \le \|u\|_2 \ \|v\|_2,$$

và trường hợp **đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy - Schwarz** :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2, (|u.\ v| = \|u\|_2 \ \|v\|_2 \Leftrightarrow (u, v) \text{ phụ thuộc}),$$

cũng như trường hợp **đẳng thức trong bất đẳng thức Minkowski** :

$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$

$$\left(\|u+v\|_2 = \|u\|_2 + \|v\|_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u = 0 \\ \text{hoặc} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ v = \alpha u \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} u.v \ge 0 \\ (u, v) \text{ phụ thuộc} \end{cases} \right)$$

Ánh xạ $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \|u - v\|_2$ được gọi là **khoảng cách Euclide thông thường** trên $\mathbb{R}^3$.

Với mọi α thuộc $\mathbb{R}$ và u, v, w thuộc $\mathbb{R}^3$, ta có :

$$\begin{cases} d(u, v) = d(v, u) \\ d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ d(u + w, v + w) = d(u, v) \\ d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| \, d(u, v) \\ d(u, w) \le d(u, v) + d(v, w) \ \textbf{(bất đẳng thức tam giác)} \end{cases}$$

Ta cũng chú ý rằng, với mọi (u, v, w) thuộc $\mathbb{R}^3$:

- $d(u, w) \ge |d(u, v) - d(v, w)|$.
- $d(u, w) = d(u, v) + d(v, w) \Leftrightarrow v \in [u\ ;\ w]$.

2.1.2 Tính trực giao

Cho $u, v \in \mathbb{R}^3$. Ta nói rằng u **trực giao** với v, hoặc u và v **trực giao**, và ký hiệu $u \perp v$, khi và chỉ khi $u\ .\ v = 0$.

Định lý Pythagore : Với mọi u, v thuộc $\mathbb{R}^3$, ta có :

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2\ .$$

Cho $u \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$. Ta nói rằng u **trực giao** với A, và ký hiệu $u \perp A$, khi và chỉ khi :

$$\forall a \in A, \qquad u.a = 0\ .$$

Với mọi bộ phận A của $\mathbb{R}^3$,**trực giao** của A, ký hiệu là $A^{\perp}$, là tập hợp các vectơ thuộc $\mathbb{R}^3$ trực giao với A :

$$A^{\perp} = \{u \in \mathbf{R}^3\ ; \quad \forall a \in A, u\ .\ a = 0\}$$

Với mọi bộ phận A của $\mathbb{R}^3$, $A^{\perp}$ là một kgvc của $\mathbb{R}^3$.

Nếu A là một kgvc của $\mathbb{R}^3$, thì $\dim(A^\perp) = 3 - \dim A$. Nói riêng (trong $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} \text{bù trực giao của một đường thẳng vectơ là một mặt phẳng vectơ} \\ \text{bù trực giao của một mặt phẳng vectơ là một đường thẳng vectơ.} \end{cases}$$

Với $A, B \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$, ta nói rằng A **trực giao với** B, và ký hiệu $A \perp B$, khi và chỉ khi : $A \subset B^\perp$.

Vì : $$A \subset B^\perp \Leftrightarrow (\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a.b = 0)$$
$$\Leftrightarrow (\forall b \in B, \forall a \in A, \quad b.a = 0) \Leftrightarrow B \subset A^\perp,$$

nên A trực giao với B khi và chỉ khi B trực giao với A. Đáng lẽ nói A trực giao với B, ta cũng dùng cách biểu đạt : A và B **trực giao với nhau**.

Ta có **thủ tục trực giao hoá Schmidt** (xem Tập 5, 10.2.1, Định lý). Nói riêng, với mọi họ ba phần tử (u, v, w) độc lập của $\mathbb{R}^3$, tồn tại một c.s.t.c.t. (cơ sở trực chuẩn thuận) (i, j, k) của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển từ (i, j, k) sang (u, v, w) là ma trận tam giác trên.

2.1.3 Tích hỗn hợp và tích vectơ trong $\mathbb{R}^3$

Với (u, v, w) $(\mathbb{R}^3)^3$, ta định nghĩa **tích hỗn hợp** (hoặc : **tích hỗn tạp**) của u, v, w, ký hiệu là $[u, v, w]$ bởi :

$$[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w).$$

trong đó $\mathcal{B}$ là một c.s.t.c.t. bất kỳ của $\mathbb{R}^3$ (xem Tập 5, 10.3.2).

Ánh xạ $\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^3)^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) & \mapsto & [u, v, w]\end{array}$ là một **dạng tam tuyến tính** thay phiên.

Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, mọi $u, u', v, w \in \mathbb{R}^3$, ta có :

$$\begin{cases} [u, v, w] = 0 \Leftrightarrow (u, v, w) \text{ phụ thuộc} \\ [\alpha u + u', v, w] = \alpha [u, v, w] + [u', v, w] \\ [u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v] \\ [u, w, v] = [w, v, u] = [v, u, w] = -[u, v, w]. \end{cases}$$

Theo Tập 5, 10.5.2, với mọi u, v thuộc $\mathbb{R}^3$, tồn tại $x \in \mathbb{R}^3$ duy nhất sao cho :

$$\forall w \in \mathbb{R}^3, [u, v, w] = x.w.$$

Phần tử x được gọi là **tích vectơ của u và v**, và ký hiệu là $u \wedge v$ (hoặc : $u \times v$). Vậy ta có :

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, [u, v, w] = (u \wedge v) . w .$$

Với mỗi c.s.t.c.t. (i, j, k) của $\mathbb{R}^3$: $i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i, \quad k \wedge i = j$.

Ánh xạ $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & u \wedge v\end{array}$ là **song tuyến tính thay phiên**, tức là, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, mọi $u, u', v \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} v \wedge u = -u \wedge v \\ (\alpha u + u') \wedge v = \alpha u \wedge v + u' \wedge v. \end{cases}$$

Với mọi u, v thuộc $\mathbb{R}^3$ ta có :

$$\begin{cases} u \wedge v = 0 \Leftrightarrow (u, v) \text{ phụ thuộc} \\ u \wedge v \perp u \text{ và } u \wedge v \perp v. \end{cases}$$

Nếu (u, v) độc lập, thì $(u, v, u \wedge v)$ là một cơ sở thuận của $\mathbb{R}^3$.

Khi ký hiệu (x, y, z) (tương ứng : (x', y', z')) là các thành phần của u (tương ứng : v) trong một c.s.t.c.t. $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$, thì các thành phần của $u \wedge v$ trong $\mathcal{B}$ là:

$$yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'.$$

Ta có thể ghi nhớ theo lược đồ : $u \wedge v = \begin{vmatrix} x & x' & i \\ y & y' & j \\ z & z' & k \end{vmatrix}$, bằng cách khai triển giả - định thức này theo cột thứ ba.

Ta cũng có **công thức của tích vectơ kép** :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u.w)\, v - (u.v) w,$$

và **hằng đẳng thức Lagrange** :

$$\|u \wedge v\|^2 + (u.v)^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2.$$

Cuối cùng, ta coi như đã biết các khái niệm diện tích và thể tích :

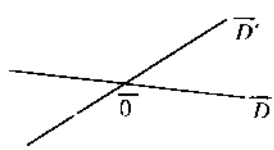
$\|u \wedge v\|$ bằng diện tích hình bình hành dựng trên u, v

$|[u, v, w]|$ bằng thể tích hình hộp dựng trên u, v, w.

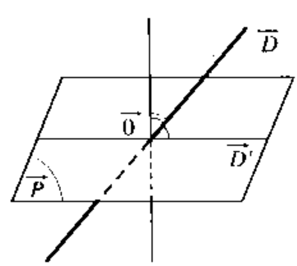
Ta có ngay mệnh đề sau.

◆ Mệnh đề - Định nghĩa

1) Cho hai đường thẳng vectơ $\vec{D}, \vec{D'}$, $\vec{u} \in \vec{D} - \{\vec{0}\}$, $\vec{u}' \in \vec{D'} - \{\vec{0}\}$. Góc $\angle(\vec{u}, \vec{u}')$, xác định modulo π, sai khác về dấu (nói cách khác, thuộc $[0 ; \frac{\pi}{2}]$), không phụ thuộc việc chọn $\vec{u}$ và $\vec{u}'$, được gọi là **góc giữa $\vec{D}$ và $\vec{D'}$** và được ký hiệu là $(\widehat{\vec{D}, \vec{D'}})$ hoặc $\angle(\vec{D}, \vec{D'})$.



2) Cho $\vec{D}$ là một đường thẳng vectơ, $\vec{P}$ là một mặt phẳng vectơ sao cho $\vec{D} \not\perp \vec{P}$, $\vec{D'}$ là hình chiếu vuông góc của $\vec{D}$ lên $\vec{P}$. **Góc giữa $\vec{D}$ và $\vec{P}$**, ký hiệu là $(\widehat{\vec{D}, \vec{P}})$, hoặc $(\widehat{\vec{P}, \vec{D}})$, hoặc $\angle(\vec{D}, \vec{P})$, hoặc



$\angle(\vec{P},\vec{D})$, là số thực được xác định modulo π và sai khác về dấu , bởi :

$$\angle(\vec{D},\vec{P}) = \angle(\vec{D},\vec{D'}).$$

Nếu $\vec{D}\perp\vec{P}$, ta ký hiệu $\angle(\vec{D},\vec{P}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Với ký hiệu $\vec{d} = \vec{P}^{\perp}$, ta có : $\angle(\vec{D},\vec{P}) = \dfrac{\pi}{2} - \angle(\vec{D},\vec{d})$.

3) Cho hai mặt phẳng vectơ $\vec{P},\vec{P'}$.

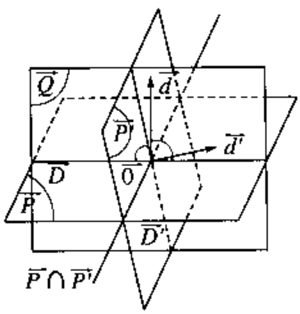
Nếu $\vec{P}\neq\vec{P'}$ thì với ký hiệu $\vec{Q} = (\vec{P}\cap\vec{P'})^{\perp}$, $\vec{D} = \vec{P}\cap\vec{Q}$, $\vec{D}' = \vec{P}'\cap\vec{Q}$, **góc giữa** $\vec{P}$ và $\vec{P'}$, ký hiệu là $(\widehat{\vec{P},\vec{P'}})$, hoặc $\angle(\vec{P'},\vec{P})$, là số thực được xác định modulo π sai khác về dấu, bởi :

$\angle(\vec{P},\vec{P'}) = \angle(\vec{D},\vec{D}')$.

Nếu $\vec{P} = \vec{P'}$ ta viết $\angle(\vec{P},\vec{P'}) = 0$.

Với ký hiệu $\vec{d} = \vec{P}^{\perp}$, $\vec{d}' = \vec{P}'^{\perp}$, ta có :

$$\angle(\vec{P},\vec{P'}) = \angle(\vec{d},\vec{d}').$$



NHẬN XÉT :

1) Với các đường thẳng vectơ bất kỳ $\vec{D},\vec{D'}$: $\vec{D}\perp\vec{D'} \Leftrightarrow \angle(\vec{D},\vec{D'}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Với mọi đường thẳng vectơ $\vec{D}$ và mọi mặt phẳng vectơ $\vec{P}$:

$$\vec{D}\perp\vec{P} \Leftrightarrow \angle(\vec{D},\vec{P}) = \frac{\pi}{2} .$$

2.1.4 Các tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$

1) Đại cương

Ta sẽ khảo sát trường hợp $\mathbb{R}^3$, do trường hợp $\mathbb{R}^2$ cũng tương tự.

Một tự đồng cấu f của $\mathbb{R}^3$ được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi f bảo toàn tích vô hướng, tức là :

$$\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^3 , \quad f(u).f(v) = u.v.$$

NHẬN XÉT :

Mọi ánh xạ f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bảo toàn tích vô hướng đều tuyến tính vì, với mọi (λ, x, y) thuộc $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, khi khai triển bình phương vô hướng ta có :

$$\|f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)\|_2^2 = \|(\lambda x + y) - \lambda x - y\|_2^2 = 0.$$

Ta ký hiệu tập hợp các tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{R}^3$ là $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.

Với mọi f thuộc $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ta có :

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R}^3 , \|f(x)\|_2 = \|x\|_2).$$

Các phần tử của $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ cũng được gọi là các **phép đẳng cự vectơ.**

Với mọi f thuộc $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, ba tính chất sau đây từng cặp tương đương :

(i) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$

(ii) Với mọi c.s.t.c. $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$, $f(\mathcal{B})$ là một c.s.t.c. của $\mathbb{R}^3$.

(iii) Tồn tại một c.s.t.c. $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho $f(\mathcal{B})$ là một c.s.t.c. của $\mathbb{R}^3$.

Tập hợp $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ là một nhóm đối với luật $\circ$, gọi là **nhóm trực giao** của $\mathbb{R}^3$. Một ma trận Ω thuộc $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi tự đồng cấu của $\mathbb{R}^3$ biểu thị bởi Ω trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là một tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{R}^3$ được trang bị tích vô hướng thông thường.

Ta ký hiệu tập hợp các ma trận trực giao thuộc $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ là $\mathbf{O}_3(\mathbb{R})$.

Với mọi ma trận Ω thuộc $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, các tính chất sau đây tương đương từng cặp :

1) $\Omega \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$

2) ${}^t\Omega\Omega = I_3$

3) $\Omega\,{}^t\Omega = I_3$

4) Với mọi c.s.t.c. $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$, tự đồng cấu của $\mathbb{R}^3$ biểu thị bởi Ω trong $\mathcal{B}$ là trực giao

5) Tồn tại một c.s.t.c. $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó tự đồng cấu biểu thị bởi Ω là trực giao

6) Các cột của Ω lập thành một c.s.t.c. của $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ đối với tích vô hướng thông thường

7) Các dòng của Ω lập thành một c.s.t.c. của $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ đối với tích vô hướng thông thường

Tập hợp $\mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ là một nhóm đối với phép nhân, gọi là **nhóm trực giao** (cấp 3).

Giả sử $\mathcal{B}$ là một c.s.t.c của $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, P là ma trận chuyển từ $\mathcal{B}$ ra $\mathcal{B}'$. Khi đó : $\mathcal{B}'$ là một c.s.t.c. khi và chỉ khi P trực giao.

Ta có : $\begin{cases} \forall \Omega \in \mathbf{O}_3(\mathbf{R}), & \det(\Omega) \in \{-1,\ 1\} \\ \forall f \subset \mathcal{O}(\mathbf{R}^3), & \det(f) \in \{-1,\ 1\} \end{cases}$.

Giả sử $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$; ta nói rằng f là một **tự đồng cấu trực giao thuận** (tương ứng : **nghịch**) khi và chỉ khi det $(f) = 1$ (tương ứng : -1).

Tập hợp các tự đồng cấu trực giao thuận của $\mathbb{R}^3$ là một nhóm con của $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, gọi là **nhóm trực giao đặc biệt** của $\mathbb{R}^3$, ký hiệu là $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$.

Giả sử $\Omega \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$; ta nói rằng Ω là một **ma trận trực giao phải** (tương ứng : **trái**) khi và chỉ khi det $(\Omega) = 1$ (tương ứng : - 1).

Tập hợp các ma trận trực giao phải cấp 3 là một nhóm con của $\mathbf{O}_3(\mathbb{R})$, gọi là **nhóm trực giao đặc biệt**, ký hiệu là $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$.

2) Trường hợp $\mathbb{R}^2$

Ta có :

- $\mathbf{O}_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta;\ \theta \in \mathbf{R}\} \cup \{S_\varphi : \varphi \in \mathbf{R}\}$,

trong đó : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

- $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \{ R_\theta;\ \theta \in \mathbf{R}\}$.

Tự đồng cấu của $\mathbb{R}^2$, mà ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là R_θ, được gọi là **phép quay với góc quay** θ (hoặc : **với góc có số đo** θ), và được ký hiệu là Rot_θ.

Cho $u, v \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $U = \frac{1}{\|u\|}u$, $V = \frac{1}{\|v\|}v$.

Tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$, duy nhất modulo 2π, sao cho $\mathrm{Rot}_\theta(U) = V$; số thực θ (hoặc lớp modulo 2π của nó) được gọi là **góc của** u **và** v, và được ký hiệu là $(\widehat{u,v})$ hoặc $\angle(u, v)$. Vậy ta có : $V = \mathrm{Rot}_{(\widehat{u,v})}(U)$.

Cho $\mathcal{B} = (i, j)$ là một c.s.t.c.t. của $\mathbb{R}^2$.

Với $u \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, góc $(\widehat{i,u})$ được xác định modulo 2π gọi là **góc cực** của u (trong $\mathcal{B}$).

Ta gọi góc cực của một vectơ chỉ phương của một đường thẳng vectơ, xác định modulo 2π, là **góc cực** của đường thẳng vectơ ấy (trong $\mathcal{B}$).

Ta có : $\forall\, u, v \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, $u.v = \|u\|\,\|v\| \cos(\widehat{u,v})$.

Ta có : $\forall\, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Rot}_\theta \circ \mathrm{Rot}_{\theta'} = \mathrm{Rot}_{\theta+\theta'}$,

từ đó ta suy ra **hệ thức Chasles đối với góc** :

$$\forall\, u, v, w \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\},\ (\widehat{u,w}) = (\widehat{u,v}) + (\widehat{v,w})\ [2\pi].$$

Tự đồng cấu của $\mathbf{R}^3$, mà ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là S_φ, được gọi là **phép phản chiếu** (hoặc : **phép đối xứng trực giao**) qua đường thẳng vectơ $\overline{D}$ với góc cực $\frac{\varphi}{2}$ $[\pi]$, và được ký hiệu là $\mathrm{Ref}_{\overline{D}}$; đó là phép đối xứng qua $\overline{D}$ song song với $\overrightarrow{D}^{\perp}$.

Ta có :

- $\mathcal{SO}(\mathbf{R}^2) = \{ \mathrm{Rot}_\theta\ ;\ \theta \in \mathbf{R} \}$
- $\mathcal{O}(\mathbf{R}^2) - \mathcal{SO}(\mathbf{R}^2) = \{\mathrm{Ref}_{\overrightarrow{D}}\ ;\ \overrightarrow{D} \in \mathcal{D}\}$ trong đó $\mathcal{D}$ là tập hợp các đường thẳng vectơ của $\mathbf{R}^2$.

Với mọi phép quay r của $\mathbb{R}^2$ và mọi phép phản chiếu s của $\mathbf{R}^2$, tồn tại một phép phản chiếu t của $\mathbb{R}^2$ duy nhất sao cho $r = t \circ s$, và một phép phản chiếu t' của $\mathbb{R}^2$ duy nhất sao cho $r = s \circ t'$.

3) Trường hợp $\mathbb{R}^3$

Cho $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ sao cho $\|\vec{u}\| = 1$, $\vec{\Delta}$ là trục được định phương và định hướng bởi $\vec{u}$, và $\theta \in \mathbb{R}$. **Phép quay trục** $\vec{\Delta}$ **với góc quay** (hoặc : **với góc đo**) θ, ký hiệu là $\mathrm{Rot}_{\vec{\Delta},\theta}$, là tự đồng cấu của $\mathbb{R}^3$ mà ma trận, trong một c.s.t.c.t. (u, v, w), bắt đầu bởi u, là : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Phép lật (hoặc : **đối xứng trục**) của $\mathbb{R}^3$ là mọi phép quay của $\mathbb{R}^3$ với góc quay π $[2\pi]$.

Cho $\vec{P}$ là một mặt phẳng vectơ của $\mathbb{R}^3$. **Phép phản chiếu** (hoặc : **đối xứng trực giao**) qua $\vec{P}$, và ký hiệu $\mathrm{Ref}_{\vec{P}}$, là phép đối xứng qua $\vec{P}$, song song với $\vec{P}^{\perp}$.

Định lý về phân loại các tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{R}^3$:

Cho $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3) - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}\}$.

1) Nếu $\det(f) = 1$, thì f là một phép quay.

2) Nếu $\det(f) = -1$, thì :

- hoặc f là một phép phản chiếu của $\mathbb{R}^3$
- hoặc f là tích (giao hoán) của một phép quay của $\mathbb{R}^3$ và một phép phản chiếu qua mặt phẳng trực giao với trục của phép quay đó.

Với các ký hiệu trên đây và trong trường hợp $\det(f) = 1$:

- đường thẳng mang trục $\vec{\Delta}$ của f là tập hợp các điểm bất động của f, nhận được bằng cách giải phương trình $\Omega X = X$, với ẩn $X \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, trong đó Ω là ma trận của f trong một c.s.t.c.t.
- ta xác định góc quay θ của phép quay f bởi :

  ◊ $\mathrm{tr}(\Omega) = 1 + 2\cos\theta$

  ◊ $\sin\theta$ lấy dấu của tích hỗn hợp $[\vec{x}, f(\vec{x}), \vec{u}]$ với $\vec{x}$ bất kỳ không cộng tuyến với $\vec{u}$, trong đó $\vec{u}$ là vectơ đã chuẩn hóa, định phương và định hướng trục $\vec{\Delta}$ của f.

Với $(u, v) \in (\mathbb{R}^3 - \{0\})^2$, ta xác định góc của u và v, ký hiệu là $\widehat{(u,v)}$, hoặc $\angle(u, v)$, bởi :

$$\left|\begin{array}{l} \widehat{(u,v)} = 0 \text{ nếu } (\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ v = \alpha u) \\ \widehat{(u,v)} = \pi \text{ nếu } (\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_-^*,\ v = \alpha u) \\ \widehat{(u,v)} \text{ là trị tuyệt đối của góc (tính trong }]-\pi\,;\,\pi]) \text{ của } u \\ \text{và } v \text{ trong mặt phẳng Euclide xác định bởi } u \text{ và } v, \text{ nếu } (u, v) \\ \text{độc lập.} \end{array}\right.$$

Ta có :

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}, \begin{cases} u \cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos\widehat{(u,v)} \\ \|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\|\,|\sin\widehat{(u,v)}| \end{cases}.$$

Bài tập

◊ **2.1.1** Chứng minh : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \ \le \frac{n(n-1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$.

◊ **2.1.2** Chứng minh : $\forall n \in \mathbb{N}, - \{0, 1\}, \ \frac{2}{n(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$.

◊ **2.1.3** Chứng minh, với mọi u, v thuộc $\mathbb{R}^3$:

$$(\|u\| \ge 1 \text{ và } \|v\| \ge 1) \Rightarrow \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| \le \|u - v\|,$$

và xét trường hợp đẳng thức.

◊ **2.1.4** Cho $a, b \in \mathbb{R}^3$ sao cho $a + b \neq 0$ và $a - b \neq 0$. Giải hệ sau đây, với ẩn $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$:

$$a \wedge x = b \wedge y, \quad a \wedge y = b \wedge x, \quad a.x = b.y, \quad a.y = b.x .$$

◊ **2.1.5** Với $(a, b) \in (\mathbb{R}^3)^2$, ta ký hiệu $f_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$x \mapsto (a.x)a + b \wedge x$

a) Kiểm chứng rằng, với mọi (a, b), $f_{a,b}$ là tuyến tính.

b) Chứng minh rằng, với mọi (a, b) : $a.b = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(f_{a,b}) \le 2$.

c) Ta giả thiết $a. b \neq 0$. Chứng minh rằng $f_{a,b}$ là song ánh và biểu thị $f_{a,b}^{-1}$.

◊ **2.1.6*** Cho $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

a) Chứng minh : $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $[f(u), v, w] + [u, f(v), w] + [u, v, f(w)] = \operatorname{tr}(f)[u, v, w]$.

b) Từ đó suy ra tồn tại $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ duy nhất sao cho :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$$

(sẽ phải xét đến liên hợp f^* của f, xem Tập 6, 5.2).

◊ **2.1.7** Xác định loại của tự đồng cấu f của $\mathbb{R}^3$, mà ma trận Ω ứng với cơ sở chính tắc (i, j, k) của $\mathbb{R}^3$ được cho sau đây, và chỉ rõ các phần tử đặc trưng của f :

a) $\Omega = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\Omega = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

c) $\Omega_x = \begin{pmatrix} x^2 & x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & 1-x^2 & -x \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \end{pmatrix}$, $x \in [-1 ; 1]$.

◊ **2.1.8*** Cho $u \in \mathbb{R}^3$ sao cho $\|u\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, f là phép quay với trục được định phương và định hướng bởi u và góc quay θ.

a) Chứng minh : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = x + \sin\theta(u \wedge x) + (1 - \cos\theta)\, u \wedge (u \wedge x)$.

b) Ta giả thiết rằng f là không phải phép đồng nhất, cũng không phải là một phép đối xứng (tức là : $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$), và ta ký hiệu $t = \tan\frac{\theta}{2}$, $u' = tu$. Chứng minh :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \ f(x) = x + \frac{2}{1 + \|u'\|^2} u' \wedge (x + u' \wedge x) \quad \textbf{(công thức Rodrigues)} .$$

2.2 Hình học Euclide phẳng

2.2.1 Khoảng cách, góc

1) Đại cương

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi cặp $(\mathcal{E}_2, .)$, trong đó $\mathcal{E}_2$ là một mặt phẳng afin thực, và $\cdot$ là một tích vô hướng trên phương $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ của $\mathcal{E}_2$, là **mặt phẳng afin Euclide**.

Ta thường ký hiệu $\mathcal{E}_2$ thay cho $(\mathcal{E}_2,.)$.

Hệ quy chiếu trực chuẩn (thuận), viết tắt là hệ q.c.t.c.(t.) của $\mathcal{E}_2$ là mọi bộ ba $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j}\ )$ trong đó $O \in \mathcal{E}_2$. và $(\vec{i},\vec{j}\ )$ là một c.s.t.c.t. của $\vec{\mathcal{E}}_2$.

Nếu $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ được định hướng, ta cũng nói là $\mathcal{E}_2$ **được định hướng,** hướng của một hệ quy chiếu Descartes $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j}\ )$ của $\mathcal{E}_2$ chính là hướng của cơ sở $(\vec{i},\vec{j}\ )$ của $\vec{\mathcal{E}}_2$.

Cho một mặt phẳng Euclide (định hướng) $\mathcal{E}_2$; mặt phẳng vectơ Euclide $\vec{\mathcal{E}}_2$ có ít nhất một c.s.t.c. (t.) $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j}\ )$. Với mỗi điểm O thuộc $\mathcal{E}_2$, ánh xạ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}_2$

$$(x, y) \mapsto O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

là một song ánh afin và ánh xạ tuyến tính liên kết $\vec{F}$ bảo toàn tích vô hướng.

Trong thực hành, ta có thể thay $(\mathcal{E}_2\ , .)$ bởi $\mathbb{R}^2$ được trang bị tích vô hướng thông thường.

• **Định nghĩa 2** Với $M, M' \in \mathcal{E}_2$, **khoảng cách giữa** M **và** M', ký hiệu là $d(M, M')$ hoặc MM', là số thực : $MM' = \| \overrightarrow{MM'} \|$.
Nếu, trong một hệ q.c.t.c., có $M(x, y)$ và $M'(x', y')$, thì :

$$MM' = ((x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề** Với mọi số thực α và với mọi điểm A, B, C thuộc $\mathcal{E}_2$:
1) $d(B, A) = d(A, B)$
2) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3) $d(A, C) \le d(A, B) + d(B, C)$ **(bất đẳng thức tam giác)**
4) $d(A + C, B + C) = d(A, B)$
5) $d(\alpha A, \alpha B) = |\alpha|\, d(A, B)$.

♦ **Định nghĩa 3** Cho D, D' là hai đường thẳng afin của $\mathcal{E}_2$, $\vec{u}$ (tương ứng : $\vec{u}\,'$) là một vectơ chỉ phương của D (tương ứng : D'). **Góc giữa** D **và** D', ký hiệu là $(\widehat{D,D'})$ (hoặc $\angle\ (D, D')$, là số thực được xác định modulo π bởi : $(\widehat{D,D'}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{u}\,'})\ [\pi]$.

Sự tương đẳng modulo π xuất phát từ chỗ ta có thể thay thế $\vec{u}$ (hoặc $\vec{u}'$) bởi đối của nó.

Nếu A, B, C, D là bốn điểm thuộc $\mathcal{E}_2$ sao cho $A \neq B$ và $C \neq D$, ta ký hiệu $\angle(AB, CD)$ thay cho $\angle((AB), (CD))$ để đơn giản cách viết.

Cho A, B, C là ba điểm thuộc $\mathcal{E}_2$ sao cho $A \neq B$ *và* $B \neq C$, ta ký hiệu $\widehat{ABC}$ (hoặc $\angle\ ABC$) là trị tuyết đối của độ đo trong $[-\pi\ ;\pi\ ]$ của $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$; như thế ; $\widehat{ABC} \in [0; \pi]$.

♦ **Định nghĩa 4** Cho d, d' là hai nửa đường thẳng afin có cùng gốc A, $\vec{u}$ (tương ứng : $\vec{u}'$) là véctơ chỉ phương định hướng d (tương ứng : d'). **Góc giữa d và d'**, ký hiệu là $(\widehat{d, d'})$ (hoặc $\angle\ (d, d')$), là số thực xác định modulo 2π bởi :

$$(\widehat{d,d'}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{u}'})\ [2\pi].$$

♦ **Định nghĩa 5** Hai đường thẳng afin D, D' của $\mathcal{E}_2$ được gọi là **trực giao**, và ký hiệu là $D \perp D'$, khi và chỉ khi $\vec{D} \perp \vec{D}'$, nghĩa là :

$$(\widehat{D,\ D'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

♦ **Định nghĩa 6** Cho D là một đường thẳng và $\vec{D}'$ là một phương đường thẳng sao cho $\vec{D} \neq \vec{D}'$. Một phép chiếu (lên D, song song với $\vec{D}'$), một phép đối xứng (qua D, song song với $\vec{D}'$), một phép co afin (trục D, phương $\vec{D}'$) được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi $\vec{D} \perp \vec{D}'$.

2) Các phép tính trong một hệ quy chiếu trực chuẩn (thuận)

Cho $\mathcal{E}_2$ là một mặt phẳng afin Euclide (được định hướng), $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ là một q.c.t.c.(thuận) của $\mathcal{E}_2$. Các điểm của $\mathcal{E}_2$ được xác định bởi tọa độ của chúng trong $\mathcal{R}$ và các đường thẳng afin của $\mathcal{E}_2$ cũng được xác định bởi các phương trình Descartes (PTD) của chúng trong $\mathcal{R}$.

1) Vectơ trực giao với một đường thẳng

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề** Với mọi (a, b, c) thuộc $\mathbb{R}^3$ sao cho $(a, b) \neq (0,0)$, $\vec{n}\,(a,b)$ là một vectơ trực giao với $D \mid ax + by + c = 0$.

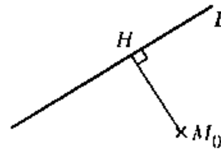
2) Hình chiếu vuông góc của một điểm trên một đường thẳng

Cho $D \mid ax + by + c = 0$ là một đường thẳng afin và $M_0(x_0 y_0)$ là một điểm thuộc $\mathcal{E}_2$. Ta ký hiệu $H(X, Y)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên D. Ta có :

$$\begin{cases} H \in D \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{D} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ \begin{vmatrix} X - x_0 & a \\ Y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aX + bY = -c \\ -bX + aY = -bx_0 + a y_0 \end{cases},$$



từ đó suy ra tọa độ của H : $\begin{cases} X = \dfrac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \\ Y = \dfrac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$

3) Khoảng cách điểm - đường thẳng

♦ **Mệnh đề** Cho $D \,|\, a x + by + c = 0$, $M_0 (x_0, y_0)$. Khi đó :

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chứng minh :

Với các ký hiệu trên đây :

$$(d(M_0,D))^2 = M_0H^2 = (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2$$

$$= \left(\frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \right)^2$$

$$= \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Ta cũng có thể thu được kết quả này mà không cần tính các tọa độ của H.

4) Phương trình chuẩn của đường thẳng trên $\mathcal{E}_2$

Cho $D \,|\, a x + by + c = 0$ là một đường thẳng của $\mathcal{E}_2$.
Vì $a^2 + b^2 \neq 0$, nên D cũng có một PTD là :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Vì rằng $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, nên tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ (duy nhất modulo 2π)
sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\theta \qquad \text{và} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\theta.$$

Với ký hiệu $p = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, thì D sẽ có PTD :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

gọi là **phương trình dạng chuẩn** của D.

Vì $\vec{u}(\cos\theta, \sin\theta)$ trực giao với D nên $-\vec{u}$ cũng vậy, do đó D có đúng hai phương trình dạng chuẩn :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p\ , \qquad x\cos(\theta+\pi) + y\sin(\theta+\pi) = -p.$$

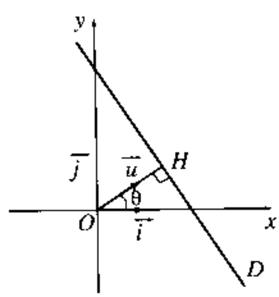
Ta cũng có thể coi hai phương trình dạng chuẩn ấy chỉ là một.

Ta ký hiệu $H(X,Y)$ là hình chiếu vuông góc của điểm O trên D ; tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{OH} = \lambda\vec{u}$, từ đó :

$$X = \lambda\cos\theta,\ Y = \lambda\sin\theta.$$

Vì $H \in D$, ta có $\lambda\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta = p$, vậy $\lambda = p$.

Như vậy, khi ký hiệu $\overline{OH}$ là độ đo đại số của $\overrightarrow{OH}$ trên trục $((OH), \vec{u})$ (nếu $0 \notin D$), thì ta có : $\overline{OH} = p$, hoặc : $\overrightarrow{OH}.\vec{u} = p$.

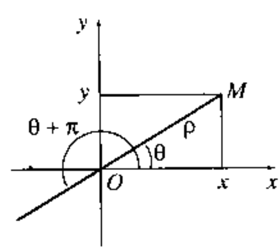


5) Tọa độ cực

Ta nhắc lại rằng $\mathcal{R} = (O;\ \vec{i}, \vec{j})$ là một hệ q.c.t.c.t. của $\mathcal{E}_2$.

Cho $M \in \mathcal{E}_2 - \{O\}$, (x,y) là tọa độ của M trong $\mathcal{R}$.

Điểm M có thể được định vị bởi góc $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$, xác định modulo 2π, được ký hiệu là θ và được gọi là **góc cực** của M, và số thực (dương) OM, được ký hiệu là ρ (hoặc r) và được gọi là **bán kính cực** của M.



Ta cũng có thể định vị M bởi $\theta + \pi$ và $-\rho$.

Một điểm M ($\neq O$) như vậy có **hai tọa độ cực** : $[\theta, \rho]$ và $[\theta+\pi, -\rho]$, trong đó θ và $\theta + \pi$ được xác định modulo 2π.

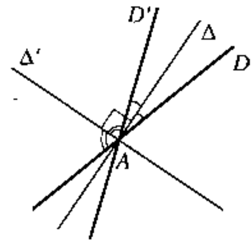
Ta có : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ và $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

Một số thuật ngữ

1) Cho hai đường thẳng D và D' đồng quy tại điểm A, tập hợp các điểm của $\mathcal{E}_2$ **cách đều** D và D', tức là :

$\{M \in \mathcal{E}_2 \; ; \; d(M,D) = d(M, D')\}$

là hợp của hai đường thẳng Δ, Δ', được gọi là các **đường phân giác** của D và D'. Ta có : $\Delta \perp \Delta'$.

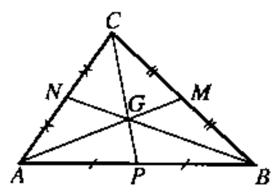


2) Một tam giác ABC của $\mathcal{E}_2$ được gọi là :
   - **cân** khi và chỉ khi hai cạnh của nó có cùng độ dài
   - **vuông** khi và chỉ khi một trong các góc của nó vuông ($= \dfrac{\pi}{2}$)
   - **đều** khi và chỉ khi ba cạnh của nó có cùng độ dài.

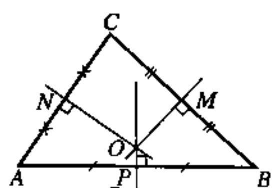
3) Đường **trung trực** của một cặp điểm (hoặc đoạn thẳng) (A, B) hoặc AB $(A \neq B)$ là đường thẳng $D = \{M \in \mathcal{E}_2 \; ; \; MA = MB\}$; đó cũng là đường vuông góc với AB tại trung điểm của nó.

4) Trong một tam giác ABC (không bẹt, tức là : A, B, C không thẳng hàng), ta định nghĩa các đường thẳng sau :

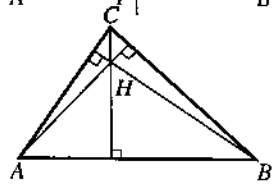
   - Các **trung tuyến** là những đường nối mỗi đỉnh với trung điểm cạnh đối diện, và các đường thẳng này đồng quy tại **trọng tâm** G của ABC



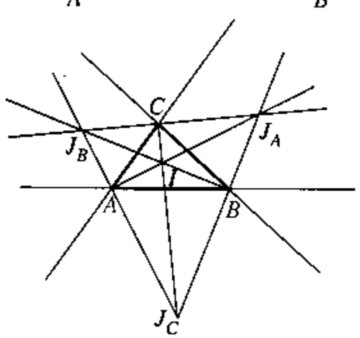
   - Các **đường trung trực** (của BC, CA, AB), đồng quy tại một điểm, thường được ký hiệu là O, là **tâm của đường tròn ngoại tiếp** ABC (tức là : $OA = OB = OC$).



   - Các **đường cao** đi qua một đỉnh và vuông góc với cạnh đối diện, đồng quy tại một điểm, thường được ký hiệu là H, được gọi là **trực tâm** của ABC.



   - Các **đường phân giác trong và ngoài**, đồng quy tại các điểm I (**tâm đường tròn nội tiếp**), J_A, J_B, J_C (**các tâm các đường tròn bàng tiếp**).



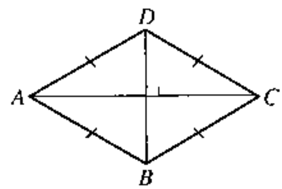
5) Tùy theo ngữ cảnh một **đa giác** là :

- Một tập hợp hữu hạn điểm $A_1, \ldots, A_n$ (thường : $n \geq 3$), từng đôi phân biệt, được gọi là các **đỉnh** của đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ (các điểm thường được sắp)
- hợp của các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, được gọi là các **cạnh** của đa giác.
- bộ phận của mặt phẳng "được giới hạn" bởi các đoạn thẳng trên đây, theo một thứ tự nào đó.

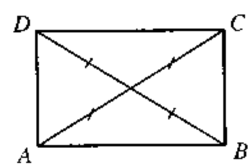
Tùy theo số lượng đỉnh, một đa giác được gọi là : **tam giác** (3), **tứ giác** (4), **ngũ giác** (5), **lục giác** (6), **thất giác** (7), **bát giác** (8),...

6)

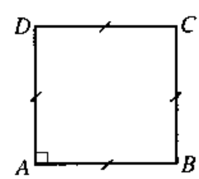
- Một **hình thoi** là một tứ giác $ABCD$ (với các đỉnh từng cặp phân biệt, sao cho $AB = BC = CD = DA$), hoặc thỏa mãn điều kiện tương đương là : $(AB) \parallel (CD)$, $(BC) \parallel (AD)$, $(AC) \perp (BD)$.



- Một **hình chữ nhật** là một tứ giác $ABCD$ (với các đỉnh từng cặp phân biệt) sao cho : $(AB) \parallel (CD)$, $(AD) \parallel (BC)$, $(AB) \perp (BC)$, hoặc thỏa mãn điều kiện tương đương là : $(AB) \parallel (CD)$, $(AD) \parallel (BC)$, $AC = BD$.



- Một **hình vuông** $ABCD$ là một hình chữ nhật sao cho $AB = BC$.



2.2.2 Các phép đẳng cự afin của mặt phẳng

◆ **Định nghĩa 1** **Phép đẳng cự afin** của $\mathcal{E}_2$ là mọi ánh xạ afin f : $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ bảo toàn khoảng cách, tức là sao cho :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}_2, \quad d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

- **Mệnh đề 1** Cho $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ là một ánh xạ afin. Để f là một phép đẳng cự afin, cần và đủ là $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ của $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$.

Chứng minh :

1) Nếu f là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$, thì, với mọi $\vec{u}$ thuộc $\mathcal{E}_2$, do tồn tại $(A, B) \in \mathcal{E}_2^2$ sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, nên ta có :

$\| \vec{f}(\vec{u}) \| = \| \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \| = \| \overrightarrow{f(A)f(B)} \| = d(f(A), f(B)) = d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \| = \| \vec{u} \|$,

(xem Tập 5, 10, 3, 1, Mệnh đề 1), vậy $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ của $\vec{\mathcal{E}}_2$.

2) Ngược lại, nếu $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ của $\vec{\mathcal{E}}_2$, thì với mọi (A, B) thuộc $\mathcal{E}_2^2$: $d(f(A), f(B)) = \| \overrightarrow{f(A)f(B)} \| = \| \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \| = \| \overrightarrow{AB} \| = d(A, B)$,

vậy f là một phép đẳng cự của $\mathcal{E}_2$. ■

- **Mệnh đề - Định nghĩa 2** Tập hợp các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$ là một nhóm đối với $\circ$, gọi là **nhóm các phép đẳng cự afin của** $\mathcal{E}_2$.

Chứng minh :

Ta sẽ chứng tỏ rằng tập hợp các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$ là một nhóm con của nhóm afin GAff ($\mathcal{E}_2$).

1) Giả sử f là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$. Vì $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ của $\vec{\mathcal{E}}_2$ (xem 1.4.1, Mệnh đề 3) nên f là song ánh. Như vậy : $f \in$ GAff ($\mathcal{E}_2$).

2) Rõ ràng là $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$.

3) Giả sử f, g là những phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$. Khi đó $g \circ f$ có tính afin và, với mọi (A, B) thuộc $\mathcal{E}_2^2$:

$$d\big((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)\big) = d\big(f(A), f(B)\big) = d(A, B).$$

Vậy $g \circ f$ là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$.

4) Nếu f là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$, thì f là song ánh, f^{-1} có tính afin (xem 1.4.1, Mệnh đề 3, 2)) và, với mọi (A, B) thuộc $\mathcal{E}_2^2$:

$$d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = d(A, B),$$ ■

vậy f^{-1} là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$.

- **Định nghĩa 2** Cho f là một phép đẳng cự của $\mathcal{E}_2$.
  1) Ta nói rằng f là một phép đẳng cự afin **thuận** (hoặc : **phép dời hình**) khi và chỉ khi det ($\vec{f}$) = 1.
  2) Ta nói rằng f là một phép đẳng cự afin **nghịch** (hoặc : **phép phản dời hình**) khi và chỉ khi det ($\vec{f}$) = -1.

- **Mệnh đề 3** Tập hợp các phép dời hình của $\mathcal{E}_2$ là một nhóm con của nhóm các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$.

Chứng minh :

1) $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ là một phép dời hình.

2) Nếu f, g là những phép dời hình, thì $g \circ f$ là một phép đẳng cự afin và :

$\det(\overrightarrow{g \circ f}) = \det(\vec{g} \circ \vec{f}) = \det(\vec{g}) \det(\vec{f}) = 1.1 = 1,$

vậy $g \circ f$ là một phép dời hình.

3) Nếu f là một phép dời hình, thì f^{-1} là một phép đẳng cự afin và :

$\det(\overrightarrow{f^{-1}}) = \det(\vec{f}^{-1}) = (\det(\vec{f}))^{-1} = 1^{-1} = 1,$

vậy f^{-1} là một phép dời hình.

- **Định nghĩa 3** Cho $A \in \mathcal{E}_2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Ta gọi phép đẳng cự afin giữ A bất động và có bộ phận tuyến tính Rot_θ, là **phép quay tâm A với góc quay θ**, và ký hiệu là $\mathrm{Rot}_{A,\theta}$.

Vậy, với mọi điểm M, M' thuộc $\mathcal{E}_2$, ta có :

$$M' = \mathrm{Rot}_{A,\theta}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \mathrm{Rot}_\theta(\overrightarrow{AM}).$$

- **Định lý** **(Phân loại các phép dời hình của $\mathcal{E}_2$)**
  Các phép dời hình của $\mathcal{E}_2$ là các phép tịnh tiến và các phép quay.

Chứng minh :

Rõ ràng là các phép tịnh tiến và các phép quay là những phép dời hình. Ngược lại, giả sử f là một phép dời hình của $\mathcal{E}_2$. Khi đó $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ thuận của $\vec{\mathcal{E}}_2$, nên (xem 2.1.4, 2)), tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{f} = \mathrm{Rot}_\theta$.

Nếu $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, thì $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_2}$, vậy f là một phép tịnh tiến. Vậy ta giả thiết $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.

Ta xét trong một hệ q.c.t.c.t. $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ của $\mathcal{E}_2$. Tồn tại $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$ sao cho với mọi $M(x, y)$, thuộc $\mathcal{E}_2$, $f(M)$ có tọa độ là (x', y') trong đó :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + \alpha \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + \beta. \end{cases}$$

Ta có :

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\cos\theta) + y\sin\theta = \alpha \\ -x\sin\theta + y(1-\cos\theta) = \beta. \end{cases}$$

Định thức $\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix} = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$ khác không, vậy hệ phương trình trên có một và chỉ một nghiệm.

Như thế f có một điểm bất động duy nhất, ký hiệu là A.

Vì $f(A) = A$ và $\vec{f} = \mathrm{Rot}_\theta$, nên f là phép quay tâm A với góc quay θ.

♦ **Định nghĩa 4** Cho D là một đường thẳng của $\mathcal{E}_2$. **Phép phản chiếu** (hoặc : **phép đối xứng trực giao) qua** D , và ký hiệu là Ref_D, là phép đối xứng qua D, song song với phương trực giao với D.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 4** Với hai điểm phân biệt A, B thuộc $\mathcal{E}_2$, tồn tại một và chỉ một phép phản chiếu đổi chỗ A và B ; đó là phép phản chiếu qua đường trung trực của AB. ■

Tích của hai phép phản chiếu trong mặt phẳng

Cho D, D' là hai đường thẳng của $\mathcal{E}_2$.

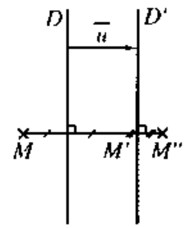
Rõ ràng là :

1) Nếu $D \,//\, D'$ thì :

$$\mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D = \mathrm{T}_{2\vec{u}} \ ,$$

trong đó $\vec{u}$ là vectơ trực giao với D và D' thỏa mãn

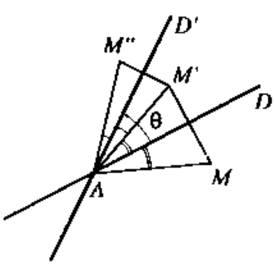
$$D' = \mathrm{T}_{\vec{u}}\ (D)\ .$$



2) Nếu D và D' cắt nhau tại một điểm A, thì

$$\mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D = \mathrm{Rot}_{A,\,2\theta}\ ,$$

trong đó $\theta \equiv (\widehat{D, D'})[\,\pi\,]$.



Phân tích một phép dời hình thành tích hai phép phản chiếu

1) *Trường hợp phép tịnh tiến*

Với mọi $\vec{u}$ thuộc $\vec{\mathcal{E}}_2$ và mọi đường thẳng D sao cho $\vec{u} \perp \vec{D}$, nếu ký hiệu $D' = \mathrm{T}_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$, thì ta có :

$$\mathrm{T}_{\vec{u}} = \mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D\,.$$

Như vậy, mọi phép tịnh tiến phân tích được thành tích của hai phép phản chiếu (qua hai đường thẳng trực giao với vectơ của phép tịnh tiến) , và ta có thể chọn một trong hai đường thẳng đó, khi đó việc phân tích là duy nhất.

2) *Trường hợp một phép quay*

Cho $A \in \mathcal{E}_2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Với mọi đường thẳng D đi qua A, nếu ký hiệu $D' = \mathrm{Rot}_{\frac{\theta}{2}}(D)$, thì ta có :

$$\mathrm{Rot}_{A,\theta} = \mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D.$$

Như vậy, mọi phép quay phân tích được thành tích của hai phép phản chiếu (qua hai đường thẳng đi qua tâm của phép quay) và ta có thể chọn một trong hai đường thẳng đó, khi đó việc phân tích là duy nhất.

2.2.3 Phép đồng dạng thuận của mặt phẳng

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi ánh xạ $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, sao cho tồn tại $k \in \mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}_2, \quad d(f(A), f(B)) = kd(A, B)$$

là **phép đồng dạng** của mặt phẳng $\mathcal{E}_2$.

NHẬN XÉT :

1) Với các ký hiệu trên, số thực k là duy nhất và được gọi là **tỷ số** của phép đồng dạng f.

2) Mọi phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_2$ là một phép đồng dạng (lấy $k = 1$).

3) Mọi phép vị tự với tỷ số $k > 0$ là một phép đồng dạng với tỷ số k.

4) Một ánh xạ afin $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ là một phép đồng dạng khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho : $\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, $\|\vec{f}(\vec{u})\| = k\|\vec{u}\|$.

♦ **Mệnh đề 1**

Các phép đồng dạng của mặt phẳng làm thành một nhóm con của nhóm afin GAff ($\mathcal{E}_2$).

Chứng minh :

1) Cho f là một phép đồng dạng, k là tỷ số của nó. Với mọi $\vec{u}$ thuộc $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$, ta có :

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{u})\| = 0 \Leftrightarrow k\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

Vậy $\vec{f}$ là đơn ánh.

Vì $\vec{\mathcal{E}}_2$ có số chiều hữu hạn (bằng 2), nên $\vec{f}$ là song ánh, và vì thế f là song ánh.

2) Rõ ràng $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ là một phép đồng dạng của mặt phẳng.

3) Cho f, f' là hai phép đồng dạng của $\mathcal{E}_2$ với các tỷ số tương ứng là k, k'. Vậy thì $f' \circ f$ là ánh xạ afin và, với mọi A, B thuộc $\mathcal{E}_2$:

$$d((f' \circ f)(A), (f' \circ f)(B)) = k' d\,(f(A), f(B)) = k' k\, d\,(A, B),$$

nên $f' \circ f$ là một phép đồng dạng của $\mathcal{E}_2$, với tỷ số $k'k$.

4) Cho f là một phép đồng dạng, k là tỷ số của nó. Vậy thì tồn tại f^{-1} (xem 1)), f^{-1} là một ánh xạ afin và là song ánh, và, với mọi A, B thuộc $\mathcal{E}_2$:

$$d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = \frac{1}{k}\, d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = \frac{1}{k}\, d(A, B),$$

vậy f^{-1} là một phép đồng dạng, với tỷ số $\frac{1}{k}$. ■

◆ **Định nghĩa 2** Cho f là một phép đồng dạng của mặt phẳng. Ta nói rằng f là một phép đồng dạng **thuận** (tương ứng : **nghịch**) khi và chỉ khi $\det(\vec{f}) > 0$ (tương ứng : < 0).

◆ **Mệnh đề 2**

Các phép đồng dạng thuận của $\mathcal{E}_2$ làm thành một nhóm con của nhóm các phép đồng dạng của $\mathcal{E}_2$.

Chứng minh :

1) $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ hiển nhiên là một phép đồng dạng thuận.

2) Nếu f, f' là hai phép đồng dạng thuận, thì $f \circ f'$ là một phép đồng dạng và, vì :

$$\det(\overrightarrow{f' \circ f}) = \det(\vec{f}' \circ \vec{f}) = \det(\vec{f}')\det(\vec{f}) > 0,$$

nên $f' \circ f$ là một phép đồng dạng thuận.

3) Nếu f là một phép đồng dạng thuận, thì f^{-1} là một phép đồng dạng và vì :

$$\det(\overrightarrow{f^{-1}}) = \det(\vec{f}^{-1}) = (\det(\vec{f}))^{-1} > 0,$$

nên f^{-1} là một phép đồng dạng thuận.

◆ **Định lý** Cho f là một phép đồng dạng thuận của mặt phẳng, k là tỷ số của nó.

- Nếu $k \neq 1$, thì f có một và chỉ một điểm bất động Ω, và tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ duy nhất modulo 2π, sao cho :

$$f = \mathrm{H}_{\Omega, k} \circ \mathrm{Rot}_{\Omega, \theta} = \mathrm{Rot}_{\Omega, \theta} \circ \mathrm{H}_{\Omega, k}$$

- Nếu $k = 1$, thì f là một phép tịnh tiến hoặc một phép quay.

Chứng minh :

Cho $O \in \mathcal{E}_2$, cố định bất kỳ.

1) Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$, ta có :

$f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f(O)M} \Leftrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow ((\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_2} - \vec{f})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{Of(O)}.$

2) Ta chứng minh rằng $\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_2} - \vec{f}$ là song ánh.

Giả sử $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_2$ sao cho $(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_2} - \vec{f})(\vec{u}) = \vec{0}$, tức là $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$.

Khi đó ta có $\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.

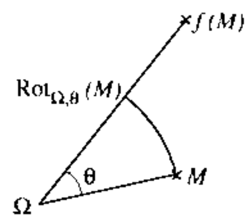
Vì $\|f(\vec{u})\| = k\|\vec{u}\|$ và $k \neq 1$, ta suy ra $\|\vec{u}\| = 0$, $\vec{u} = \vec{0}$.

Điều này chứng tỏ rằng $\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_2} - \vec{f}$ là đơn ánh, vậy là song ánh, vì $\vec{\mathcal{E}}_2$ là một kgv có số chiều hữu hạn (bằng 2).

Vậy tồn tại $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_2$ sao cho :

$(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_2} - \vec{f})(\vec{u}) = \overrightarrow{Of(O)}$, rồi tồn tại $\Omega \in \mathcal{E}_2$

sao cho $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{u}$, và, theo (1), Ω bất biến qua f.



3) Thế thì $\mathrm{H}_{\Omega,k^{-1}} \circ f$ là một phép đẳng cự afin nhận Ω làm điểm bất động, vậy (xem 2.2.2, Định lý), tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ (duy nhất modulo 2π) sao cho :

$$\mathrm{H}_{\Omega,k^{-1}} \circ f = Rot_{\Omega,\theta},$$

từ đó $f = \mathrm{H}_{\Omega,k} \circ \mathrm{Rot}_{\Omega,\theta}$.

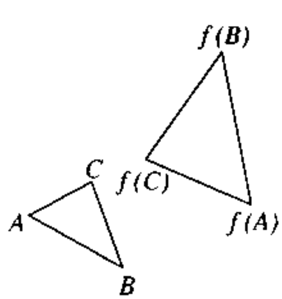
Cuối cùng, hiển nhiên là $\mathrm{H}_{\Omega,k}$ và $\mathrm{Rot}_{\Omega,\theta}$ giao hoán với nhau.

Như vậy, các phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng gồm :

- các phép tịnh tiến
- các phép quay
- tích của một phép vị tự và một phép quay cùng tâm.

♦ **Mệnh đề 3** Các phép đồng dạng thuận bảo toàn các góc định hướng, tức là, với mọi phép đồng dạng thuận f và với mọi điểm A, B, C thuộc $\mathcal{E}_2$ sao cho $A \neq B$ và $A \neq C$, ta có :

$$\angle(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}) = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad [2\pi]$$



Chứng minh :

Ta ký hiệu : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; vậy chỉ cần chứng tỏ rằng :

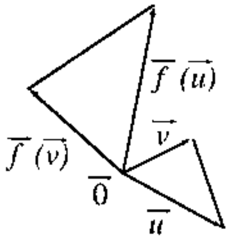
$$\angle(\vec{f}(\vec{u}),\vec{f}(\vec{v})) = \angle(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi] .$$

- Ta có :

$$\vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v})=\frac{1}{2}(\|\vec{f}(\vec{u})+\vec{f}(\vec{v})\|^2-\|\vec{f}(\vec{u})\|^2-\|\vec{f}(\vec{v})\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(\|\vec{f}(\vec{u}+\vec{v})\|^2-\|\vec{f}(\vec{u})\|^2-\|\vec{f}(\vec{v})\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(k^2\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-k^2\|\vec{u}\|^2-k^2\|\vec{v}\|^2)=k^2\vec{u}.\vec{v} .$$



Vì : $\vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v})=\|\vec{f}(\vec{u})\|\,\|\vec{f}(\vec{v})\|\cos(\angle(\vec{f}(\vec{u}),\vec{f}(\vec{v})))$

$$=k^2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\angle(\vec{f}(\vec{u}),\vec{f}(\vec{v})))$$

và $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\angle(\vec{u},\vec{v}))$,

ta suy ra : $\cos(\angle(\vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v})))=\cos(\angle(\vec{u},\vec{v}))$.

- Mặt khác, vì f là thuận, nên $\det(\vec{f})>$ o, và do :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}\left(\vec{f}(\vec{u}),\vec{f}(\vec{v})\right)=\det(\vec{f})\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v}),$$

nên các định thức $\det_{(\vec{i},\vec{j})}\left(\vec{f}(\vec{u}),\vec{f}(\vec{v})\right)$ và $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v})$ cùng dấu.

Từ đó suy ra rằng $\sin\angle(\vec{f}(\vec{u}).\vec{f}(\vec{v})))$ và $\sin(\angle(\vec{u},\vec{v}))$ có cùng dấu.
Cuối cùng :

$$\angle(\vec{f}(\vec{u}),\vec{f}(\vec{v}))\equiv\angle(\vec{u},\vec{v})[2\pi].$$

■

Mệnh đề 4

Mọi phép đồng dạng với tỷ số k biến các diện tích thành tích của chúng với k^2.

Chứng minh :

1) Trường hợp tam giác

Với ký hiệu $\mathcal{A}(\cdot)$ là diện tích một tam giác, với mọi A, B, C của $\mathcal{E}_2$ sao cho $A\neq B$ và $A\neq C$, ta có :

$$\mathcal{A}(f(A)f(B), f(C)) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|\|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|\left|\sin\left(\angle(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)})\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2}k^2\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\left|\sin\left(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)\right|$$
$$= k^2\mathcal{A}(ABC).$$

Ta công nhận rằng tính chất trên có thể mở rộng cho một bộ phận bất kỳ của $\mathcal{E}_2$ (trong đó có thể xác định khái niệm diện tích).

Về việc sử dụng các số phức, xem dưới đây 2.2.6.

2.2.4 Đường tròn trong mặt phẳng

Khi cần, mặt phẳng afin Euclide (đã định hướng) $\mathcal{E}_2$ được trang bị một hệ q.c.t.c.(t,) $\mathcal{R} = (0\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

◆ Định nghĩa

Cho $\Omega \in \mathcal{E}_2$, $R \in \mathbb{R}_+$. Ta gọi bộ phận của $\mathcal{E}_2$ được xác định bởi :

$$C(\Omega\,;R) = \{M \in \mathcal{E}_2\,;\ \Omega M = R\}$$

là **đường tròn tâm** Ω **và bán kính** R, và ký hiệu là $C(\Omega\,;R)$.

Ta cũng định nghĩa **đĩa mở** $B(\Omega, R)$ và **đĩa đóng** $B'(\Omega, R)$ tâm Ω và bán kính R :

$$B(\Omega\,;R) = \{M \in \varepsilon_2\,;\ \Omega M < R\}$$
$$B'(\Omega\,;R) = \{M \in \varepsilon_2\,;\ \Omega M \le R\}$$

C (Ω ; R) B (Ω ; R) B'(Ω ; R)

NHẬN XÉT

1) Với mọi (Ω, R) thuộc $\mathcal{E}_2 \times \mathbb{R}_+$: $C(\Omega, R) \neq \varnothing$.

2) Nếu $R = 0$, thì $C(\Omega\,;R) = \{\Omega\}$; ta nói rằng $\{\Omega\}$ là một **đường tròn - điểm.**

3) Ta có, với mọi $\Omega, \Omega' \in \mathcal{E}_2$ và mọi $R, R' \in \mathbb{R}_+$:

$$C(\Omega\,;R) = C(\Omega'\,;R') \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ R = R' \end{cases}$$

Như vậy, một đường tròn xác định một cách duy nhất tâm và bán kính của nó.

4) $B(\Omega\,;R) \cup C(\Omega\,;R) = B'(\Omega\,;R)$ và $B(\Omega\,;R) \cap C(\Omega\,;R) = \varnothing$.

5) *Biểu diễn trong mặt phẳng phức*

Nếu Ω có tọa vị ω ($\omega \in \mathbb{C}$) và nếu $R \in \mathbb{R}_+$, thì C(Ω ; R) là tập hợp các điểm $M(z)$ sao cho $|z - \omega| = R$.

Các mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 1** **(Phương trình Descartes của một đường tròn)**

Cho $\Omega(a, b) \in \mathcal{E}_2$, $R \in \mathbb{R}_+$; đường tròn C(Ω ; R) có PTD là :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 .$$

NHẬN XÉT :

Với các ký hiệu trên dây :

$$B(\Omega ; R) = \{M(x, y) ; (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\}$$
$$B'(\Omega ; R) = \{M(x,y) ; (x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2\}.$$

♦ **Mệnh đề 2** Cho $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. PTD $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ biểu diễn :

- đường tròn tâm $\Omega(-\alpha, -\beta)$ và bán kính $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ nếu $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma \ge 0$
- $\varnothing$ nếu trái lại.

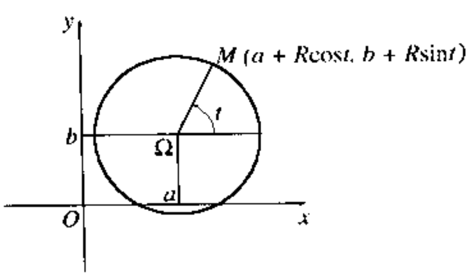
Ta có thể lưu ý những trường hợp riêng sau đây :

- Các đường tròn có tâm tại O : $x^2 + y^2 = R^2$
- Các đường tròn có tâm trên $x'x$: $x^2 + y^2 + 2\alpha x + \gamma = 0$ (với $\alpha^2 - \gamma \ge 0$)
- Các đường tròn có tâm trên yy' : $x^2 + y^2 + 2\beta y + \gamma = 0$ (với $\beta^2 - \gamma \ge 0$)
- Các đường tròn đi qua O : $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta\gamma = 0$.

♦ **Mệnh đề 3** **(Biểu diễn tham số một đường tròn)**

Cho $\Omega(a, b) \in \mathcal{E}_2$, $R \in \mathbb{R}_+$. Đường tròn C(Ω ; R) có BDTS là

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$



NHẬN XÉT :

1) Ta có thể thay $t \in \mathbb{R}$ bởi $t \in I$, trong đó I là một khoảng chứa một khoảng $]t_o ; t_o + 2\pi]$ hoặc $[t_o ; t_o + 2\pi[$, $t_o \in \mathbb{R}$.

2) Khi ký hiệu $u = \tan \frac{t}{2}$ $(t \in]-\pi ; \pi[)$, thì C $(\Omega ; R)$ (thiếu điểm ứng với $t = \pi$) có một BDTS phân thức hữu tỷ là :

$$\begin{cases} x = a + R\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = b + R\dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$ ■

◆ **Mệnh đề 4** Cho $\Omega \in \mathcal{E}_2$, $R \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in$ C $(\Omega ; R)$.

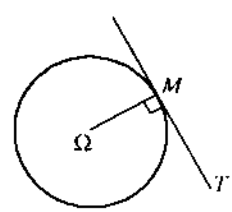
Đường tròn $C(\Omega, R)$ có một tiếp tuyến T tại M và ta có :

$$(\Omega M) \perp T.$$

Chứng minh :

Theo BDTS $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$ của C $(\Omega ; R)$,

tại mọi điểm M ứng với tham số t, đường tròn C$(\Omega$; R) có một tiếp tuyến T và T được định hướng bởi $\vec{V}_1$, trong đó :



$$\vec{V}_1 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\overrightarrow{\mathrm{d}t}} \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}.$$

Vì $\overrightarrow{\Omega M}.\vec{V}_1 = (R\cos t)(-R\sin t) + (R\sin t)(R\cos t) = 0$, nên ta có $(\Omega M) \perp T$.

◆ **Mệnh đề 5** Cho C là một đường tròn, có PTD $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$, và $M_0(x_0 , y_0) \in C$. Tiếp tuyến tại M_o với C có PTD : $x_0x + y_0y + \alpha(x_0 + x) + \beta(y_0 + y) + \gamma = 0$.

Người ta nói rằng PTD của tiếp tuyến **thu được bằng cách tách đôi** : trong PTD của C thay x^2 bởi x_0x, y^2 bởi y_0y, $2\alpha x$ bởi $\alpha(x_0 + x)$, $2\beta y$ bởi $\beta(y + y_0)$.

Chứng minh :

Đường tròn C có PTD : $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$, vậy sẽ có BDTS :

$x = -\alpha + R\cos t$, $y = -\beta + R\sin t$, $t \in \mathbb{R}$, nếu ký hiệu $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$

(ta giả thiết $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$).

Với $M_0(t_0) \in C$, tiếp tuyến tại M_0 với C có PTD :

$$\cos t_0\,(X - x_0) + \sin t_0\,(Y - y_0) = 0,$$

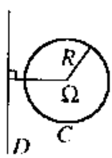
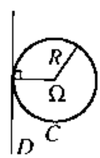
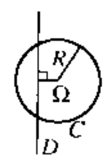
tức là : $(R\cos t_0)X + (R\sin t_0)Y - (x_0 + \alpha)x_0 - (y_0 + \beta)y_0 = 0,$

hoặc là : $(x_0 + \alpha)X + (y_0 + \beta)Y + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$

đó đúng là PTĐ trong Mệnh đề 5. ■

◆ **Mệnh đề 6** **(Vị trí tương đối của một đường thẳng và một đường tròn)**

Cho D là một đường thẳng và $C = \mathrm{C}(\Omega\,;R)$ là một đường tròn.

Nếu $d(\Omega, D) > R$, thì $D \cap C = \varnothing$	Nếu $d(\Omega, D) = R$, thì D tiếp xúc với đường tròn C và $D \cap C$ là một đơn tử	Nếu $d(\Omega, D) < R$, thì $D \cap C$ gồm hai điểm phân biệt
		

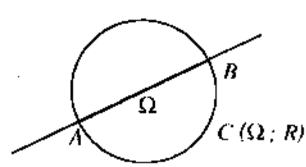
NHẬN XÉT :

Ta chứng minh bằng cách tách ra các trường hợp có thể rằng phần đảo của ba khẳng định trong Mệnh đề 6 cũng đúng.

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 7**

Cho $\Omega \in \mathcal{E}_2$, $R \in \mathbb{R}_+^*$. Mọi đường thẳng D đi qua Ω cắt đường tròn $\mathrm{C}(\Omega\,;R)$ tại đúng hai điểm A, B, và Ω là trung điểm của AB.

Đường thẳng (AB) (hay đoạn thẳng $[AB]$) được gọi là một **đường kính** của đường tròn $\mathrm{C}(\Omega\,;R)$.



◆ **Mệnh đề 8** Cho $A, B \in \mathcal{E}_2$, sao cho $A \neq B$. Đường tròn có đường kính AB là $\{M \in \mathcal{E}_2\,;\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$.

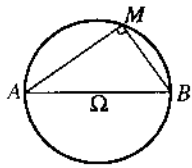
Chứng minh :
Ký hiệu Ω là trung điểm của AB và $R = \Omega A$.
Ta có :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A})=0$

$\Leftrightarrow M\Omega^2 - \Omega A^2 = 0 \Leftrightarrow \Omega M = R.$



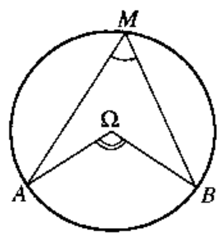
Góc ở tâm và góc nội tiếp

◆ Mệnh đề 9

Cho C là một đường tròn, Ω là tâm của nó, A, B, M là ba điểm của C từng cặp phân biệt.

Ta có :

$\angle\ (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2\angle\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ \ [2\pi].$



Nói cách khác, **góc ở tâm** bằng hai **góc nội tiếp** tương ứng.

Chứng minh :
Sử dụng hệ thức Chasles đối với góc và sự kiện các tam giác ΩAM và ΩBM đều cân tại Ω, ta có :

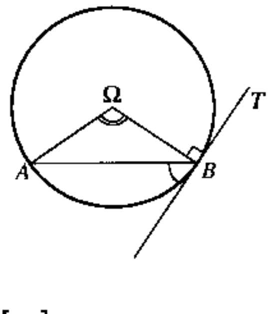
$$\begin{aligned}\angle(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) &= \angle(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{MA}) + \angle(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{\Omega B})\\ &= \angle(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{M\Omega}) + \angle(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MB})\\ &= 2\angle(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})[2\pi].\end{aligned}$$

◆ Mệnh đề 10

Cho C là một đường tròn, Ω là tâm của nó, A, B là hai điểm phân biệt của C, T là tiếp tuyến với C tại B. Ta có :

$= \angle(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) = 2\angle((AB),T)\ [2\pi]\ .$

Chứng minh :
Vì ΩAB cân tại Ω và vì $(B\Omega)$ trực giao với T, ta có :



$$\angle(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) = \pi - 2\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Omega})$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}-\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Omega})\right)=2\angle\big((AB),T\big)\,[2\pi].$$

■

Một số đường đồng mức

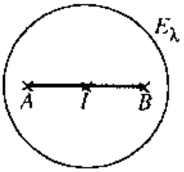
Cho một tập hợp X và một ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$, ta gọi các tập hợp $\{x \in X;\ \varphi(x) = \lambda\}$, với $\lambda \in \mathbb{R}$, là các **đường đồng mức** của φ.

1) Đường đồng mức $M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Cho $A, B \in \mathcal{E}_2$; với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $E_\lambda = \{M \in \mathcal{E}_2 ;\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda\}$.

Nếu ký hiệu I là trung điểm của AB, ta có với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2,$$



và do đó $\quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda \Leftrightarrow IM^2 = \lambda + \frac{1}{4}AB^2.$

- Nếu $\lambda < -\frac{1}{4}AB^2$, thì $E_\lambda = \varnothing$
- Nếu $\lambda = -\frac{1}{4}AB^2$, thì $E_\lambda = \{I\}$
- Nếu $\lambda > -\frac{1}{4}AB^2$, thì E_λ là đường tròn tâm I và bán kính $(\lambda + \frac{1}{4}AB^2)^{\frac{1}{2}}$.

Đặc biệt, E_o là đường tròn đường kính AB.

2) Đường đồng mức $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA_i^2$

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{E}_2$; ta ký hiệu $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}$ **là hàm vô hướng Leibniz**, xác định bởi :

$$\forall M \in \mathcal{E}_2, \qquad \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA_i^2,$$

và, với $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{M \in \mathcal{E}_2 ;\ \varphi(M) = \lambda\}$.

Cho $O \in \mathcal{E}_2$, là một điểm cố định bất kỳ. Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$ ta có :

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, OA_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \overrightarrow{OA_i}\right).\overrightarrow{OM} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) OM^2.$$

Trường hợp thứ nhất : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

Ta có thể xét tâm tỷ cự G của $\begin{pmatrix} A_1 \ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$

Thay O bởi G, ta sẽ có :

$$\forall M \in \mathcal{E}_2, \quad \varphi(M) = \varphi(G) + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)GM^2,$$

và như thế, với mọi λ thuộc $\mathbb{R}$:

$$M \in E_\lambda \Leftrightarrow GM^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{-1}(\lambda - \varphi(G)).$$

- Nếu $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{-1}(\lambda - \varphi(G)) < 0$, thì $E_\lambda = \varnothing$
- Nếu $\lambda = \varphi(G)$, thì $E_\lambda = \{G\}$
- Nếu $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{-1}(\lambda - \varphi(G)) > 0$, thì E_λ là đường tròn tâm G và bán kính

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{-1}(\lambda-\varphi(G))\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Trường hợp thứ hai : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$

Khi đó ta có : $\forall O, M \in \mathcal{E}_2$, $\varphi(M) = \varphi(O) - 2\overrightarrow{OM}.\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\right)$

Ta chú ý rằng, với mọi O, O' thuộc $\mathcal{E}_2$:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$$

Như vậy, vectơ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$ không phụ thuộc việc chọn O.

- Nếu tồn tại $O \in \mathcal{E}_2$ sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$, thì $E_\lambda = \begin{cases}\varnothing & \text{nếu } \lambda \neq \varphi(O)\\ \mathcal{E}_2 & \text{nếu } \lambda = \varphi(O).\end{cases}$

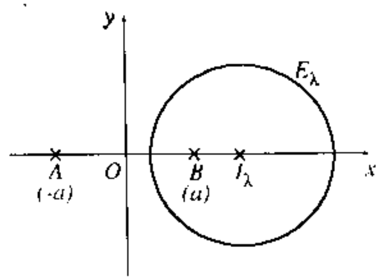
- Nếu tồn tại $O \in \mathcal{E}_2$ sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} \neq \vec{0}$ thì E_λ là một đường thẳng afin trực giao với $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$.

3) Đường đồng mức $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

Cho A, $B \in \mathcal{E}_2$ phân biệt ; với $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ta ký hiệu :

$$E_\lambda = \{M \in \mathcal{E}_2 - \{B\} ; \frac{MA}{MB} = \lambda\}.$$

Trước hết chú ý rằng E_1 là đường trung trực của AB. Giả thiết $\lambda \neq 1$, và ký hiệu O là trung điểm của AB, $a = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$, $\vec{i} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i})$; như vậy



$\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ là một hệ q.c.t.c.t. của $\mathcal{E}_2$, trong đó $A(-a, O)$, $B(a, O)$. Với mọi λ thuộc $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ và mọi M thuộc $\mathcal{E}_2 - \{B\}$, ta có :

$$M \in E_\lambda \Leftrightarrow (x+a)^2 + y^2 = \lambda^2((x-a)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}x + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2.$$

Như vậy, với mọi λ thuộc $\mathbb{R} - \{1\}$, E_λ là đường tròn tâm $I_\lambda\left(-a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, 0\right)$ và bán kính $\left|\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right|$.

NHẬN XÉT :

Ta có thể đưa về 2) : $\frac{MA}{MB} = \lambda \Leftrightarrow MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0$.

4) Đường đồng mức $M \mapsto \angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

Cho $A, B \in \mathcal{E}_2$, phân biệt. Ta sẽ thấy dưới đây (2.2.6) rằng các đường đồng mức $M \mapsto \angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (xác định modulo π) là những đường tròn đi qua A và B (không kể A và B).

Cũng như vậy, các đường đồng mức $M \mapsto \angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (xác định modulo 2π) là những cung tròn có mút là A, B (không kể A và B).

Một số thuật ngữ

1) **Dây cung** của một đường tròn C là mọi đường thẳng hoặc đoạn thẳng nối hai điểm của C. **Cung** của C là giao của C với một nửa mặt phẳng.

2) Hai điểm A, B của một đường tròn C được gọi là **đối tâm** khi và chỉ khi tâm Ω của C là trung điểm của AB, như vậy AB định ra hai **nửa đường tròn**.

3) Cho ABC là một tam giác không bẹt. Tồn tại một và chỉ một đường tròn đi qua A, B, C. Đường tròn đó được gọi là đường tròn **ngoại tiếp** tam giác ABC ; tâm của nó là điểm đồng quy của các đường trung trực của ABC.

4) Cho ABC là một tam giác không bẹt. Tồn tại đúng bốn đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng (AB), (BC), (CA). Những đường tròn này được gọi là đường tròn

nội tiếp trong tam giác ABC và ba đường tròn **bàng tiếp** trong tam giác ABC ; tâm của chúng là giao điểm của các đường phân giác trong và ngoài của tam giác ABC.

5) Các điểm $A_1,..., A_n$ $(n \geq 4)$ của $\mathcal{E}_2$ được gọi là **đồng chu** khi và chỉ khi tồn tại một đường tròn C đi qua $A_1,..., A_n$.

2.2.5 Đường cônic trong mặt phẳng afin Euclide

Khi cần mặt phẳng afin Euclide (định hướng) $\mathcal{E}_2$ được trang bị một hệ q.c.t.c. (t.) $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

I) Định nghĩa đơn tiêu các đường cônic

- **Định nghĩa 1** Cho $F \in \mathcal{E}_2$, D là một đường thẳng của $\mathcal{E}_2$ sao cho $F \notin D$, $e \in \mathbb{R}_+^*$. **Đường cônic với tiêu điểm** F, **đường chuẩn (liên kết)** D, **tâm sai** e, là bộ phận C của $\mathcal{E}_2$ xác định bởi :

$$C = \{M \in \mathcal{E}_2 \ ; MF = e\, MH\},$$

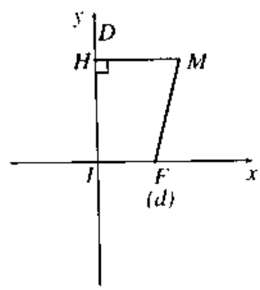
trong đó H là hình chiếu vuông góc của M lên D.

Như vậy : $C = \{M \in \mathcal{E}_2 \ ; d(M, F) = ed(M, D)\}$.

Một phương trình Descartes của C

Ta ký hiệu $d = d(F, D)$, I là hình chiếu vuông góc của F lên D, và xét trong hệ q.c.t.c.(t.) $\mathcal{R} = (I; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó $\vec{i} = \frac{1}{d}\overrightarrow{IF}$

và $\vec{j} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i})$.



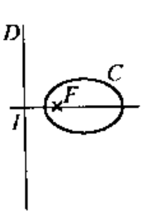
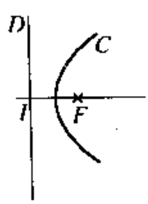
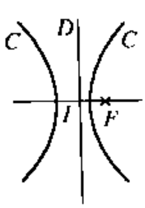
Cho $M(x, y) \in \mathcal{E}_2$; khi đó ta có $H(0, y)$, suy ra :

$M \in C \Leftrightarrow (x - d)^2 + y^2 = e^2x^2$

$\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0.$

Hình dạng của C phụ thuộc vào dấu của $1 - e^2$:

- **Định nghĩa 2**

$0 < e < 1$ **elip**	$e = 1$ **parabol**	$e > 1$ **hypebol**
		

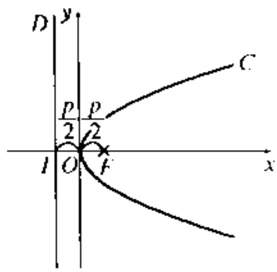
NHẬN XÉT :

1) Ta có thể coi trường hợp đường tròn là ứng với $e = 0$ trong phương trình trên đây.

2) Ta sẽ xét dưới đây (2.2.5,3) các **cônic suy biến** ; đó là $\varnothing$, một đơn tử, hợp của hai đường thẳng.

3) Đường parabol (không suy biến) không có tâm đối xứng. Nếu $e = 1$, thì C là parabol có phương trình $y^2 - 2dx + d^2 = 0$, hoặc $y^2 = 2d(x - \frac{d}{2})$.

Ta ký hiệu $p = d$, gọi là **tham số** của parabol C.
Ta lấy trung điểm O của cặp điểm FI làm gốc mới .
Một PTD của C sẽ là : $y^2 = 2px$.
Một BDTS của C là : $x = \frac{\lambda^2}{2p}$, $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Rõ ràng là C chỉ có một tiêu điểm và một đường chuẩn.



4) Giả thiết $e \neq 1$. Khi đó một PTD sẽ là :

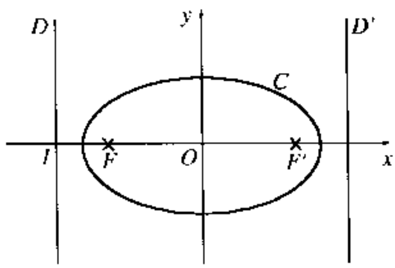
$$(1-e^2)\left(x - \frac{d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2e^2}{1-e^2}.$$

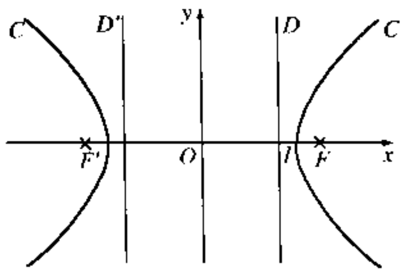
Xét điểm $O\left(\frac{d}{1-e^2}, 0\right)$. Trong hệ q.c.t.c.(t.) $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ một PTD của C sẽ là :

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 = \frac{d^2e^2}{1-e^2},$$

vậy C nhận O làm tâm đối xứng.

Vậy, một elip hoặc một hypebol có một tâm : đó là những **cônic có tâm.**
Nếu ta ký hiệu F' (tương ứng : D') là đối xứng của F (tương ứng : D) qua O, thì C cũng là một cônic có tiêu điểm F', đường chuẩn liên kết D', tâm sai e.
Rõ ràng là C chỉ có hai tiêu điểm và hai đường chuẩn.





2) Định nghĩa song tiêu các đường cônic có tâm

♦ **Mệnh đề 1** Cho $F, F' \in \mathcal{E}_2$, phân biệt, $a \in \mathbb{R}_+^*$

1) Tập hợp $\{M \in \mathcal{E}_2 \,;\, MF + MF' = 2a\}$ là một elip có tiêu điểm F, F' (nếu $a > \frac{1}{2} FF'$).

2) Tập hợp $\{M \in \mathcal{E}_2 \,;\, |MF - MF'| = 2a\}$ là một hypebol có tiêu điểm F, F' (nếu $a < \frac{1}{2} FF'$).

Chứng minh :

Ký hiệu O là trung điểm của FF', $c = OF$, $\vec{i} = \frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$, $\vec{j} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i})$; như vậy, trong hệ q.c.t.c.(t.) $\mathcal{R} = (0 \,;\, \vec{i}, \vec{j})$: $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. Ta ký hiệu C là tập hợp được xét.

1) Trước tiên ta chú ý rằng, theo bất đẳng thức tam giác, $FF' \leq MF + MF'$, và theo việc xét trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức tam giác ấy, rằng, nếu $a < c$, thì $C = \varnothing$, và nếu $a = c$, thì $C = FF'$.
Bây giờ ta giả thiết $a > c$.
Với mọi $M(x, y)$, ta có :

$$MF = MF' = 2a \Leftrightarrow \left((x-c)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left((x+c)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2a$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\left(((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)\right)^{\frac{1}{2}} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \left((x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)\right)^{\frac{1}{2}} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = \left(2a^2 - (c^2 + x^2 + y^2)\right)^2 \\ 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2. \end{cases}$$

Ký hiệu $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $(b > 0)$. Ta có :

$$M \in C \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ và } x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2\right).$$

Vì, với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 \leq a^2 \\ y^2 \leq b^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 ,$$

nên ta kết luận :

$$M \in C \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Khi so sánh PTĐ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và PTĐ $(1 - e^2)x^2 + y^2 = \frac{d^2e^2}{1-e^2}$ mà ta đã thu được ở (1), ta thấy rằng với $e = \frac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$ và $d = \frac{1-e^2}{e^2}e$ $(d > 0)$, thì C là elip có tiêu điểm $F(c, 0)$ và đường chuẩn $D \mid x = c + d$.

Đặc biệt, vì $c + d = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$, nên D có PTĐ : $x = \frac{a^2}{c}$.

2) Trước tiên ta chú ý, theo bất đẳng thức tam giác đảo $|MF - MF'| \le FF'$ và việc xét trường hợp đẳng thức, rằng, nếu $a > c$, thì $C = \varnothing$, và, nếu $a = c$, thì $C = ((FF') - [FF']) \cup \{F, F'\}$, là hợp của hai nửa đường thẳng đóng.

Bây giờ ta giả thiết $a < c$. Cũng theo cách như ở 1), ta được :

$$|MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow \begin{cases} (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\ x^2 + y^2 \ge 2a^2 - c^2 \end{cases}$$

Ký hiệu $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $(b > 0)$. Ta có :

$$M \in C \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 \ge a^2 - b^2 \right)$$

Vì với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 \ge a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge a^2 \ge a^2 - b^2$$

nên ta kết luận : $\quad M \in C \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

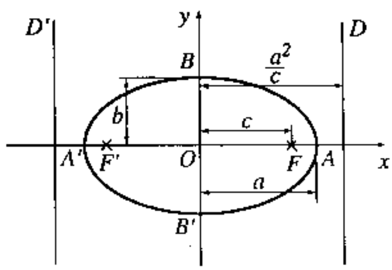
Khi so sánh PTĐ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và PTĐ $(e^2 - 1)x^2 - y^2 = \frac{d^2e^2}{1-e^2}$ mà ta đã có ở 1), ta thấy rằng với $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$ và $d = \frac{e^2 - 1}{e^2}c$ $(d > 0)$, thì C là hybebol với tiêu điểm $F(c, 0)$ và đường chuẩn $D \mid x = c - d$.

Đặc biệt, vì $c - d = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$, nên D có PTĐ :

$$x = \frac{a^2}{c}$$

Tóm lại :

elip



$0 < b < a,\ a^2 = b^2 + c^2,\ e = \frac{c}{a}$

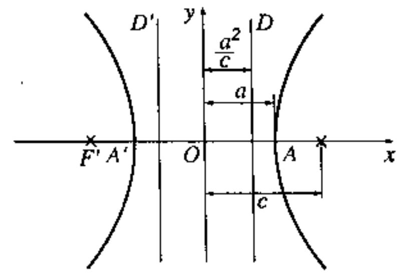
Phương trình thu gọn : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$AA' = 2a$, **trục lớn**

$BB' = 2b$, **trục bé**

A, A', B, B', **đỉnh**

hypebol



$c^2 = a^2 + b^2,\ e = \frac{c}{a}$

Phương trình thu gọn : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

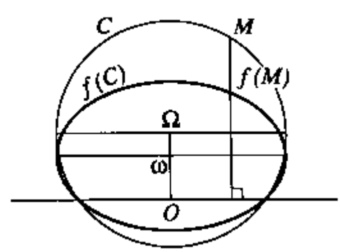
$AA' = 2a$, **trục tiêu**

A, A', **đỉnh**

♦ **Mệnh đề 2**

Ảnh của một đường tròn qua một phép co trực giao là một elip.

Chứng minh :



Giả sử C là một đường tròn, D là một đường thẳng, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, f là phép co trực giao với trục D và tỷ số α.

Ta ký hiệu Ω và R là tâm và bán kính của C, và xét trong hệ q.c.t.c. (t.) $\mathcal{R} = (O;\ \vec{i}, \vec{j})$ trong đó O là hình chiếu vuông góc của Ω lên D, $\vec{i}$ là một vectơ chuẩn hóa định hướng D, $\vec{j} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i})$.

Trong $\mathcal{R}$, Ω có tọa độ $(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cho $M(x, y) \in \mathcal{E}_2$, $f(M)$ $(X = x, Y = \alpha y)$.

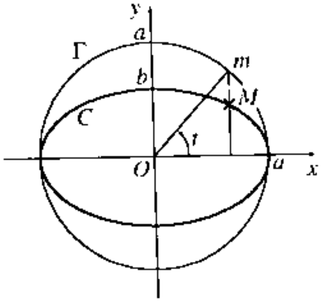
Ta có :

$$M \in C \Leftrightarrow x^2 + (y - \lambda)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \left(\frac{Y - \alpha\lambda}{\alpha}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{X^2}{R^2} + \left(\frac{Y - \alpha\lambda}{\alpha R}\right)^2 = 1.$$

Vậy $f(C)$ là một elip, tâm $\omega(0, \alpha\lambda)$ (ảnh của Ω qua f), các bán trục R và $|\alpha| R$. ■

Đường elip $C \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right.$ là ảnh của đường tròn $\Gamma \mid x^2 + y^2 = a^2$, gọi là **đường tròn chính** của C, trong phép co trực giao với trục là $x'x$ và tỷ số $\frac{b}{a}$.



Vì Γ nhận BDTS

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

nên ta suy ra :

◆ **Mệnh đề 3** **(BDTS của một elip)**

Elip $C \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right.$ có BDTS $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

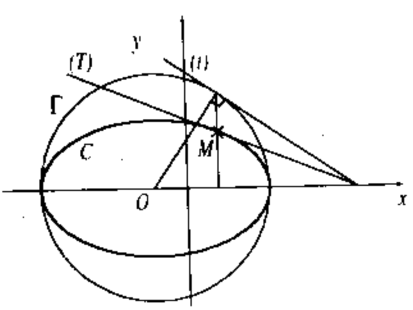
trong đó t chạy khắp $\mathbb{R}$.

NHẬN XÉT :

1) Trong BDTS này, t không biểu thị góc cực của điểm chạy M của C, mà là góc cực của điểm m của Γ từ đó M được suy ra trong phép co ; t được gọi là **độ lệch tâm** của M.

2) *Dựng tiếp tuyến với elip tại một điểm*

Phép co trên đây biến tiếp tuyến (t) với Γ tại m thành tiếp tuyến (T) với C tại M.



Nếu $M \notin x'x \cup y'y$, thì giao điểm của (t) và $x'x$ là bất biến qua phép co, vậy sẽ nằm trên (T).

Như thế, (T) là đường thẳng nối M với giao điểm của (t) và $x'x$. ■

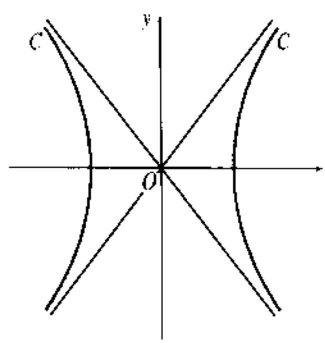
◆ **Mệnh đề 4** **(BDTS của đường hypebol)**

Hypebol $C \left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right.$ có BDTS : $\begin{cases} x = \varepsilon a \mathrm{ch} t \\ y = b \mathrm{sh} t \end{cases}$, $(\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$,

và cả BDTS : $\begin{cases} a = \dfrac{a}{2}(u + \dfrac{1}{u}) \\ y = \dfrac{b}{2}(u - \dfrac{1}{u}) \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}^*$. ■

◆ **Mệnh đề 5** Hypebol $C \left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right.$ có hai đường tiệm cận, với phương trình là $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = -\dfrac{b}{a}x$.

Chứng minh :



Hypebol C có PTĐ

$y = \varepsilon \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, trong đó $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Vậy ta có :

$\dfrac{y}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \varepsilon \dfrac{b}{a}$ rồi

$y - \varepsilon \dfrac{b}{a} x = \varepsilon \dfrac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x)$

$= \varepsilon \dfrac{b}{a} \dfrac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$,

và ta cũng khảo sát tương tự khi $x \to -\infty$. ■

◆ **Định nghĩa** Một hypebol được gọi là **vuông** khi và chỉ khi hai đường tiệm cận của nó trực giao.

NHẬN XÉT :

Hypebol với phương trình thu gọn $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là vuông khi và chỉ khi $a = b$, điều này tương đương với $e = \sqrt{2}$.

♦ **Mệnh đề 6** **(Hypebol quy về các đường tiệm cận)**

Trong hệ quy chiếu Descartes (*không nhất thiết trực chuẩn*) tạo nên bởi hai đường tiệm cận của đường hypebol, một PTD của hypebol có dạng: $xy = k,\ k \in \mathbb{R}^*$.

Chứng minh :

Cho C là hypebol có phương trình thu gọn $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta đã biết rằng các đường tiệm cận của nó có PTD $y = \dfrac{b}{a}x$ và $y = -\dfrac{b}{a}x$, vậy chúng được định hướng bởi $\vec{I} = \vec{i} + \dfrac{b}{a}\vec{j}$ và $\vec{J} = \vec{i} - \dfrac{b}{a}\vec{j}$.

Nếu ký hiệu (X,Y) là tọa độ của một điểm M trong hệ quy chiếu mới này, ta có :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{b}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

suy ra $\begin{cases} x = X + Y \\ y = \dfrac{b}{a}(X - Y) \end{cases}$, hoặc : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{b}y\right) \\ Y = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{a}{b}y\right) \end{cases}$.

Khi đó ta có $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{4}{a^2}XY$, vậy PTD của C trong $\left(O;\vec{I},\vec{J}\right)$ là : $XY = \dfrac{a^2}{4}$.

3) *Đường cong có phương trình $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0$*

Cho $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5$ và C là bộ phận của $\mathcal{E}_2$ có PTD :

(1) $$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0.$$

Trường hợp thứ nhất : $\alpha \neq 0$ *và* $\beta \neq 0$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow \alpha\left(x + \dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \beta\left(y + \dfrac{\delta}{\beta}\right)^2 = \dfrac{\gamma^2}{\alpha} + \dfrac{\delta^2}{\beta^2} - \varepsilon.$

Xét $O'\left(-\dfrac{\gamma}{\alpha}, -\dfrac{\delta}{\beta}\right)$ và $\mathcal{R}' = \left(O';\vec{i},\vec{j}\right)$. Với $M \in \mathcal{E}_2$, ta ký hiệu (x', y') là tọa độ của M trong hệ quy chiếu trực chuẩn (thuận) $\mathcal{R}'$.

Vậy ta có : $M \in C \Leftrightarrow \alpha x'^2 + \beta y'^2 = \dfrac{\gamma^2}{\alpha} + \dfrac{\delta^2}{\beta} - \varepsilon.$

Ta chú ý ngay rằng O' là tâm đối xứng của C.

- Nếu $\dfrac{\gamma^2}{\alpha}+\dfrac{\delta^2}{\beta}-\varepsilon = 0$, thì C là :

$$\left|\begin{array}{l}\{O'\} \text{ nếu } \alpha\beta>0\\ \text{Hợp của hai đường thẳng phân biệt đi qua } O', \text{ nếu } \alpha\beta<0.\end{array}\right.$$

- Giả sử $\dfrac{\gamma^2}{\alpha}+\dfrac{\delta^2}{\beta}-\varepsilon\neq 0$, và ký hiệu $\lambda=\dfrac{\gamma^2}{\alpha}+\dfrac{\delta^2}{\beta}-\varepsilon$.

Ta có : $$M\in C \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda}x'^2+\frac{\beta}{\lambda}y'^2=1.$$

◊ Nếu $\dfrac{\alpha}{\lambda}<0$ và $\dfrac{\beta}{\lambda}<0$, thì $C=\varnothing$.

◊ Nếu $\dfrac{\alpha}{\lambda}>0$ và $\dfrac{\beta}{\lambda}>0$, thì C là một elip với phương trình thu gọn là :

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a=\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac12}$, $b=\left(\dfrac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac12}$ (ta có thể có $a\le b$).

◊ Nếu $\alpha\beta<0$, thì C là một hypebol có phương trình thu gọn là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ hoặc

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, trong đó $a=\left|\dfrac{\lambda}{\alpha}\right|^{\frac12}$, $b=\left|\dfrac{\lambda}{\beta}\right|^{\frac12}$.

Trường hợp thứ hai : $\alpha=0$ và $\beta\neq 0$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \beta\left(y+\dfrac{\delta}{\beta}\right)^2=-2\gamma x+\dfrac{\delta^2}{\beta}-\varepsilon$.

- Nếu $\gamma\neq 0$, thì : $\quad$ (1) $\Leftrightarrow \beta\left(y+\dfrac{\delta}{\beta}\right)^2=-2\gamma\left(x-\dfrac{\delta^2}{2\beta\gamma}+\dfrac{\varepsilon}{2\gamma}\right)$.

Xét $O'\left(\dfrac{\delta^2}{2\beta\gamma}-\dfrac{\varepsilon}{2\gamma},-\dfrac{\delta}{\beta}\right)$ và hệ q.c.t.c. (t.) $\mathcal{R}'=(O';\vec{i},\vec{j})$. Khi đó ta có :

$$M\in C\Leftrightarrow y'^2=-\frac{2\gamma}{\beta}x',$$

vậy C là một parabol, có đỉnh O', trục $(O';\vec{i})$, tham số $-\dfrac{\gamma}{\beta}$ (hoặc $\left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right|$ tùy theo định nghĩa được chọn cho tham số).

- Nếu $\gamma=0$ thì C là

$$\left|\begin{array}{l}\varnothing \text{ nếu } \delta^2-\beta\varepsilon<0\\ \text{Hợp của hai đường thẳng song song phân biệt nếu } \delta^2-\beta\varepsilon>0\\ \text{Một đường thẳng nếu } \delta^2-\beta\varepsilon=0.\end{array}\right.$$

Trường hợp thứ ba : $\alpha \neq 0$ và $\beta = 0$
Tương tự như trên khi hoán vị vai trò của các tọa độ.

Trường hợp thứ tư : $\alpha = \beta = 0$
Khi đó C là :

$$\begin{cases} \text{một đường thẳng nếu } (\gamma, \delta) \neq (0, 0). \\ \varnothing \text{ nếu } (\gamma, \delta) = (0, 0) \text{ và } \varepsilon \neq 0. \\ \mathcal{E}_2 \text{ nếu } \gamma = \delta = \varepsilon = 0. \end{cases}$$

■

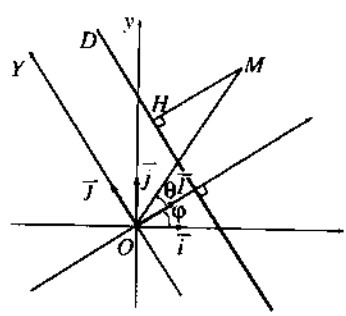
Tóm lại, loại hình của $C \mid \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0$ là như sau :

Nếu $\alpha \neq 0$ và $\beta \neq 0$	Nếu $\left\vert \begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ và } \beta \neq 0 \\ \text{hoặc} \\ \alpha \neq 0 \text{ và } \beta = 0 \end{array} \right.$	Nếu $\alpha = \beta = 0$
Elip Hypebol Một đơn tử Hợp của hai đường thẳng cắt nhau	Parabol Hai đường thẳng song song Một đường thẳng $\varnothing$	Một đường thẳng $\varnothing$ $\mathcal{E}_2$

Việc nghiên cứu tổng quát hơn các đường cong có PTĐ
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
là nội dung của phần bổ sung C 2.8.

4) Khảo sát đường cônic có một tiêu điểm tại gốc tọa độ trong hệ tọa độ cực

Cho C là một đường cônic nhận O làm tiêu điểm ; ta ký hiệu D là đường chuẩn của C liên kết với O, $d = d(O, D)$, $(\vec{I}, \vec{J})$ là c.s.t.c.(ι.) sao cho trong hệ q.c.t.c.(ι.) $\mathcal{R}' = (O'; \vec{I}, \vec{J})$, thì D có PTĐ $X = d$, và $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{I})[2\pi]$.



Ta sẽ khảo sát trong hệ tọa độ cực đối với $\mathcal{R}$.
Giả sử $M \in \mathcal{E}_2$, $[\theta, \rho]$ là các tọa độ cực của M (trong $\mathcal{R}$), H là hình chiếu vuông góc của M lên D. Ta có :

$$\overrightarrow{MH} = (-\rho\cos\theta + d)\vec{I},$$

vậy $M \in C \Leftrightarrow MO = eMH \Leftrightarrow |\rho| = e|d - \rho\cos\theta|$

$$\Leftrightarrow \left\vert \begin{array}{l} \rho = e(d - \rho\cos\theta) \\ \text{hoặc} \\ \rho = -e(d - \rho\cos\theta) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\vert \begin{array}{l} \rho = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta} \\ \text{hoặc} \\ \rho = \dfrac{-de}{1 - e\cos\theta} \end{array} \right.$$

Nhưng hai phương trình cực $\rho_1 = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta}$ và $\rho_2 = \dfrac{-de}{1 - e\cos\theta}$ lại biểu diễn cùng một đường cong vì, với mọi θ: $\rho_1(\theta + \pi) = -\rho_2(\theta)$.

Vậy C có phương trình cực $\rho_1 = \dfrac{de}{1+e\cos\theta}$ trong $\mathcal{R}'$, do đó C có phương trình cực $\rho = \dfrac{de}{1+e\cos(\theta-\varphi)}$ trong $\mathcal{R}$.

Ta ký hiệu $p = de$, được gọi là **tham số** của C. Ta cũng chú ý rằng, nếu C là một parabol thì ta thấy lại định nghĩa đã cho về tham số của một parabol (2.2.5,*1*). Nhận xét 3).

Ta tóm tắt việc khảo sát.

- **Mệnh đề** Đường cônic C với tiêu điểm O, đường chuẩn liên kết D, tâm sai e, có phương trình cực là :

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\varphi)},$$

trong đó $d = d(O, D)$, $p = de$, $\varphi = \angle(\vec{i}, D) + \frac{\pi}{2}[\pi]$. ■

Ngược lại, khi tiến hành việc khảo sát trên đây theo "chiều ngược lại", ta sẽ thấy rằng, với $e, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$, phương trình $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos(\theta-\varphi)}$ là phương trình cực của đường cônic C với tiêu điểm O, tâm sai e, đường chuẩn liên kết D có phương trình dạng chuẩn $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \dfrac{p}{e}$.

2.2.6 Ứng dụng số phức trong hình học Euclide phẳng

1) Nhắc lại

Xem Tập 1, 2.3.

Mặt phẳng afin Euclide $\mathcal{E}_2$ được trang bị một hệ q.c.t.c.t. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ được đồng nhất với $\mathbb{C}$ bởi $(x, y) \leftrightarrow x + iy$.

Với $M(x,y) \in \mathcal{E}_2$, $x + iy$ là **tọa vị** của M ; với $z \in M$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, điểm $M(x, y)$ là **ảnh** của z. Ta ký hiệu : $M(z)$ để nói rằng M có tọa vị là z.

Cho $M(z)$, $M'(z')$; ta có : $MM' = |z' - z|$.

Cho $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ (sao cho $a \neq b$ và $c \neq d$) ; ta có :

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \operatorname{Arg}\frac{d-c}{b-a}[2\pi]$$

2) Khảo sát $z \mapsto az + b$

Ta đã biết (Tập 1, 2.3.4) rằng :

- Với $(a, b) \in (\mathbb{C} - \{0, 1\}) \times \mathbb{C}$, ánh xạ $M(z) \mapsto M'(az + b)$ là phép đồng dạng thuận, có tâm Ω với tọa vị $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, tỷ số $|a|$, góc $\operatorname{Arg}(a)$.

- Với $\Omega(\omega) \in \mathcal{E}_2$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, phép đồng dạng thuận với tâm Ω, tỷ số ρ, góc θ, là ánh xạ $M(z) \mapsto M'(\omega + a(z - \omega))$, trong đó $a = \rho e^{i\theta}$.

◆ **Mệnh đề** Cho $A, B, A', B' \in \mathcal{E}_2$ sao cho $A \neq B$ và $A' \neq B'$. Tồn tại một và chỉ một phép đồng dạng thuận biến A thành A' và B thành B'.

Chứng minh :

Ta ký hiệu a, b, a', b' là các tọa vị theo thứ tự của A, B, A', B'.
Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ và $f : M(z) \mapsto M'(\alpha z + \beta)$.

Ta có $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta = a' \\ \alpha b + \beta = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a'-b'}{a-b} \\ \beta = \dfrac{ab'-a'b}{a-b} \end{cases}$.

Như vậy tồn tại một và chỉ một phép đồng dạng thuận biến A thành A' và B thành B'.

NHẬN XÉT :

Tỷ số của phép đồng dạng này là $\dfrac{A'B'}{AB}$.
Về tâm và góc của nó, xem dưới đây 2.2.6, *3*).

3) Đường đồng mức $M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$:

Cho $A, B \in \mathcal{E}_2, A \neq B, \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{M \in \mathcal{E}_2 - \{A, B\} ; \angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \lambda[\pi] \}$.
Ta có thể trang bị $\mathcal{E}_2$ một hệ q.c.t.c.(t.) $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sao cho A và B có tọa độ là $A(-\alpha, 0)$, $B(\alpha, 0)$, trong đó $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Khi ký hiệu z là tọa vị của một điểm $M(x, y)$ thuộc $\mathcal{E}_2$, khác với A và B, ta có :

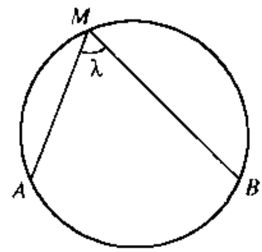
$$M \in E_\lambda \Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \lambda[\pi] \Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right) = \lambda[\pi]$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}((z-\alpha)(\bar{z}+\alpha)) = \lambda[\pi] \Leftrightarrow \operatorname{Arg}((z-\alpha)(\bar{z}+\alpha)e^{-i\lambda}) = 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}((x+iy-\alpha)(x-iy+\alpha)(\cos\lambda - i\sin\lambda)) = 0$$
$$\Leftrightarrow -(x^2+y^2-\alpha^2)\sin\lambda + 2\alpha y\cos\lambda = 0.$$

Nếu $\lambda \equiv 0\ [\pi]$, thì E_λ là đường thẳng (AB) (không kể A và B).
Nếu $\lambda \not\equiv 0\ [\pi]$, thì :

$$M \in E_\lambda \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha y \operatorname{cotan}\lambda - \alpha^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y - \operatorname{cotan}\lambda)^2 = \frac{\alpha^2}{\sin^2\lambda},$$

do đó E_λ là đường tròn tâm là điểm có tọa độ $(0, \alpha \operatorname{cotan}\lambda)$ và bán kính $\dfrac{\lambda}{|\sin\lambda|}$.
Ta tóm tắt việc khảo sát :

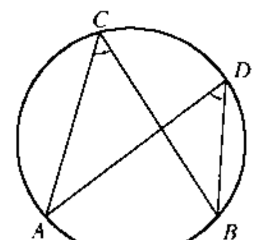
◆ **Mệnh đề** Cho A, $B \in \mathcal{E}_2$, $A \neq B$, $\lambda \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Tập hợp các điểm thuộc $\mathcal{E}_2 - \{A, B\}$ sao cho $\angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \lambda\,[\pi]$ là một đường tròn đi qua A và B, nhưng không kể A và B.



◆ **Hệ quả**

Bốn điểm A, B, C, D thuộc $\mathcal{E}_2$ phân biệt từng đôi, đồng chu hoặc thẳng hàng khi và chỉ khi :

$$\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \angle(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\ [\pi].$$



NHẬN XÉT

Ta thu được những điều kiện khác tương đương bằng cách hoán vị A, B, C, D, chẳng hạn :

$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\ [\pi]$ ■

Xác định phép đồng dạng thuận biến A thành A' và B thành B'

(xem 2.2.6,2), Mệnh đề)

Trường hợp thứ nhất : $(AB) \,/\!/\, (A'B')$

Nếu $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, phép đồng dạng phải tìm là phép vị tự tâm là giao điểm của (AA') và (BB') và tỷ số $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, phép đồng dạng phải tìm là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Trường hợp thứ hai : $(AB) \not\parallel (A'B')$.

Ta ký hiệu I là giao điểm của (AB) và $(A'B')$.

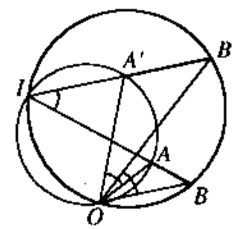
Góc θ của phép đồng dạng khi đó thoả mãn :

$$\angle((AB), (A'B')) = \theta\,[\pi],$$

hoặc $\quad \angle((IA), (IA')) = \theta\ [\pi],$

nếu $\quad I \neq A$ và $I \neq A'$.

Ta ký hiệu O là giao điểm thứ 2 của các đường tròn ngoại tiếp IAA' và IBB', nếu các đường tròn này cắt nhau. Ta có :



$$\angle((OA),(OA')) = \angle((IA),(IA')) = \angle((IB),(IB') = \angle((OB),(OB'))\ [\pi],$$

vậy tâm của phép đồng dạng là O và góc là $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})\ [2\pi]$.

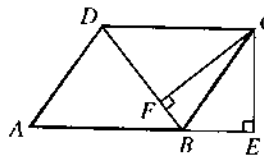
Nếu các đường tròn ngoại tiếp IAA' và IBB' tiếp xúc tại I thì tâm đồng dạng là I.

Bài tập

(Khoảng cách, góc)

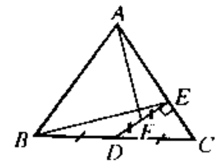
◊ **2.2.1** Cho $ABCD$ là một hình bình hành và E (tương ứng : F) là chân của đường vuông góc kẻ từ C đến (AB) (tương ứng : (BD)). Chứng minh :

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} = BC^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}.$$



◊ **2.2.2** Cho ABC là một tam giác cân tại A, D là trung điểm của BC, E là chân đường vuông góc kẻ từ D đến (AC), F là trung điểm của DE.

Chứng minh : $(AF) \perp (BE)$.

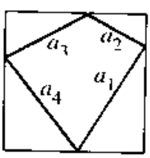


◊ **2.2.3** Cho A, B, C, D là bốn điểm không thẳng hàng. Chứng minh :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 > \frac{1}{2} AD^2.$$

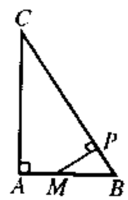
◊ **2.2.4** Chứng minh rằng nếu a_1, a_2, a_3, a_4 là độ dài của các cạnh của một tứ giác có mỗi đỉnh trên mỗi cạnh của một hình vuông có cạnh bằng 1, thì :

$$2 \le a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \le 4.$$



◊ **2.2.5** Cho tam giác ABC vuông ở A và không bẹt, $M \in [AB] - \{B\}$, P là hình chiếu vuông góc của M lên (BC).

Chứng minh : $MP < AC$.



◊ **2.2.6** Cho ABC là một tam giác, M là trung điểm của BC.

Chứng minh : $AB + AC \ge AM + \dfrac{1}{2} BC$.

◊ **2.2.7** Cho ABC là một tam giác không bẹt. Ta ký hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{CAB}\ (\in]0,\pi[\,)$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{BCA}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ là *nửa chu vi*, S là diện tích của tam giác ABC.

a) Chứng minh : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

b) Từ đó suy ra **công thức Héron** : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

c) Chứng minh : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$.

◊ **2.2.8** Cho ABC là một tam giác không bẹt và không vuông.

Chứng minh : $\tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C} = \tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan\hat{C}$.

◊ **2.2.9** Cho ABC là một tam giác không bẹt. Ta ký hiệu G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp ABC. Chứng minh rằng ba tính chất sau từng cặp tương đương :

(i) ABC là tam giác đều

(ii) Ít nhất có hai trong bốn điểm G, H, O, I trùng nhau.

(iii) $G = H = O = I$.

◊ **2.2.10** Cho ABC là một tam giác không bẹt. Ta ký hiệu I là tâm đường tròn ngoại tiếp, I_A, I_B, I_C là các tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

a) Ta ký hiệu A' (tương ứng : A'') là chân đường phân giác trong (tương ứng : ngoài) của $\hat{A}$.

Chứng minh : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{c}{b}$ và $\dfrac{A''B}{A''C} = \dfrac{c}{b}$.

(Ta có thể áp dụng kết quả của bài tập 2.2.7, c)).

b) Từ đó suy ra : $\begin{cases} I = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix}, & I_A = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ -a & b & c \end{bmatrix} \\ I_B = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & -b & c \end{bmatrix}, & I_C = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & -c \end{bmatrix} \end{cases}$

◊ **2.2.11** Cho ABC là một tam giác không bẹt và không vuông ; ta ký hiệu H là trực tâm của nó.

a) Ta ký hiệu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (BC). Chứng minh :

$$A' = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & C \\ \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{bmatrix}.$$

b) Từ đó suy ra : $$H = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \tan\hat{A} & \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{bmatrix}.$$

◊ **2.2.12** Cho ABC là một tam giác không bẹt và không vuông. Ta ký hiệu O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC. Chứng minh :

$$O = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \tan\hat{B} + \tan\hat{C} & \tan\hat{C} + \tan\hat{A} & \tan\hat{A} + \tan\hat{B} \end{bmatrix}$$

(Sử dụng bài tập 2.2.11).

◊ **2.2.13*** Cho ABC là một tam giác không bẹt. Ta ký hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$, S là diện tích của ABC.

a) Chứng minh : $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \dfrac{1}{2}ca\sin\hat{B}$.

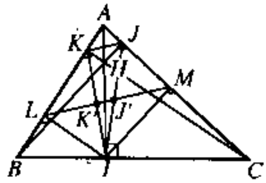
b) Chứng minh : $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$ và khảo sát trường hợp đẳng thức (cần sử dụng đến tính lồi của $f :]0; \pi[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln\sin t$.)

c) Từ đó suy ra : $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$, $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca)$, $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

và khảo sát các trường hợp có đẳng thức.

◊ **2.2.14 Tam giác "chân đường cao" của một tam giác đã cho :**

Cho ABC là một tam giác không bẹt và không vuông, H là trực tâm của nó, I, J, K là các hình chiếu vuông góc theo thứ tự của A lên (BC), B lên (CA), C lên (AB) ; tam giác IJK được gọi là tam giác "**chân đường cao**" của tam giác ABC.



Ta ký hiệu L, M là các hình chiếu vuông góc của I theo thứ tự lên (AB), (AC). Chứng minh rằng (LM) song song với (JK) và (LM) cắt các đoạn thẳng $[IJ]$ và $[IK]$ theo thứ tự tại các trung điểm J', K' của chúng.

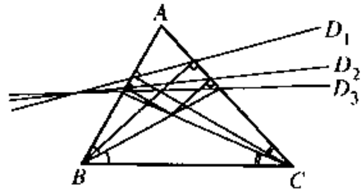
◊ **2.2.15*** Cho ABC là một tam giác. Ta ký hiệu :

D_1 là đường thẳng nối các chân của các đường cao hạ từ B và C

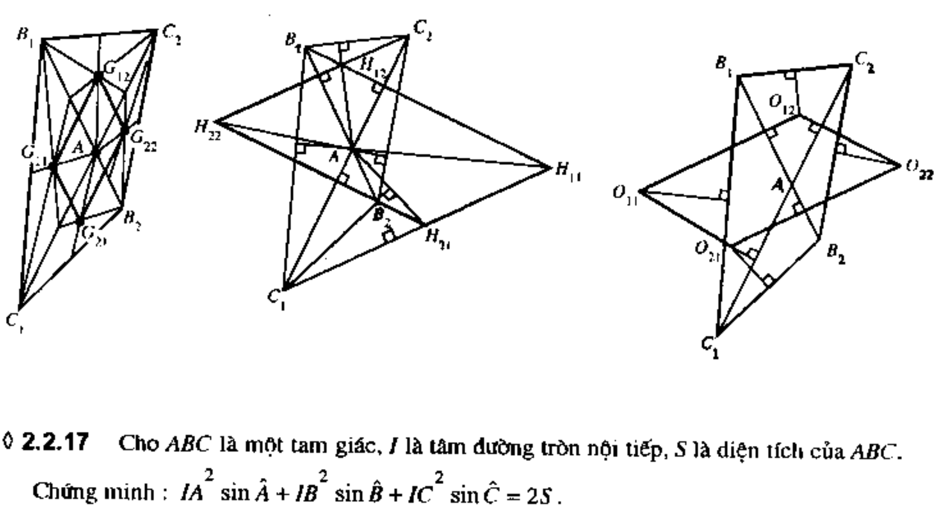
D_2 là đường thẳng nối các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp với (AB) và (AC)

D_3 là đường thẳng nối các chân của các đường phân giác trong kẻ từ B và C.

Chứng minh rằng D_1, D_2, D_3 đồng quy hoặc song song.



◊ **2.2.16** Giả sử D, D' là hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm A và B_1, $B_2 \in D$, C_1, $C_2 \in D'$. Với mọi (i,j) thuộc $\{1, 2\}^2$, ta ký hiệu G_{ij} là trọng tâm, H_{ij} là trực tâm, O_{ij} là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_iC_j. Chứng tỏ rằng các G_{ij}, H_{ij}, O_{ij} tạo thành ba hình bình hành.



◊ **2.2.17** Cho ABC là một tam giác, I là tâm đường tròn nội tiếp, S là diện tích của ABC.

Chứng minh : $IA^2 \sin\hat{A} + IB^2 \sin\hat{B} + IC^2 \sin\hat{C} = 2S$.

◊ **2.2.18** Cho ABC là một tam giác không bẹt, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, h_A, h_B, h_C là độ dài của các đường cao, r là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích của ABC.

a) Chứng minh : $2S = ah_A = bh_B = ch_C = (a + b + c)r$.

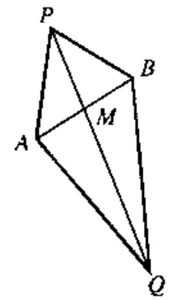
b) Từ đó suy ra : $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}$.

c) Chứng tỏ rằng $r^3 \leq \frac{h_A h_B h_C}{27}$, và khảo sát trường hợp đẳng thức.

Trong các bài tập từ 2.2.19 đến 2.2.21, ta ký hiệu $\mathcal{A}(T)$ là diện tích của một tam giác T.

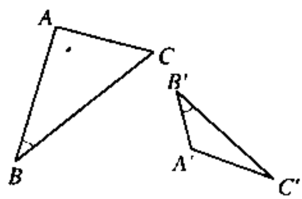
◊ **2.2.19** Chứng minh rằng, nếu hai tam giác không bẹt PAB và QAB có cạnh $[AB]$ chung, thì khi ký hiệu M là giao điểm của (PQ) và (AB) (nếu tồn tại), ta có :

$$\frac{\mathcal{A}(PAB)}{\mathcal{A}(QAB)}=\frac{MP}{MQ} .$$



◊ **2.2.20** Chứng minh rằng, nếu hai tam giác không bẹt ABC, $A'B'C'$ có các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{A'B'C'}$ bằng nhau hoặc phụ nhau, thì :

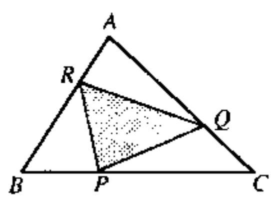
$$\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'B'C')}=\frac{AB.BC}{A'B'.B'C'} .$$



◊ **2.2.21** Cho ABC là một tam giác không bẹt, $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$, $R \in [AB]$ sao cho :

$$\frac{BP}{BC}=\frac{CQ}{CA}=\frac{AR}{AB} .$$

Chứng minh : $\mathcal{A}(PQR) \geq \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABC)$, và khảo sát trường hợp đẳng thức (sử dụng bài tập 2.2.20).



◊ **2.2.22** Xác định diện tích cực đại của một tam giác nằm trong một hình vuông có cạnh a ($a > 0$).

◊ **2.2.23** Cho M_i ($1 \leq i \leq 10$) là mười điểm phân biệt từng cặp và nằm trong một hình vuông có cạnh a ($a > 0$). Chứng minh rằng tồn tại $(i, j) \in \{1,...,10\}^2$ sao cho :

$$0 < M_iM_j \leq \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

◊ **2.2.24** Cho M_i ($1 \leq i \leq 19$) là mười chín điểm phân biệt từng cặp và nằm trong một hình vuông cạnh a ($a > 0$). Chứng minh rằng tồn tại i, j, k, phân biệt từng đôi sao cho diện tích của $M_iM_jM_k$ là $\leq \frac{a^2}{18}$ (Sử dụng bài tập 2.2.20).

◊ **2.2.25** Cho ABC là một tam giác đều, $a = AB > 0$. Xác định biên dưới của $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2$ khi M chạy khắp $\mathcal{E}_2$.

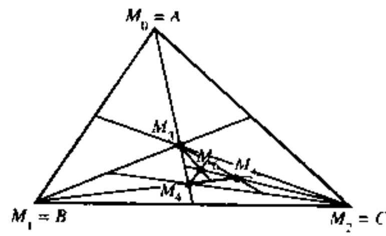
◊ **2.2.26** Cho $A \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, t_1, t_2, t_3 là các nghiệm thực (nếu tồn tại) của phương trình $t^3 - 3t + \lambda(1 - 3t^2) = 0$ với ẩn $t \in \mathbb{R}$, và với mọi i thuộc $\{1, 2, 3\}$, D_i là đường thẳng có phương trình Descartes $t_i^2 x - t_i y + a = 0$.

Chứng minh rằng D_1, D_2, D_3 tạo thành một tam giác đều.

◊ **2.2.27** Cho A, B, C là ba điểm và $(M_n)_n \in \mathbb{N}$ là dãy các điểm xác định bởi :

$$\begin{cases} M_0 = A, M_1 = B, M_2 = C \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+3} = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} M_n & M_{n+1} & M_{n+2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ và xác định giới hạn của nó.



◊ **2.2.28*** Cho ABC là một tam giác không bẹt. Chứng minh rằng tồn tại một bộ ba (M, N, P) duy nhất những điểm của mặt phẳng sao cho :
$M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$, $(MN) \perp (CA)$, $(NP) \perp (AB)$, $(PM) \perp (BC)$.

◊ **2.2.29*** **Giả thuyết Sylvester**

Cho E là một tập hợp hữu hạn những điểm của mặt phẳng sao cho mọi đường thẳng chứa ít nhất hai điểm phân biệt thuộc E thì chứa ít nhất là một điểm thứ ba (của E). Chứng minh rằng các điểm thuộc E đều thẳng hàng.

(Các phép đẳng cự afin trong mặt phẳng)

◊ **2.2.30** **Tích hai phép quay**

Cho $O_1, O_2 \in \mathcal{E}_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Chỉ rõ tích $f = \mathrm{Rot}_{O_2,\theta_2} \circ \mathrm{Rot}_{O_1,\theta_1}$.

◊ **2.2.31** Cho D là một đường thẳng, $\vec{u} \in \overrightarrow{D}^{\perp}$. Chứng minh :

$$\mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D = \mathrm{Ref}_{D'} \quad \text{và} \quad \mathrm{Ref}_D \circ \mathrm{T}_{\vec{u}} = \mathrm{Ref}_{D''},$$

trong đó D' và D'' được suy lần lượt từ D bởi phép tịnh tiến theo các vectơ $\frac{\vec{u}}{2}$ và $-\frac{\vec{u}}{2}$.

◊ **2.2.32** Cho D_1, D_2, D_3 là ba đường thẳng, s_i là phép phản chiếu qua D_i $(1 \le i \le 3)$. Chứng minh rằng D_1, D_2, D_3 đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

(Ta có thể dùng bài tập 2.2.31).

◊ **2.2.33** **Các phép phản dời hình của $\mathcal{E}_2$**

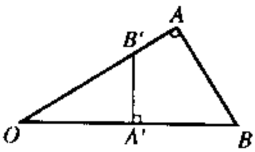
Ta gọi mọi tích $\mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D$, trong đó D là một đường thẳng afin và $\vec{u} \in \overrightarrow{D}$, là một phép **đối xứng - trượt.** Chứng minh rằng các phép phản dời hình của mặt phẳng là những phép đối xứng - trượt (có thể dùng bài tập 2.2.31).

◊ **2.2.34** *Tích hai phép đối xứng - trượt với giá song song*

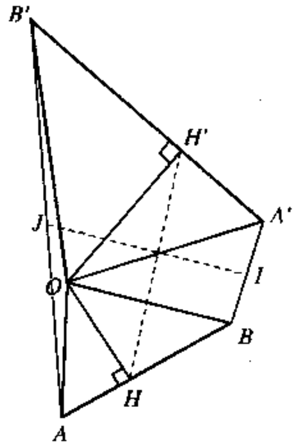
Cho D, D' là hai đường thẳng song song, $\vec{u} \in \overrightarrow{D}$, $\vec{u} \in \overrightarrow{D'}$, $s = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D$, $s' = \mathrm{T}_{\vec{u}'} \circ \mathrm{Ref}_{D'}$. Chỉ rõ $s' \circ s$.

(Phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng)

◊ **2.2.35** Cho OAB là một tam giác không bẹt, vuông ở A, $B' \in]OA]$, A' là hình chiếu vuông góc của B' lên (OB).
Chứng minh rằng :
$OB' + AB < OB + A'B'$.



◊ **2.2.36** Cho OAB, $OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng thuận, I, J là các trung điểm theo thứ tự của $A'B$, AB'; H, H' là các hình chiếu vuông góc của O theo thứ tự lên (AB), $(A'B')$.
Chứng minh rằng : $(IJ) \perp (HH')$.



◊ **2.2.37** Chứng minh rằng các phép đồng dạng nghịch của $\mathcal{E}_2$ là :

- Các phép đối xứng trượt $T_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D$, trong đó $\vec{u} \in \vec{D}$ (Xem bài tập 2.2.33).
- Các tích $H_{A,k} \circ \mathrm{Ref}_D$, trong đó $A \in D$ và $k \in \mathbb{R}_+^*$.

◊ **2.2.38** Chứng minh rằng bình phương của một phép đồng dạng nghịch là một phép vị tự - tịnh tiến. (Dùng bài tập 2.2.37).

◊ **2.2.39** Cho D, D' là hai đường thẳng cắt nhau tại điểm O. Với $M \in \mathcal{E}_2$, ta ký hiệu P, P' là các hình chiếu vuông góc của M theo thứ tự lên D, D', I là trung điểm của PP', M' là đối xứng của M qua I. Ta ký hiệu : $f: \begin{array}{l} \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2 \\ M \mapsto M' \end{array}$ là ánh xạ vừa định nghĩa.

a) Nhận biết f (chứng tỏ rằng f là một phép đồng dạng nghịch).
b) Chỉ rõ $f \circ f$.

(Đường tròn trong mặt phẳng)

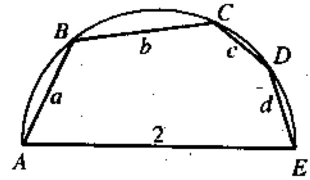
◊ **2.2.40** Khảo sát vị trí tương đối của hai đường tròn theo các bán kính R, R' của chúng và khoảng cách d giữa các tâm.

◊ **2.2.41** Cho $ABCDE$ là một ngũ giác lồi nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 1, và sao cho AE là một đường kính. Ta ký hiệu:

$$a = AB,\ b = BC,\ c = CD,\ d = DE.$$

Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$



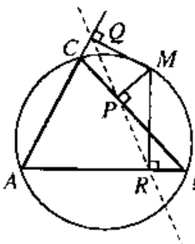
◊ **2.2.42** Cho Γ là một đường tròn bán kính R $(R > 0)$; A, B, C, D là bốn điểm của Γ. Chứng minh rằng ít nhất một trong bốn cạnh của tứ giác $ABCD$ có độ dài $\geq R\sqrt{2}$.

◊ **2.2.43** Ta trang bị cho $\mathcal{E}_2$ một hệ q.c.t.c. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Cho $M_i\ (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 4$, là bốn điểm của $\mathcal{E}_2$, không thẳng hàng tất cả. Chứng tỏ rằng M_1, M_2, M_3, M_4 đồng chu khi và chỉ khi :

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

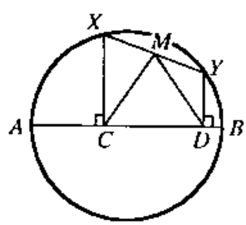
◊ **2.2.44** Chứng minh rằng, với n thuộc $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ bất kỳ, tồn tại n đường tròn của mặt phẳng, phân biệt từng cặp và cắt nhau từng cặp.

◊ **2.2.45 Đường thẳng Simson**

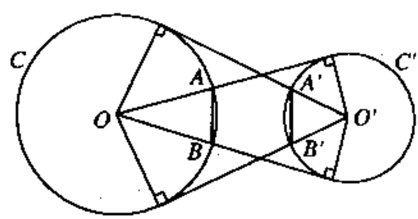


Cho ABC là một tam giác không bẹt, $M \in \mathcal{E}_2$, P, Q, R là các hình chiếu vuông góc của M theo thứ tự lên (BC), (CA), (AB). Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi M thuộc đường tròn Γ ngoại tiếp ABC. Nếu $M \in \Gamma$ thì đường thẳng PQR được gọi là **đường thẳng Simson** của M đối với ABC.

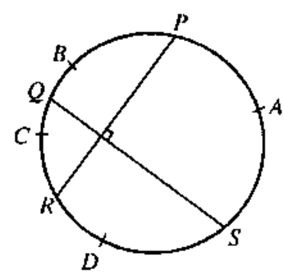
◊ **2.2 46** Cho (C) là một đường tròn, A và B là hai điểm đối tâm của (C), X và Y là hai điểm của cùng nửa đường tròn giới hạn bởi A và B sao cho XY không đổi. Giả sử C, D là hình chiếu vuông góc theo thứ tự của X và Y lên (AB), và M là trung điểm của XY. Chứng minh rằng tam giác CMD luôn đồng dạng với một tam giác cố định.



◊ **2.2.47** Cho C, C' là hai đường tròn ngoài nhau; O, O' là các tâm của chúng. Các tiếp tuyến kẻ từ O đến C' cắt C tại hai điểm A, B và các tiếp tuyến kẻ từ O' đến C cắt C' tại hai điểm A', B'. Chứng minh: $AB = A'B'$.

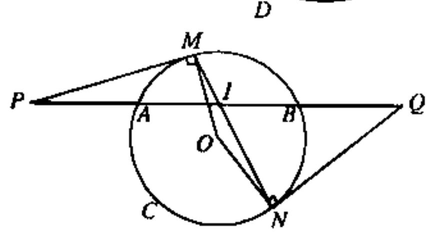


◊ **2.2.48** Cho Γ là một đường tròn ; A, B, C, $D \in \Gamma$ theo thứ tự đó trên Γ ; P, Q, R, S là các điểm chính giữa theo thứ tự của các cung liên tiếp $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$ của Γ. Chứng minh : $(PR) \perp (QS)$.



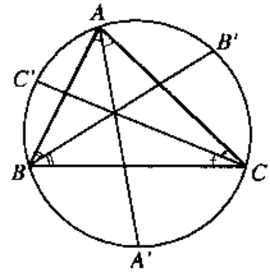
◊ **2.2.49** Giả sử C là một đường tròn, O là tâm của nó, $[AB]$ là một dây cung của C, I là trung điểm của AB, $[MN]$ là một dây cung của C đi qua I. Các tiếp tuyến với C tại M và N cắt (AB) tại hai điểm, được ký hiệu theo thứ tự là P, Q.

Chứng minh : $AP = BQ$.



◊ **2.2.50** Cho ABC là một tam giác không bẹt, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, β_A, β_B, β_C là độ dài của các đường phân giác trong của ABC, A', B', C' là giao điểm của các đường phân giác đó với đường tròn ngoại tiếp ABC, $\gamma_A = AA'$, $\gamma_B = BB'$, $\gamma_C = CC'$.

Chứng minh : $(abc)^2 = \beta_A\beta_B\beta_C\gamma_A\gamma_B\gamma_C$.

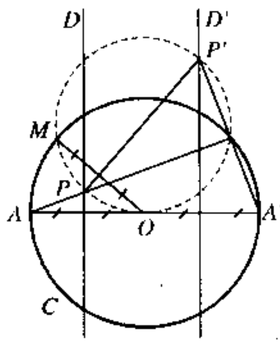


◊ **2.2.51** Giả sử C là một đường tròn, O là tâm của nó, A, A' là hai điểm đối tâm của C, D (tương ứng : D') là đường trung trực của OA (tương ứng : OA'), $M \in C - \{A, A'\}$. Đường trung trực của OM cắt D và D' tại hai điểm được ký hiệu theo thứ tự là P, P'. Các đường thẳng (AP) và $(A'P')$ cắt nhau tại một điểm, ký hiệu là I. Chứng minh :

a) $I \in C$

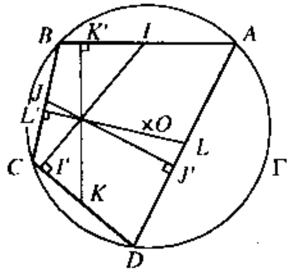
b) O, M, P, P', I đồng chu

c) M và I đối xứng qua đường trung trực của AA'.



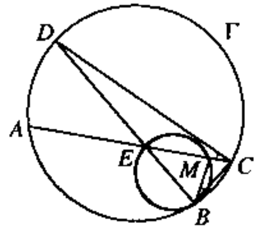
◊ **2.2.52** Cho Γ là một đường tròn; O là tâm của nó; A, B, C, D là bốn điểm của Γ; I, J, K, L là các trung điểm theo thứ tự của AB, BC, CD, DA; I', J', K', L' là các hình chiếu vuông góc của I, J, K, L theo thứ tự lên (CD), (DA), (AB), (BC).

Chứng minh rằng bốn đường thẳng (II'), (JJ'), (KK'), (LL') đồng quy.



◊ **2.2.53** Cho Γ là một đường tròn ; A, B, C, D là bốn điểm của Γ theo thứ tự đó. Các đường thẳng (AC) và (BD) cắt nhau tại một điểm, được ký hiệu là E. Giả sử M là điểm thuộc $[CE]$ sao cho $\widehat{CBM} = \widehat{DCA}$.

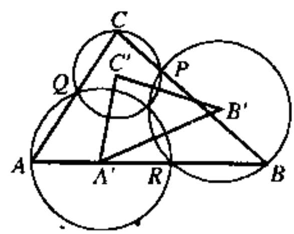
Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp BME tiếp xúc với Γ tại B.



◊ **2.2.54** Cho ABC là một tam giác không bẹt, $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$, $R \in [AB]$, A', B', C' là tâm của các đường tròn theo thứ tự ngoại tiếp AQR, BRP, CPQ. Chứng minh :

a) Các tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng thuận với nhau

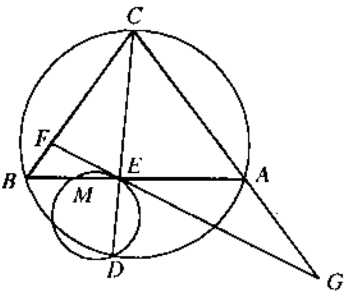
b) Các đường tròn ngoại tiếp AQR, BRP, CPQ có một điểm chung.



◊ **2.2.55*** Cho Γ là một đường tròn, A, B, C, D là bốn điểm của Γ sao cho các đoạn thẳng $[AB]$ và $[CD]$ cắt nhau tại một điểm E. Giả sử M là một điểm thuộc $[BE]$. Tiếp tuyến tại E với đường tròn ngoại tiếp tam giác DEM cắt $[BC]$ tại một điểm được ký hiệu là F và cắt $[CA]$ tại một điểm được ký hiệu là G. Chứng minh :

$$\frac{EG}{EF} = \frac{MA}{MB}.$$

(Sử dụng các bài tập 2.2.19 và 2.2.20).



◊ **2.2.56*** Hai đường tròn C, C' tiếp xúc ngoài tại một điểm O. Xác định $M \in C$, $M' \in C'$ để cho diện tích của tam giác OMM' là cực đại và trong trường hợp đó, tính diện tích ấy.

(Các đường conic trong mặt phẳng afin Euclide)

◊ **2.2.57** Cho C, C' là hai parabol.

a) Chứng minh rằng C và C' đồng dạng thuận.

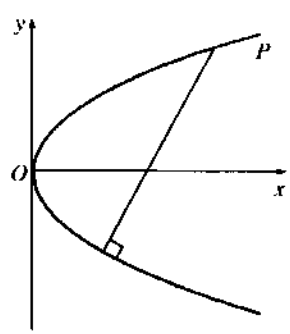
b) Chứng minh rằng C và C' đường này có thể được suy ra từ đường kia bằng phép vị tự hoặc phép tịnh tiến, khi và chỉ khi các trục của C và C' song song với nhau.

c) Chứng minh rằng C và C' là đẳng cự với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tham số.

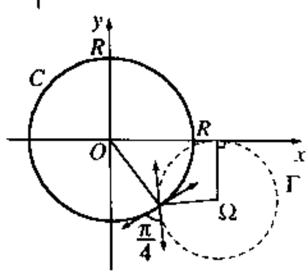
◊ **2.2.58** Cho $p \in \mathbb{R}_+^*$ và P là parabol có phương trình $y^2 = 2px$ (trong một hệ q.c.t.c.).

Xác định tập hợp các điểm từ đó ta có thể kẻ hai đường pháp tuyến với P, trực giao với nhau.

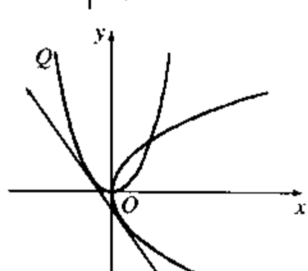
◊ **2.2.59** Cho $P \in \mathbb{R}_+^*$ và P là parabol có phương trình $y^2 = 2px$ (trong một hệ q.c.t.c.). Tìm độ dài cực tiểu của một dây cung của P trực giao với P tại một trong hai đầu mút của nó.



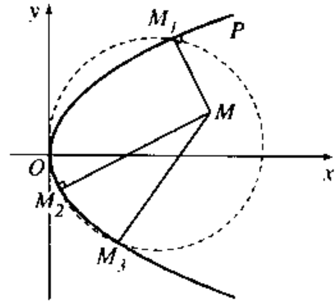
◊ **2.2.60** Cho $C \mid x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$. Xác định quỹ tích các tâm Ω của các đường tròn Γ tiếp xúc với $x'x$ và cắt C dưới một góc bằng $\frac{\pi}{4}$.



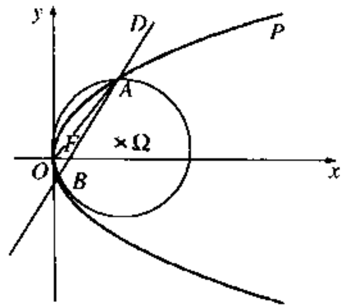
◊ **2.2.61** Cho $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, P là parabol có phương trình $y^2 = 2px$, Q là parabol có phương trình $x^2 = 2qy$. Tìm một hoặc các tiếp tuyến chung của P và Q.



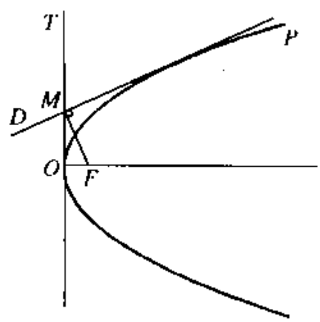
◊ **2.2.62** Cho $p \in \mathbb{R}_+^*$, P là parabol có phương trình $y^2 = 2px$ (trong một hệ q.c.t.c.), $M \in \mathcal{E}_2$, M_1, M_2, M_3 là chân của các pháp tuyến kẻ từ M đến P. Chứng minh rằng O, M_1, M_2, M_3 đồng chu.



◊ **2.2.63** Cho $p \in \mathbb{R}_+^*$, p là parabol có phương trình $y^2 = 2px$ (trong một hệ q.c.t.c.), F là tiêu điểm của nó. Một đường thẳng di động D đi qua F cắt P tại hai điểm ký hiệu là A, B. Hãy xác định quỹ tích của tâm Ω của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

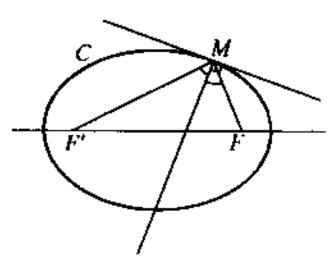


◊ **2.2.64** Cho P là một parabol, F là tiêu điểm của nó, T là tiếp tuyến tại đỉnh của nó, M là một điểm của T, D là một đường thẳng đi qua M. Chứng minh rằng D là tiếp tuyến với P khi và chỉ khi D trực giao với (FM).

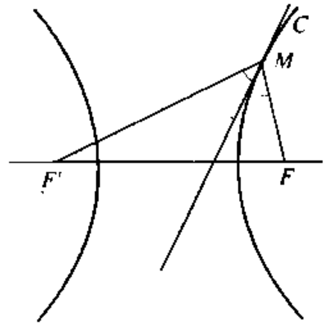


◊ **2.2.65** **Cho ABC là một tam giác không bẹt. Quỹ tích của các tiêu điểm các parabol tiếp xúc với (AB), (BC), (CA) là gì ? (Sử dụng bài tập 2, 2.45, và bài tập 2.2.64).**

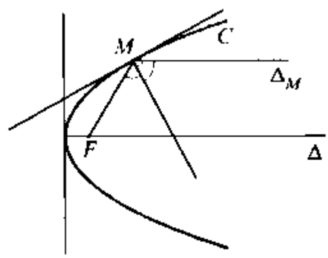
◊ **2.2.66** a) Cho C là một elip, F, F' là các tiêu điểm của nó, $M \in C$. Hãy chứng minh rằng tiếp tuyến với C tại M là đường phân giác ngoài của $((MF),(MF'))$.



b) Cho C là một hypebol, F, F' là các tiêu điểm của nó, $M \in C$. Hãy chứng minh rằng tiếp tuyến với C tại M là đường phân giác trong của $((MF), (MF'))$.



c) Cho C là một parabol, F là tiêu điểm của nó, Δ là trục của nó, $M \in C$. Hãy chứng minh rằng tiếp tuyến với C tại M là đường phân giác ngoài của $((MF), \Delta_M)$, trong đó Δ_M là đường thẳng song song với Δ kẻ từ M.



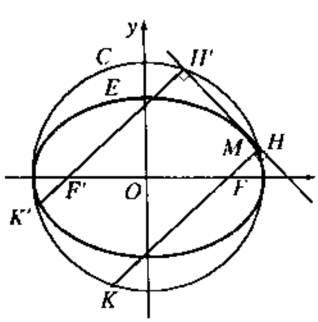
◊ **2.2.67** Chứng minh rằng hai đường cônic đồng dạng khi và chỉ khi chúng có cùng tâm sai.

◊ **2.2.68** Cho $ABCD$ là một hình chữ nhật. Xác định quỹ tích các điểm M sao cho các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB và MCD có cùng bán kính.

◊ **2.2.69** Cho E là một elip, F, F' là các tiêu điểm của nó, C là đường tròn chính của nó, $M \in E$, H (tương ứng : H') là hình chiếu vuông góc của F (tương ứng : F') lên tiếp tuyến với E tại M.

a) Chứng minh $H \in C$, $H' \in C$.

b) Các đường thẳng (HF), $(H'F')$ lại cắt C tại hai điểm ký hiệu theo thứ tự là K, K'. Chứng minh rằng $HH'K'K$ là một hình chữ nhật.

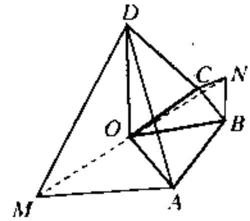


(Ứng dụng số phức trong hình học Euclide phẳng)

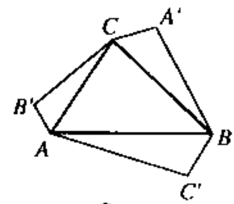
◊ **2.2.70** Cho $A(1+i)$, $A'(2+i)$, $B(2-3i)$, $B'(7-2i)$. Chứng minh rằng tồn tại một phép đồng dạng thuận duy nhất f sao cho $f(A) = A'$ *và* $f(B) = B'$, và chỉ rõ các phần tử đặc trưng của f.

◊ **2.2.71** Cho $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ sao cho $|a| = |b| = |c|$. Chứng minh rằng ABC là đều khi và chỉ khi $a + b + c = 0$.

◊ **2.2.72** Cho O, A, B là ba điểm; C, D là các ảnh theo thứ tự của A, B trong phép đồng dạng thuận S tâm O. Ta dựng các tam giác ADM và CBN đồng dạng thuận với ABO. Chứng minh rằng O là trung điểm của MN.



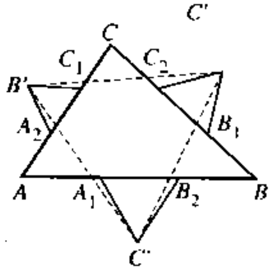
◊ **2.2.73** Cho A, B, C là ba điểm phân biệt từng cặp: A', B', C' được dựng bên ngoài ABC sao cho các tam giác ABC', BCA', CAB' đồng dạng thuận với nhau. Chứng minh rằng $A'B'C'$ có cùng trọng tâm với ABC.



◊ **2.2.74** Cho ABC là một tam giác không bẹt ; B_1, C_2 được xác định bởi :

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{B_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

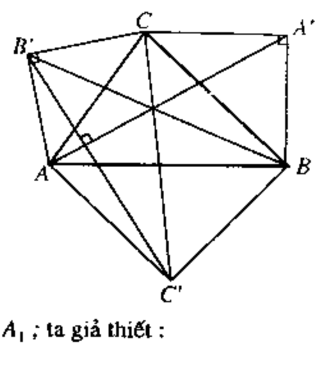
C_1, A_2, A_1, B_2 cũng theo cách tương tự; ta dựng A', B', C' bên ngoài ABC sao cho các tam giác B_1C_2A', C_1A_2B', A_1B_2C' là tam giác đều. Chứng minh rằng $A'B'C'$ đều.



◊ **2.2.75** Cho ABC là một tam giác không bẹt; A', B', C' được dựng bên ngoài ABC sao cho các tam giác BCA', CAB', ABC' là những tam giác cân.

a) Chứng minh : $(AA') \perp (B'C')$ và $AA' = B'C'$.

b) Từ đó suy ra rằng các đường thẳng (AA'), (BB'), (CC') đồng quy.



◊ **2.2.76** Cho $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 3)$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}_2$, $A_{n+1} = A_1$; ta giả thiết :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, A_k \neq A_{k+1}.$$

Cho $B_1 \in \mathcal{E}_2$; ta dựng $B_2, \ldots, B_n$ sao cho các tam giác $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, ..., $A_{n-1}A_nB_{n-1}$, $A_nA_1B_n$ đều đồng dạng thuận. Chứng tỏ rằng :

a) $\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ 1 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B_1 \ldots\ldots B_n \\ 1 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_kB_k} = \vec{0}$.

◊ **2.2.77** Cho $n \in \mathbb{N}^*$; ta ký hiệu P, Q là các đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ được định nghĩa bởi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + iy)^n = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Chứng minh rằng phương trình $a P(x, y) + b Q(x, y) = 0$ biểu diễn hợp của n đường thẳng đi qua O và tạo thành giữa chúng những góc liên tiếp bằng nhau.

2.3 Hình học afin Euclide trong không gian ba chiều

2.3.1 Khoảng cách, góc

1) Đại cương

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi cặp $(\mathcal{E}_3, .)$, trong đó $\mathcal{E}_3$ là một không gian afin ba chiều và $\cdot$ là một tích vô hướng trên phương $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ của $\mathcal{E}_3$, là **không gian afin Euclide ba chiều**.

Ta thường ký hiệu $\mathcal{E}_3$ thay cho $(\mathcal{E}_3, .)$.

Hệ quy chiếu trực chuẩn (thuận) (viết tắt là hệ q.c.t.c.(t.)) của $\mathcal{E}_3$ là mọi bộ bốn $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ trong đó $O \in \mathcal{E}_3$ và $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ là một c.s.t.c. (t.) của $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

Nếu $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ được định hướng, ta cũng nói rằng $\mathcal{E}_3$ được **định hướng**, hướng của một hệ quy chiếu Descartes $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ của $\mathcal{E}_3$ cũng chính là hướng của cơ sở $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ của $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

Cho $\mathcal{E}_3$ là một không gian afin Euclide ba chiều (được định hướng); không gian vectơ Euclide $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ có ít nhất một c.s.t.c.(t.) $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Với mọi điểm O thuộc $\mathcal{E}_3$, ánh xạ : $F: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{E}_3 \\ (x,y,z) & \mapsto & O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{array}$ là một song ánh afin và ánh xạ tuyến tính liên kết $\vec{F}$ bảo toàn tích vô hướng.

Trong thực hành, ta có thể thay $(\mathcal{E}_3, .)$ bởi $\mathbb{R}^3$ được trang bị tích vô hướng thông thường.

♦ **Định nghĩa 2** Với $M, M' \in \mathcal{E}_3$, ta gọi số thực: $MM' = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ là **khoảng cách của** M **và** M', ký hiệu là MM' hoặc $d(M, M')$. Nếu trong một hệ q.c.t.c. $M(x,y,z)$ và $M'(x', y', z')$, thì :

$$MM' = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề** Với mọi số thực α và với mọi điểm A, B, C thuộc $\mathcal{E}_3$:

1) $d(B, A) = d(A, B)$

2) $d(A, B) = 0 \iff A = B$

3) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ **(bất đẳng thức tam giác)**

4) $d(A + C, B + C) = d(A, B)$

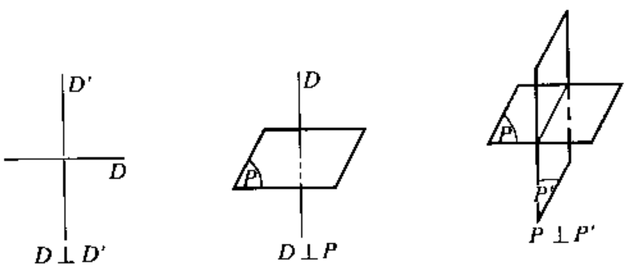
5) $d(\alpha A, \alpha B) = |\alpha|\, d(A, B)$.

- **Định nghĩa 3**

1) Hai đường thẳng D, D' của $\mathcal{E}_3$ được gọi là **trực giao**, và ký hiệu là $D \perp D'$, khi và chỉ khi $\vec{D} \perp \vec{D'}$ (tức là : $\vec{D} \subset \vec{D'}^{\perp}$).

2) Một đường thẳng D và một mặt phẳng P của $\mathcal{E}_3$ được gọi là **trực giao** (hoặc : **vuông góc**), và ký hiệu là $D \perp P$ (hoặc $P \perp D$), khi và chỉ khi $\vec{D} \perp \vec{P}$ (tức là : $\vec{D} \subset \vec{P}^{\perp}$).

3) Hai mặt phẳng P, P' của $\mathcal{E}_3$ được gọi là **trực giao** (hoặc: **vuông góc**), và ký hiệu là $P \perp P'$, khi và chỉ khi $\vec{\mathrm{P}}^{\perp} \subset \vec{\mathrm{P'}}$.



NHẬN XÉT :

1) Nói chung hai đường thẳng trực giao không cắt nhau.
2) Khái niệm mặt phẳng trực giao không thuộc phạm vi khái niệm tổng quát về bộ phận trực giao (xem 2.1.2).
3) Cho D, D' là hai đường thẳng, P, P' là hai mặt phẳng, $\vec{u}$ (tương ứng : $\vec{u'}$) là vectơ chỉ phương của D (tương ứng : D'), $(\vec{v}, \vec{w})$ (tương ứng : $(\vec{v'}, \vec{w'})$) là vectơ chỉ phương của P (tương ứng : P') ta có :

$$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u'} = 0$$

$$D \perp P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 0 \\ \vec{u}.\vec{w} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P \perp P' &\Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} \in \mathrm{Vect}(\vec{v'}, \vec{w'}) \\ &\Leftrightarrow \vec{v'} \wedge \vec{w'} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w}) \\ &\Leftrightarrow (\vec{v} \wedge \vec{w}) . (\vec{v'} \wedge \vec{w'}) = 0 . \end{aligned}$$

- **Định nghĩa 4** Góc của hai đường thẳng, góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng, góc của hai mặt phẳng, là góc của các phương của chúng :

$$\angle(D, D') = \angle(\vec{D}, \vec{D'}), \quad \angle(D, P) = \angle(\vec{D}, \vec{P}), \quad \angle(P, P') = \angle(\vec{P}, \vec{P'}) .$$

Nếu A, B, C là ba điểm của $\mathcal{E}_3$ sao cho $A \neq B$ *và* $B \neq C$, thì ta ký hiệu $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ là $\widehat{ABC}$ (hoặc : $\angle ABC$) ; như vậy : $\widehat{ABC} \in [0\ \pi]$.

- **Định nghĩa 5** Cho P là một mặt phẳng, $\overrightarrow{D'}$ là một phương đường thẳng sao cho $\overrightarrow{D'} \not\subset \overrightarrow{P'}$.

  Một phép chiếu (lên P, song song với $\overrightarrow{D'}$), một phép đối xứng (qua P, song song với $\overrightarrow{D'}$), một phép co (trục P, phương $\overrightarrow{D'}$) được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi $\overrightarrow{P} \perp \overrightarrow{D'}$ (ở đây có nghĩa là : $\overrightarrow{D'} = \overrightarrow{P}^{\perp}$).

  Ta định nghĩa tương tự cho một đường thẳng D và một phương mặt phẳng $\overrightarrow{P'}$ (sao cho $\overrightarrow{D} \not\subset \overrightarrow{P'}$).

2) Tính toán trong một hệ quy chiếu trực chuẩn (thuận)

Cho $(\mathcal{E}_3,.)$ là một không gian afin Euclide ba chiều, $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là một hệ q.c.t.c. (*t.*) của $\mathcal{E}_3$. Các điểm của $\mathcal{E}_3$ được xác định bởi tọa độ của chúng trong $\mathcal{R}$, và các mặt phẳng hay các đường thẳng afin bởi một phương trình Descartes (PTD) hoặc một hệ phương trình Descartes (HPTD) trong $\mathcal{R}$.

1) Vectơ trực giao với một mặt phẳng

- **Mệnh đề 1** Với mọi (a, b, c, d) thuộc $\mathbb{R}^4$ sao cho $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $\vec{u}(a,b,c)$ là một vectơ trực giao với mặt phẳng $P \mid ax + by + cz + d = 0$.

- **Mệnh đề 2** Một PTD của mặt phẳng P trực giao với $\vec{u}(a,b,c)$ và đi qua M_0 (x_0, y_0, z_0) là :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

2) Vectơ chỉ phương của một đường thẳng

- **Mệnh đề** Cho D là một đường thẳng có HPTD

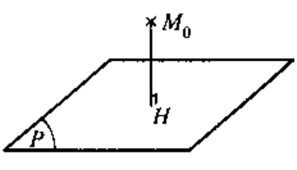
$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array}\right|,$$

  $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{u}'(a',b',c')$. Khi đó $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ định phương D.

3) Hình chiếu trực giao của một điểm lên một mặt phẳng

Cho $P \mid ax + by + cz + d = 0$ là một mặt phẳng, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}_3$.

Ký hiệu $H(X, Y, Z)$ là hình chiếu trực giao (hay: vuông góc) của M_0 lên P.



Ta có : $\begin{cases} H \in P \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, (X = x_0 + \lambda a, Y = y_0 + \lambda b, Z = z_0 + \lambda c), \end{cases}$

từ đó suy ra các tọa độ của H :

$$X = x_0 - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}a, \quad Y = y_0 - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}b,$$

$$Z = z_0 - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}c.$$

4) Khoảng cách điểm - mặt phẳng

Với các ký hiệu trên đây :

$$\begin{aligned}(d(M_0,P))^2 = M_0H^2 &= (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 \\ &= \left(\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.\end{aligned}$$

◆ **Mệnh đề** Cho $P \mid ax + by + cz + d = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}_3$. Ta có :

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ta cũng có thể thu được kết quả này mà không cần tính tọa độ của H.

5) Khoảng cách điểm - đường thẳng

Cho D là một đường thẳng, $A \in D$, $\vec{u} \in \vec{D} - \{\vec{0}\}$, $M_0 \in \mathcal{E}_3$. Ký hiệu H là hình chiếu vuông góc của M_0 lên D.

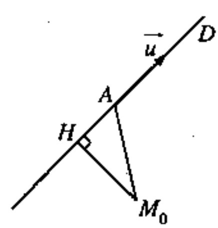
Ta có :

$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0} = \vec{u} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM_0}) = \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM_0}$.

Vậy, do $\overrightarrow{HM_0} \perp \vec{u}$:

$\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0} \| = \|\vec{u}\| \, \|\overrightarrow{HM_0}\|$,

nên : $d(M_0, D) = \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\| = \dfrac{\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0} \|}{\|\vec{u}\|}$.



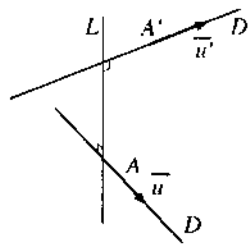
◆ **Mệnh đề** Cho D là một đường thẳng, xác định bởi một điểm A và một véctơ chỉ phương $\vec{u}$, và $M_0 \in \mathcal{E}_3$. Ta có :

$$d(M_0, D) = \frac{\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0} \|}{\|\vec{u}\|}.$$

6) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng

Cho D, D' là hai đường thẳng không song song, $A \in D$, $A' \in D'$, $\vec{u} \in \vec{D} - \{\vec{0}\}$, $\vec{u'} \in \vec{D'} - \{\vec{0}\}$.

Vì $(\vec{u},\vec{u}')$ độc lập, nên với ký hiệu $\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{u}'$ thì họ $(\vec{u},\vec{u}',\vec{v})$ cũng độc lập (xem 2.1.3).
Ta ký hiệu P (tương ứng : P') là mặt phẳng đi qua A (tương ứng : A') và định phương bởi $(\vec{u},\vec{v})$ (tương ứng : $(\vec{u}',\vec{v}')$).



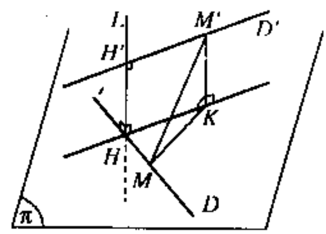
Cho L là một đường thẳng của $\mathcal{E}_3$ cắt vuông góc D và D'. Khi đó $L\subset P$ và $L\subset P'$, vậy do $P \not\parallel P'$ nên $L = P \cap P'$.
Ngược lại, đường thẳng $P\cap P'$ cắt vuông góc D và D'.

Ta tóm tắt việc khảo sát.

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa** Cho D, D' là hai đường thẳng không song song, $A\in D$, $A'\in D'$, $\vec{u}\in\overrightarrow{D}-\{\vec{0}\}$, $\vec{u}'\in\overrightarrow{D'}-\{\vec{0}\}$. Tồn tại một và chỉ một đường thẳng L cắt vuông góc D và D'; đường thẳng L đó được gọi là **đường vuông góc chung** của D và D' và ta có $L = P\cap P'$, trong đó P (tương ứng : P') là mặt phẳng đi qua A (tương ứng : A') và định hướng bởi $(\vec{u},\vec{u}\wedge\vec{u}')$ (tương ứng : $(\vec{u}',\vec{u}\wedge\vec{u}')$).

7) Khoảng cách của hai đường thẳng

Ta dùng lại các ký hiệu ở 6).
Ta ký hiệu H (tương ứng: H') là giao điểm của L và D (tương ứng: của L và D').



• Ta chứng tỏ rằng HH' là khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm D và D'.
Cho $(M, M')\in D\times D'$.
Ta ký hiệu Π là mặt phẳng đi qua H và định hướng bởi $(\vec{u},\vec{u}')$, và K là hình chiếu vuông góc của M' trên Π.
Khi đó $HH'M'K$ là một hình chữ nhật, vậy $HH' = M'K$.
Mặt khác, trong tam giác MKM' vuông tại K :

$$M'K \le MM'.$$

Ta suy ra : $\quad HH' \le MM'$.
Hơn nữa : $\quad HH' = MM' \Leftrightarrow M'K = MM' \Leftrightarrow K = M$,
và vì D và D' không song song nên :

$$K = M \Leftrightarrow (M = H \text{ và } M' = H').$$

• Để tính HH', ta chú ý là :

$$[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}'] = [\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{H'A'},\vec{u},\vec{u}'] = [\overrightarrow{HH'},\vec{u},\vec{u}'] = \overrightarrow{HH'}.(\vec{u}\wedge\vec{u}'),$$

từ đó, vì $\overrightarrow{HH'}$ cộng tuyến với $\vec{u}\wedge\vec{u}'$:

$$\left|[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}']\right| = \left\|\overrightarrow{HH'}\right\| \left\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\right\|.$$

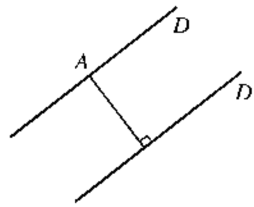
Ta tóm tắt việc khảo sát.

♦ **Mệnh đề** Cho D, D' là hai đường thẳng không song song, $A \in D$, $A' \in D'$, $\vec{u} \in \overrightarrow{D} - \{\vec{0}\}, \vec{u}' \in \overrightarrow{D'} - \{\vec{0}\}$. Ta có :

$$d(D, D') = \frac{\left|[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}']\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}.$$

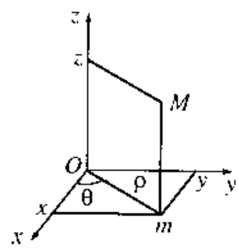
NHẬN XÉT

Nếu $D \,//\, D'$, thì $d(D, D') = d(A, D')$, trong đó A là một điểm bất kỳ của D.



8) Tọa độ trụ

Cho $M \in \mathcal{E}_3$ ($M \notin z'z$), (x, y, z) là tọa độ của M trong $\mathcal{R}$, m là hình chiếu vuông góc của M trên xOy, $[\theta, \rho]$ là tọa độ cực của m (xem 2.2.1, 2)).



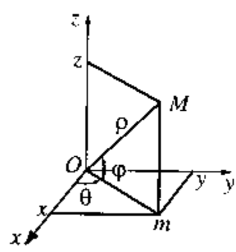
Ta nói rằng (θ, ρ, z) là một hệ **tọa độ trụ** của M. Như vậy :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

Ta quy ước là các điểm thuộc zz' ứng với các tọa độ trụ $(\theta, 0, z)$ (θ không xác định tường minh).

9) Tọa độ cầu

Cho $M \in \mathcal{E}_3$ ($M \neq O$), (x, y, z) là tọa độ của M trong $\mathcal{R}$, m là hình chiếu vuông góc của M lên xOy, θ là góc cực của m trong xOy,



$$\varphi = (\widehat{\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}}) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$(\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ nếu $M \in]Oz)$,

$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ nếu $M \in]Oz'))$.

Ta nói rằng $[\theta, \rho, \varphi]$ là một **hệ tọa độ cầu** của M. Như vậy :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Ta quy ước rằng O ứng với tọa độ cầu $(\theta, 0, \varphi)$ (θ, φ đều không xác định tường minh).

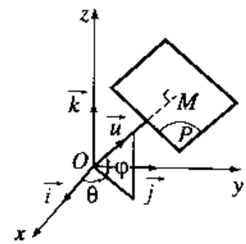
NHẬN XÉT :

Với các ký hiệu đó :

$|\rho| = Om$ trong tọa độ trụ

$\rho = OM$ trong tọa độ cầu.

10) Phương trình dạng chuẩn của một mặt phẳng



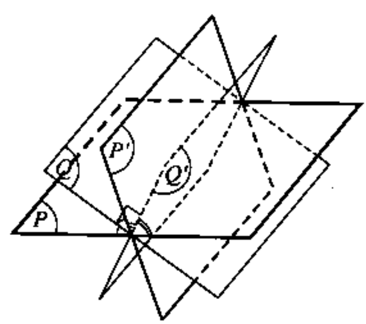
Giả sử $P \mid ax + by + cz + d = 0$ là một mặt phẳng của $\mathcal{E}_3$.

Điểm $A(a, b, c)$ của $\mathcal{E}_3$ nhận một hệ tọa độ cầu $[\theta, \rho, \varphi]$, từ đó, khi ký hiệu $p = -\dfrac{d}{\rho}$, ta có một PTD của P, gọi là **phương trình dạng chuẩn** của P :

$$\cos\theta\cos\varphi\, x + \sin\theta\cos\varphi\, y + \sin\varphi\, z = p.$$

Véctơ $\vec{u}$ $(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$ được chuẩn hóa và trực giao với P, và nếu ký hiệu H là hình chiếu vuông góc của O lên P, thì ta có : $\overrightarrow{OH}.\vec{u} = p$, hoặc là $\overline{OH} = p$, trong đó $\overline{OH}$ chỉ độ đo đại số của $\overrightarrow{OH}$ trên $(\mathbb{R}\vec{u}, \vec{u})$.

Một số thuật ngữ

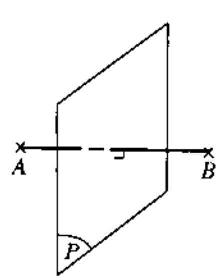


1) Cho hai mặt phẳng P, P' cắt nhau theo một đường thẳng D, tập hợp các điểm của $\mathcal{E}_3$ cách đều P và P', tức là

$$\{M \in \mathcal{E}_3 \,;\, d(M, P) = d(M, P')\}.$$

là hợp của hai mặt phẳng Q, Q', gọi là các **mặt phẳng phân giác** của P và P'. Ta có $Q \perp Q'$.

2) Cho hai điểm A, B $(A \neq B)$; tập hợp các điểm của $\mathcal{E}_3$ **cách đều** A và B, tức là $\{M \in \mathcal{E}_3 \,;\, MA = MB\}$ là một mặt phẳng P, gọi là **mặt phẳng trung trực** của (A, B). Mặt phẳng P đi qua trung điểm của (A, B) và vuông góc với (AB).



3) Vì mọi mặt phẳng của $\mathcal{E}_3$ có thể đồng nhất với một mặt phẳng afin Euclide, nên thuật ngữ đã thấy ở 2.2.1 có thể mở rộng cho không gian: tam giác, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông, ...

4) Tùy theo ngữ cảnh, một hình **đa diện** là :

- Một tập hợp hữu hạn các điểm $A_1, ..., A_n$ (thường : $n \geq 3$), từng cặp phân biệt, gọi là **đỉnh** của đa diện $A_1A_2 ... A_n$ (những điểm này thường được sắp)
- Hợp của các tam giác (hoặc một số nào đó trong chúng) tạo thành bởi các điểm ấy
- Bộ phận của không gian được giới hạn bởi các tam giác nói trên.
  Tùy theo số lượng các mặt, một đa diện được gọi là : **tứ diện** (4), **bát diện** (8), **thập nhị diện** (12), ... , chẳng hạn.
- Một **hình hộp** là việc cho tám điểm $ABCD\ A'B'C'D'$ sao cho :

$$\begin{cases} ABCD \text{ là một hình bình hành} \\ A'B'C'D' \text{ được suy ra từ } ABCD \text{ qua một phép tịnh tiến.} \end{cases}$$

- Một hình hộp $ABCD\ A'B'C'D'$ được gọi là hình **hộp chữ nhật** khi và chỉ khi:
  $$(AB) \perp (AD) \text{ và } (AB) \perp (AA') \text{ và } (AD) \perp (AA').$$
- Một **hình lập phương** là một hình hộp chữ nhật $ABCD\ A'B'C'D'$ sao cho :
  $$AB = AD = AA'.$$

2.3.2 Các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_3$

◆ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi ánh xạ afin $f : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ bảo toàn khoảng cách, tức là sao cho :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}_3, \quad d(f(A), f(B)) = d(A, B),$$

là phép **đẳng cự afin** của $\mathcal{E}_3$

◆ **Mệnh đề 1** Cho một ánh xạ afin $f : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$. Để f là một phép đẳng cự afin, cần và đủ là $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ của $\vec{\mathcal{E}}_3$.

Chứng minh :

Như ở 2.2.2, Mệnh đề 1.

◆ **Mệnh đề 2 - Định nghĩa 2**

Tập hợp các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_3$ là một nhóm đối với o, được gọi là **nhóm các phép đẳng cự afin của** $\mathcal{E}_3$.

Chứng minh :

Ta chứng tỏ rằng tập hợp các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_3$ là một nhóm con của nhóm afin GAff($\mathcal{E}_3$), tương tự như ở 2.2.2, Mệnh đề - Định nghĩa 2.

◆ **Định nghĩa 2** Cho f là một phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_3$.

1) Ta nói rằng f là một phép đẳng cự **thuận** (hoặc: phép **dời hình**) khi và chỉ khi $\det(\vec{f}) = 1$.

2) Ta nói rằng f là một phép đẳng cự **nghịch** (hoặc: phép **phản dời hình**) khi và chỉ khi $\det(\vec{f}) = -1$.

◆ **Mệnh đề 3**

Tập hợp các phép dời hình của $\mathcal{E}_3$ là một nhóm con của nhóm các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_3$.

Chứng minh :

Như ở 2.2.2, Mệnh đề 3.

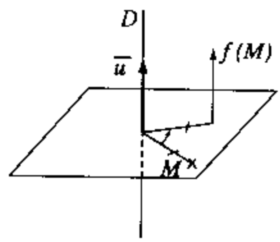
◆ **Định nghĩa 3** Cho D là một trục của $\mathcal{E}_3$, $\theta \in \mathbb{R}$. **Phép quay trục** D **với góc quay** θ, và ký hiệu là $\mathrm{Rot}_{D,\theta}$ là phép đẳng cự afin giữ bất biến ít nhất một điểm của D và có bộ phận tuyến tính là $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{D},\theta}$.

Một phép quay với góc quay π được gọi là **phép lật** (hoặc : **quay nửa vòng**, hoặc : **đối xứng trục**). Ta ký hiệu là $\mathrm{Ret}_D = \mathrm{Rot}_{D,\pi}$.

NHẬN XÉT :

Phép quay $\mathrm{Rot}_{D,\theta}$ giữ D bất biến theo từng điểm.

◆ **Định nghĩa 4** Cho D là một trục của $\mathcal{E}_3$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \overrightarrow{D}$. Ta gọi tích giao hoán $T_{\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$ là phép **quay – trượt** (hoặc **dời hình đinh ốc**) trục D, góc quay θ, vectơ $\vec{u}$.



◆ **Mệnh đề 4** Mỗi phép dời hình của $\mathcal{E}_3$ có ít nhất một điểm bất động là ($\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ hoặc) một phép quay.

Chứng minh :

Giả sử f là một phép dời hình khác với $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, có ít nhất một điểm bất động A. Khi đó $\vec{f}$ là một phép đẳng cự vectơ thuận, vậy (xem 2.1.4,2)) $\vec{f}$ là một phép quay $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{D},\theta}$ và cuối cùng $f = \mathrm{Rot}_{D,\theta}$, trong đó D là trục đi qua A và được định phương và định hướng bởi $\overrightarrow{D}$.

◆ **Mệnh đề 5**

Cho $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$, D là một trục của $\mathcal{E}_3$, $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Nếu $\vec{v} \perp \overrightarrow{D}$, thì $T_{\vec{v}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$ là một phép quay.

Chứng minh :

Theo mệnh đề trên đây chỉ cần chứng tỏ rằng $T_{\vec{v}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$ (ký hiệu là f) có ít nhất là một điểm bất động.

Giả sử $A \in D$, vậy $f(A) = A + \vec{v}$.

Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_3$ ta có :

$$f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{A(M)} \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)} + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$$
$$\Leftrightarrow (\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}_3} - \vec{f})(\overrightarrow{AM}) = \vec{v}.$$

Vì mặt phẳng vectơ $\vec{D}^{\perp}$ ổn định đối với $\vec{f}$, nên ta có thể xét tự đồng cấu φ của $\vec{D}^{\perp}$ cảm sinh bởi $\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_3} - \vec{f}$: $\forall \vec{x} \in \vec{D}, \quad \varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{f}(\vec{x})$.

Trong một c.s.t.c. (t.) của $\vec{D}^{\perp}$, ma trận của φ là $\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$, ma trận này khả đảo vì có định thức $(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \neq 0 \qquad (\theta \neq 0\ [2\pi])$.

Vậy, tồn tại $\vec{x} \in \vec{D}^{\perp}$ sao cho $(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_3} - \vec{f})(\vec{x}) = \vec{v}$, rồi nếu ký hiệu $M = A + \vec{x}$, ta có $(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}_3} - \vec{f})(\overrightarrow{AM}) = \vec{v}$, suy ra M bất biến qua f.

Cuối cùng $\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$ là phép quay với trục đi qua M và định phương và định hướng bởi $\vec{D}$, góc quay θ. ■

◆ **Định lý** **(Phân loại các phép dời hình của $\mathcal{E}_3$)**

Các phép dời hình của $\mathcal{E}_3$ là các phép tịnh tiến, các phép quay và các phép quay - trượt.

Chứng minh :

Rõ ràng là mọi phép tịnh tiến, phép quay hoặc phép quay - trượt là một phép dời hình. Ngược lại, giả sử f là một phép dời hình của $\mathcal{E}_3$.

Cho $A \in \mathcal{E}_3$, $A' = f(A)$, $g = \mathrm{T}_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$. Khi đó g là một phép dời hình của $\mathcal{E}_3$ và $g(A) = A$.

Theo Mệnh đề 4, g là một phép quay, $g = Rot_{D,\theta}$.

Tồn tại $\vec{u} \in \vec{D}, \vec{v} \in \vec{D}^{\perp}$ sao cho $\overrightarrow{AA'} = \vec{u} + \vec{v}$, và ta có :

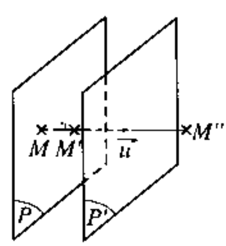
$$f = \mathrm{T}_{\overrightarrow{A'A}} \circ g = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ (\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ g).$$

Theo Mệnh đề 5, $\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ g$ là một phép quay $\mathrm{Rot}_{D',\theta}$ (trong đó $D' \mathbin{//} D$). Vì $\vec{u} \in \vec{D} = \vec{D'}$, nên $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{D',\theta}$ là một phép quay - trượt.

◆ **Định nghĩa 5** Cho P là một mặt phẳng của $\mathcal{E}_3$. Phép **phản chiếu** (hoặc : phép **đối xứng trực giao**) qua P, ký hiệu Ref_P, là **phép đối xứng** qua P, song song với phương trực giao với P.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề 6** Với hai điểm A, B phân biệt của $\mathcal{E}_3$, tồn tại một và chỉ một phép phản chiếu hoán vị A và B ; đó là phép phản chiếu qua mặt phẳng trung trực của $[AB]$.



Khảo sát tích của hai phép phản chiếu của $\mathcal{E}_3$.

Cho P, P' là hai mặt phẳng của $\mathcal{E}_3$. Rõ ràng là :

1) Nếu $P \mathbin{//} P'$, thì :

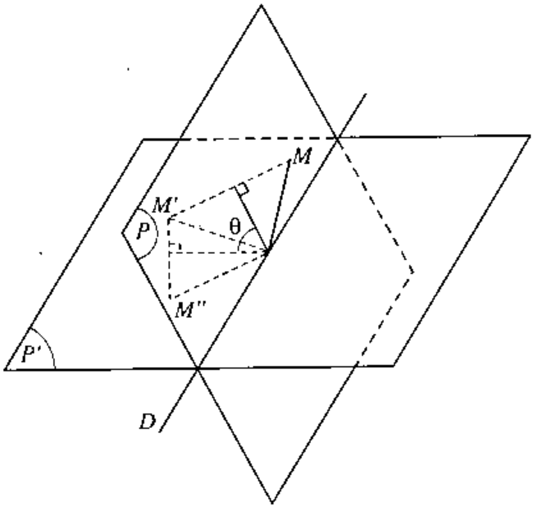
$\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_P = \mathrm{T}_{2\vec{u}}$

trong đó $\vec{u}$ là vectơ trực giao với P và P' sao cho $P' = \mathrm{T}_{\vec{u}}(P)$.

2) Nếu P và P' cắt nhau theo một đường thẳng D, thì :

$\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_P = \mathrm{Rot}_{D,2\theta}$,

trong đó $\theta \equiv (\widehat{P,P'})\ [\pi]$. (góc $(\widehat{P,P'})$ được định hướng theo hướng cảm sinh bởi hướng được chọn trên D).



Phân tích một phép dời hình thành tích những phép phản chiếu

1) Trường hợp phép tịnh tiến

Với mọi $\vec{u}$ thuộc $\vec{\mathcal{E}}_3$ và mọi mặt phẳng P sao cho $\vec{u} \perp \vec{P}$, với ký hiệu $P' = \mathrm{T}_{\frac{1}{2}\vec{u}}(P)$, ta có :

$$\mathrm{T}_{\vec{u}} = \mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_P .$$

Như vậy, mỗi phép tịnh tiến phân tích được thành tích của hai phép phản chiếu (qua các mặt phẳng trực giao với vectơ tịnh tiến), và ta có thể chọn một trong hai mặt phẳng đó, còn mặt phẳng kia khi đó được xác định duy nhất.

2) Trường hợp phép quay

Cho D là một trục của $\mathcal{E}_3$, $\theta \in \mathbf{R}$. Với mọi mặt phẳng P chứa D, với ký hiệu $P' = \mathrm{Rot}_{D,\frac{\theta}{2}}(P)$, ta có :

$$\mathrm{Rot}_{D,\theta} = \mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_P .$$

Như vậy, mỗi phép quay phân tích được thành tích của hai phép phản chiếu (qua các mặt phẳng chứa (giá của) trục của phép quay), và ta có thể chọn một trong hai mặt phẳng đó, còn mặt phẳng kia khi đó được xác định duy nhất.

3) Trường hợp phép quay - trượt

Suy ra từ 1) và 2) rằng mọi phép quay - trượt phân tích được thành tích của bốn phép phản chiếu.

2.3.3 Mặt cầu và đường tròn trong không gian

Không gian afin Euclide $\mathcal{E}_3$ (được định hướng), khi cần thì $\mathcal{E}_3$ được trang bị một hệ q.c.t.c.(t.) $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

◆ **Định nghĩa 1** Cho $\Omega \in \mathcal{E}_3$, $R \in \mathbb{R}_+$. Ta gọi bộ phận của $\mathcal{E}_3$ xác định bởi :

$$S(\Omega ; R) = \{M \in \mathcal{E}_3 ; \Omega M = R\}$$

là **mặt cầu tâm** Ω và **bán kính** R , ký hiệu là $S(\Omega ; R)$.

Ta cũng định nghĩa **hình cầu mở** $B(\Omega ; R)$ và **hình cầu đóng** $B'(\Omega ; R)$ tâm Ω và bán kính R:

$$B(\Omega ; R) = \{M \in \mathcal{E}_3 ; \Omega M < R\}$$

$$B'(\Omega ; R) = \{M \in \mathcal{E}_3 ; \Omega M \le R\}.$$

$S(\Omega ; R)$ $B(\Omega ; R)$ $B'(\Omega ; R)$

NHẬN XÉT :

1) Nếu $R = 0$, thì $S(\Omega ; R) = \{\Omega\}$; ta nói $\{\Omega\}$ là một **mặt cầu - điểm**.

2) Với mọi $\Omega, \Omega' \in \mathcal{E}_3$ và mọi $R, R' \in \mathbb{R}_+$ ta có :

$$S(\Omega ; R) = S(\Omega' ; R') \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ R = R' \end{cases}.$$

Như vậy, một mặt cầu xác định một cách duy nhất tâm và bán kính của nó.

3) $B(\Omega ; R) \cup S(\Omega ; R) = B'(\Omega ; R)$ và $B(\Omega ; R) \cap S(\Omega ; R) = \varnothing$. ■

Các mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề 1** **(Phương trình Descartes của mặt cầu)**

Cho $\Omega(a, b, c) \in \mathcal{E}_3$, $R \in \mathbb{R}_+$; mặt cầu $S(\Omega ; R)$ có PTD :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

NHẬN XÉT :

Với các ký hiệu trên đây :

$$B(\Omega ; R) = \{M(x, y, z) ; (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < R^2\}$$

$$B'(\Omega ; R) = \{M(x, y, z) ; (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2\}.$$

◆ **Mệnh đề 2** Cho $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

PTD $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$ biểu diễn :

- Mặt cầu tâm $\Omega(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ và bán kính $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$ nếu $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta \geq 0$
- $\varnothing$ nếu trái lại.

Ta có thể chú ý các trường hợp riêng sau :

- các mặt cầu có tâm tại O : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- các mặt cầu đi qua O : $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z = 0$

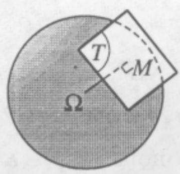
◆ **Mệnh đề 3** **(Biểu diễn tham số mặt cầu)**

Cho $\Omega(a, b, c) \in \mathcal{E}_3$, $R \in \mathbb{R}_+$. Mặt cầu S $(\Omega; R)$ có BDTS :

$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta\sin\varphi \\ y = b + R\sin\theta\cos\varphi \\ z = c + R\sin\varphi \end{cases}, \ (\theta, \varphi) \in [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Điều này quy về việc sử dụng các tọa độ cầu có gốc tại Ω.
Ta sử dụng trước khái niệm về mặt phẳng tiếp xúc tại một điểm với một mặt cong, (6.2.2).

◆ **Mệnh đề 4** Cho $\Omega \in \mathcal{E}_3$, $R \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in S(\Omega; R)$.



Mặt cầu $S(\Omega; R)$ có một mặt phẳng tiếp xúc T tại M và ta có :

$$(\Omega M) \perp T.$$

◆ **Mệnh đề 5** Cho S là một mặt cầu với PTD $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$ và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Mặt phẳng tiếp xúc tại M_0 với S có PTD :

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z + \alpha(x_0 + x) + \beta(y_0 + y) + \gamma(z_0 + z) + \delta = 0,$$

được nói là **thu được bằng cách tách đôi.**

Chứng minh :
Mặt cầu S có PTD : $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + (z+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$,
do đó có BDTS :

$$x = -\alpha + R\cos\theta\cos\varphi, \quad y = -\beta + R\sin\theta\cos\varphi, \quad z = -\gamma + R\sin\varphi,$$

$$(\theta, \varphi) \in [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$$

(ta giả thiết $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$).

Với $M_0(\theta\,;\varphi) \in S$, mặt phẳng tiếp xúc tại M_0 với S có PTD:

$$R\cos\theta\cos\varphi\,(X+\alpha - R\cos\theta\cos\varphi) + R\sin\theta\cos\varphi\,(Y+\beta - R\sin\theta\cos\varphi) + R\sin\varphi\,(Z+\gamma - R\sin\varphi) = 0,$$

tức là :

$$(R\cos\theta\cos\varphi)\,X + (R\sin\theta\cos\varphi)\,Y + (R\sin\varphi)\,Z - (x_0+\alpha)x_0 - (y_0+\beta)y_0 - (z_0+\gamma)z_0 = 0$$

hoặc còn là :

$$(x_0+\alpha)X + (y_0+\beta)Y - (z_0+\gamma)Z + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta = 0,$$

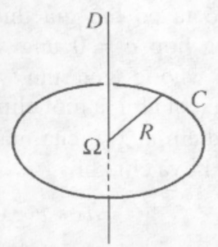
đó chính là PTD đã nêu trong Mệnh đề 5. ■

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 6** Cho $\Omega \in \mathcal{E}_3$, $R \in \mathbb{R}_+^*$. Mọi đường thẳng đi qua Ω đều cắt $S(\Omega\,;R)$ tại đúng hai điểm A, B, và Ω là trung điểm của AB.
Đường thẳng (AB) (hoặc đoạn thẳng $[AB]$) được gọi là một **đường kính** của mặt cầu $S(\Omega\,;R)$.

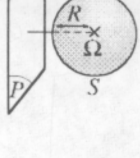
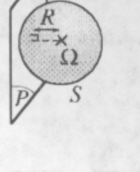
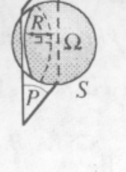
♦ **Mệnh đề 7** Cho $A, B \in \mathcal{E}_3$ sao cho $A \neq B$. Mặt cầu đường kính AB là $\{M\in \mathcal{E}_3\,;\,\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB} = 0\}$.

Chứng minh :
Như ở 2.2.4, Mệnh đề 8.

♦ **Định nghĩa 2** Cho D là một đường thẳng, $\Omega \in D$, $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Ta gọi đường tròn nằm trong mặt phẳng đi qua Ω và trực giao với D, có tâm Ω và bán kính R, là **đường tròn trục D, tâm Ω, bán kính R.**



♦ **Mệnh đề 8** **(Vị trí tương đối của một mặt phẳng và một mặt cầu)**
Cho P là một mặt phẳng và $S = S(\Omega\,;R)$ là một mặt cầu.

Nếu $d(\Omega,P) > R$ thì $P \cap S = \varnothing$	Nếu $d(\Omega,P) = R$ thì P tiếp xúc với S và $P \cap S$ là một đơn tử.	Nếu $d(\Omega,P) < R$ thì $P \cap S$ là một đường tròn
		

Ngược lại, mỗi đường tròn C có thể được xem ít nhất theo một cách, là giao của một mặt phẳng với một mặt cầu, từ đó suy ra một hệ phương trình Descartes của C dạng :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x^2+y^2+z^2+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0 \end{cases}$$ ■

♦ Mệnh đề 9

Hình chiếu vuông góc của một đường tròn lên một mặt phẳng là một elíp.

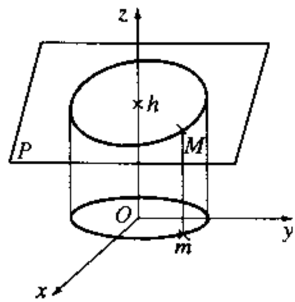
Chứng minh :

Bằng cách đổi hệ quy chiếu trực chuẩn, ta có thể quy về việc nghiên cứu hình chiếu vuông góc của một đường tròn C lên xOy, đường tròn này là giao của một mặt phẳng

$P \mid ax+c(z-h)=0$

và một mặt cầu

$S \mid x^2+y^2+(z-h)^2=R^2$.



Từ đó ta có thể giả thiết $c \neq 0$, do trường hợp $c=0$ ứng với một hình chiếu vuông góc thu về một đoạn thẳng, coi như là một elip.

Một điểm $m(x,y)$ của mặt phẳng xOy nằm trên hình chiếu vuông góc Γ của C lên xOy khi và chỉ khi :

$$\exists z \in \mathbb{R} \begin{cases} ax+c(z-h)=0 \\ x^2+y^2+(z-h)^2=R^2 \end{cases}$$

Như vậy, Γ có PTĐ $x^2+y^2+\left(\frac{a}{c}x\right)^2=R^2$, hoặc $\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)x^2+y^2=R^2$, và do vậy Γ là một elip.

Việc khảo sát các mặt bậc 2 (tương tự như các cônic trong trường hợp không gian ba chiều) sẽ được xét dưới đây (6.2.4).

Bài tập

Khi cần không gian afin Euclide $\mathcal{E}_3$ được trang bị một hệ q.c.t.c.(t.) $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Khoảng cách, góc)

◊ **2.3.1** Cho $A, B, C, D \in \mathcal{E}_3$.

a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$.

b) Từ đó suy ra rằng, nếu ký hiệu I,J,K,L,M,N là các trung điểm theo thứ tự của AB, CD, BC, AD, BD, AC :

$$IJ^2 + KL^2 + MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2).$$

◊ **2.3.2** Chứng minh rằng : $\forall A, B, C, D \in \mathcal{E}_3$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

◊ **2.3.3** Cho $A, B, C, D \in \mathcal{E}_3$ không đồng phẳng. Cho $M \in (AC)$; mặt phẳng π đi qua M và song song với (AB) và (CD) cắt (BC), (BD), (AD) theo thứ tự tại ba điểm là N, P, Q.

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là một hình bình hành.

b) ĐKCĐ đối với M để cho $MNPQ$ là một hình thoi.

◊ **2.3.4** Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng P trong các ví dụ sau :

a) $A(3, -1, 2)$ $\quad P \,|\, 2x + 6y - z = 7$

b) $A(1, 2, -3)$ $\quad P$ đi qua $B(-2, 1, 0)$ và được định phương bởi $\vec{v}(1,-6,2)$ và $\vec{w}(3,-1,1)$.

◊ **2.3.5** Tính các góc sau :

a) Góc của các mặt phẳng $P \,|\, x + y + z = 3$, $\quad P' \,|\, 2x + y - z = 4$

b) Góc của các đường thẳng : $D \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$, $\quad D' \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

c) Góc của đường thẳng : $D \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $P \,|\, x + 2z = 3$.

◊ **2.3.6** Lập các PTD của các mặt phẳng phân giác của :

$$P \,|\, 7x - 4y + 4z - 8 = 0, \qquad P' \,|\, 4x + 8y + z - 11 = 0.$$

◊ **2.3.7** Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng D trong các ví dụ sau :

a) $A(4,-3,2)$, D đi qua $B(1,0,-1)$ và được định phương bởi $\vec{u}\,(2,-1,3)$

b) $A(2,-1,1)$, $D \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$.

◊ **2.3.8** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng D, D' trong các ví dụ sau :

a) $\begin{cases} D \text{ đi qua } A(1,2,-1) \text{ và được định phương bởi } \vec{u}\,(2,-1,3) \\ D' \text{ đi qua } A'(-1,0,3) \text{ và được định phương bởi } \vec{v}\,(1,-1,-1) \end{cases}$

b) D đi qua $A(3,3,-1)$ và được định phương bởi $\vec{v}\,(2,1,-4)$, $D' \begin{cases} x = 4z - 3 \\ y = 6z + 1 \end{cases}$

c) $D \begin{cases} x = 2z + 6 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$, $\quad D' \begin{cases} x = -3z + 1 \\ y = z - 4 \end{cases}$.

◊ **2.3.9** Lập một HPTD của đường vuông góc chung L của hai đường thẳng D, D' trong các ví dụ sau :

a) $\begin{cases} D \text{ đi qua } A(2,3,-1) \text{ và được định phương bởi } \vec{v}\,(-1,6,2) \\ D' \text{ đi qua } A'(1,1,-2) \text{ và được định phương bởi } \vec{v}\,(2,1,-4) \end{cases}$

b) D đi qua $A(3,-2,1)$ và được định phương bởi $\vec{v}\,(-3,1,2)$, $D' \begin{cases} y = 4x - 1 \\ z = 2x + 3 \end{cases}$

c) $D\begin{cases}x = 3z+1\\ y = 2z-1\end{cases}$, $D'\begin{cases}y = x-2\\ z = 1\end{cases}$.

◊ **2.3.10** Cho $D\begin{cases}y = 3x+1\\ z = 2\end{cases}$, $D'\begin{cases}x = z-4\\ y = 2z+1\end{cases}$.

Chứng minh rằng tồn tại một và chỉ một mặt phẳng P song song với D và D' và cách đều D và D', và lập một PTD của P.

◊ **2.3.11** Cho $D\begin{cases}x = 2z+1\\ y = z-1\end{cases}$, $D'\begin{cases}x = -z-2\\ y = 3z+1\end{cases}$.

a) Chứng minh rằng D và D' cắt nhau.

b) Lập một HPTD của các đường phân giác của D và D'.

◊ **2.3.12** Cho $D\begin{cases}x = z+2\\ y = -z+1\end{cases}$, $P_1 \mid 5x+5y-3z-2=0$, $P_2 \mid 2x-y+z-6=0$.

Tìm tất cả các mặt phẳng π chứa D và sao cho $\pi \cap P_1$ và $\pi \cap P_2$ là hai đường thẳng trực giao. (Có thể dùng bài tập 1.2.9).

◊ **2.3.13** Lập các PTD của các mặt phẳng chứa $D\begin{cases}x = 3z+2\\ y = -5z+1\end{cases}$ và có khoảng cách đến điểm $A(1,-1,0)$ bằng 1. Ta có thể dùng bài 1.2.9).

◊ **2.3.14** Cho $D_1\begin{cases}y = x+1\\ z = -1\end{cases}$, $D_2\begin{cases}y = -x+1\\ z = 0\end{cases}$, $D_3\begin{cases}y = x-1\\ z = 1\end{cases}$, $\vec{u}$ (1,2,3).

Tìm tất cả các đường thẳng D của không gian cắt D_1, D_2, D_3 và trực giao với $\vec{u}$.

◊ **2.3.15** Cho $(a,m) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $D_1\begin{cases}y = mx\\ z = a\end{cases}$, $D_2\begin{cases}y = -mx\\ z = -a\end{cases}$.

Xác định các đường thẳng của $\mathcal{E}_3$ cắt D_1, D_2 dưới cùng một góc.

◊ **2.3.16** Cho $(h,m) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $A \in \mathcal{E}_3$, $D_1\begin{cases}y = mx\\ z = h\end{cases}$, $D_2\begin{cases}y = mx\\ z = -h\end{cases}$,

$D_3\begin{cases}y = -mx\\ z = h\end{cases}$, $D_4\begin{cases}y = -mx\\ z = -h\end{cases}$.

Chứng minh rằng các điểm đối xứng A_1, A_2, A_3, A_4 của A qua D_1, D_2, D_3, D_4 là đồng phẳng, và lập một PTD của mặt phẳng chứa chúng.

◊ **2.3.17 *** Chứng minh rằng trong các hình hộp mà các cạnh có những độ dài cho trước, hình hộp chữ nhật có tổng độ dài các đường chéo nhỏ nhất.

◊ **2.3.18*** Cho $ABCD$ là một hình tứ diện đều (cạnh bằng nhau, diện tích các mặt bằng nhau), S là diện tích một mặt, V là thể tích. Xác định trị số cực đại của tích các khoảng cách từ một điểm M nằm trong $ABCD$ đến bốn mặt của $ABCD$.

◊ **2.3.19*** Cho $ABCD$ là một hình tứ diện. Ta giả thiết rằng bốn mặt có cùng diện tích. Chứng minh rằng những cạnh đối có cùng độ dài .

(*Phép đẳng cự afin của* $\mathcal{E}$)

◊ **2.3.20** Chứng minh rằng tập hợp các phép đẳng cự afin (tương ứng : các phép dời hình) giữ một bộ phận X của $\mathcal{E}_3$ bất biến trong toàn cục (ở đây có nghĩa là $f(X) = X$) là một nhóm đối với $\circ$.

◊ **2.3.21** Xác định tập hợp các phép dời hình giữ một mặt phẳng cho trước P bất biến trong toàn cục.

◊ **2.3.22** a) Cho hai đường thẳng D, D'. Chứng minh :

1) Nếu $D // D'$, thì $\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D$ là phép tịnh tiến $T_{2\vec{v}}$, trong đó $\vec{v}$ là vectơ trực giao với D sao cho $D' = T_{\vec{v}}(D)$.

2) Nếu D và D' không song song thì $\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D$ là một phép quay - trượt có trục L (là đường vuông góc chung của D và D', hướng tùy chọn), góc $2\angle(\vec{D}, \vec{D'})\ [2\pi]$, vectơ $2\overrightarrow{HH'}$ (trong đó $\{H\} = D \cap L$, $\{H'\} = D' \cap L$).

b) Ngược lại, chứng minh mọi phép dời hình f của $\mathcal{E}_3$ đều phân tích được thành tích của hai phép lật. Nếu f là một phép quay - trượt có trục ký hiệu là L, thì có thể chọn một trong hai trục của phép lật là một trục tùy ý và cắt vuông góc L.

◊ **2.3.23** Chứng minh rằng tích của ba phép lật qua ba đường thẳng D_1, D_2, D_3 là phép đồng nhất khi và chỉ khi D_1, D_2, D_3 tạo thành một tam diện ba góc vuông.
(Sử dụng bài tập 2.3.22).

◊ **2.3.24** Chứng minh rằng hai phép lật $\mathrm{Ret}_{D'}$ và Ret_D giao hoán khi và chỉ khi $D = D'$ hoặc D và D' cắt nhau vuông góc nhau (dùng bài tập 2.3.22).

◊ **2.3.25** Chứng minh rằng hai phép phản chiếu Ret_P và $\mathrm{Ret}_{P'}$ giao hoán khi và chỉ khi $P = P'$ hoặc $P \perp P'$.

◊ **2.3.26** **Các phép phản dời hình của $\mathcal{E}_3$**

a) Chứng minh rằng với mọi mặt phẳng P và mọi $\vec{v}$ thuộc $\vec{P}^{\perp}$, $T_{\vec{v}} \circ \mathrm{Ref}_P$ là một phép phản chiếu và chỉ ra mặt phẳng của phép phản chiếu đó.

b) Ta gọi mọi tích $T_{\vec{w}} \circ \mathrm{Ref}_P$ trong đó $\vec{w} \in \vec{P}$ là phép **đối xứng - trượt**. Chứng minh rằng các phép phản dời hình của $\mathcal{E}_3$ là :

- Các phép đối xứng - trượt (bao gồm các phép phản chiếu)
- Hợp của một phép quay và một phép phản chiếu, trục của phép quay trực giao với mặt phẳng của phép phản chiếu.

c) Từ đó suy ra rằng mọi phép phản dời hình đều phân tích được thành tích của nhiều nhất ba phép phản chiếu.

◊ **2.3.27** Lập một HPTD của hình chiếu vuông góc D' của đường thẳng $D \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ lên mặt phẳng $P \mid x+2y+3z-6=0$.

◊ **2.3.28** Lập một PTD của hình đối xứng P' của mặt phẳng $P \mid 2x+y-z-1=0$ qua đường thẳng $D \begin{cases} x = z-2 \\ y = 3z+1 \end{cases}$.

◊ **2.3.29** Lập một PTD của mặt phẳng đối xứng P' của mặt phẳng $P \mid x+4y-2z-3=0$ qua mặt phẳng $\pi \mid x+y-3z-1=0$.

◊ **2.3.30** Lập một HPTD của đường thẳng đối xứng D' của đường thẳng $D \begin{cases} x = 3z+1 \\ y = -z+2 \end{cases}$ qua đường thẳng $\Delta \mid x = y = z$.

◊ **2.3.31** Lập một HPTD của đường thẳng đối xứng D' của đường thẳng $D \begin{cases} x = 2z-1 \\ y = -z+4 \end{cases}$ qua mặt phẳng $P \mid x-3y+2z-6=0$.

◊ **2.3.32** Cho $(\alpha,h) \in \mathbb{R}^2$, $D\begin{cases} x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \\ z = h \end{cases}$ và $D'\begin{cases} x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \\ z = -h \end{cases}$

$f = \mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D$. Xác định các phần tử đặc trưng của f.

◊ **2.3.33** Trong mỗi ví dụ sau hãy nhận biết $f : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, $M(x,y,z) \mapsto M'(x', y', z')$ và chỉ ra các phần tử đặc trưng

a) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z + 1) \\ y' = \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z + 2) \\ z' = \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -z - 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{9}(x - 8y - 4z + 2) \\ y' = \dfrac{1}{9}(-8x + y - 4z + 2) \\ z' = \dfrac{1}{9}(-4x - 4y + 7z + 1) \end{cases}$.

◊ **2.3.34** Cũng câu hỏi như trong bài tập 2.2.33 (dùng bài tập 2.3.26) :

a) $\begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = x + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z) + 2 \\ y' = \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z) - 1 \\ z' = \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z) \end{cases}$.

(Mặt cầu và đường tròn trong không gian)

◊ **2.3.35** Khảo sát vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt cầu theo bán kính R và khoảng cách d từ tâm đến đường thẳng.

◊ **2.3.36** Khảo sát vị trí tương đối của hai mặt cầu theo các bán kính R, R' của chúng và khoảng cách giữa các tâm.

◊ **2.3.37** Chứng tỏ rằng năm điểm A (4,7,1), B (3,-3,6), C (-5,1,4), D (5,6,-1), E (-4,3,-3) thuộc cùng một mặt cầu S, và xác định tâm và bán kính của S.

◊ **2.3.38** Cho A, B, C, D là bốn điểm thuộc $\mathcal{E}_3$ không đồng phẳng. Chứng minh rằng tồn tại một mặt cầu duy nhất S đi qua A,B,C,D ; mặt cầu đó được gọi là **mặt cầu ngoại tiếp tứ diện** *ABCD*.

Ví dụ : Lập một PTD của mặt cầu S ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, trong đó :

A (0,2,4), B (1,3,2), C (2,1,3), D (-2,-3,-1).

◊ **2.3.39** Cho $D_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, $D_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, $D_3 \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

a) Hãy xác định tất cả các đường thẳng D của $\mathcal{E}_3$ cắt D_1, D_2, D_3.
b) Xác định quỹ tích của hình chiếu vuông góc H của O lên D.

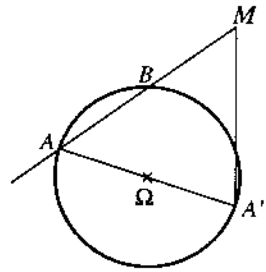
◊ **2.3.40** Cho ABC là một tam giác không bẹt. Xác định tập hợp E các điểm M thuộc $\mathcal{E}_3$ sao cho $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ trực giao từng cặp.

Bổ sung

◊ **C 2.1 Đường tròn : phương tích, trục đẳng phương, chùm đường tròn**

Trong phần bổ sung C 2.1 này, (C), (C'), (C'') chỉ những đường tròn của $\mathcal{E}_2$ có tâm Ω, Ω', Ω'', và bán kính R, R', R'' (≥ 0).

I. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn



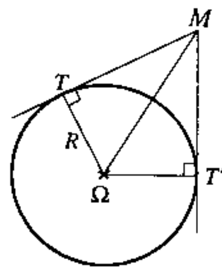
1) Một đường thẳng xuất phát từ một điểm M của $\mathcal{E}_2$ cắt (C) tại hai điểm A,B ; ta ký hiệu A' là điểm đối tâm của A trên (C). Chứng minh :

$$\overline{MA}.\ \overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \Omega M^2 - R^2.$$

Từ đó suy ra rằng $\overline{MA}.\ \overline{MB}$ không phụ thuộc cát tuyến xuất phát từ M. Ta gọi số thực :

$$C(M) = \overline{MA}.\ \overline{MB}$$

là **phương tích của điểm M đối với đường tròn** (C).



2) Cho $M \in \mathcal{E}_2$ ở bên ngoài (C), T, T' là tiếp điểm của các tiếp tuyến với (C) kẻ từ M. Chứng minh :

$$C(M) = MT^2 = MT'^2.$$

3) Ta ký hiệu (C) :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

trong một hệ quy chiếu trực chuẩn $\mathcal{R} = (O;\ \vec{i}, \vec{j})$ của $\mathcal{E}_2$. Chứng minh :

$$\forall M\ (x,y) \in \mathcal{E}_2,\ C(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c.$$

4) a) Cho $A, B, C, D \in \mathcal{E}_2$ từng ba điểm một không thẳng hàng và sao cho $(AB) \not\parallel (CD)$, M là giao điểm của (AB) và (CD). Chứng minh rằng A, B, C, D đồng chu khi và chỉ khi :

$$\overline{MB}\ \overline{MB} = \overline{MC}\ \overline{MD}.$$

b) Cho A,B,C thuộc $\mathcal{E}_2$ không thẳng hàng, $M \in (AB)$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp với ABC tiếp xúc với (MC) khi và chỉ khi :

$$\overline{MA}.\ \overline{MB} = MC^2.$$

II. Trục đẳng phương của hai đường tròn

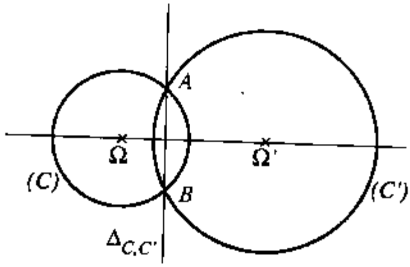
Ở đây ta giả thiết (C) và (C') không đồng tâm .

1) Chứng minh rằng $\{M \in \mathcal{E}_2\ ;\ C(M) = C'(M)\}$ là một đường thẳng, được gọi là **trục đẳng phương** của (C) và (C'), và ở đây được ký hiệu là $\Delta_{C,C'}$.

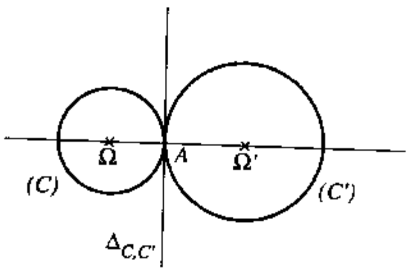
2) Chứng minh :

a) $\Delta_{C,C'} \perp (\Omega,\Omega')$

b) Nếu (C) và (C') cắt nhau tại hai điểm A và B $(A \neq B)$, thì $\Delta_{C,C'} = (AB)$.



c) Nếu (C) và (C') tiếp xúc tại một điểm A, thì $\Delta_{C,C'}$ là tiếp tuyến chung của chúng tại A.



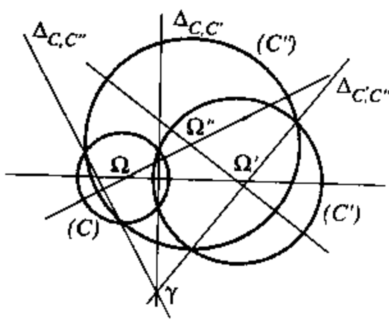
3) Xét các phương trình của (C) và (C') trong một hệ quy chiếu trực chuẩn $\mathcal{R} = (O\,;\,\vec{i},\vec{j})$:

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$(C'): x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0\,.$$

Chứng minh rằng $\Delta_{C,C'}$ có phương trình : $\quad 2(a' - a)\,x + 2(b' - b)\,y + (c - c') = 0.$

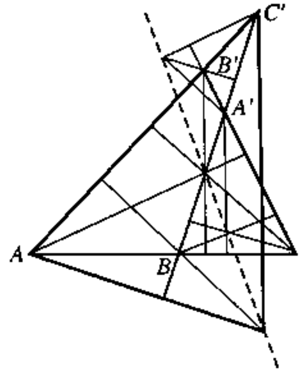
4) a) Giả thiết Ω, Ω' Ω'' không thẳng hàng. Chứng minh rằng các trục đẳng phương $\Delta_{C,C'}$, $\Delta_{C,C''}$, $\Delta_{C',C''}$ đồng quy tại một điểm γ, được gọi là **tâm đẳng phương** của (C),(C'),(C'').



b) *Dựng trục đẳng phương của hai đường tròn không cắt nhau*

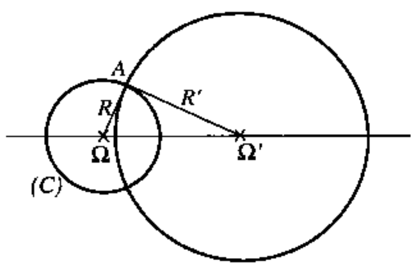
Ở đây ta giả thiết $(C) \cap (C') = \varnothing$. Dựng $\Delta_{C,C'}$ bằng cách dùng một đường tròn thứ ba (C'') cắt (C) và (C') .

5) *Một ứng dụng* : Chứng minh rằng các trực tâm của bốn tam giác tạo nên bởi một tứ giác toàn phần thì thẳng hàng.



III. Đường tròn trực giao

Ta nói rằng (C) và (C') **trực giao** (và ta ký hiệu $(C) \perp (C')$) khi và chỉ khi chúng cắt nhau tại hai điểm, ký hiệu là A và B, và các tiếp tuyến tại A với (C) và (C') trực giao :



1) Chứng minh :

$(C) \perp (C') \Leftrightarrow R^2 + R'^2 = \Omega\Omega'^2$

$\Leftrightarrow C(\Omega') = R'^2 \Leftrightarrow C'(\Omega) = R^2.$

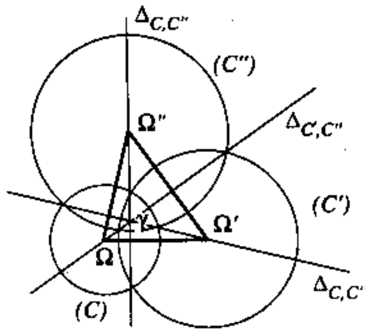
2) Xét các phương trình của (C) và (C') trong một hệ quy chiếu trực chuẩn $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\ )$:

$$(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$
$$(C'): x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Chứng minh :

$$(C) \perp (C') \Leftrightarrow 2aa' + 2bb' = c + c'.$$

3) Chứng minh rằng nếu (C), (C'), (C'') trực giao từng cặp, thì tâm đẳng phương của chúng là trực tâm của $\Omega\Omega'\Omega''$.

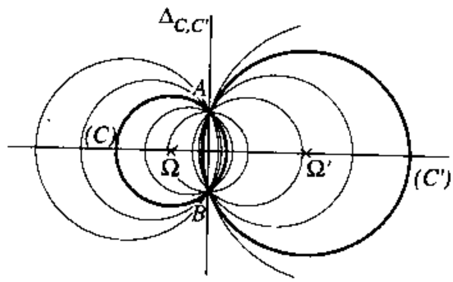


IV. Chùm tuyến tính các đường tròn

- Nếu (C) và (C') không đồng tâm, ta gọi tập hợp các đường tròn (Γ) của $\mathcal{E}_2$, xác định bởi (C) và (C') sao cho :

$$\Delta_{C,\Gamma} = \Delta_{C,C'}$$

là **chùm tuyến tính các đường tròn** xác định bởi (C) và (C').

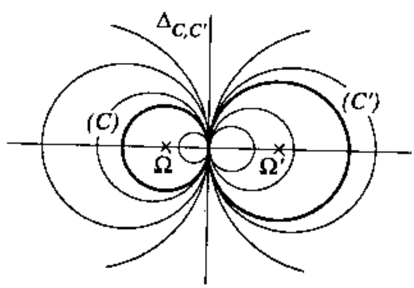


- Nếu (C) và (C') đồng tâm, ta gọi tập hợp các đường tròn của $\mathcal{E}_2$ đồng tâm với (C) và (C') là **chùm tuyến tính các đường tròn** xác định bởi (C) và (C').

Ta ký hiệu $\mathcal{F}_{C,C'}$ là chùm tuyến tính của các đường tròn xác định bởi (C) và (C').

1) a) Chứng minh rằng, nếu (C) và (C') cắt nhau tại hai điểm A, B thì $\mathcal{F}_{C,C'}$ là tập hợp các đường tròn của $\mathcal{E}_2$ đi qua A và B. Các điểm A và B được gọi là các **điểm cơ sở** của chùm $\mathcal{F}_{C,C'}$

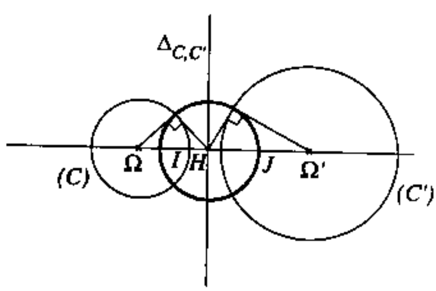
b) Chứng tỏ rằng, nếu (C) và (C') tiếp xúc tại một điểm T, thì $\mathcal{F}_{C,C'}$ là tập hợp của các đường tròn của $\mathcal{E}_2$ tiếp xúc tại T với (C) (và với (C')).



c) Ta giả thiết ở đây $(C) \cap (C') = \varnothing$ và ký hiệu $\{H\} = (\Omega\Omega') \cap \Delta_{C,C'}$, I và J là các điểm của $(\Omega\Omega')$ xác định bởi :

$$HI^2 = HJ^2 = C(H) = C'(H).$$

Chứng minh rằng $\mathcal{F}_{C,C'}$ là tập hợp các đường tròn của $\mathcal{E}_2$ có tâm trên $(\Omega\Omega')$ và trực giao với đường tròn đường kính IJ.



Các điểm I, J được gọi là các **điểm - tới hạn** (hoặc **điểm Poncelet**) của chùm $\mathcal{F}_{C,C'}$.

Chứng minh rằng $\{I\}$ và $\{J\}$ là những đường tròn điểm (tức là những đường tròn bán kính bằng không) của $\mathcal{F}_{C,C'}$.

2) Ta xét các phương trình của (C) và (C') trong một hệ quy chiếu trực chuẩn $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$
$$(C') : x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Chứng tỏ rằng $\mathcal{F}_{C,C'}$ là tập hợp các đường tròn của $\mathcal{E}_2$ có phương trình :

$$\alpha (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) + \beta (x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c') = 0,$$

trong đó (α,β) chạy khắp $\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 ; \alpha + \beta \neq 0\}$.

Như vậy $\mathcal{F}_{C,C'} - \{C'\}$ là tập hợp các đường tròn của $\mathcal{E}_2$ có phương trình :

$$(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) + \lambda (x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c') = 0$$

trong đó λ chạy khắp $\mathbb{R} - \{-1\}$.

3) Cho $(\Gamma) \in \mathcal{F}_{C,C'}$; ω là tâm của nó, ρ là bán kính của nó. Hãy chứng minh rằng :

$$\rho^2\, \overline{\Omega\Omega'} + R^2\, \overline{\Omega'\omega} + R'^2\, \overline{\omega\Omega} + \overline{\Omega\Omega'} \, . \, \overline{\Omega'\omega} \, . \, \overline{\omega\Omega} = 0.$$

◊ C 2.2 Phép nghịch đảo trên mặt phẳng

Việc khảo sát này được tiến hành trong mặt phẳng Euclide $\mathcal{E}_2$. Với $A \in \mathcal{E}_2$ và $k \in \mathbb{R}_+^*$, ta định nghĩa phép **nghịch đảo cực** (hoặc : **tâm**) A, **tỷ số** k, ký hiệu là :

$$I_{A,k} : \mathcal{E}_2 - \{A\} \to \mathcal{E}_2 - \{A\}$$
$$M \mapsto M'$$

trong đó M' là điểm xác định bởi : $\begin{cases} A, M, M' \text{ thẳng hàng} \\ \overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AM'} = k \end{cases}$, tức là $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{k}{AM^2} \overrightarrow{AM}$.

(Xem thêm Tập 1, C 2.2).

Rõ ràng là $I_{A,k}$ có một cực duy nhất và một tỷ số duy nhất, và là một phép đối hợp của $\mathcal{E}_2 - \{A\}$.

1) Cho $O \in \mathcal{E}_2$, $\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j})$; là một hệ quy chiếu trực chuẩn của $\mathcal{E}_2$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, I là phép nghịch đảo cực O và tỷ số k.

Chứng minh rằng, với mọi $M\,(x,y)$ thuộc $\mathcal{E}_2 - \{0\}$, $I\,(M)$ có tọa độ $\left(\dfrac{kx}{x^2+y^2}, \dfrac{ky}{x^2+y^2}\right)$.

Như vậy, nếu M có tọa vị $z \in \mathbb{C}^*$, thì $I(M)$ có tọa vị $\dfrac{k}{\bar{z}}$.

2) Cho $O \in \mathcal{E}_2$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, $I = I_{O,k}$.

a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm của $\mathcal{E}_2 - \{0\}$ bất biến qua I là đường tròn tâm O và bán kính $\sqrt{k}$, được gọi là **đường tròn nghịch đảo** của I.

b) Chứng minh rằng :

- Một đường thẳng của $\mathcal{E}_2$ là bất biến qua I khi và chỉ khi nó đi qua O.
- Ảnh qua I của một đường thẳng không đi qua O là một đường tròn đi qua O (thiếu điểm O)

c) • Ảnh qua I của một đường tròn đi qua O (và thiếu điểm 0) là một đường thẳng không đi qua O

• Ảnh qua I của một đường tròn không đi qua O là một đường tròn không đi qua O.

3) Cho f, g là hai phép nghịch đảo.

a) Chứng minh rằng $f \circ g \circ f^{-1}$ là một phép nghịch đảo hoặc một phép phản chiếu (trong mặt phẳng thiếu nhiều nhất ba điểm).

b) Nếu $f \circ g \circ f^{-1}$ là một phép nghịch đảo, chứng minh rằng, khi ký hiệu C là đường tròn nghịch đảo của g, thì đường tròn nghịch đảo của $f \circ g \circ f^{-1}$ là $f(C)$.

4) Cho $O \in \mathcal{E}_2$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, $I = I_{O,k}$, $A, B \in \mathcal{E}_2 - \{O\}$, $A' = I(A)$, $B' = I(B)$.

Chứng minh rằng : $A'B' = \dfrac{k.AB}{OA.OB}$.

5) **Bất đẳng thức Ptolémée**

Cho A, B, C, D là bốn điểm của $\mathcal{E}_2$. Chứng minh :

$$AC.BD \le AB.CD + AD.BC,$$

và có đẳng thức khi và chỉ khi A, B, C, D đồng chu hay thẳng hàng, theo thứ tự đó.
(Ta có thể xét $I = I_{A,1}$, $B' = I(B)$, $C' = I(C)$, $D' = I(D)$ và dùng 4).

6) Cho ABC là một tam giác của $\mathcal{E}_2$, D là điểm sao cho tam giác BCD đều và ở ngoài ABC, E là giao điểm của AD với đường tròn Γ ngoại tiếp BCD. Ta giả thiết A ở ngoài đĩa giới hạn bởi Γ.

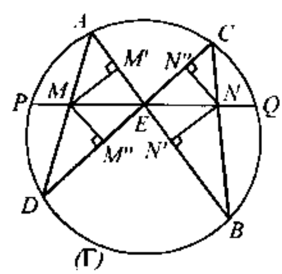
Chứng minh rằng, với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$, $MA + MB + MC \ge AD$, và có đẳng thức khi và chỉ khi $M = E$. (Dùng 5).

7) Cho ABC là một tam giác nhọn (tức là các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ đều nhọn), $A', B', C' \in \mathcal{E}_2$ sao cho các tam giác BCA', CAB', ABC' là tam giác đều và ở ngoài ABC. Ta ký hiệu Γ_A, Γ_B, Γ_C là các đường tròn ngoại tiếp BCA', CAB', ABC'.
Chứng minh rằng (AA'), (BB'), (CC'), Γ_A, Γ_B, Γ_C cùng đi qua một điểm P và các đường thẳng (PA), (PB), (PC) tạo thành giữa chúng những góc $\dfrac{2\pi}{3}$.

◊ C 2.3 Bướm đơn, bướm kép

I. Bướm đơn

Cho (Γ) là một đường tròn của $\mathcal{E}_2$, PQ là một dây cung của (Γ), E là trung điểm của PQ, A, B, C, D là bốn điểm của (Γ) sao cho các đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Ta ký hiệu M (tương ứng : N) là giao điểm của các đoạn thẳng PQ và AD (tương ứng : BC).



1) Ta ký hiệu M', M'' (tương ứng : N', N'') là các hình chiếu vuông góc của M (tương ứng : N) trên (AB) và (CD).

Chứng minh : $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{MM'}{NN'} = \dfrac{MM''}{NN''}$, $\quad \dfrac{MM'}{NN''} = \dfrac{AM}{CN}$, $\quad \dfrac{MM''}{NN'} = \dfrac{MD}{NB}$.

2) Từ đó suy ra : $\dfrac{EM^2}{EN^2} = \dfrac{AM.MD}{CN.ND}$.

3) Chứng minh : $MA.MD = MP.MQ$ và $NC.NB = NP.NQ$.

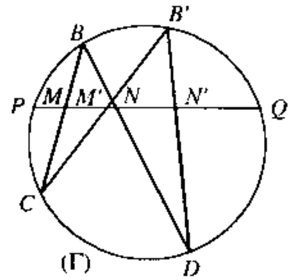
4) Kết luận rằng : $EM = EN$.

Như vậy ta đã chứng minh rằng E (vốn là trung điểm của PQ) cũng là trung điểm của MN.

(*Tham khảo* : H.S.M Coxeter and S.L Greitzer, *Geometry revisited*, Math. Association of America, Washington, 1967, trang 45- 46).

II. Bướm kép

A. Định lý Haruki



Cho (Γ) là một đường tròn của $\mathcal{E}_2$, PQ là một dây cung của (Γ), B, B', C, D là bốn điểm của (Γ) sao cho các đoạn thẳng BC, BD, $B'C$, $B'D$ cắt đoạn thẳng PQ tại bốn điểm, ký hiệu tuần tự là M, N, M', N'. Ta ký hiệu :

$x = PM$, $y = MN$, $z = NQ$,

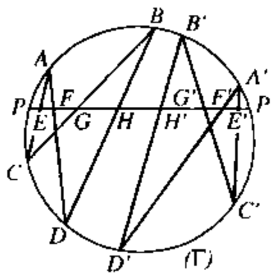
$x' = PM'$, $y' = M'N'$, $z' = N'Q$.

1) Cũng lập luận tương tự như ở I, chứng minh :

$$\frac{y(x'-x)}{(z-z')y'} = \frac{x(y+z)}{(x'+y')z'}.$$

2) Từ đó suy ra : $xy'z = x'yz'$.

B. Định lý bướm kép



Cho (Γ) là một đường tròn của $\mathcal{E}_2$, PP' là một dây cung của (Γ), A, B, C, D, A', B', C', D' là tám điểm của (Γ) sao cho các đoạn thẳng AC, AD, BC, BD, $B'D'$, $B'C'$, $A'D'$, $A'C'$ cắt đoạn thẳng PQ tại tám điểm, ký hiệu tuần tự là $E, F, G, H, H', G', F', E'$ và ở trên (PP') theo thứ tự đó. Ta giả thiết rằng :

$PF = P'F'$, $PG = P'G'$, $PH = P'H'$.

Bằng cách áp dụng định lý Haruki, hãy chứng minh :

$$\frac{PE.FP'}{EF} = \frac{PG.HP'}{GH}$$

và
$$\frac{P'E'.F'P}{E'F'} = \frac{P'G'.H'P}{G'H'}.$$

Từ đó suy ra $PE = P'E'$.

(Tham khảo : L.Hoenn, *A new proof of the Double Butterfly Theorem*, Math, May,63 (1990), trang 256-257).

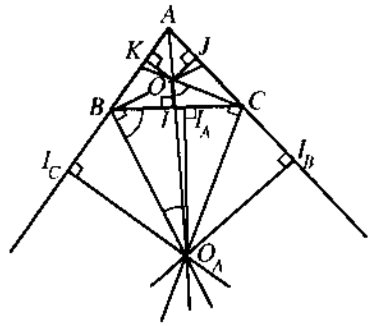
◊ C 2.4 Một định lý về bốn đường tròn của J.B.Tabov

I. Những kết quả mở đầu về đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp

Cho ABC là một tam giác, O là tâm của đường tròn nội tiếp ABC, O_A là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC, I, J, K là các hình chiếu vuông góc của O

trên (BC), (CA), (AB), I_A, I_B, I_C là các hình chiếu vuông góc của O_A trên (BC), (CA), (AB),

$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$.



1) Ta ký hiệu $x = AJ = AK$, $y = BK = BI$,

$z = CI = CJ$.

Chứng minh : $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, và từ đó suy ra $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$.

2) Chứng minh :

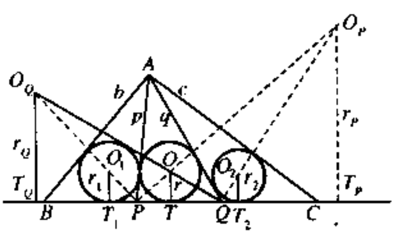
$$\frac{CI}{CO} = \frac{O_AB}{O_AO} \quad \text{và} \quad \frac{I_AB}{O_AB} = \frac{OC}{OO_A}.$$

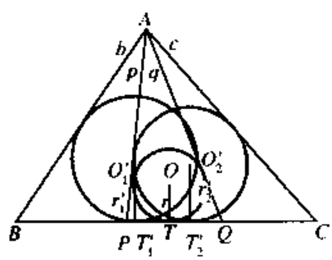
Từ đó suy ra :

$BI_A = BI_C = CI = s - c$ và $CI_A = CI_B = BI = s - b$, rồi $KI_C = JI_B = a$, $AI_C = AI_B = s$.

II . Cho ABC là một tam giác của $\mathcal{E}_2$, P, Q là hai điểm thuộc BC sao cho B, P, Q, C được sắp theo thứ tự đó. Hãy chứng minh rằng các tam giác ABP và AQC có các đường tròn nội tiếp đẳng cự khi và chỉ khi các tam giác ABQ và APC có các đường tròn nội tiếp cũng đẳng cự.

Các đường tròn nội tiếp $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ trong APQ, ABP, AQC, ABQ, APC có tâm là O, O_1, O_2, O_1', O_2', bán kính r, r_1, r_2, r_1', r_2' , và có các điểm tiếp xúc với (BC) là T, T_1, T_2, T_1', T_2'. Các đường tròn bàng tiếp γ_P , γ_Q trong APQ có tâm O_P , O_Q và bán kính là r_P , r_Q, điểm tiếp xúc với (BC) là T_P , T_Q . Ta ký hiệu s, s_1, s_2, s_1', s_2' là nửa chu vi của APQ, ABP, AQC, ABQ, APC, và $a = PQ$, $b = AB$, $c = AC$, $p = AP$, $q = AQ$.





1) Chứng minh : $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{QT.PT_Q}{QT_Q.PT_1} = \dfrac{s-p}{s} \cdot \dfrac{s-a}{s_1 - b}$

và $\dfrac{r}{r_2} = \dfrac{s-a}{s} \cdot \dfrac{s-a}{s_2 - c}$.

2) Từ đó suy ra : $r_1 = r_2 \Leftrightarrow (s-p)(s_2-c) = (s-q)(s_1-b)$.

3) Theo cách tương tự chứng minh : $r_1' = r_2' \Leftrightarrow (s-p)(s_2'-c) = (s-q)(s_1'-b)$.

4) Chú ý rằng : $s_1' = s_1 + s - p$ và $s_2' = s_2 + s - q$

suy ra : $r_1 = r_2 \Leftrightarrow r_1' = r_2'$.

(Tham khảo : J.B. Tabor, *A note of the Five - Circle Theorem*, Math, Mag. 63(1990) trang 92-94).

◊ C .2.5 Định lý Morley

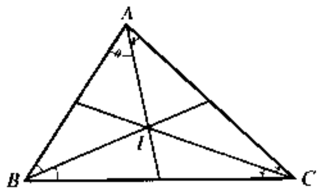
I. Một đặc trưng của tâm đường tròn nội tiếp một tam giác

Cho ABC là một tam giác.

1) Giả sử I là tâm của đường tròn nội tiếp ABC.

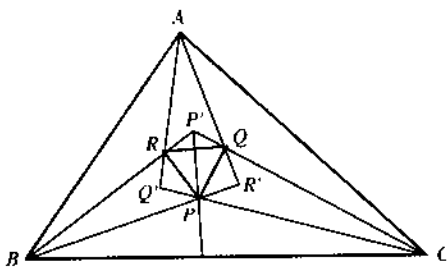
Chứng tỏ : $\angle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$.

2) Ngược lại, chứng minh rằng điểm J trên đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC đặc trưng bởi $\angle BJC = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



II. Định lý Morley

A) Cho PQR là một tam giác đều, $(\alpha,\beta,\gamma) \in]\,0\,;\,\frac{\pi}{3}\,]^3$ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{3}$, P', Q', R' là các điểm nằm ngoài PQR sao cho các tam giác QRP', RPQ', PQR' cân và có các góc ở đáy là α, β, γ. Ta ký hiệu A, B, C là các điểm được xác định bởi:



$$(Q'R) \cap (R'Q) = \{A\},$$
$$(R'P) \cap (P'R) = \{B\},$$
$$(P'Q) \cap (Q'P) = \{C\}.$$

1) Chứng minh $\angle BPC = \frac{\pi}{2} + \angle BP'C$.

2) Từ đó suy ra rằng P là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác $BP'C$ (áp dụng I).

2) Kết luận rằng các đường thẳng (BP), (BR), (CP), (CQ),(AQ), (AR), là những đường tam phân giác của các góc của ABC.

B) Từ đó suy ra định lý Morley :
Trong một tam giác bất kỳ ba giao điểm của các đường tam phân giác liền kề tạo thành một tam giác đều.

(Tham khảo : H.S.M. Coxeter *Introduction to Geometry*, J.Wiley, New York, 1961, các trang 23- 25; démonstration attribué à Raoul Bricard, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5), 1, (1922), các trang 254- 258.)

◊ C 2.6 Phép đối hợp của đường tròn

Ta ký hiệu Γ là đường tròn đơn vị tâm O và bán kính 1: $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$. Ta gọi mọi ánh xạ liên tục $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ sao cho : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sigma \circ \sigma(z) = z$, là phép **đối hợp** của Γ.

Một phép đối hợp σ của Γ được gọi là **tự do** khi và chỉ khi σ không có điểm bất động :

$$\forall z \in \mathbb{C} , \sigma(z) \neq z.$$

Với $(z_1,z_2) \in \Gamma^2$, ta ký hiệu $[z_1,z_2] = \{\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2; \lambda \in [0;1]\}$.

I. Cho σ là một phép đối hợp tự do của Γ, $x \in \Gamma$, Γ_1 và Γ_2 là hai cung mở của Γ có mút x và $\sigma(x)$.

1) Chứng tỏ : $\sigma(\Gamma_1) = \Gamma_1$ hoặc : $\sigma(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

2) Ở đây ta giả thiết : $\sigma(\Gamma_1) = \Gamma_1$,và ký hiệu $\gamma = \Gamma_1 \cup \{x, \sigma(x)\} = \overline{\Gamma_1}$ (bao đóng của Γ_1).

a) Chứng minh $\sigma(\gamma) = \gamma$.

b) Chứng minh rằng γ đồng phôi với $[0,1]$.

c) Từ đó suy ra rằng σ có ít nhất một điểm bất động .

3) Suy ra $\sigma(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

4) Kết luận : $\forall (x,y) \in \Gamma^2$, $[x; \sigma(x)] \cap [y; \sigma(y)] \neq \varnothing$.

II. A) Cho σ_1, σ_2 là hai phép đối hợp tự do của Γ.

Với mỗi $z \in \Gamma$, ta ký hiệu $\theta(z) = \operatorname{Arg} \dfrac{\sigma_1(z) - z}{\sigma_2(z) - z} \in \,]-\pi ; \pi]$.

1) Chứng tỏ rằng θ liên tục trên Γ.

2) Cho $z \in \Gamma$ sao cho $\theta(z) > 0$. Bằng cách sử dụng I, 4 chứng tỏ : $\theta(\sigma_1(z)) < 0$.

3) Từ đó suy ra :

$$\exists z \in \Gamma, \sigma_1(z) = \sigma_2(z) .$$

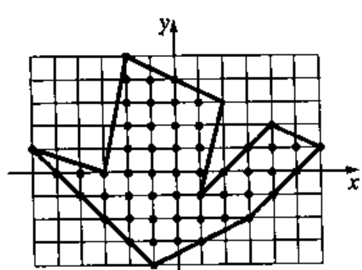
B) Suy ra từ **II, A)** rằng với mọi phép đối hợp σ của Γ, tồn tại $z \in \Gamma$ sao cho :

$$\sigma(z) = z , \quad \text{hoặc } \sigma(z) = -z .$$

(*Tham khảo* : W.F. Pfeffer, *On involutions of a circle*, Amer. Math. Monthly, Vol.79(1972) các trang 159 - 160).

◊ C 2.7 Định lý Pick

Đa giác đơn là một đa giác của $\mathbb{R}^2$ đồng phôi với đường tròn, tức là bất kỳ hai cạnh không liên tiếp nào của P cũng không có điểm chung; ta ký hiệu Σ là tập hợp các đa giác đơn của $\mathbb{R}^2$ mà tọa độ của các đỉnh đều thuộc $\mathbb{Z}$.



$I(P) = 36$, $B(P) = 19$

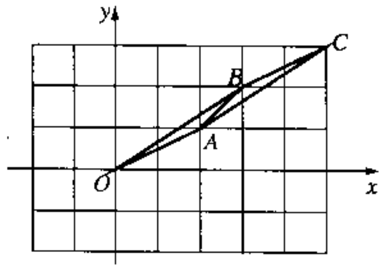
Với $P \in \Sigma$, ta ký hiệu $\mathcal{A}(P)$ là diện tích của P, $\overset{o}{P}$ là phần trong của P, ∂P là biên của P (hợp các cạnh của P), $I(P) = \operatorname{Card}(\overset{o}{P} \cap \mathbb{Z}^2)$, $B(P) = \operatorname{Card}(\partial P \cap \mathbb{Z}^2)$.

I. Đặc trưng một số tam giác thuộc Σ

Cho $A(a_1, a_2)$, $B(b_1,b_2)$ là hai điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ sao cho O, A, b không thẳng hàng, T là tam giác OAB, P là hình bình hành $OACB$ trong đó $C(a_1+b_1, a_2+b_2)$,

$$R = \{\ O + u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}; (u,v) \in \mathbb{Z}^2\ \}$$

là lưới cơ sở ($\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$).



Chứng tỏ rằng năm tính chất sau là tương đương :

(i) $I(T) = 0$ và $B(T) = 3$

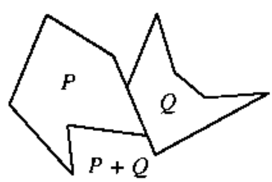
(ii) $I(P) = 0$ và $B(P) = 4$

(iii) $R = \mathbb{Z}^2$

iv) $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$

v) $\mathcal{A}(T) = \dfrac{1}{2}$.

II. Cho $P, Q \in \Sigma$ sao cho $P \cap Q$ tạo thành một đoạn thẳng của $\mathbb{R}^2$ không suy biến thành một điểm ; ta ký hiệu $P+Q$ là đa giác hợp của P và Q, trừ miền trong của $P \cap Q$, như vậy $P+Q \in \Sigma$. Một ánh xạ $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ được gọi là **cộng tính** khi và chỉ khi, với mọi $(P,Q) \in \Sigma^2$ mà $P + Q$ tồn tại, ta có $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$.



1) Cho $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ và $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ được xác định bởi : $\forall P \in \Sigma,\ \ f(P) = \alpha I(P) + \beta B(P) + \gamma$.

Chứng tỏ rằng f cộng tính khi và chỉ khi :

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \text{ và } \gamma = -\alpha.$$

2) a) Với mọi tam giác $T \in \Sigma$ thỏa mãn các tính chất (i) đến (v) của **I** , chứng minh :

$$\mathcal{A}(T) = I(T) + \frac{1}{2}B(T) - 1 .$$

b) Chứng minh rằng công thức trên cũng đúng với mọi tam giác thuộc Σ .

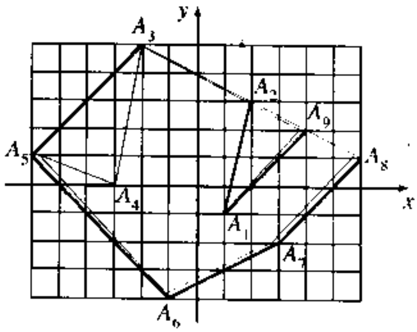
Ta chứng minh : $\mathcal{A}(P) = I(P) + \dfrac{1}{2}B(P) - 1$ đối với mọi $P \in \Sigma$, bằng phương pháp quy nạp theo số lượng các đỉnh của P.

Giả sử $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq 4$; ta giả thiết công thức đúng với mọi đa thức $P \in \Sigma$, có nhiều nhất là n - 1 đỉnh.

Cho P là một đa giác thuộc Σ có n đỉnh, P_c là bao lồi của P .

3) Hãy tìm công thức cho trường hợp không có một đỉnh nào của P nằm trong miền trong của P_c .

4) Bây giờ ta giả thiết có ít nhất một đỉnh của P thuộc miền trong của P_c . Nếu cần thì đánh số lại các đỉnh của P, ta vẫn có thể giả thiết là : $P = A_1A_2...A_n$ trong đó $A_1 \in \overset{\circ}{P_c}$.



$P = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A$

$P_1 = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9$

$P_2 = A_9 A_1 A_2$

$P_c = A_2 A_3 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9$

$s = 2,\quad r = 9$

Ta ký hiệu s (tương ứng : r) là số nguyên bé nhất (tương ứng:lớn nhất) sao cho A_s (tương ứng : A_r) $\in \partial P_c$ và $P_1 = A_s A_{s+1} \dots A_r$

$$P_2 = A_r A_{r+1} \dots A_n A_1 A_2 \dots A_s.$$

a) Chứng minh :

$$\mathcal{A}(P) = I(P_1) - I(P_2) + \frac{1}{2}B(P_1) - \frac{1}{2}B(P_2).$$

b) Chứng minh :

$$\begin{cases} I(P_1) = I(P) + I(P_2) + B(P_2) - j \\ B(P) = B(P_1) + B(P_2) - 2j + 2 \end{cases}, \text{ trong đó } j = \text{Card}\,(A_r A_S \cap \mathbb{Z}^2).$$

c) Kết luận :

Như vậy ta đã chứng minh **Định lý George Pick** (1899) : $\mathcal{A}(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$, cho mọi đa giác đơn P của $\mathbb{R}^2$, trong đó $\mathcal{A}(P)$ là diện tích của P, $I(P)$ là số điểm của $\mathbb{Z}^2$ thuộc miền trong của P, và $B(P)$ là số điểm của $\mathbb{Z}^2$ thuộc biên của P.

(*Tham khảo* : I. Niven and H.S Zuckerman, *Lattice point and polygonal area.* Amer. Math. Month, Vol 74 (1967) các trang 1195-1200)

C 2.8 Rút gọn các cônic

Mặt phẳng afin Euclide $\mathcal{E}_2$,được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn (thuận) :

$$\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\ ).$$

Với $(A,B,C,D,E,F) \in \mathbb{R}^6$, xét :

$$(C) = \{M(x,y) \in \mathcal{E}_2\ ;\quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\}.$$

Nếu $(A,B,C) = (0,0,0)$, thì việc xác định (C) là dễ dàng.

Vậy ta giả thiết $(A,B,C) \neq (0,0,0)$.

Phương pháp thứ nhất (sơ cấp)

A) Trường hợp $B^2 - AC \neq 0$

1) Chứng minh rằng tồn tại một điểm $\Omega(x_0, y_0)$ thuộc $\mathcal{E}_2$ sao cho, trong $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j})$,($C$) nhận một phương trình Descartes có dạng :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F_1 = 0 \text{ , trong đó } F_1 \in \mathbb{R},$$

và chứng minh rằng (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + E = 0. \end{cases}$$

Như vậy (C) nhận $\Omega(x_0, y_0)$ làm tâm đối xứng.

2) Cho $\theta \in \mathbb{R}$ (sẽ xác định sau), $(\vec{I}, \vec{J})$ là cơ sở trực chuẩn (thuận) suy từ $(\vec{i}, \vec{j})$ bởi Rot_θ : $\vec{I} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$, $\vec{J} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$. Ta ký hiệu $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J})$, và (u,v) là tọa độ trong $\mathcal{R}''$ của một điểm thuộc $\mathcal{E}_2$.

Chứng tỏ rằng tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ sao cho (C) nhận trong $\mathcal{R}''$ một phương trình Descartes có dạng :

$$\alpha u^2 + \beta v^2 = \gamma,$$

trong đó $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ và biểu diễn α, β, $\alpha\beta$ và θ theo A, B, C.

Vậy :
- Nếu $B^2 - AC > 0$, (C) thuộc loại hypebol
- Nếu $B^2 - AC < 0$, (C) thuộc loại elip

3) *Ví dụ :*

Với các côníc (C) sau đây, hãy xác định loại, trục và phương trình rút gọn :

a) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$

b) $2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2 = 0$

c) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$

d) $x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$

B) Trường hợp $B^2 - AC = 0$

1) Chứng minh rằng tồn tại $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sao cho, với mọi (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2.$$

Ta ký hiệu $(\vec{I}, \vec{J})$ là cơ sở trực chuẩn (thuận) được suy từ $(\vec{i}, \vec{j})$ bởi Rot_θ và $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J})$.

Như vậy, trong $\mathcal{R}'$, (C) nhận một phương trình Descartes có dạng :

$$\lambda Y^2 + 2\alpha X + 2\beta Y + \gamma = 0,$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

2) Chứng minh rằng tồn tại một điểm S thuộc $\mathcal{E}_2$, với các tọa độ được ký hiệu là (x_0, y_0) trong $\mathcal{R}'$ và $p \in \mathbb{R}$ sao cho, trong $\mathcal{R}'' = (S; \vec{I}, \vec{J})$, ($C$) nhận một phương trình Descartes có dạng :

$$v^2 = 2pu.$$

Như vậy (nếu $p \neq 0$), (C) là một parabol đỉnh S, trục $(S, \vec{I})$, tham số $|p|$.

3) *Ví dụ*

Với các côníc (C) sau, hãy xác định loại, trục, đỉnh, tham số :

a) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0.$

Phương pháp thứ hai (dùng cách rút gọn ma trận)

Ma trận $N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, đối xứng thực, vậy (xem Tập 6, 4.4.1, Định lý) tồn tại : $P \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$,

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_2(\mathbb{R})$ sao cho $N = PDP^{-1}$.

Rõ ràng là ta có thể giả thiết $P \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ (nếu cần thì hoán vị hai cột của P).

Vậy tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ sao cho : $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Ta ký hiệu $\vec{I} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$, $\vec{J} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$.

A) Trường hợp $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

Cũng như ở **A)** 1) của phương pháp thứ nhất, tồn tại $\Omega\ (x_0, y_0)$ sao cho (C) nhận trong $\mathcal{R}' = (\Omega\,;\ \vec{i}, \vec{j})$, một phương trình Descartes có dạng :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F_1 = 0 \quad \text{trong đó } F_1 \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng trong $\mathcal{R}'' = (\Omega\,;\ \vec{I}, \vec{J})$, (C) nhận một phương trình Descartes dạng :

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + F_1 = 0\,.$$

Từ đó suy ra loại của (C) ;

$$\begin{cases} (C) \text{ thuộc loại hypebol nếu } \lambda_1\lambda_2 < 0 \\ (C) \text{ thuộc loại elip nếu } \lambda_1\lambda_2 > 0. \end{cases}$$

B) Trường hợp $\lambda_1\lambda_2 = 0$

Vì $(A, B, C) \neq (0,0,0)$ nên ta có thể giả thiết, chẳng hạn, $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 \neq 0$.

Chứng minh rằng trong $\mathcal{R}' = (\Omega\,;\ \vec{i}, \vec{j})$, (C) nhận một phương trình Descartes có dạng :

$$\lambda_2 Y^2 + 2D_1X + 2E_1Y + F = 0 \quad \text{trong đó } (D_1, E_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Kết thúc như trong B) 2) của phương pháp thứ nhất. Như vậy (C) thuộc loại parabol.

◊ C 2.9 Công thức Euler và các đa diện đều

Ở đây, ta gọi giao bị chặn với phần trong không rỗng của một số hữu hạn nửa không gian đóng của $\mathcal{E}_3$ là **đa diện** của $\mathcal{E}_3$.

Cho P là một đa diện, ta ký hiệu S, A, F lần lượt là số đỉnh, số cạnh, số mặt của P.

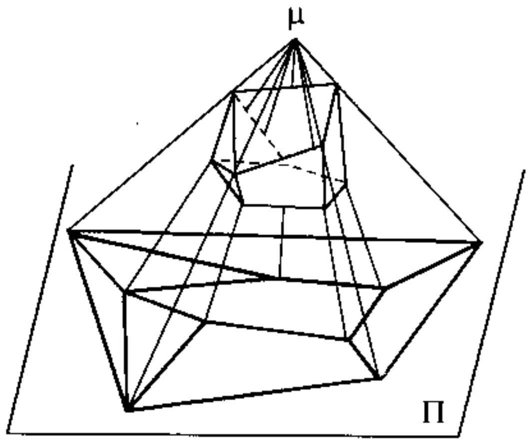
I Công thức Euler $S - A + F = 2$.

Cho Π là một mặt phẳng của $\mathcal{E}_3$, sao cho $\Pi \cap P = \emptyset$, và μ là một điểm của $\mathcal{E}_3$ nằm cùng phía với P đối với Π và khá gần trọng tâm của một mặt ϕ_0 của P. Ta xét phép chiếu phối cảnh có cực μ và mặt phẳng chiếu Π mà, với mọi điểm M thuộc $\mathcal{E}_3$ sao cho$(\mu M) \not\parallel \pi$, cho ứng điểm m của π xác định bởi

$\{m\} = (\mu M) \cap \Pi$.

Đa diện P được chiếu thành một đa giác lồi P_0 thuộc Π và P_0 chính là hình chiếu của ϕ_0. Những mặt khác của P được chiếu thành những đa giác lồi hợp thành một tựa phân hoạch của P_0.

Ta ký hiệu S_0 là số các đỉnh của ϕ_0 ; với mỗi $k \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$, ta ký hiệu n_k là số các đa giác có k cạnh của hình chiếu của P, trừ P_0.



1) $\sum\limits_k n_k$ là bao nhiêu ?

2) a) Chứng minh rằng, trong mỗi đa giác lồi có k đỉnh của mặt phẳng, tổng các góc là $(k-2)\pi$.

b) Từ đó suy ra rằng tổng các góc của tất cả các đa giác của hình chiếu của P, trừ P_0, là $\pi(\sum\limits_K kn_k) - 2\pi(F-1)$, và cũng bằng $\pi(2S - S_0 - 2)$.

3) Mặt khác, chứng minh rằng : $\sum\limits_k kn_k = 2A - S_0$.

Kết luận : $S - A + F = 2$.

II. Đa diện đều của $\mathcal{E}_3$

Ta giả thiết rằng P đều, tức là tồn tại $(f,s) \in (\mathbb{N} - \{0,1,2\})^2$, sao cho :

- Mỗi đỉnh của P thuộc đúng f mặt (vậy cũng thuộc đúng f cạnh)
- Mỗi mặt của P có đúng s đỉnh (vậy cũng thuộc đúng s cạnh) .

1) Chứng minh : $2A = Fs = Sf$.

2) a) Chứng minh : $\frac{1}{f} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$ (sử dụng I.4).

b) Từ đó suy ra : $(f,s) \in \{3,4,5\}^2$.

3) Chứng minh rằng (f, s, A, F, S) chỉ có thể nhận năm trị ; hãy chỉ rõ các trị đó.

4) Chứng minh rằng, với mỗi một trong năm trường hợp ấy, tồn tại một đa diện đều thỏa mãn trường hợp ấy.

Chương 3

Hình học afin thực

Chương này dành cho việc tổng quát hóa các kết quả khảo sát đã thực hiện ở chương 1. Thể cơ sở là $\mathbb{R}$, và các không gian vectơ được xét đến được giả thiết là hữu hạn chiều.

3.1 Cấu trúc afin chính tắc của một không gian vectơ

Trong §3.1 này, E chỉ một $\mathbb{R}$-kgv hữu hạn chiều.

3.1.1 Điểm

Một phần tử của E được gọi là **điểm** hay **vectơ**.

Với M, $M' \in E$, ta ký hiệu $\overrightarrow{MM'} = M' - M$.

Vậy ta có: $M' = M + \overrightarrow{MM'}$.

Khi các phần tử của E được xem như điểm thì ta nói rằng E được trang bị **cấu trúc afin chính tắc** của nó, và E được gọi là **không gian afin**.

♦ **Mệnh đề 1** Với mọi điểm A, B, C thuộc E:

1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **(hệ thức Chasles).**

Chứng minh:

1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow B - A = \vec{0} \Leftrightarrow B = A + \vec{0} \Leftrightarrow B = A$.

Đặc biệt: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ vậy $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}$.

♦ **Mệnh đề 2** Với mọi điểm A, B thuộc E và mọi vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ thuộc E:

1) $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow B = A + \vec{u}$

3) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

Chứng minh:

1) Suy từ tính kết hợp của + trong E.

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow B - A = \vec{u} \Leftrightarrow B = A + \vec{u}$.

3) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Leftrightarrow (-A) + A + \vec{u} = (-A) + A + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$. ∎

◆ **Mệnh đề 3** Với mọi điểm A thuộc E, các ánh xạ $\underset{M \mapsto \overrightarrow{AM}}{E \to E}$ và $\underset{\vec{x} \mapsto A + \vec{x}}{E \to E}$ là những song ánh, cái này là ánh xạ ngược của cái kia.

Chứng minh:

Ký hiệu φ, Ψ là hai ánh xạ đó, ta có:

$$\begin{cases} \forall M \in E, & (\psi \circ \varphi)(M) = \Psi(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} = M \\ \forall \vec{x} \in E, & (\varphi \circ \psi)(\vec{x}) = \varphi(A + \vec{x}) = (A + \vec{x}) - A = \vec{x}, \end{cases}$$

vậy $\Psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ và $\varphi \circ \Psi = \mathrm{Id}_E$. ∎

Một **cặp điểm** của E là một cặp (A, B) gồm hai điểm thuộc E.

Ta nói rằng một cặp điểm (A, B) **tương đẳng** với một cặp điểm (C, D), và ta ký hiệu $(A, B) \sim (C, D)$, khi và chỉ khi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Như vậy:

$$\begin{aligned}(A, B) \sim (C, D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C \Leftrightarrow A + D = B + C \\ &\Leftrightarrow C - A = D - B \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow (A, C) \sim (B, D).\end{aligned}$$

Rõ ràng quan hệ tương đẳng là một quan hệ tương đương trong tập hợp các cặp điểm của E.

Cho $A, B, C, D \in E$; ta nói rằng $ABCD$ là một **hình bình hành** khi và chỉ khi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

3.1.2 Phép tịnh tiến

◆ **Định nghĩa** Với $\vec{x} \in E$, **phép tịnh tiến theo vectơ** $\vec{x}$, và ký hiệu là $\mathrm{T}_{\vec{x}}$, là ánh xạ $\mathrm{T}_{\vec{x}} : \underset{A \mapsto A + \vec{x}}{E \to E}$.

Các mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề 1**

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{T}_{\vec{v}} = \mathrm{T}_{\vec{u} + \vec{v}}$

2) $\mathrm{T}_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_E$

3) Với mọi $\vec{u}$ thuộc E, $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ là song ánh và $(\mathrm{T}_{\vec{u}})^{-1} = \mathrm{T}_{-\vec{u}}$.

◆ **Mệnh đề 2** Tập hợp $\{\mathrm{T}_{\vec{u}};\ \vec{u} \in E\}$ là một nhóm đối với luật $\circ$, và ánh xạ $\vec{u} \to \mathrm{T}_{\vec{u}}$ là một phép đẳng cấu từ nhóm $(E, +)$ lên nhóm ấy.

◆ **Mệnh đề 3** Với mọi $(A, A') \in E^2$, tồn tại một và chỉ một phép tịnh tiến dời A đến A', đó là $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AA'}}$.

3.2 Không gian afin con của một không gian vectơ

Trong §3.2 này E chỉ là một $\mathbb{R}$-kgv hữu hạn chiều.

3.2.1 Đại cương

◆ **Định nghĩa 1** Cho $A \in E$, $\vec{F}$ là một kgvc của E. Ta gọi tập hợp $A + \vec{F}$ là **không gian afin con của** E **đi qua** A **và được định phương bởi** $\vec{F}$.

Như vậy: $A + \vec{F} = \{A + \vec{x};\ \vec{x} \in \vec{F}\} = \{M; \overrightarrow{AM} \in \vec{F}\} = \mathrm{T}_A(\vec{F})$.

◆ **Định nghĩa 2** Một bộ phận W của E được gọi là **không gian afin con** (viết tắt là kgac) của E khi và chỉ khi tồn tại một điểm A thuộc E và một kgvc $\vec{F}$ của E sao cho:

$$W = A + \vec{F}.$$

Giả sử $A, A' \in E$, $\vec{F}$, $\vec{F'}$ là hai kgvc của E.

1) Giả thiết $A + \vec{F} = A' + \vec{F'}$.

Vì $A = A + \vec{0} \in A + \vec{F}$, nên tồn tại $\vec{a'} \in \vec{F'}$ sao cho $A = A' + \vec{a'}$, từ đó: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a'} \in \vec{F}$.
Cho $\vec{x} \in \vec{F}$. Vì $A + \vec{x} \in A + \vec{F} = A' + \vec{F'}$, nên tồn tại $\vec{x'} \in \vec{F'}$ sao cho $A + \vec{x} = A' + \vec{x'}$, từ đó : $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \vec{x'} \in \vec{F'}$.
Điều này chứng tỏ $\vec{F} \subset \vec{F'}$, rồi do các vai trò đối xứng, $\vec{F} = \vec{F'}$.
Như vậy ta được: $\overrightarrow{AA'} \in \vec{F'} = \vec{F}$.

2) Ngược lại, giả thiết $\vec{F} = \vec{F'}$ và $\overrightarrow{AA'} \in \vec{F}$.
Với mọi $\vec{x}$ thuộc $\vec{F}$, $A + \vec{x} = A' + (-\overrightarrow{AA'} + \vec{x})$ và $-\overrightarrow{AA'} + \vec{x} \in \vec{F} = \vec{F'}$, vậy $A + \vec{x} \in A' + \vec{F'}$.
Điều này chứng tỏ $A + \vec{F} \subset A' + \vec{F'}$, rồi do các vai trò đối xứng, $A + \vec{F} = A' + \vec{F'}$.
Ta tóm tắt việc khảo sát:

◆ **Mệnh đề 1** Cho $A, A' \in E$, $\vec{F}$, $\vec{F'}$ là những kgvc của E. Ta có:

$$A + \vec{F} = A' + \vec{F'} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{F'} \\ \overrightarrow{AA'} \in \vec{F} \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 2** Cho W là một không gian afin con của E. Tồn tại một kgvc duy nhất của E, ký hiệu là $\vec{W}$ và gọi là **phương** của W, sao cho tồn tại $A \in E$ thỏa mãn:

$$W = A + \vec{W}.$$

Mọi họ sinh của $\overrightarrow{W}$ gọi là **họ chỉ phương** của W.

◆ **Mệnh đề 3** Với mọi kgac W của E và với mọi điểm A thuộc W: $W = A + \overrightarrow{W}$.

Chứng minh:

Vì W là một kgac của E, nên tồn tại $B \in E$ sao cho $W = B + \overrightarrow{W}$. Hơn nữa:

$$B = B + \vec{0} \in B + \overrightarrow{W} = W.$$

Vì $A \in W$, ta có $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{W}$, vậy (xem Mệnh đề 1): $A + \overrightarrow{W} = B + \overrightarrow{W} = W$.

◆ **Định nghĩa 3** **Số chiều** của một kgac W của E là số chiều của phương $\overrightarrow{W}$ của W.

Các kgac của E với số chiều 1, 2, dim (E) - 1, lần lượt được gọi là: **đường thẳng afin, mặt phẳng afin, siêu phẳng afin.**

NHẬN XÉT:

1) Mọi đơn tử $\{A\}$ là một kgac, vì $\{A\} = A + \{\vec{0}\}$, và phương của nó là $\{\vec{0}\}$.

2) Tập rỗng *không phải* là một kgac của E.

◆ **Mệnh đề 4** Cho W, W' là hai kgac của E.
Nếu $W \cap W' \neq \varnothing$ thì $W \cap W'$ là một kgac của E, và $\overrightarrow{W \cap W'} = \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$.

Chứng minh:

Tồn tại $A \in E$ sao cho $A \in W \cap W'$. Vậy ta có $W = A + \overrightarrow{W}$ và $W' = A + \overrightarrow{W'}$, từ đó với mọi M thuộc E: $M \in W \cap W' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$,

và do đó: $W \cap W' = \{M \in E;\ \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}\} = A + (\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'})$.

Điều này chứng tỏ $W \cap W'$ là một kgac của E, với phương là $\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$.

NHẬN XÉT:

Nếu W, W' là hai kgac của E sao cho $W \cap W' \neq \varnothing$, thì: $\dim (W \cap W') = \dim (\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'})$.

3.2.2 Tính song song

◆ **Định nghĩa** Cho W, W' là hai kgac của E. Ta nói rằng W **song song với** W', và ký hiệu $W \,//\, W'$, khi và chỉ khi $\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'}$.

NHẬN XÉT:

1) Tính song song vừa định nghĩa trên đây đôi khi còn được gọi là *tính song song yếu*, vì ta cũng có thể định nghĩa một khái niệm về *tính song song mạnh* mà ta sẽ ký hiệu là ///, bởi :

$$W /// W' \Leftrightarrow (\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W'}).$$

Như vậy, với mọi kgac W, W' của E, $W /// W' \Rightarrow W \,//\, W'$, nhưng đảo lại thì sai.

2) Ta cũng gặp khái niệm sau đây về tính song song, không trùng với khái niệm vừa đưa ra trong Định nghĩa trên :

$$W \,//\, W' \Leftrightarrow (\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'} \text{ hoặc } \overrightarrow{W'} \subset \overrightarrow{W}),$$

xem 1.2.3, *3*), Nhận xét 2).

◆ **Mệnh đề**

Quan hệ song song trên tập hợp các kgac của E có tính phản xạ và tính bắc cầu.

Chứng minh:

1) $W \,//\, W$, vì $\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W}$.

2) $\left\{\begin{array}{l} W \,//\, W' \\ W' \,//\, W'' \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'} \\ \overrightarrow{W'} \subset \overrightarrow{W''} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W''} \Leftrightarrow W \,//\, W''$.

NHẬN XÉT:

Quan hệ // trên tập hợp các kgac của E không đối xứng (nếu $E \neq \{\vec{0}\}$) vì $\{\vec{0}\} \,//\, E$ và $E \not\parallel \{\vec{0}\}$.

Bài tập

◊ **3.2.1** Cho W, W' là hai kgac của E.

Chứng minh: $W \,//\, W' \Leftrightarrow (\exists \vec{u} \in E, W \subset T_{\vec{u}}(W')) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} W \cap W' = \varnothing \\ \text{hoặc} \\ W \subset W' \end{array}\right.$.

◊ **3.2.2** Ta nói rằng một kgac W của E là song song mạnh với một kgac W' của E khi và chỉ khi $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W'}$, và ta ký hiệu $W \,///\, W'$ (xem 3.2.2, Nhận xét 1)).

a)Chứng minh rằng /// là một quan hệ tương đương trên tập hợp các kgac của E.

b) Chứng minh rằng, với mọi kgac W, W' của E:

$$W \,///\, W' \Leftrightarrow (\exists \vec{u} \in E,\ W \subset T_{\vec{u}}(W')) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} W \cap W' = \varnothing \\ \text{hoặc} \\ W = W' \end{array}\right..$$

◊ **3.2.3** Chứng minh rằng giao của một họ bất kỳ những kgac của E là $\varnothing$ hoặc là một kgac của E. Kết quả này tổng quát hóa kết quả ở 3.2.1, Mệnh đề 4.

◊ **3.2.4** Giả sử W, W' là hai kgac của E sao cho $W \cap W' \neq \varnothing$. Chứng minh rằng $W \cap W'$ là một kgac của E và:

$$\dim(W \cap W') \geq \dim(W) + \dim(W') - \dim(E).$$

◊ **3.2.5** Cho W, W' là hai kgac của E sao cho $\overrightarrow{W}$ và $\overrightarrow{W'}$ là bù của nhau trong E. Chứng minh rằng $W \cap W'$ là một đơn tử.

◊ 3.2.6 Không gian afin con sinh bởi một bộ phận của E

Với mọi bộ phận không rỗng X của E, giao của tất cả các kgac của E chứa X là một kgac của E (xem bài tập 3.2.3), gọi là **không gian afin con sinh bởi** X, và ở đây được ký hiệu là $< X >$.

a) Chứng minh rằng, với mọi bộ phận không rỗng X của E, $< X >$ là kgac bé nhất (theo nghĩa quan hệ bao hàm) của E mà có chứa X.

b) Chứng minh rằng với mọi bộ phận không rỗng X, Y của E:

1) $X \subset Y \Rightarrow < X > \subset < Y >$

2) X là một kgac của E khi và chỉ khi $< X > = X$

3) $<< X >> = < X >$.

c) Cho X là một bộ phận không rỗng của E, $A \in X$, $V = \{\overrightarrow{AM}; M \in X\}$. Chứng tỏ: $< X > = A + \mathrm{Vect}(V)$.

Đặc biệt, với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi $A_1, ..., A_p$ thuộc E, kgac sinh ra bởi $A_1, ..., A_p$ là kgac đi qua A_1 và được định phương bởi: $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_1A_k}; 1 \le k \le p\}$.

d) Giả sử W, W' là hai kgac của E thỏa mãn $W \cap W' \neq \varnothing$.

1) Chứng minh rằng, với mọi điểm A thuộc $W \cap W'$: $< W \cup W' >= A + (\vec{W} + \vec{W'})$.

2) Từ đó suy ra: $\overrightarrow{< W \cup W' >} = \vec{W} + \overrightarrow{W'}$, và do vậy :

$$\dim(< W \cup W' >) = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W').$$

e) Giả sử W, W' là hai kgac của E thỏa mãn $W \cap W' = \varnothing$.

1) Chứng minh rằng, với mọi điểm A thuộc W và mọi điểm A' thuộc W':

$$< W \cup W' >= A + (\vec{W} + \vec{W'} + \mathbb{R}\overrightarrow{AA'})$$

2) Từ đó suy ra rằng, với mọi (A, A') thuộc $W \times W'$: $\overrightarrow{< W \cup W' >} = \vec{W} + \overrightarrow{W'} + \mathbb{R}\overrightarrow{AA'}$ và do đó: $\dim(< W \cup W' >) = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') + 1$.

◊ 3.2.7 Tính phụ thuộc và tính độc lập afin

Ta nói rằng một họ hữu hạn $(A_i)_{i \in I}$ (trong đó I là một tập hợp hữu hạn không rỗng) những điểm của E là **độc lập afin** khi và chỉ khi tồn tại $i_o \in I$ sao cho họ $(\overrightarrow{A_{i_o}A_i})_{i \in I - \{i_o\}}$ là độc lập trong $\mathbb{R}$-kgv E.

Nói riêng, mọi họ (A) được tạo thành từ một điểm duy nhất của E là độc lập afin, và với mọi (A, B) thuộc E^2, họ (A, B) độc lập afin khi và chỉ khi $A \neq B$.

Một họ hữu hạn những điểm E được gọi là **phụ thuộc afin** khi và chỉ khi nó không độc lập afin.

Chứng minh:

a) Nếu một họ hữu hạn $(A_i)_{i \in I}$ những điểm của E là độc lập afin, thì với mọi i_1 thuộc I, họ $(\overrightarrow{A_{i_1}A_i})_{i \in I - \{i_1\}}$ là độc lập trong $\mathbb{R}$-kgv E. Nói cách khác, định nghĩa đã đưa ra trên đây không phụ thuộc việc chọn i_o trong I.

b) Nếu một họ hữu hạn $(A_i)_{i \in I}$ những điểm thuộc E là độc lập afin, thì mọi họ con $(A_j)_{j \in J}$ (trong đó $\varnothing \neq J \subset I$) là độc lập afin.

c) Nếu một họ hữu hạn $(A_i)_{i \in I}$ những điểm thuộc E là độc lập afin, thì với mọi hoán vị σ của I, họ $(A_{\sigma(i)})_{i \in I}$ là độc lập afin.

d) Một họ hữu hạn $(A_i)_{i \in I}$ những điểm thuộc E là độc lập afin khi và chỉ khi:

$$\dim(< \{A_i; i \in I\} >) = \mathrm{Card}(I) - 1,$$

trong đó $<\{A_i ; i \in I\}>$ là kgac sinh ra bởi $\{A_i ; i \in I\}$, xem bài tập 3.2.6.

3.3 Ánh xạ afin

Trong §3.3 này, E, F, G chỉ những $\mathbb{R}$ - kgv hữu hạn chiều.

3.3.1 Đại cương

♦ **Định nghĩa 1** Một ánh xạ $f: E \to F$ được gọi **afin** khi và chỉ khi tồn tại $A \in E$ sao cho ánh xạ $\varphi: E \to F$ xác định bởi:

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{x})}$$

là tuyến tính.

Ta ký hiệu tập hợp các ánh xạ afin từ E vào F là Aff(E, F).

Với các ký hiệu trên đây, ta có với mọi B và mọi M thuộc E:

$$\varphi(\overrightarrow{BM}) = \varphi(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{AM}) - \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(M)} - \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(B)f(M)}.$$

Đặc biệt, φ không phụ thuộc vào việc chọn A (trong E). Từ đó định nghĩa sau.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa - Ký hiệu 1** Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$.

Tồn tại một và chỉ một ánh xạ tuyến tính từ E vào F, gọi là **bộ phận tuyến tính** của f (hoặc: **ánh xạ tuyến tính liên kết với** f) được ký hiệu là $\vec{f}$, sao cho:

$$\forall (A, M) \in E^2, \ \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}.$$

♦ **Mệnh đề 2** Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$. Ta có:

$$\forall A \in E, \ \forall \vec{u} \in E, \quad f(A+\vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}).$$

Chứng minh:

Với ký hiệu $M = A + \vec{u}$ ta có:

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(M)} = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}).$$ ■

♦ **Mệnh đề 3**

$$\forall f \in \mathrm{Aff}(E,F), \forall g \in \mathrm{Aff}(F,G), \quad \begin{cases} g \circ f \in \mathrm{Aff}(E,G) \\ \overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}. \end{cases}$$

Chứng minh:

Tương tự như trong 1.4.1, Mệnh đề 3. ■

◆ **Định nghĩa 2**

1) Ta gọi mọi song ánh afin từ E vào F là phép **đẳng cấu afin** từ E lên F.

2) Ta gọi mọi song ánh afin từ E vào E là phép **tự đẳng cấu afin** (hoặc : **phép biến đổi afin**) của E.

◆ **Mệnh đề 4** Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$. Để f là song ánh, cần và đủ là $\vec{f}$ là song ánh, và khi đó f^{-1} là ánh xạ afin và $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{\,-1}$.

Chứng minh:

Tương tự như trong 1.4.1, Mệnh đề 3. ■

Như vậy, nếu $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$, để f là một phép đẳng cấu afin từ E lên F, cần và đủ là $\vec{f}$ là một đẳng cấu (tuyến tính) từ E lên F, và khi đó f^{-1} là một đẳng cấu afin từ F lên E.

NHẬN XÉT:

Nếu f là một đẳng cấu afin từ E lên F, thì $\dim(E) = \dim(F)$.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề 5** Tập hợp các tự đẳng cấu afin của E là một nhóm đối với luật $\circ$, được gọi là **nhóm afin** của E, được ký hiệu là $\mathrm{GAff}(E)$ (hoặc: $\mathrm{GA}(E)$). ■

◆ **Mệnh đề 6** Với mọi f thuộc $\mathrm{Aff}(E, F)$ và mọi kgac W của E, $f(W)$ là một kgac của F, có phương $\vec{f}(\overrightarrow{W})$.

Chứng minh:

Tồn tại $A \in W$ (vì $W \neq \varnothing$). Ta có, với mọi M' thuộc F:

$$M' \in f(W) \Leftrightarrow (\exists M \in M, M' \in f(M)) \Leftrightarrow (\exists \vec{x} \in \overrightarrow{W}, M' = f(A + \vec{x}))$$

$$\Leftrightarrow (\exists \vec{x} \in \overrightarrow{W}, M' = f(A) + \vec{f}(\vec{x})) \Leftrightarrow (\exists \vec{y} \in \vec{f}(\overrightarrow{W}), M' = f(A) + \vec{y}).$$

Như vậy, $f(W) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{W})$; do đó $f(W)$ là kgac đi qua $f(A)$ và có phương $\vec{f}(\overrightarrow{W})$.

NHẬN XÉT:

1) Với các ký hiệu của Mệnh đề trên:

$$\dim(f(W)) = \dim(\overrightarrow{f(W)}) = \dim(\vec{f}(\overrightarrow{W})) \leq \dim(\overrightarrow{W}) = \dim(W).$$

Chẳng hạn qua một ánh xạ afin, ảnh của một đường thẳng afin là một đơn tử hoặc một đường thẳng afin, và ảnh của một mặt phẳng afin là một đơn tử hoặc một đường thẳng afin hoặc một mặt phẳng afin.

2) Ba điểm A, B, C của E được gọi là **thẳng hàng** khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng afin chứa chúng. Nếu $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$ và nếu A, B, C thẳng hàng, thì $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ thẳng hàng. Ta nói rằng mọi ánh xạ afin bảo toàn tính thẳng hàng.

◆ **Mệnh đề 7** Cho $f \in \text{Aff}(E, F)$, W, W' là hai kgac của E.
Nếu $W \,//\, W'$, thì $f(W) \,//\, f(W')$.

Ta nói rằng mọi ánh xạ afin bảo toàn tính song song.

Chứng minh:

$$W \,//\, W' \Leftrightarrow \overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'} \Rightarrow \vec{f}(\overrightarrow{W}) \subset \vec{f}(\overrightarrow{W'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(W)} \subset \overrightarrow{f(W')} \Leftrightarrow f(W) \,//\, f(W').$$

Bài tập

◊ **3.3.1** Cho $f \in \text{Aff}(E, F)$ và W' là một kgac của F. Chứng tỏ rằng $f^{-1}(W')$ là một kgac của E.

◊ **3.3.2** Cho $f \in \text{Aff}(E, F)$. Chứng minh :

a) f đơn ánh $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ đơn ánh.

b) f toàn ánh $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ toàn ánh.

◊ **3.3.3** Cho $f, g \in \text{Aff}(E, F)$, $X = \{M \in E; f(M) = g(M)\}$. Chứng minh rằng nếu $X \neq \varnothing$, thì X là một kgac của E có phương là $\text{Ker}(\vec{f} - \vec{g})$.

3.3.2 Các ví dụ thông thường về ánh xạ afin

1) Phép tịnh tiến

Xem 3.1.2.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề 1**

1) Với mọi kgac W của E và mọi $\vec{u}$ thuộc E, $\text{T}_{\vec{u}}(W)$ là một kgac của E, có cùng phương với W (vậy song song với W).

2) Với mọi kgac W, W' của E sao cho $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W'}$, ta có:

$$\forall A \in W, \forall A' \in W', \ \text{T}_{\overrightarrow{AA'}}(W) = W'.$$

◆ **Mệnh đề 2** Cho $A \in E, f \in \text{Aff}(E, E)$. Tồn tại một cặp duy nhất $(\vec{u}, g)$ thuộc $E \times \text{Aff}(E, E)$ sao cho:

$$f = \text{T}_{\vec{u}} \circ g \quad \text{và} \quad g(A) = A .$$

Chứng minh:

Như trong 1.4.2, *1*), Mệnh đề 6.

2) Phép vị tự

♦ **Định nghĩa** Cho $\Omega \in E$, $k \in \mathbb{R}^*$. Ta gọi ánh xạ $\mathrm{H}_{\Omega,k} : \underset{M \mapsto M'}{E \to E}$ được xác định bởi:

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

là phép **vị tự tâm** Ω **và tỷ số** k, và ký hiệu là $\mathrm{H}_{\Omega,k}$.

Nói cách khác: $\forall M \in E, \quad H_{\Omega,k}(M) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$.

NHẬN XÉT:

Ta có, với mọi Ω, Ω' thuộc E, mọi k, k' thuộc $\mathbb{R}^* - \{1\}$ (nếu $E \neq \{\vec{0}\}$):

$$\mathrm{H}_{\Omega,k} = \mathrm{H}_{\Omega',k'} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ k = k' \end{cases}.$$

Như vậy, một phép vị tự của E (khác với Id_E) có một và chỉ một tâm, và một và chỉ một tỷ số.

Hai mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 1** Một ánh xạ $f : E \to E$ (khác với Id_E) là một phép vị tự khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f \text{ là ánh xạ afin} \\ f \text{ có ít nhất là một điểm bất động} \\ \text{Tồn tại } k \in \mathbb{R}^* \text{ sao cho } \vec{f} = k\mathrm{Id}_E. \end{cases}$$

Ta nói rằng một điểm A thuộc E là *bất động* (hoặc: *bất biến*) qua một ánh xạ $f : E \to E$ khi và chỉ khi $f(A) = A$.

♦ **Mệnh đề 2** Cho $\Omega \in E$. Ta có:

1) $\forall k, k' \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{H}_{\Omega,k} \circ \mathrm{H}_{\Omega,k'} = \mathrm{H}_{\Omega,kk'}$

2) $H_{\Omega,1} = \mathrm{Id}_E$

3) $\forall k \in \mathbb{R}^*, \quad (\mathrm{H}_{\Omega,k} \in \mathrm{GAff}(E)$ và $\mathrm{H}^{-1}_{\Omega,k} = \mathrm{H}_{\Omega,k^{-1}})$.

Tập hợp các phép vị tự tâm Ω là một nhóm đối với luật $\circ$, và ánh xạ $k \mapsto \mathrm{H}_{\Omega,k}$ là một phép đẳng cấu từ $(\mathbb{R}^*, \times)$ lên nhóm ấy.

Tương tự như ở 1.4.2, 2), Mệnh đề - Định nghĩa 3, ta chứng minh được Mệnh đề sau:

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3**

Tập hợp $\{\mathrm{T}_{\vec{u}} ; \vec{u} \in E\} \cup \{\mathrm{H}_{\Omega,k} ; (\Omega, k) \in E \times \mathbb{R}^*\}$ là một nhóm con của $\mathrm{GAff}(E)$, gọi là **nhóm các phép vị tự - tịnh tiến của** E.

3) Phép chiếu

♦ **Định nghĩa** Cho W là một kgac của E, $\overrightarrow{W'}$ là một phần bù của $\overrightarrow{W}$ trong E. **Phép chiếu** (hoặc: **toán tử chiếu**) **lên** W **song song với** $\overrightarrow{W'}$, và ký hiệu là $\mathrm{p}_{W,\overrightarrow{W'}}$, là ánh xạ cho ứng mỗi điểm M thuộc E với điểm M' thuộc E sao cho:

$$M' \in W \quad \text{và} \quad \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{W'}.$$

NHẬN XÉT :

1) Khi ký hiệu $p = \mathrm{p}_{W,\overrightarrow{W'}}$, ta có $p \circ p = p$.

2) Khi ký hiệu A là một điểm bất kỳ thuộc W và $\mathrm{p}_{\overrightarrow{W},\overrightarrow{W'}}$ là toán tử chiếu (tuyến tính) lên $\vec{W}$ song song $\vec{W}'$ (xem Tập 5, 7.1.1, Ví dụ 2)), ta có:

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{A\mathrm{p}_{W,\overrightarrow{W'}}(M)} = \mathrm{p}_{\overrightarrow{W},\overrightarrow{W'}}(\overrightarrow{AM}).$$

Từ đó ta suy ra Mệnh đề sau đây:

♦ **Mệnh đề** Cho W là một kgac của E, $\overrightarrow{W'}$ là một phần bù của $\overrightarrow{W}$ trong E. Phép chiếu $\mathrm{p}_{W,\overrightarrow{W'}}$ là một ánh xạ afin, và $\overrightarrow{\mathrm{p}_{W,\overrightarrow{W'}}}$ là toán tử chiếu (tuyến tính) lên $\overrightarrow{W}$ song song với $\overrightarrow{W'}$.

4) Phép đối xứng

♦ **Định nghĩa** Cho W là một kgac của E, $\overrightarrow{W'}$ là một phần bù của $\overrightarrow{W}$ trong E, p là phép chiếu lên W song song với $\overrightarrow{W'}$. Ta gọi ánh xạ từ E vào E được xác định bởi:

$$\forall M \in E, \; \mathrm{S}_{W,\overrightarrow{W'}}(M) = \mathrm{p}(M) + \overrightarrow{Mp(M)}$$

là **phép đối xứng qua** W, **song song với** $\overrightarrow{W'}$.

NHẬN XÉT:

1) Khi ký hiệu $\mathrm{p} = \mathrm{p}_{W,\overrightarrow{W'}}$ và $\mathrm{S} = \mathrm{S}_{W,\overrightarrow{W'}}$, ta có:

- Với mọi M thuộc E, p(M) là trung điểm của (M, S(M)), tức là:

$$\overrightarrow{M\mathrm{p}(M)} = \overrightarrow{\mathrm{p}(M)\mathrm{S}(M)}.$$

- $\mathrm{S} \circ \mathrm{S} = \mathrm{Id}_E$.

2) Khi ký hiệu A là một điểm bất kỳ của W và $s_{\overrightarrow{W},\overrightarrow{W'}}$ là phép đối xứng (tuyến tính) qua $\overrightarrow{W}$ song song với $\overrightarrow{W'}$ (xem Tập 5, 7.1.1, Ví dụ 3)), ta có:

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{A\mathrm{S}_{W,\overrightarrow{W'}}(M)} = s_{\overrightarrow{W},\overrightarrow{W'}}(\overrightarrow{AM}).$$

Từ đó ta suy ra mệnh đề sau:

◆ **Mệnh đề** Cho W là một kgac của E, $\overrightarrow{W'}$ là một phần bù của $\overrightarrow{W}$ trong E. Phép đối xứng $S_{W,\overrightarrow{W'}}$ là một ánh xạ afin, và $\overrightarrow{S_{W,\overrightarrow{W'}}}$ là một phép đối xứng (tuyến tính) qua $\overrightarrow{W}$ song song với $\overrightarrow{W'}$.

5) Phép co

◆ **Định nghĩa** Cho W là một kgac của E, $\overrightarrow{W'}$ là một phần bù của $\overrightarrow{W}$ trong E, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta gọi ánh xạ $a : E \to E$ được xác định bởi:

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\mathrm{p}(M)\mathrm{a}(M)} = \alpha \overrightarrow{\mathrm{p}(M)M}$$

trong đó p là phép chiếu lên W song song với $\overrightarrow{W'}$, là **phép co về trục** W, **phương** $\overrightarrow{W'}$, **tỷ số** α.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề** Phép co a về trục W, phương $\overrightarrow{W'}$, tỷ số α, là một ánh xạ afin, và:

$$\vec{a} = \alpha e + (1-\alpha)\vec{\mathrm{p}}$$

trong đó $e = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ và $\vec{\mathrm{p}}$ là phép chiếu lên $\overrightarrow{W}$ song song với $\overrightarrow{W'}$.

NHẬN XÉT:

Phép co về trục W, phương $\overrightarrow{W'}$, tỷ số 1 (tương ứng : 0, tương ứng : -1) là ánh xạ đồng nhất của E (tương ứng : $p_{W,\overrightarrow{W'}}$, tương ứng : $S_{W,\overrightarrow{W'}}$).

Bài tập

◇ **3.3.4** Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, E)$. Chứng minh rằng f là một phép vị tự - tịnh tiến khi và chỉ khi: với mọi kgac W của E, $f(W)$ song song mạnh với W (sử dụng bài tập 7.1.6, Tập 5).

◇ **3.3.5** Với mọi điểm A thuộc E, ta gọi phép đối xứng afin qua $\{A\}$ song song với $\vec{E}$, tức là ánh xạ afin S_A: $E \to E$ được xác định bởi:

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{AS_A(M)} = -\overrightarrow{AM}$$

là phép đối xứng tâm với tâm A. Chứng minh rằng nếu một ánh xạ afin f từ E vào E giao hoán với tất cả các phép đối xứng tâm của E, thì $f = \mathrm{Id}_E$.

◇ **3.3.6** Giả sử $f \in \mathrm{Aff}\,(E, E)$. Chứng minh :

a) f là một phép chiếu khi và chỉ khi $f \circ f = f$

b) f là một phép đối xứng khi và chỉ khi $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

3.4 Các hệ quy chiếu Descartes

Trong §3.4 này E, F chỉ những $\mathbb{R}$ - kgv hữu hạn chiều.

3.4.1 Đại cương

◆ **Định nghĩa** Ta gọi mọi cặp $(\Omega, \mathcal{B})$, trong đó $\Omega \in E$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của E, là **hệ quy chiếu** (hoặc: **hệ quy chiếu Descartes**) của E.

Ta nói rằng Ω là **gốc** của hệ quy chiếu $(\Omega, \mathcal{B})$.

Nếu $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$, ta ký hiệu $(\Omega; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ thay cho $(\Omega, (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}))$.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1**

Cho $\mathcal{R} = (\Omega; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ là một hệ quy chiếu Descartes của E.

Ánh xạ $(x_1, ..., x_n) \mapsto \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$ là một đẳng cấu afin từ $\mathbb{R}^n$ lên E.

Ta nói rằng $x_1, ..., x_n$ (hoặc: $(x_1, ..., x_n)$) là **(các) tọa độ của M trong $\mathcal{R}$**.

Nói cách khác, các tọa độ của M trong $\mathcal{R}$ là các thành phần (hoặc: tọa độ) của $\overrightarrow{\Omega M}$ trong $\mathcal{B}$. Vậy ta có thể **đồng nhất** E được trang bị $\mathcal{R}$ với $\mathbb{R}^n$.

Ta gọi cặp $(O, \mathcal{B}_0)$, trong đó $O = (0, ..., 0)$ và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, là **hệ quy chiếu Descartes chính tắc của $\mathbb{R}^n$**.

◆ **Mệnh đề 2** **(Công thức đổi hệ quy chiếu)**

Cho $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$, $\mathcal{R}' = (\Omega', \mathcal{B}')$ là hai hệ quy chiếu của E, ω_0 là ma trận - cột các tọa độ của Ω' trong $\mathcal{R}$, P là ma trận chuyển từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Với mọi điểm M thuộc E, khi ký hiệu X là cột các tọa độ của M trong $\mathcal{R}$ và X' là cột các tọa độ của M trong $\mathcal{R}'$, ta có: $X = \omega_0 + PX'$.

Chứng minh:

Theo hệ thức Chasles: $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M}$, từ đó rút ra kết quả bằng cách chuyển sang các thành phần trong cơ sở $\mathcal{B}$ và dùng công thức đổi cơ sở cho một vectơ (xem Tập 5, 8.2.2, Mệnh đề).

NHẬN XÉT:

1) Như vậy ta đã biểu diễn các **tọa độ cũ của M** theo các **tọa độ mới** của nó.

2) Trong trường hợp đặc biệt, khi ta chỉ đổi gốc tọa độ (nghĩa là $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$) ta sẽ có công thức đổi hệ quy chiếu bằng phép "đổi gốc tọa độ" :

$$X = \omega_0 + X'.$$

3.4.2 Hệ quy chiếu Descartes và không gian afin con

◆ **Định nghĩa 1** Cho W là một kgac của E. Ta gọi mọi cặp $(A, \mathcal{S})$, trong đó $A \in W$ và $\mathcal{S}$ là một cơ sở của W, là **hệ quy chiếu Descartes của** W.

Định nghĩa này tổng quát hóa Định nghĩa đã đưa ra ở 3.4.1.

◆ **Định nghĩa 2** Cho W là một kgac của E. Ta gọi mọi song ánh afin từ $\mathbb{R}^p$ (với một p nào đó thuộc $\mathbb{N}$) lên W, là một **biểu diễn tham số** (hoặc : **biểu diễn tham số afin**) của W.

◆ **Mệnh đề** Cho W là một kgac của E.

1) Với mọi cơ sở $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ của $\overrightarrow{W}$ và mọi A thuộc W, ánh xạ

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^p &\to W \\ (x_1,\dots,x_p) &\mapsto A + \sum_{i=1}^{p} x_i\overrightarrow{e_i} \end{aligned}$$ là một biểu diễn tham số của W.

Đặc biệt, W có ít nhất một biểu diễn tham số.

2) Với mọi biểu diễn tham số Φ: $\mathbb{R}^p \to W$ của W, ta có $p = \dim(W)$, và tồn tại một cơ sở $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ của $\overrightarrow{W}$ và một điểm A thuộc W sao cho:

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \Phi(x_1,\dots,x_p) = A + \sum_{i=1}^{p} x_i\overrightarrow{e_i}.$$

Nói cách khác, việc cho một biểu diễn tham số của W quy về việc cho một hệ quy chiếu Descartes của W.

Chứng minh:

1) Hiển nhiên.

2) Giả sử $\Phi : \mathbb{R}^p \to W$ là một biểu diễn tham số của W.

Vì $\overrightarrow{\Phi} : \mathbb{R}^p \to \overrightarrow{W}$ là một đẳng cấu kgv, nên ta có: $p = \dim(\overrightarrow{W}) = \dim(W)$.

Ta ký hiệu $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_p})$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$, $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{\varepsilon_i})$ với $i \in \{1,\dots,p\}$, $A = \Phi(0)$.

Khi đó $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ là một cơ sở của $\overrightarrow{W}$, $A \in W$ và với mọi $(x_1,\dots,x_p)$ thuộc $\mathbb{R}^p$:

$$\Phi(x_1,\dots,x_p) = \Phi(0) + \overrightarrow{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\overrightarrow{\varepsilon_i}\right) = \Phi(0) + \sum_{i=1}^{p} x_i\Phi(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = A + \sum_{i=1}^{p} x_i\overrightarrow{e_i}.$$

NHẬN XÉT:

1) Cho D là một đường thẳng afin.

• Với mọi A thuộc D và mọi $\vec{u}$ thuộc $\overrightarrow{D} - \{\vec{0}\}$, ánh xạ $\begin{aligned}\mathbb{R} &\to D \\ t &\mapsto A + t\vec{u}\end{aligned}$ là một biểu diễn tham số của D.

• Với mọi biểu diễn tham số Φ của D, $\Phi(0)$ là một điểm thuộc D và $\vec{\Phi}(1)$ là một vectơ chỉ phương của D.

2) Cho P là một mặt phẳng afin.

• Với mọi A thuộc P và mọi cơ sở $(\vec{u}, \vec{v})$ của $\vec{P}$, ánh xạ $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to P \\ (\alpha,\beta) \mapsto A+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \end{array}$ là một biểu diễn tham số của P.

• Với mọi biểu diễn tham số $\Phi : \mathbb{R}^2 \to P$ của P, $\Phi(0,0)$ là một điểm thuộc P và $(\vec{\Phi}(1,0), \vec{\Phi}(0,1))$ là một họ chỉ phương của P.

3) Cũng như ở 1.2.1, *4)* và 1.2.3, *4)* ta định nghĩa các khái niệm **nửa đường thẳng** và **nửa mặt phẳng**, và các "biểu diễn tham số" của chúng.

3.4.3 Hệ quy chiếu Descartes và ánh xạ afin

♦ **Mệnh đề**

Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$

$\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ là một hệ quy chiếu Descartes của E

$\mathcal{R}' = (\Omega', \mathcal{B}')$ là một hệ quy chiếu Descartes của F

C là cột các tọa độ của $f(\Omega)$ trong $\mathcal{R}'$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\vec{f})$.

Với mọi M thuộc E, nếu ký hiệu X là cột các tọa độ của M trong $\mathcal{R}$, và Y là cột các tọa độ của $f(M)$ trong $\mathcal{R}'$, thì ta có:

$$Y = C + AX.$$

Chứng minh:

Ta có: $f(M) = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})$, từ đó chuyển sang các tọa độ trong $\mathcal{R}'$:

$$Y = C + AX.$$

NHẬN XÉT:

Giả thiết W là một kgac của E, $\overrightarrow{W'}$ là một phần bù của $\vec{W}$ trong E, $A \in W$, $\mathcal{B}_1$ là một cơ sở của $\vec{W}$, $\mathcal{B}_2$ là một cơ sở của $\overrightarrow{W'}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (là một cơ sở của E), $\alpha \in \mathbb{R}$; p, là phép chiếu lên W song song với $\overrightarrow{W'}$, S là phép đối xứng qua W song song với $\overrightarrow{W'}$, a là phép co về trục W, phương $\overrightarrow{W'}$, tỷ số α.

Ta ký hiệu: $P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \alpha\mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix}$.

Khi đó, với mọi M thuộc E, nếu ký hiệu X là cột các tọa độ của M trong $(A, \mathcal{B})$, các cột các tọa độ của p(M), S(M), a(M) trong $(A, \mathcal{B})$ tương ứng là PX, SX, AX.

3.5 Tâm tỷ cự, tính lồi

Trong §3.5 này E, F chỉ những $\mathbb{R}$-kgv hữu hạn chiều.

Việc khảo sát hoàn toàn giống như ở §1.5.

3.5.1 Tâm tỷ cự

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi họ $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$; $A_1,..., A_n \in E$, $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$, là **họ hữu hạn** (hoặc: **hệ**) **điểm có trọng số của** E.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số của E sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Tồn tại một điểm duy nhất G thuộc E sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$; điểm G này được gọi là **tâm tỷ cự** của họ $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ và ký hiệu $G = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ hoặc: $G = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le n}$.

Hơn nữa, với mọi điểm O thuộc E: $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.

♦ **Mệnh đề 2**

Cho $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số của E sao cho :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

G là tâm tỷ cự của họ

$\mathcal{R}$ là một hệ quy chiếu của E

$(x_{i,1},...,x_{i,n})$ là các tọa độ của A_i trong $\mathcal{R}$, $1 \le i \le n$

$(x_{G,1},....,x_{G,n})$ là các tọa độ của G trong $\mathcal{R}$.

Khi đó ta có: $\forall j \in \{1,....,n\},\ x_{G,j} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$.

◆ **Mệnh đề 3** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số của E sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

1) Ta có, với mọi λ thuộc $\mathbb{R}^*$:

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \lambda\alpha_1 \ldots \lambda\alpha_n \end{bmatrix}.$$

2) Với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$ và mọi điểm $A_{n+1},\ldots,A_{n+p}$ thuộc E, ta có:

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n & A_{n+1} \ldots\ldots A_{n+p} \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n & 0 \ \ldots\ldots\ldots \ 0 \end{bmatrix}$$

3) Với mỗi hoán vị σ của $\{1,\ldots,n\}$, ta có:

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 \ldots\ldots A_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_{\sigma(1)} \ldots\ldots A_{\sigma(n)} \\ \alpha_{\sigma(1)} \ldots\ldots \alpha_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

4) Với mọi phân hoạch $\{I_1,\ldots,I_k\}$ của $\{1,\ldots,n\}$ sao cho với mọi j thuộc $\{1,\ldots,k\}$, $\sum_{i \in I_j}^{n} \alpha_i \neq 0$, ta có:

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i \in I_1} & \cdots & \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{i \in I_k} \\ \sum_{i \in I_1} \alpha_i & \cdots & \sum_{i \in I_k} \alpha_i \end{bmatrix}.$$

NHẬN XÉT:

1) Cho $A, B \in E$ sao cho $A \neq B$.

Đường thẳng đi qua A và B là tập hợp các $\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}$ khi t chạy khắp $\mathbb{R}$.

Nửa đường thẳng gốc A và đi qua B là tập hợp các $\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix}$ khi t chạy khắp $\mathbb{R}_+$.

2) Cho $A, B, C \in E$ không thẳng hàng.

Mặt phẳng đi qua A, B, C là tập hợp:

$$\left\{ \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}; \quad (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha+\beta+\gamma = 1 \right\}.$$

Nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng (AB) và đi qua C là tập hợp:

$$\left\{ T_{tc}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}; \quad (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \alpha+\beta+\gamma = 1 \right\}.$$

◆ **Định nghĩa 2** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1,\dots, A_n \in E$. Ta gọi tâm tỷ cự của $(A_i, 1)_{1\le i\le n}$ là **tâm đẳng tỷ cự** (hoặc : **trọng tâm**) của $(A_1,\dots, A_n)$.

Đặc biệt với $(A, B) \in E^2$, tâm đẳng tỷ cự của (A,B) được gọi là **trung điểm** của (A, B); trung điểm I của (A, B) được đặc trưng bởi : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

◆ **Mệnh đề 4** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số của E sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, $G = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$, $f \in \mathrm{Aff}\,(E, F)$. Khi đó:

$$f(G) = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} f(A_1) & \cdots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

NHẬN XÉT:
Ta có thể chứng minh rằng, ngược lại, nếu một ánh xạ $f : E \to F$ "bảo toàn" khái niệm tâm tỷ cự, thì f là ánh xạ afin (xem bài tập 3.5.2).

Bài tập

◊ **3.5.1** **Hàm vectơ Leibniz**

Cho $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ là một họ hữu hạn điểm có trọng số của E. Ta gọi ánh xạ $\phi : E \to E$ xác định bởi:

$$\forall M \in E,\quad \phi(M) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}$$

là **hàm vectơ Leibniz**.

Chứng minh :

a) Nếu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, thì, với mọi M thuộc E, $\phi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$, nếu ký hiệu $G = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{pmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}_{1\le i\le n}$.

b) Nếu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$, thì ϕ là hằng.

◊ **3.5.2** Cho ánh xạ $f : E \to F$. Chứng minh rằng f là ánh xạ afin khi và chỉ khi f bảo toàn khái niệm tâm tỷ cự, tức là:

Với mọi họ hữu hạn $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ điểm có trọng số của E sao cho $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, ta có:

$$f\left(\mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{pmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}_{1\le i\le n}\right) = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{pmatrix} f(A_i) \\ \alpha_i \end{pmatrix}_{1\le i\le n}.$$

◊ **3.5.3** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1,\dots,A_n \in E$. Biện luận về sự tồn tại và tính duy nhất của $(M_1,\dots,M_n) \in E^n$ sao cho, với mọi i thuộc $\{1,\dots,n\}$, A_i là trung điểm của M_iM_{i+1}, trong đó ta ký hiệu $M_{n+1} = M_1$.

◊ **3.5.4*** Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, E)$ sao cho, với mọi M thuộc E, $f^2(M)$ là trung điểm của $(M, f(M))$. Chứng minh rằng f là một phép co.

◊ **3.5.5** Cho $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ là một họ hữu hạn điểm thuộc E. Chứng minh:

$$<\{A_i;\ 1 \le i \le n\}> = \left\{ \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{pmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}_{1 \le i \le n} ; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\},$$

trong đó $<\{A_i;\ 1 \le i \le n\}>$ chỉ kgac sinh bởi $\{A_i;\ 1 \le i \le n\}$, xem bài tập 3.2.6.

◊ **3.5.6 Tọa độ tỷ cự**

Cho $n = \dim(E) \ge 1$ và $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ là một họ độc lập afin (xem bài tập 3.2.7) được tạo thành từ $n + 1$ điểm.

Chứng minh, với mọi điểm M thuộc E, tồn tại $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ duy nhất sao cho:

$$M = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}_{1 \le i \le n+1} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1,$$

và ánh xạ từ E vào $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$ được xác định như thế là một song ánh.

Với các ký hiệu ấy, ta gọi mỗi họ $(\lambda x_i)_{1 \le i \le n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ là các **tọa độ tỷ cự của M trong** $(A_i)_{1 \le i \le n+1}$

Chẳng hạn, trong mặt phẳng afin Euclide, nếu A, B, C là ba điểm từng cặp phân biệt, những (hoặc: các) tọa độ tỷ cự trong (A, B, C) của G (trọng tâm), I (tâm đường tròn nội tiếp), I_A, I_B, I_C (tâm các đường tròn bàng tiếp), H (trực tâm), O (tâm đường tròn ngoại tiếp) là:

G: $(1, 1, 1)$.

I: (a, b, c), I_A: $(-a, b, c)$, I_B: $(a, -b, c)$, I_C: $(a, b, -c)$.

H: $(\tan\hat{A}, \tan\hat{B}, \tan\hat{C})$

O: $(\tan\hat{B} + \tan\hat{C},\ \tan\hat{C} + \tan\hat{A},\ \tan\hat{A} + \tan\hat{B})$,

xem các bài tập 2.2.10 đến 2.2.12.

3.5.2 Tính lồi

♦ **Định nghĩa 1** Cho $A, B \in E$. Đoạn thẳng có các mút A, B và ký hiệu là $[AB]$ (hoặc : AB), là bộ phận của E xác định bởi:

$$[AB] = \left\{ \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{bmatrix};\ t \in [0;1] \right\}.$$

NHẬN XÉT:

1) $[AA] = \{A\}$.

2) Nếu $A \ne B$, thì $[AB]$ bao hàm trong đường thẳng (AB).

3) $\forall A, B, C, D \in E$, $[AB] = [CD] \Leftrightarrow \left(\begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} A = D \\ B = C \end{cases} \right)$.

♦ **Định nghĩa 2** Một bộ phận Γ của E được gọi là **lồi** khi và chỉ khi:

$$\forall (A, B) \in \Gamma^2,\ \ [AB] \subset \Gamma.$$

◆ **Mệnh đề 1** Với mọi họ $(\Gamma_i)_{i\in I}$ những bộ phận lồi của E, $\bigcap_{i\in I}\Gamma_i$ là một bộ phận lồi của E.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$.

1) Với mọi bộ phận lồi của Γ của E, $f(\Gamma)$ là một bộ phận lồi của F.

2) Với mọi bộ phận lồi của Γ' của F, $f^{-1}(\Gamma')$ là một bộ phận lồi của E.

Bài tập

◊ **3.5.7* Bao lồi của một bộ phận của** E

Với mọi bộ phận X của E, **bao lồi của** X, và ký hiệu ở đây là conv(X), là giao của tất cả các bộ phận lồi của E có chứa X.

a) Chứng tỏ rằng, với mọi bộ phận X của E, conv(X) là bộ phận lồi bé nhất (theo nghĩa bao hàm) của E có chứa X, và rằng $\mathrm{conv}(X) \subset \langle X \rangle$, trong đó $\langle X \rangle$ chỉ kgac sinh ra bởi X (xem bài tập 3.2.6).

b) Chứng minh rằng với mọi bộ phận X, Y của E:

1) $X \subset Y \Rightarrow \mathrm{conv}(X) \subset \mathrm{conv}(Y)$

2) X lồi khi và chỉ khi $\mathrm{conv}(X) = X$

3) $\mathrm{conv}(\mathrm{conv}(X)) = \mathrm{conv}(X)$.

c) Cho $X \in \mathfrak{P}(E) - \{\varnothing\}$. Chứng minh rằng conv($X$) là tập hợp các $\mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le p}$, với $p \in \mathbb{N}^*$, $A_1,\ldots,A_p \in X$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ và $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 1$.

d) Cho $f \in \mathrm{Aff}(E, F)$. Chứng minh :

1) $\forall X \in \mathfrak{P}(E)$, $\quad \mathrm{conv}(f(X)) = f(\mathrm{conv}(X))$

2) $\forall X' \in \mathfrak{P}(E)$, $\quad \mathrm{conv}(f^{-1}(X')) \subset f^{-1}(\mathrm{conv}(X'))$,

và cho một ví dụ trong đó bao hàm thức sau cùng này là chặt.

◊ **3.5.8 Điểm cực biên của hình lồi**

Cho C là một bộ phận lồi của E và $M \in C$.

Ta nói rằng M là một **điểm cực biên** của C khi và chỉ khi:

$$\forall (A, B) \in C^2,\quad (M \in [AB] \Rightarrow (M = A \text{ hoặc } M = B)).$$

a) Những điểm cực biên của các hình lồi sau đây của $\mathbb{R}^2$ là những điểm nào:

1) một đoạn thẳng với các đầu mút phân biệt?

2) một đĩa đóng?

3) một đĩa mở?

4) một hình vuông (miền trong và bờ)?

b)* Cho X là một bộ phận giới nội của E. Chứng minh rằng conv(X) bằng bao lồi (xem bài tập 3.5.7) của tập hợp các điểm cực biên của nó.

Chương 4

Đường cong trên mặt phẳng

Việc khảo sát này được tiến hành trong mặt phẳng afin Euclide, ký hiệu là $\mathcal{E}_2$, được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ khi cần; tích vô hướng được ký hiệu là (.|.) hoặc . ; chuẩn liên kết được ký hiệu là $\|.\|$, và khoảng cách của hai điểm A, B được ký hiệu là $d(A, B)$ hoặc $\|\overrightarrow{AB}\|$ hoặc AB.

I chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng cũng không suy biến thành một điểm (việc khảo sát cũng áp dụng được cho trường hợp một hợp những khoảng như thế), và k chỉ một số nguyên ≥ 1 hoặc $+\infty$.

Như thường lệ, ta đồng nhất $\mathcal{E}_2$ với $\mathbb{R}^2$.

4.1 Cung tham số hóa

4.1.1 Đại cương

1) Định nghĩa

◆ **Định nghĩa** Ta gọi mọi ánh xạ $f : I \underset{t \mapsto f(t)}{\rightarrow} \mathcal{E}_2$ thuộc lớp C^k là **cung tham số hóa** (thuộc lớp C^k).

Ta có thể ký hiệu $f(t)$ hoặc $\overrightarrow{f(t)}$ tùy theo $f(t)$ được xét như một điểm hoặc một vectơ.

2) Minh họa động học

Một **chuyển động điểm** là một cung tham số hóa trong đó biến số t là thời gian.

Trong trường hợp đó $\overrightarrow{f'(t)}$ được gọi là **vận tốc**, và $\overrightarrow{f''(t)}$ được gọi là **gia tốc** tại thời điểm t của điểm chuyển động. Một chuyển động điểm $f : I \underset{t \mapsto f(t)}{\rightarrow} \mathcal{E}_2$ được gọi là **đều** khi và chỉ khi ánh xạ $f : I \underset{t \mapsto \|\overrightarrow{f'(t)}\|}{\rightarrow} \mathcal{E}_2$ là hằng.

Một chuyển động điểm $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ được gọi là :

- **thẳng** khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng afin D của $\mathcal{E}_2$ sao cho :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \in D$$

- **có gia tốc hướng tâm** khi và chỉ khi $k \geq 2$ và tồn tại một điểm A thuộc $\mathcal{E}_2$ sao cho, với mọi t thuộc I, họ $(\overrightarrow{Af(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$ phụ thuộc tuyến tính.

3) Phép đạo hàm các hàm số

♦ Mệnh đề

1) Nếu $f, g : I \to \mathcal{E}_2$ thuộc lớp C^1 trên I, thì $\det(f, g) : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \det(f(t), g(t)) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I và :

$$(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

2) Nếu $f, g : I \to \mathcal{E}_2$ thuộc lớp C^1 trên I, thì $(f \mid g) : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (f(t) \mid g(t)) \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I và :

$$(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g').$$

3) Nếu $f : I \to \mathcal{E}_2$ thuộc lớp C^1 trên I và nếu $(\forall t \in I, f(t) \neq 0)$, thì $\| f \| : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \| f(t) \| \end{array}$ thuộc lớp C^1 trên I và :

$$\| f \|' = \frac{(f' \mid f)}{\| f \|}.$$

Chứng minh :

(Xem thêm Tập 3, 2.2.1).

Vì f, g thuộc lớp C^1 trên I, nên f, g có một khai triển hữu hạn tới cấp 1 tại mọi điểm t thuộc I :

$$\begin{cases} f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \underset{h \to 0}{o}(h) \\ g(t+h) = g(t) + hg'(t) + \underset{h \to 0}{o}(h). \end{cases}$$

1) Ta có, với mọi t cố định trong I:

$$\begin{aligned} (\det(f, g))(t+h) &= \det(f(t+h), g(t+h)) \\ &= \det(f(t) + hf'(t) + o(h), g(t) + hg'(t) + o(h)) \\ &= \det(f(t), g(t)) + h(\det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))) + o(h), \end{aligned}$$

vậy $\frac{1}{h}((\det(f, g))(t+h) - (\det(f, g))(t)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$.

Điều này chứng tỏ rằng $\det(f, g)$ khả vi trên I, và rằng:

$$(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

Hơn nữa, vì f, g, f', g' liên tục trên I và vì $\det: \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}$ là liên tục trên $\mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2$, nên ta kết luận rằng $\det(f, g)$ thuộc lớp C^1 trên I.

2) Lập luận tương tự như đoạn trên.

3) Vì : $\forall t \in I$, $\| f(t) \| = (f(t) \mid f(t))^{\frac{1}{2}}$ và vì $\forall t \in I, (f(t) \mid f(t)) > 0$, nên chuyển qua hàm hợp, $\| f \|$ khả vi trên I, và, với mọi t thuộc I :

$$\| f \|'(t) = \frac{1}{2}((f'(t) \mid f(t)) + (f(t) \mid f'(t)))(f(t) \mid f(t))^{-\frac{1}{2}} = \frac{(f'(t) \mid f(t))}{\| f(t) \|}.$$

4) Biểu diễn tham số

◆ **Định nghĩa 1** Cho $f : I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa. Ta gọi bộ phận $\{f(t);\ t \in I\}$ của $\mathcal{E}_2$ là **quỹ đạo** của f.
Ta cũng nói rằng $\{f(t);\ t \in I\}$ là một **đường cong** nhận f làm **biểu diễn tham số** (viết tắt: BDTS).

◆ **Định nghĩa 2** Cho $f : I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa (thuộc lớp C^k).

1) **Phép đổi tham số (thuộc lớp C^k)** của f là mọi ánh xạ $\varphi : J \to I$, trong đó J là một khoảng của $\mathbb{R}$, sao cho :

$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } J \\ \varphi \text{ là song ánh} \\ \varphi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } I. \end{cases}$$

2) **Biểu diễn tham số chấp nhận được (thuộc lớp C^k)** của f là mọi ánh xạ $g : J \to \mathcal{E}_2$, trong đó J là một khoảng $\mathbb{R}$, sao cho tồn tại một phép đổi tham số φ (thuộc lớp C^k) của f sao cho $g = f \circ \varphi$.

Theo Tập 1, 5. 3. 1, Định lý 4, một ánh xạ $\varphi : J \to I$ là một phép đổi tham số (thuộc lớp C^k) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^k \text{ trên } J \\ \varphi' > 0 \text{ hoặc } \varphi' < 0 \\ \varphi(J) = I \end{cases}$$

NHẬN XÉT :

1) Nếu $f : I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa (thuộc lớp C^k), và nếu $\varphi : J \to I$ là một phép đổi tham số (thuộc lớp C^k), thì các cung tham số hóa f và $f \circ \varphi$ có cùng quỹ đạo.

2) Ta nói rằng hai cung tham số hóa (thuộc lớp C^k) f, g là **C^k - tương đương** khi và chỉ khi tồn tại một phép đổi tham số (thuộc lớp C^k) φ thỏa mãn $g = f \circ \varphi$.
Quan hệ "C^k - tương đương với" trong tập hợp các cung tham số hóa thuộc lớp C^k là một quan hệ tương đương, và ta có thể coi một đường cong thuộc lớp C^k trên mặt phẳng thực ra là một lớp tương đương đối với quan hệ tương đương ấy.

3) Với các ký hiệu của Định nghĩa trên, φ hoặc tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt. Nếu φ tăng nghiêm ngặt (tương ứng : giảm nghiêm ngặt), thì ta nói rằng các cung tham số hóa f và $f \circ \varphi$ là **cùng hướng** (tương ứng : **ngược hướng**).

Cho φ và ψ là hai phép đổi tham số (thuộc lớp C^k) của f. Ta nói φ và ψ **là cùng hướng** khi và chỉ khi φ và ψ cả hai đều cùng tăng hoặc đều cùng giảm, ta nói rằng φ và ψ là **ngược hướng** khi và chỉ khi một hàm thì tăng và một hàm kia thì giảm.

Như vậy, tập hợp các phép đổi tham số (thuộc lớp C^k) của f được phân hoạch thành hai lớp; **định hướng** cho f là chọn một trong hai tập hợp đó.

Như thế ta cũng có thể coi như một đường cong (thuộc lớp C^k) có hai hướng. ■

4.1.2 Khảo sát một cung tham số hóa trong lân cận một điểm

1) Tiếp tuyến tại một điểm

◆ **Định nghĩa 1** Cho $\begin{array}{l} f: I \to \varepsilon_2 \\ t \mapsto M(t)=f(t) \end{array}$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó, $M(t)$ là một điểm của Γ.

Ta nói rằng $M(t)$ là một điểm **chính quy** của Γ khi và chỉ khi $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$. Nếu f là thuộc lớp C^2, ta nói rằng $M(t)$ là một điểm **song chính quy** của Γ khi và chỉ khi họ $(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$ độc lập.

Một điểm không chính quy cũng được gọi là **điểm dừng.**

NHẬN XÉT :

Các khái niệm về điểm chính quy và điểm song chính quy là bất biến qua phép đổi tham số.

Thật vậy, giả sử $\varphi: J \to I$ là một phép đổi tham số (thuộc lớp C^1 hoặc lớp C^2) và $g = f\circ\varphi$; với mọi u thuộc J, ta có:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{g'(u)} = \varphi'(u)\overrightarrow{f'(\varphi(u))} \\ \overrightarrow{g''(u)} = \varphi'^2(u)\overrightarrow{f''(\varphi(u))} + \varphi''(u)\overrightarrow{f'(\varphi(u))} \end{array}\right| ,$$

từ đó : • $\overrightarrow{g'(u)} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{f'(\varphi(u))} \neq \vec{0}$

• $\det(\overrightarrow{g'(u)}, \overrightarrow{g''(u)}) = \varphi'^3(u)\det(\overrightarrow{f'(\varphi(u))}, \overrightarrow{f''(\varphi(u))})$,

vậy : $(\overrightarrow{g'(u)}, \overrightarrow{g''(u)})$ độc lập $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{f'(\varphi(u))}, \overrightarrow{f''(\varphi(u))})$ độc lập.

◆ **Định nghĩa 2** Ta nói rằng một cung tham số hóa $\begin{array}{l} f: I \to \varepsilon_2 \\ t \to M(t)=f(t) \end{array}$ thuộc lớp C^1 (tương ứng : C^2) là **chính quy** (tương ứng : **song chính quy**) khi và chỉ khi, với mọi t thuộc I, $M(t)$ là một điểm chính quy (tương ứng : song chính quy) đối với f.

NHẬN XÉT :

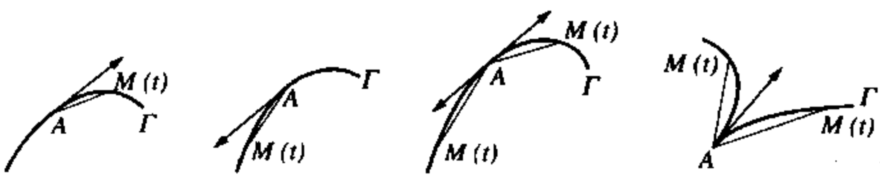
1) Nếu f là một cung tham số hóa chính quy, thì, với mọi phép đổi tham số φ (thuộc lớp C^1), $f \circ \varphi$ là một cung tham số hóa chính quy. Như vậy ta có thể nói rằng một đường cong Γ (thuộc lớp C^1) là **chính quy** khi và chỉ khi tồn tại một BDTS chính quy của Γ.

2) Nếu f là một cung tham số hóa song chính quy, thì, với mọi phép đổi tham số φ (thuộc lớp C^2), $f \circ \varphi$ là một cung tham số hóa song chính quy. Như vậy ta có thể nói rằng một đường cong Γ (thuộc lớp C^2) là **song chính quy** khi và chỉ khi tồn tại một BDTS song chính quy của Γ.

◆ **Định nghĩa 3** Cho $\begin{array}{l} f: I \to \mathcal{E}_2 \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của f, $t_0 \in I$, $A = M(t_0)$, cũng ký hiệu là $A(t_0)$.

1) Ta nói rằng Γ **nhận một bán tiếp tuyến tại** $A(t_o^+)$ (tương ứng: $A(t_o^-)$) khi và chỉ khi vectơ đơn vị $\dfrac{\overrightarrow{AM(t)}}{\|\overrightarrow{AM(t)}\|}$ (nếu tồn tại) có giới hạn khi t tiến đến t_o^+ (tương ứng : t_0^-). Trong trường hợp đó, **nửa tiếp tuyến** tại $A(t_0^+)$ (tương ứng : $A(t_0^-)$) với Γ là nửa đường thẳng có gốc A được định phương và định hướng bởi giới hạn đó.

2) Ta nói rằng Γ nhận một **tiếp tuyến** tại $A(t_0)$ khi và chỉ khi Γ nhận hai bán tiếp tuyến bằng nhau hay đối nhau tại $A(t_0^+)$ và $A(t_0^-)$. Trong trường hợp đó, ta gọi đường thẳng đi qua A và mang hai nửa tiếp tuyến là **tiếp tuyến** với Γ tại $A(t_0)$.



NHẬN XÉT :

Sự tồn tại của một bán tiếp tuyến hoặc một tiếp tuyến tại một điểm của Γ là bất biến đối với phép đổi tham số.

◆ **Định lý** Cho $f: I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó. Tại mọi điểm chính quy $A(t)$ của Γ, Γ nhận một tiếp tuyến và tiếp tuyến này được định phương bởi $\overrightarrow{f'(t)}$.

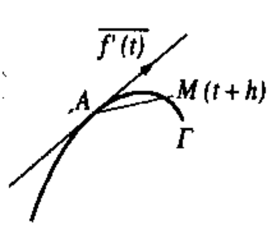
Chứng minh:

Khi ký hiệu $M(t+h)$ là điểm chạy của Γ, ta có:

$$\overrightarrow{A(t)M(t+h)} = \overrightarrow{f(t+h)} - \overrightarrow{f(t)} = h\,\overrightarrow{f'(t)} \underset{h\to 0}{+} \overrightarrow{o(h)}.$$

Vì $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$ tại lân cận của 0 (đối với biến số h), nên $\overrightarrow{hf'(t)} + \overrightarrow{o(h)}$ không bằng không, và vì vậy:

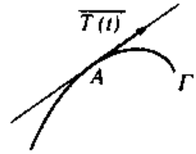
$$\frac{\overrightarrow{A(t)M(t+h)}}{\|\overrightarrow{A(t)M(t+h)}\|} = \frac{h\,\overrightarrow{f'(t)} + \overrightarrow{o(h)}}{\|h\overrightarrow{f'(t)} + \overrightarrow{o(h)}\|} \underset{h\to 0^\pm}{\longrightarrow} \pm\frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}.$$



Điều này chứng tỏ rằng tại $A(t)$ Γ nhận một tiếp tuyến và tiếp tuyến này được định phương bởi $\overrightarrow{f'(t)}$.

◆ **Định nghĩa 4** Cho $f : I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó, $A(t)$ là một điểm chính quy của Γ. **Vectơ tiếp tuyến đơn vị (định hướng)** của Γ tại $A(t)$ là vectơ, ký hiệu là $\overrightarrow{T(t)}$ (hoặc : $\vec{T}$), xác định bởi :

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}.$$



◆ **Mệnh đề 1** Cho $f : I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó, (x, y) là các thành phần của f trong một hệ quy chiếu Descartes trực chuẩn $\mathcal{R} = (0; \vec{i}, \vec{j})$ của $\mathcal{E}_2$: $\forall t \in I, f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Cho $M(t)$ là một điểm chính quy của Γ, $T(t)$ là tiếp tuyến với Γ tại $M(t)$.

- Nếu $x'(t) \neq 0$, thì $T(t)$ có hệ tử chỉ phương là $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.
- Nếu $x'(t) = 0$ (và do đó $y'(t) \neq 0$), thì $T(t)$ song song với $(y'y)$.

Chứng minh:

Phép chứng minh là dễ, vì theo định lý trên đây $T(t)$ được định phương bởi $\overrightarrow{f(t)}$ và

$$\overrightarrow{f'(t)} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}. \qquad \blacksquare$$

Ta sẽ tổng quát hóa định lý trên đây.

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f: I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^k, Γ **là quỹ đạo của nó,** $t \in I$, $A(t) = f(t)$.

Nếu ít nhất một trong các vectơ đạo hàm liên tiếp $f'(t), ..., f^{(k)}(t)$ **không bằng không, thì tại** $A(t)$ Γ **nhận một tiếp tuyến, và tiếp tuyến này được định phương bởi vectơ đạo hàm kế tiếp khác không đầu tiên.**

Chứng minh:

Vì f thuộc lớp C^k tại lân cận t, nên ta có thể áp dụng định lý Taylor-Young (xem Tập 2, 8.3.2, Định lý) cho từng thành phần của f, từ đó:

$$f(t+h) = f(t) + \frac{h}{1!}\overrightarrow{f'(t)} + \ldots + \frac{h^k}{k!}\overrightarrow{f^{(k)}(t)} + \underset{h\to 0}{\overrightarrow{o(h^k)}}.$$

Ta ký hiệu p là số nguyên bé nhất ≥ 1 sao cho $\overrightarrow{f^{(p)}(t)} \neq \vec{0}$. Vậy ta có (nếu $k \geq p$):

$$f(t+h) - f(t) = \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{f^{(p)}(t)} + \ldots + \frac{h^k}{k!}\overrightarrow{f^{(k)}(t)} + \underset{h\to 0}{\overrightarrow{o(h^k)}},$$

từ đó, cũng tương tự như trong phép chứng minh định lý trên đây (và tùy theo tính chẵn lẻ của p và dấu của h):

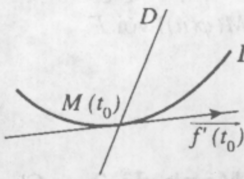
$$\frac{\overrightarrow{A(t)M(t+h)}}{\|\overrightarrow{A(t)M(t+h)}\|} \xrightarrow[h\to 0^{\pm}]{} \pm \frac{\overrightarrow{f^{(p)}(t)}}{\|\overrightarrow{f^{(p)}(t)}\|}.$$

Điều này chứng tỏ tại $A(t)$ Γ nhận một tiếp tuyến, và tiếp tuyến này được định phương bởi $\overrightarrow{f^{(p)}(t)}$.

2) Dáng điệu của đường cong tại lân cận một điểm

♦ **Mệnh đề 1** Cho $f: I \to \varepsilon_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó, $M(t)$ là một điểm chính quy của Γ, D là một đường thẳng đi qua $M(t_0)$ và không được định phương bởi $\overrightarrow{f'(t_0)}$. Khi đó, Γ **xuyên qua** D tại $M(t_0)$, tức là tại lân cận của $M(t_0)$, với $t < t_0$ và t gần t_0, Γ nằm hoàn toàn về một phía đối với D, và với $t > t_0$ và t gần t_0, Γ nằm hoàn toàn về phía kia đối với D.

Chứng minh:



Ta ký hiệu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của D.

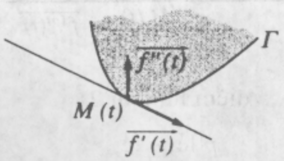
Với h trong lân cận của 0, ta có:

$$\det(\vec{u}, \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}) = \det(\vec{u}, h\overrightarrow{f'(t_0)} + \overrightarrow{o(h)})$$
$$= h\det(\vec{u}, \overrightarrow{f'(t_0)}) + o(h).$$

Vì $\det(\vec{u}, \overrightarrow{f'(t_0)}) \neq 0$ nên khi h tiến đến 0^+ (tương ứng : 0^-), $\det(\vec{u}, \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)})$ không bằng không và cùng dấu (tương ứng: trái dấu) với $\det(\vec{u}, \overrightarrow{f'(t_o)})$, vậy Γ nằm về một phía đối với D với $h < 0$ và gần 0, và về phía kia đối với D với $h > 0$ và gần 0.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 2** Cho $f: I \to \varepsilon_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^2, Γ là quỹ đạo của nó, $M(t)$ là một điểm song chính quy của Γ. Tại lân cận t, Γ thuộc nửa mặt phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến với Γ tại $M(t)$ và nằm về phía của $\overrightarrow{f''(t)}$. Ta nói rằng Γ **quay phía lõm của nó theo hướng** $\overrightarrow{f''(t)}$.

Chứng minh :



Ta có, với h trong lân cận của 0:

$$f(t+h) - f(t) = h\overrightarrow{f'(t)} + \frac{h^2}{2}\overrightarrow{f''(t)} + \underset{h\to 0}{\overrightarrow{o}}(h^2),$$

từ đó suy ra các tọa độ $(X(h), Y(h))$ của $M(t+h)$ trong hệ quy chiếu Descartes $(M(t)\,;\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$:

$$\begin{cases} X(h) = h + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \\ Y(h) = \dfrac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \end{cases},$$

điều này chứng tỏ rằng, với h gần 0, $M(t+h)$ thuộc nửa mặt phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến với Γ tại $M(t)$ và về phía $\overrightarrow{f''(t)}$.

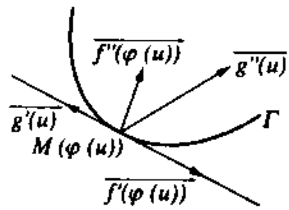
NHẬN XÉT :

Tính chất trên đây là bất biến đối với phép đổi tham số thuộc lớp C^2. Thật vậy nếu $\varphi : J \to I$ là một phép đổi tham số thuộc lớp C^2, thì khi ký hiệu $g = f \circ \varphi$ (xem thêm 4.1.2, *I*), Nhận xét), với mọi u thuộc J, ta có:

$$\overrightarrow{g'(u)} = \varphi'(u)\overrightarrow{f'(\varphi(u))}$$

$$\overrightarrow{g''(u)} = \varphi'^2(u)\overrightarrow{f''(\varphi(u))} + \varphi''(u)\overrightarrow{f'(\varphi(u))}\,,$$

vậy $\overrightarrow{g''(u)}$ và $\overrightarrow{f''(\varphi(u))}$ đều thuộc cùng nửa mặt phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến tại $M(\varphi(u))$ với Γ.



♦ **Mệnh đề 3** Cho $f: I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa thuộc lớp thích hợp, Γ là quỹ đạo của nó, $t \in I$; ta ký hiệu:

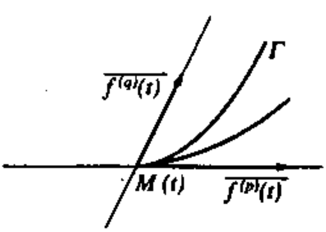
p là số nguyên nhỏ nhất ≥ 1 sao cho $\overrightarrow{f^{(p)}(t)} \neq \overrightarrow{0}$

q là số nguyên nhỏ nhất $> p$ sao cho $(\overrightarrow{f^{(p)}(t)}, \overrightarrow{f^{(q)}(t)})$ độc lập

(ta giả thiết p và q đều tồn tại).

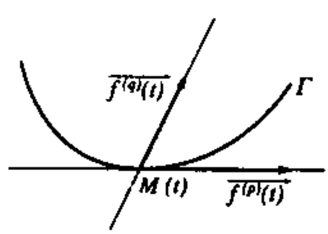
Trong lân cận của $M(t)$, Γ có dáng điệu như sau, tùy theo tính chẵn lẻ của p và q :

p chẵn, q chẵn



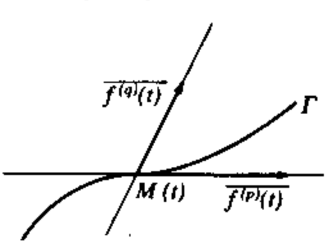
điểm lùi loại 2

p lẻ, q chẵn



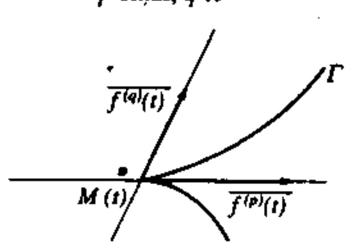
điểm có dáng điệu bình thường

p lẻ, q lẻ



điểm uốn

p chẵn, q lẻ



điểm lùi loại 1

Chứng minh :

Theo công thức Taylor-Young: $f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^{q} \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{f^{(k)}(t)} + \underset{h \to 0}{\overrightarrow{o\ (h^{(q)})}}$.

Ta ký hiệu, với $k \in \{1, ..., q\}$, $\overrightarrow{V_k} = \overrightarrow{f^{(k)}(t)}$. Theo giả thiết tồn tại $\lambda_{p+1}, ... \lambda_{q-1} \in \mathbb{R}$ sao cho : $\forall k \in \{p+1, ..., q-1\}$, $\overrightarrow{V_k} = \lambda_k \overrightarrow{V_p}$.

Vậy ta được:

$$f(t+h) - f(t) = \left(\frac{h^p}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + ... + \lambda_{q-1} \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\right)\overrightarrow{V_p} + \frac{h^q}{q!}\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{o(h^q)}.$$

Trong hệ quy chiếu Descartes $(M(t) ; \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$, nếu ký hiệu (X, Y) là các tọa độ của một điểm chạy của Γ, ta có:

$$\begin{cases} X(t+h) = h^p\left(\frac{1}{p!} + \frac{\lambda_{p+1}}{(p+1)!}h + ... + \frac{\lambda_{q-1}}{(q-1)!}h^{q-p-1}\right) + o(h^q) \\ Y(t+h) = \frac{h^q}{q!} + o(h^q). \end{cases}$$

Nếu p và q chẵn (chẳng hạn), thì, tại lân cận của 0, các tọa độ $X(t+h)$, $Y(t+h)$ của $M(t+h)$ đều > 0, và lần lượt tương đương với $\frac{h^p}{p!}$ và $\frac{h^q}{q!}$, từ đó có dáng điệu đã nói đến (điểm lùi loại hai).

Cũng lập luận tương tự cho ba trường hợp kia. ■

NHẬN XÉT :

1) Thay cho việc tính các đạo hàm liên tiếp của f tại t, ta có thể dùng các khai triển hữu hạn (xem Ví dụ 2).

2) Trong trường hợp điểm lùi loại hai, ta cần phân biệt hai nhánh của Γ, tức là xác định nhánh nào tương ứng với $h \to 0^+$ và nhánh nào tương ứng với $h \to 0^-$ (xem Ví dụ 3).

3) Nếu $\overrightarrow{f'(t)} \neq \overrightarrow{0}$ và nếu $M(t)$ là một điểm uốn của Γ, thì $(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$ phụ thuộc.

Như thế trong thực hành ta có thể tìm những điểm uốn của đường cong Γ có BDTS $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ trong số các điểm thỏa mãn phương trình:

$$x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t) = 0.$$

Trong các điểm ấy, những điểm nào ứng p và q đều lẻ là điểm uốn.

VÍ DỤ:

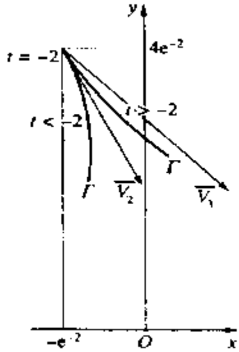
1) Chứng tỏ rằng đường cong Γ với biểu diễn tham số $\begin{cases} x = (t+1)e^t \\ y = t^2 e^t \end{cases}$ có một và chỉ một điểm không chính quy, và vẽ dáng điệu của Γ tại lân cận của điểm ấy.

Các ánh xạ x, y thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$ và :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = (t+2)e^t \\ y'(t) = (t^2 + 2t)e^t. \end{cases}$$

Như vậy với mọi t thuộc $\mathbb{R}$ ta có: $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$

Như vậy, Γ có một và chỉ một điểm không chính quy, ứng với $t = -2$, và có các tọa độ là $(-e^{-2}, 4e^{-2})$.



Ta được, với mọi t thuộc $\mathbb{R}$, $\begin{cases} x''(t) = (t+3)e^t \\ y''(t) = (t^2+4t+2)e^t \end{cases}$,

và $\begin{cases} x^{(3)}(t) = (t+4)e^t \\ y^{(3)}(t) = (t^2+6t+6)e^t \end{cases}$, từ đó, nếu ký hiệu

$\overrightarrow{V_k} = \overrightarrow{f^{(k)}(-2)}$ với $k \in \{1, 2, 3\}$, thì các tọa độ

của $\overrightarrow{V_k}$ trong $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$:

$$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} e^{-2} \\ -2e^{-2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix} 2e^{-2} \\ -2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Vì $\overrightarrow{V_2} \neq \vec{0}$ và $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ độc lập, nên với các ký hiệu trong Mệnh đề 3, ta có $p = 2$ và $q = 3$, và như thế điểm $M(-2)$ của Γ là một điểm lùi loại một ; tiếp tuyến tại $M(-2)$ với Γ được định phương bởi $\overrightarrow{V_2}$, mà $\overrightarrow{V_2}$, thì cộng tuyến với $\vec{i} - 2\vec{j}$.

2) Chứng minh rằng đường cong Γ có biểu diễn tham số $\left(x = \dfrac{4t-3}{t^2+1},\ y = \dfrac{2t-1}{t^2+1} \right)$ có một và chỉ một điểm không chính quy, và vẽ dáng điệu của Γ tại lân cận của điểm ấy.

Các ánh xạ x, y thuộc C^∞ trên $\mathbb{R}$ và:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \frac{-4t^2+6t+4}{(t^2+1)^2}, \quad y'(t) = \frac{-2t^2+2t+4}{(t^2+2)^2}.$$

Như vậy ta có, với mọi t thuộc $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy Γ có một và chỉ một điểm không chính quy, ứng với $t = 2$ và với các tọa độ $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

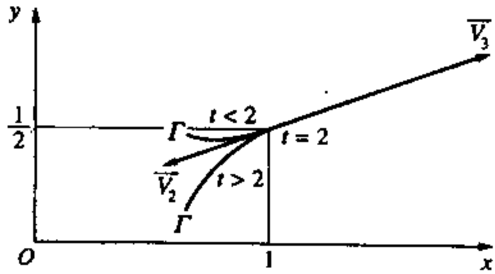
Ta sử dụng ở đây các khai triển hữu hạn tại $t = 2$; ta ký hiệu $h = t - 2$, $h \underset{t \to 2}{\longrightarrow} 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4t-3}{t^2-1} = \frac{5+4h}{5+4h+h^2} = 1 - \frac{h^2}{5+4h+h^2} \\ &= 1 - \frac{h^2}{5}\left(1 + \frac{4}{5}h + \frac{1}{5}h^2\right)^{-1} = 1 - \frac{h^2}{5}\left(1 - \frac{4}{5}h + o(h)\right) \\ &= 1 - \frac{h^2}{5} + \frac{4h^3}{25} + o(h^3), \\ y(t) &= \frac{2t-1}{t^2+2} = \frac{3+2h}{6+4h+h^2} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{2(6+4h+h^2)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12}\left(1 + \frac{2}{3}h + \frac{1}{6}h^2\right)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12}\left(1 - \frac{2}{3}h + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{18} + o(h^3). \end{aligned}$$

Do tính duy nhất của $KTHH_3(0)$ của $h \mapsto (x(2+h), y(2+h))$, sau khi đồng nhất với công thức Taylor - Young ta được :

$$\vec{V_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V_2}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \vec{V_3}\begin{pmatrix} \dfrac{24}{25} \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vì $\overrightarrow{V_2} \neq \vec{0}$ và $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ độc lập, nên ta có $p = 2$ và $q = 3$, vậy điểm $M(2)$ của Γ là một điểm lùi loại một.



3) Vẽ dáng điệu của đường cong Γ có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = t^4 - t^3 - t^2 \\ y = t^4 + t^3 + t^2 \end{cases}$ tại lân cận của điểm ứng với tham số $t = 0$.

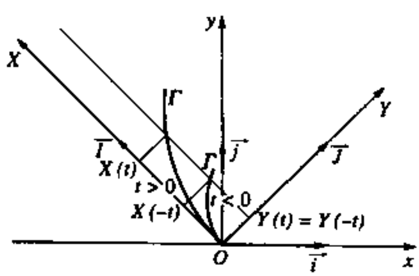
Ta có: $x(t) = -t^2 - t^3 + t^4 + o(t^4)$, $y(t) = t^2 + t^3 + t^4 + o(t^4)$,

do đó $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_4}\begin{pmatrix}24\\24\end{pmatrix}$, và vì thế $p = 2$ và $q = 4$.

Vậy điểm O, ứng với tham số $t = 0$, là một điểm lùi loại hai; tiếp tuyến với Γ tại O được định phương bởi $\overrightarrow{V_2}$.

Trong hệ quy chiếu Descartes $\mathcal{R}' = (O;\vec{I},\vec{J})$, trong đó $\vec{I} = -\vec{i} + \vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_2}$ và $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j} = \frac{1}{24}\overrightarrow{V_4}$, Γ có BDTS : $\begin{cases} X(t) = t^2 + t^3 \\ Y(t) = t^4 \end{cases}$

Một đường song song với $X'X$ cắt Γ tại hai điểm ứng với các trị đối nhau, t, $-t$, của tham số và (nếu $t > 0$):
$X(t) = t^2 + t^3 > t^2 - t^3 = X(-t)$.
Điều này chứng tỏ rằng cung của Γ ứng với $t \to 0^+$ ở bên trái cung ứng với $t \to 0^-$, trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, điều này cho phép ta phân biệt hai nhánh của Γ.



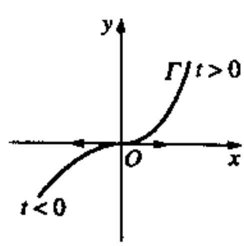
4) Vẽ dáng điệu của đường cong có BDTS $\begin{cases} x = t^3 + t^4 \\ y = t^5 + t^7 \end{cases}$ tại lân cận điểm ứng với tham số $t = 0$.

Đầu đề đã cung cấp trực tiếp các KTHH (0) của x và y, từ đó (vì x và y đều thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$), do đồng nhất với công thức Taylor-Young:

$\overrightarrow{V_1} = \vec{0}$, $\overrightarrow{V_2} = \vec{0}$, $\overrightarrow{V_3} = 3!\vec{i} = 6\vec{i}$,

$\overrightarrow{V_4} = 4!\ \vec{i} = 24\vec{i}$ cộng tuyến với $\overrightarrow{V_3}$, $\overrightarrow{V_5} = 5!\vec{j}$.

Ở đây, $p = 3$ và $q = 5$, vậy O là một điểm uốn của Γ; tiếp tuyến với Γ tại O là $x'x$.



4.1.3 Nhánh vô tận

Giả sử $f : I \to \mathcal{E}_2$ là một cung tham số hóa, Γ là quỹ đạo của nó, $t_o \in \overline{I}$ (có thể $t_o = -\infty$ hoặc $t_o = +\infty$) $\mathcal{R} = (O; \vec{i}\ \vec{j})$ là một hệ quy chiếu trực chuẩn của $\mathcal{E}_2$, (x, y) là các thành phần của f trong $\mathcal{R}$.

Ta nói rằng Γ có một **nhánh vô tận** khi t tiến đến t_0 khi và chỉ khi $\|\overrightarrow{f(t)}\| \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$, tức là: $(x(t))^2 + (y(t))^2 \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$.

Nói riêng, nếu $|x(t)| \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$ hoặc $|y(t)| \underset{t \to t_0}{\to} +\infty$, thì Γ có một nhánh vô tận khi t tiến đến t_o.

Ta giả thiết rằng Γ có một nhánh vô tận khi t tiến đến t_o.

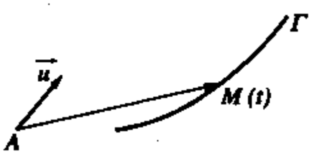
1) Ta nói rằng Γ có một **phương tiệm cận** khi t tiến đến t_o, khi và chỉ khi tồn tại một điểm A thuộc $\mathcal{E}_2$ sao cho $\dfrac{\overrightarrow{AM(t)}}{\|\overrightarrow{AM(t)}\|}$ có giới hạn khi t tiến đến t_o. Nếu điều này xảy ra, thì với một điểm B thuộc $\mathcal{E}_2$, $\dfrac{\overrightarrow{BM(t)}}{\|\overrightarrow{BM(t)}\|}$ cũng có cùng giới hạn khi t tiến đến t_o, vì

$$\frac{\overrightarrow{BM(t)}}{\|\overrightarrow{BM(t)}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AM(t)}\|}{\|\overrightarrow{BM(t)}\|} \cdot \frac{\overrightarrow{AM(t)}}{\|\overrightarrow{AM(t)}\|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{BM(t)}\|}$$

và do $\|\overrightarrow{AM(t)}\| \underset{t \to t_0}{\sim} \|\overrightarrow{BM(t)}\|$.

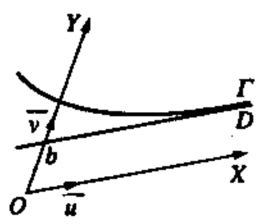
Vậy ta gọi đường thẳng vectơ $\mathbb{R}\vec{u}$, trong đó

$$\vec{u} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{AM(t)}}{\|\overrightarrow{AM(t)}\|},$$



là **phương tiệm cận** của Γ khi t tiến đến t_o.

2) Ta nói rằng một đường thẳng D là **đường tiệm cận** của Γ khi t tiến đến t_o khi và chỉ khi tồn tại một vectơ $\vec{v}$ sao cho, nếu ký hiệu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của D, thì $(\vec{u}, \vec{v})$ độc lập và rằng, nếu ký hiệu $(X(t), Y(t))$ là tọa độ của điểm chạy $M(t)$ trên Γ trong hệ quy chiếu Descartes $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, ta có:



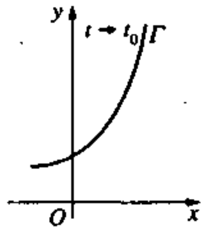
$$\begin{cases} X(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty \text{ hoặc } -\infty \\ Y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ta chứng tỏ rằng tính chất này độc lập đối với việc chọn $\vec{v}$ (sao cho $(\vec{u}, \vec{v})$ độc lập), và là bất biến qua phép đổi tham số.

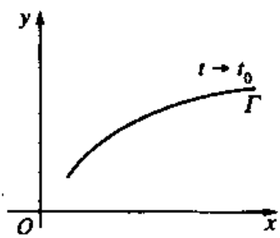
Khi Γ nhận một phương tiệm cận (khi t tiến đến t_o) mà không có đường tiệm cận (khi t tiến đến t_o), thì ta nói rằng Γ có một **nhánh parabôlic**.

Trong thực hành, nếu $x(t) \underset{t\to t_0}{\to} \pm\infty$ và $y(t) \underset{t\to t_0}{\to} \pm\infty$, thì ta lập $\frac{y(t)}{x(t)}$, rồi :

• Nếu $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to t_0}{\to} \pm\infty$, thì Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$

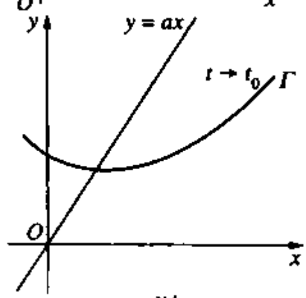


• Nếu $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to t_0}{\to} 0$, thì Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $x'x$.

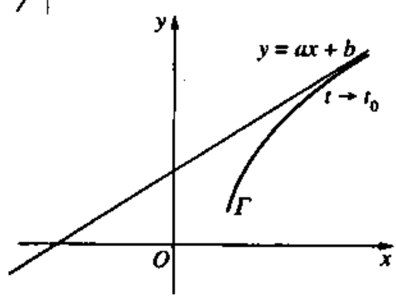


• Nếu $\begin{cases} \frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to t_0}{\to} a \in \mathbf{R}^* \\ y(t) - ax(t) \underset{t\to t_0}{\to} \pm\infty \end{cases}$, thì

Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận có phương trình là $y = ax$



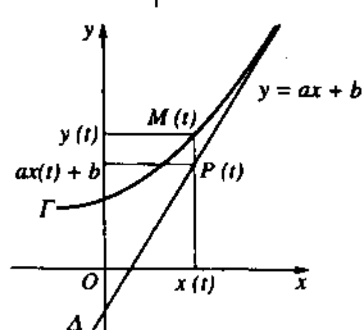
• Nếu $\begin{cases} \frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to t_0}{\to} a \in \mathbf{R}^* \\ y(t) - ax(t) \underset{t\to t_0}{\to} b \in \mathbf{R} \end{cases}$ thì Γ nhận đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ làm đường tiệm cận.



Trong trường hợp Γ có một đường tiệm cận Δ với phương trình $y = ax + b$ (khi t tiến đến t_0), để được thuận tiện khi vẽ Γ, cần biết vị trí tương đối của Γ và Δ (khi t tiến đến t_0).

Với $t \in I$, ta xét $M(t) \in \Gamma$ và $P(t)$ là điểm của Δ có cùng hoành độ $x(t)$ với $M(t)$. Vị trí tương đối của Γ đối với Δ được xác định bởi dấu của $\overrightarrow{P(t)M(t)}$, tức là của:

$$y(t) - (ax(t) + b).$$



VÍ DỤ :

1) Khảo sát nhánh vô tận của $\Gamma \begin{cases} x = \dfrac{3}{t(t-2)} \\ y = \dfrac{t^2-3}{t} \end{cases}$ khi t tiến đến 0.

Vì $x(t) \underset{t\to 0^{\pm}}{\to} \mp\infty$ và $y(t) \underset{t\to 0^{\pm}}{\to} \mp\infty$, nên Γ có một nhánh vô tận khi t tiến đến 0.

Ta có: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{(t^2-3)(t-2)}{3} \underset{t\to 0}{\to} 2.$

vậy Γ có một phương tiệm cận với phương trình $y = 2x$.

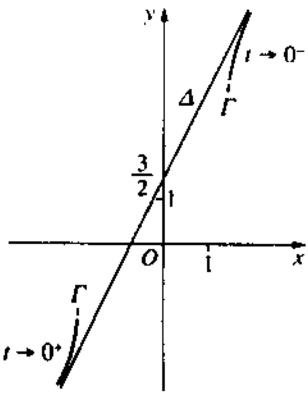
Sau đó: $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t^2-3}{t} - \dfrac{6}{t(t-2)} = \dfrac{3+2t-t^2}{2-t} \underset{t\to 0}{\to} \dfrac{3}{2}$, vậy Γ nhận đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + \dfrac{3}{2}$ làm đường tiệm cận.

Cuối cùng :

$$y(t) - \left(2x(t) + \frac{3}{2}\right) = \frac{3+2t-t^2}{2-t} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{7t-2t^2}{2(2-t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{7}{4}t,$$

vậy Γ nằm bên trên Δ khi $t \to 0^+$, và nằm bên dưới Δ khi $t \to 0^-$.



Có nhiều biến thể cho các phép tính trên. Chẳng hạn, vì $x(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{3}{2t}$ và $y(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{3}{t}$,

nên ta có

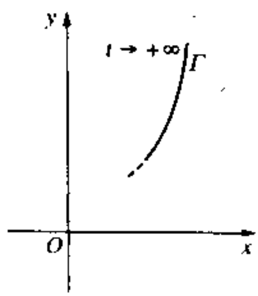
$y(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2x(t)$.

2) Khảo sát nhánh vô tận của Γ với BDTS $x = \dfrac{t^3+1}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^4+1}{t^2+1}$, khi t tiến đến $+\infty$.

Vì $x(t) \underset{t\to +\infty}{\to} +\infty$ và $y(t) \underset{t\to +\infty}{\to} +\infty$, nên Γ có một nhánh vô tận khi t tiến đến $+\infty$.

Ta có: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^4+1}{t^3+1} \underset{t\to +\infty}{\sim} t.$

Vậy $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to +\infty}{\to} +\infty$, và Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $(y'y)$.

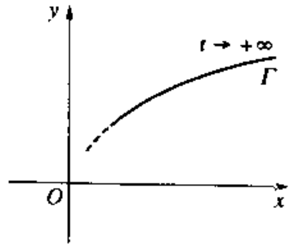


3) Khảo sát nhánh vô tận của Γ với BDTS $\begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 6t \\ y = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$ khi t tiến đến $+\infty$.

Ta có: $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{4t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

vậy Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $x'x$.

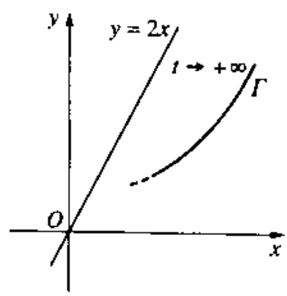


4) Khảo sát nhánh vô tận của Γ với BDTS $\begin{cases} x = 3t^2 + t \\ y = 6t^2 - t + \dfrac{1}{t^3} \end{cases}$ khi t tiến đến $+\infty$.

Ta có: $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, $y(t) - 2x(t) = -3t + \dfrac{1}{t^3} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$,

vậy Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận phương trình là $y = 2x$.



4.1.4 Các tính chất đối xứng

Giả sử Γ là một đường cong của ε_2, có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Ta hãy tìm các tính đối xứng có thể có của Γ, tức là những phép đẳng cự của ε_2 giữ cho Γ bất biến về toàn cục.

Cho $\Psi : I \to I$ là một phép đổi tham số và I' là một khoảng con của I, sao cho $I = I' \cup \Psi(I')$ và $I' \cap \Psi(I')$ hoặc rỗng hoặc là một đơn tử.

Trong thực hành Ψ, I' thường có dạng :

- Ψ: $]-a\,;a[\underset{t\mapsto -t}{\longrightarrow}]-a\,;a[$, $\quad I' = [0\,;a[$
- Ψ: $[a\,;b] \underset{t\mapsto a+b-t}{\longrightarrow} [a;b]$, $\quad I' = \left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$
- Ψ: $]0\,;+\infty[\underset{t\mapsto \frac{1}{t}}{\longrightarrow}]0\,;+\infty[$, $I' =]0;1]$.

Tùy theo hệ thức có thể liên kết $f \circ \Psi$ và f, ta cho t biến đổi trong I', từ đó có đường cong Γ', rồi một đường cong Γ'' suy từ Γ', và $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$.

Giả thiết đối với x, y, Ψ (cho mọi t thuộc I)	Phép đẳng cự cho phép chuyển từ Γ' sang Γ''
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases}$	Phép đồng nhất
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\psi(t)) = y(t) + \beta \end{cases}$	Phép tịnh tiến theo vectơ $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases}$	Phép đối xứng qua $y'y$, song song với $x'x$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Phép đối xứng qua $x'x$, song song với $y'y$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Phép đối xứng qua O
$\begin{cases} x(\psi(t)) = y(t) \\ y(\psi(t)) = x(t) \end{cases}$	Phép đối xứng qua đường phân giác thứ nhất, song song với đường phân giác thứ hai

Bảng liệt kê này không đầy đủ.

4.1.5 Điểm bội

Cho Γ là một đường cong có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$.

Một điểm $M(x, y)$ của Γ được gọi là **điểm bội** của Γ khi và chỉ khi tồn tại $(u, v) \in I^2$ sao cho :

$$\begin{cases} x = x(u) = x(v) \\ y = y(u) = y(v) \\ u \neq v. \end{cases}$$

Trong thực hành, ta giả thiết rằng BDTS của Γ là *thích hợp*, tức là, để đơn giản, các điểm của Γ, trừ "một số" trong chúng, đều ứng với một trị duy nhất của tham số.

Nếu $M \in \Gamma$ ứng với đúng hai trị phân biệt của tham số, ta nói M là một điểm **kép** của Γ.

Cũng định nghĩa tương tự cho điểm **bội ba, điểm bội bốn**,...

VÍ DỤ:

Chứng minh đường cong có BĐTS $\begin{cases} x = t + 1 + \dfrac{1}{t-1} \\ y = t^2 + 1 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$ có một điểm kép M (và chỉ một), chỉ rõ các tọa độ của M và các trị của tham số ứng với M.

Ta giải hệ phương trình (S) $\begin{cases} x(u) = x(v) \\ y(u) = y(v) \\ u \neq v \end{cases}$, với ẩn $(u, v)^2 \in \mathbb{R}^2$.

Ta có: $$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u^2}{u-1} = \dfrac{v^2}{v-1} \\ \dfrac{u^3 + u + 1}{u} = \dfrac{v^3 + v + 1}{v} \\ u \neq v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u-v) - (u^2 - v^2) = 0 \\ uv(u^2 - v^2) - (u - v) = 0 \\ u \neq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - (u+v) = 0 \\ uv(u+v) - 1 = 0 \\ u \neq v \end{cases}$$

Ta ký hiệu $S = u + v$, $P = uv$, sao cho u, v là các nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$, với ẩn $t \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} P = S \\ PS = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P = S = 1 \\ \text{hoặc} \\ P = S = -1. \end{array}\right.$$

Phương trình $t^2 - t + 1 = 0$ không có nghiệm thực.

Phương trình $t^2 + t - 1 = 0$ có đúng hai nghiệm thực, $u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $v = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Để tính các tọa độ (x, y) của điểm kép M (ứng với u và v), ta chú ý rằng x và y đối xứng đối với u và v, vậy ta có biểu diễn theo S và P:

- $2x = x(u) + x(v) = \dfrac{u^2}{u-1} + \dfrac{v^2}{v-1} = \dfrac{uv(u+v) - (u^2 + v^2)}{uv - (u+v) + 1}$

  $= \dfrac{SP - (S^2 - 2P)}{P - S + 1} = -2$, suy ra $x = -1$.

- $2y = y(u) + y(v) = \left(u^2 + 1 + \dfrac{1}{u}\right) + \left(v^2 + 1 + \dfrac{1}{v}\right)$

  $= u^2 + v^2 + 2 + \dfrac{u+v}{uv} = S^2 - 2P + 2 + \dfrac{S}{P} = 6$, suy ra $y = 3$.

Hoặc là, bằng cách sử dụng $u^2 + u - 1 = 0$:

$$x(u) = \frac{u^2}{u-1} = -\frac{u-1}{u-1} = -1, \quad y(u) = u^2 + 1 + \frac{1}{u} = u^2 + 1 + (u+1) = 3.$$

Cuối cùng, Γ có một và chỉ một điểm kép, ứng với hai trị $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ của tham số, và các tọa độ là $(-1, 3)$.

4.1.6 Lược đồ khảo sát một cung tham số hóa

Cho Γ là một đường cong có biểu diễn tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$.

a) Khảo sát về x, y

1) Tìm các miền xác định của x và y, trong thực hành đó là những khoảng hay hợp của những khoảng.

2) Tìm những tính đối xứng có thể có của Γ, bằng việc khảo sát các phép đổi tham số loại $t \mapsto -t, t \mapsto \frac{1}{t}$, ..., điều này cho phép ta xác định một (hoặc nhiều) khoảng cần khảo sát đối với x, y.

3) Khảo sát tại cận của các khoảng đó.

4) Khảo sát đạo hàm của x, y, xác định các điểm làm triệt tiêu x', y' và dấu của x', y'.

5) Lập bảng biến thiên gồm năm dòng t, x', x, y, y' để ghi lại các kết quả trên đây.

b) Khảo sát Γ

1) Xác định các nhánh vô tận và thể loại của chúng.

2) Xác định các điểm không chính quy, loại của chúng, và dáng điệu của đường cong tại lân cận các điểm ấy.

3) Xác định các điểm bội và các tiếp tuyến tại các điểm này.

4) Khảo sát các điểm đáng chú ý (điểm dừng,...)

5) Khảo sát các điểm uốn, nếu ngữ cảnh cho phép.

6) Vẽ Γ.

4.1.7 Ví dụ về cách vẽ cung tham số hóa

Trước tiên ta xét một số (các ví dụ từ 1 đến 5) đường cong "cổ điển" được định nghĩa bằng tham số ; a chỉ một số thực cố định, $a > 0$.

***1)* Đường hình sao** $\quad \Gamma \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

• Các ánh xạ x, y đều 2π - tuần hoàn; vậy ta sẽ có được toàn bộ đường cong bằng cách cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π .

• x chẵn và y lẻ ; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0; \pi]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $x'x$.

• Vì $\forall t \in [0;\pi]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ nên ta sẽ cho t biến thiên trong $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• Cuối cùng, vì $\forall t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x(\dfrac{\pi}{2} - t) = y(t) \\ y(\dfrac{\pi}{2} - t) = x(t) \end{cases}$, nên ta sẽ cho t biến thiên trong $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua đường phân giác thứ nhất.

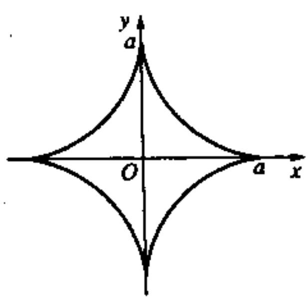
• x và y đều khả vi và: $\forall t \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases}$.

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của x và y.

• Khảo sát tại 0 :

$\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, vậy Γ nhận $x'x$ làm tiếp tuyến tại $(a\ ;0)$.

t	0		$\dfrac{\pi}{4}$
x'	0	$-$	$-\dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$
x	a	$\searrow$	$\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$
y'	0	$+$	$\dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$



2) Đường strôphôit thẳng $\Gamma \begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

• x chẵn và y lẻ ; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0\,;+\infty[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $x'x$.

• x và y đều khả vi trên $[0\,;+\infty[$ và :

$$\forall t \in [0\,;+\infty[\,, \quad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = \dfrac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2} \end{cases}.$$

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của x, y.

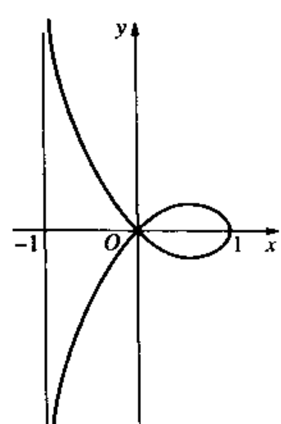
Ta có : $x(\sqrt{\sqrt{5}-2}) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0{,}618$

và $y(\sqrt{\sqrt{5}-2}) = \sqrt{\sqrt{5}-2}\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0{,}300$.

t	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$+\infty$
x'	0	$-$		$-$	
x	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$
y'	1	$+$	0	$-$	

• Γ nhận đường thẳng có phương trình $x = -1$ làm đường tiệm cận.

• O là điểm kép của Γ, ứng với $t = -1$ và $t = 1$, và các tiếp tuyến với Γ tại O là hai đường phân giác, vì $\dfrac{y'(1)}{x'(1)} = 1$.



3) Đường lemniscat Bernoulli $\quad \Gamma \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$.

• x và y đều lẻ; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0; +\infty[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua O.

• Ta có, với mọi t thuộc $[0 ;\infty[$: $x\left(\dfrac{1}{t}\right) = y(t)$ và $y\left(\dfrac{1}{t}\right) = x(t)$; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0;1]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua đường phân giác thứ nhất.

• x và y đều khả vi trên $[0; 1]$ và :

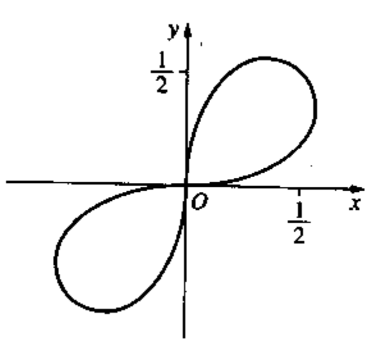
$$\forall\, t \in [0\,;\,1]\,; \begin{cases} x'(t) = \dfrac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2} \end{cases}.$$

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của x, y.

$x\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{3}} \simeq 0.570$

$y\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \dfrac{3}{4\sqrt{3}\sqrt[4]{3}} \simeq 0.329.$

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
x'	1	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
x	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
y'	0	$+$		$+$	$\frac{1}{2}$



4) *Lá Descartes* $\quad \Gamma \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}.$

- $\mathrm{Def}(x) = \mathrm{Def}(y) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- Ta có, với mọi t thuộc $\mathbb{R} - \{-1\}$: $x\left(\dfrac{1}{t}\right) = y(t)$ và $y\left(\dfrac{1}{t}\right) = x(t)$; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $]-1; 1]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua đường phân giác thứ nhất.
- Các ánh xạ x và y đều khả vi trên $]-1; 1]$ và, với mọi t thuộc $]-1; 1]$:

$$x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'(t) = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của x, y :

t	-1		0		$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$		1
x'		$+$		$+$	0	$-$	$-\frac{1}{4}$
x	$-\infty$	↗	0	↗		↘	$\frac{1}{2}$
y	$+\infty$	↘	0	↗		↗	$\frac{1}{2}$
y'		$-$	0	$+$		$+$	$\frac{1}{4}$

Ta có: $x\left((\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 0{,}529, \quad y\left((\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}420$.

- Nhánh vô tận (khi t tiến đến -1).

Ta có: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t \xrightarrow[t\to -1]{} -1$,

và $\quad y(t) + x(t) = \dfrac{t}{t^2 - t + 1} \xrightarrow[t\to -1]{} -\dfrac{1}{3}$,

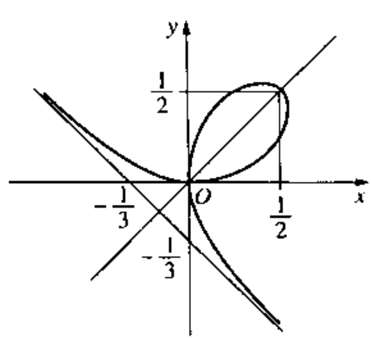
vậy Γ nhận đường thẳng Δ có phương trình :

$y = -x - \dfrac{1}{3}$ làm đường tiệm cận.

Hơn nữa :

$$y(t) + x(t) + \frac{1}{3} = \frac{(1+t)^2}{3(1-t+t^2)} > 0,$$

vậy Γ nằm về phía trên của Δ.



5) Đường deltôit (hypôcyclôit ba điểm lùi) $\Gamma\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$.

• x và y nhận 2π làm chu kỳ, vậy ta sẽ cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài là 2π để thu được cả đường cong.

• x chẵn và y lẻ; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0\ ;\ \pi\ ]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $x'x$.

• x và y đều khả vi trên $[0\ ;\ \pi]$ và, với mọi t thuộc $[0\ ;\ \pi]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = -2\sin t(1 + 2\cos t) \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2(1 - \cos t)(1 + 2\cos t). \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của x, y.

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	$-$	0	$+$	0
x	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
y'	0	$+$	0	$-$	-4

• **Khảo sát tại $t = \dfrac{2\pi}{3}$, là điểm không chính quy.**

$$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t \end{cases} \Bigg| \text{ vậy } \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x^{(3)}(t) = 2\sin t + 8\sin 2t \\ y^{(3)}(t) = -2\cos t + 8\cos 2t \end{cases} \Bigg| \text{ vậy } \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vì $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ độc lập, nên với các ký hiệu của Mệnh đề 3, 4.1.2, $p = 2$ và $q = 3$; vậy đây một điểm lùi loại một.

Vì $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{1 - \cos t}{\sin t} \underset{t \to \frac{2\pi}{3}}{\longrightarrow} -\sqrt{3}$, nên tiếp tuyến tại điểm đó có hệ số góc là $-\sqrt{3}$.

• Khảo sát tại $t = 0$, là điểm không chính quy.

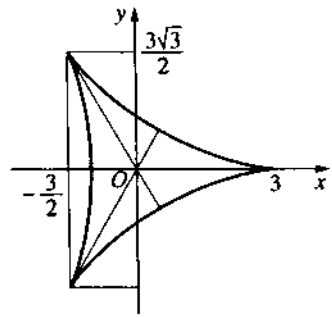
Vì $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1 - \cos t}{\sin t} = -\tan\dfrac{t}{2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, nên tại $(3{,}0)$ Γ nhận trục $x'x$ làm tiếp tuyến.

• Ta sẽ chứng tỏ rằng Γ bất biến qua phép quay tâm O và góc quay $\frac{2\pi}{3}$.

Nếu ký hiệu $z(t) = x(t) + iy(t)$, với mọi t thuộc $\mathbb{R}$ ta có: $z(t) = 2e^{it} + e^{-2it}$, suy ra:

$$z\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{it+\frac{2i\pi}{3}} + e^{-2it-\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}z(t).$$

Vậy ta chuyển từ $M(t)$ sang $M\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)$ bằng phép quay tâm O và góc quay $\frac{2\pi}{3}$.



6) Đường $\Gamma\ \begin{cases} x = 2\sin t \\ y = \tan 3t \end{cases}$

• $\mathrm{Def}(x) = \mathbb{R}$ và $\mathrm{Def}(y) = \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbf{Z}\right)$.

• x và y đều nhận π làm chu kỳ, nên ta sẽ cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài là π để thu được toàn đường cong.

• x và y đều lẻ, vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua O.

• x và y đều khả vi và, với mọi t : $x'(t) = 2\cos 2t$, $y'(t) = 3(1 + \tan^2 3t) > 0$.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	2	$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \parallel$
y'	3	$+$	$\parallel$	$+$		$+$	$\parallel$

• Γ nhận các đường thẳng có phương trình $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ làm tiệm cận.

• Một phác họa của bản vẽ hình như cho thấy là tồn tại một điểm kép, ứng với hai trị u, v của tham số thỏa mãn $u \in \left]0\,;\frac{\pi}{6}\right[$ và $v \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Trong các điều kiện đó, ta có :

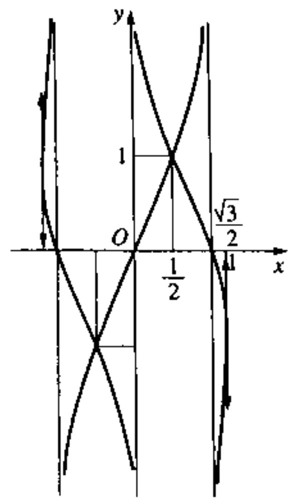
$$\begin{cases} x(u)=x(v) \\ y(u)=y(v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2u=\sin 2v \\ \tan 3u=\tan 3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2u \equiv 2v\ [2\pi] \text{ hoặc } 2u \equiv \pi-2v\ [2\pi]) \\ 3u \equiv 3v\,[\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \equiv v\,[\pi] \quad \text{hoặc} \quad u \equiv \dfrac{\pi}{2}-v\,[\pi] \\ u \equiv v\left[\dfrac{\pi}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\pi}{2}-v \\ u=v-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\pi}{12} \\ v=\dfrac{\pi}{12} \end{cases}.$$

Vậy ta có:

$$x=x(u)=\frac{1}{2} \text{ và } y=y(u)=1.$$



7) Đường $\Gamma \begin{cases} x=\dfrac{1}{t}+\ln(2+t) \\ y=t+\dfrac{1}{t} \end{cases}.$

- x và y xác định trên $]-2\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
- x và y đều khả vi trên $]-2;0[\,\cup\,]0;+\infty[$ và, với mọi t:

$$x'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2+t}=\frac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)}, \qquad y'(t)=1-\frac{1}{t^2}.$$

t	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x'	||	$+$	0	$-$	||	$-$		$-$	0	$+$	
x	|| $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$1+\ln 3$	↘	$\frac{1}{2}+2\ln 2$	↗	$+\infty$
y	$-5/2$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$5/2$	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$		$+$	

• Khảo sát khi $t \to 0$

Ta có : $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to 0}{\to} 1$ và $y(t) - x(t) = t - \ln(2+t) = t - \ln 2 - \ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right) = -\ln 2 + \dfrac{t}{2} + o(t)$,

vậy Γ nhận đường thẳng Δ có phương trình $y = x - \ln 2$ làm tiệm cận và, khi $t \to 0^+$ (tương ứng : 0^-), Γ ở phía trên (tương ứng : phía dưới) của Δ.

• Khảo sát khi $t \to +\infty$

Ta có: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, vậy Γ nhận một nhánh parabôlic có phương tiệm cận $y'y$.

• Khảo sát tại $t = -1$, điểm không chính quy

Ta ký hiệu : $h = t + 1 \xrightarrow[t\to -1]{} 0$. Ta có:

$$x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) = -\frac{1}{1-h} + \ln(1+h) = -1 - \frac{3}{2}h^2 - \frac{2}{3}h^3 + o(h^3),$$

$$y(t) = t + \frac{1}{t} = -1 + h - \frac{1}{1-h} = -2 - h^2 - h^3 + o(h^3).$$

Như thế, $\overrightarrow{V_2} = 2!\left(-\dfrac{3}{2}\vec{i} - \vec{j}\right) = -3\vec{i} - 2\vec{j}$ và $\overrightarrow{V_3} = 3!\left(-\dfrac{3}{2}\vec{i} - \vec{j}\right) = -4\vec{i} - 6\vec{j}$, vậy $(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ độc lập.

Như thế đó là một điểm lùi loại một, và tiếp tuyến được định phương bởi $-3\vec{i} - 2\vec{j}$.

• Điểm uốn

Ta có, với mọi t : $x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{2+t}$, $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$, $x''(t) = \dfrac{2}{t^3} - \dfrac{1}{(2+t)^2}$, $y''(t) = \dfrac{2}{t^3}$,

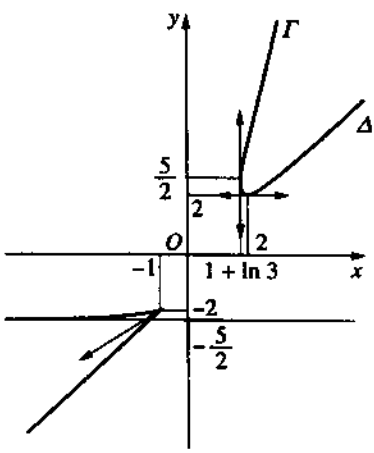
từ đó :

$$x'(t)y''(t) - x''(t)\,y'(t) = \frac{2}{t^3(2+t)} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{(2+t)^2} - \frac{1}{t^2(2+t)^2} = \frac{(t+1)^2(t+4)}{t^3(2+t)^2}.$$

Vì $x'y'' - x''y'$ triệt tiêu và đổi dấu tại $t = 4$, nên điểm ứng với tham số 4 là một điểm uốn của Γ. Hơn nữa:

$$x(4) = \frac{1}{4} + \ln 6 \simeq 2{,}042\,.$$

$$y(4) = \frac{17}{4} = 4{,}25\,.$$



4.1.8 Tính các diện tích phẳng

Ta nhắc lại các kết quả đã biết ở Tập 2, 13.1.6 và 13.2.3.

◆ **Định lý** Cho D là một miền thuộc mặt phẳng, được giới hạn bởi một đường cong đóng C được định hướng theo chiều thuận. Diện tích đại số $\mathcal{A}(D)$ của D được cho bởi:

$$\mathcal{A}(D) = -\int_C y\mathrm{d}x = \int_C x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x),$$

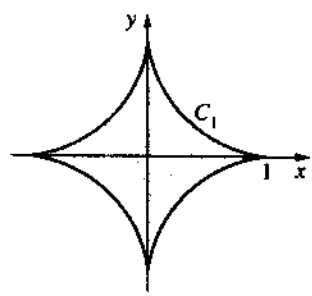
và cũng bởi: $\mathcal{A}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

VÍ DỤ :

1) Tính diện tích miền trong của đường hình sao $C\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, a > 0 cố định.

Vì lý do đối xứng:

$\mathcal{A} = 4\frac{1}{2}\int_{C_1}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$ trong đó C_1 là bộ phận của C ứng với t chạy từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$. Từ đó :



$$\mathcal{A} = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2 t\cos^4 t + 3\cos^2 t\sin^4 t)dt$$

$$= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t$$

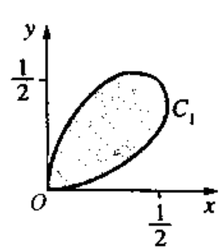
$$= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8}a^2.$$

2) Tính diện tích miền trong của vòng khuyên của lá Descartes C :

$$x = \frac{t}{1+t^3},\ y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Vì lý do đối xứng:

$\mathcal{A} = 2\frac{1}{2}\int_{C_1}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$, trong đó C_1 là bộ phận của C ứng với t chạy từ 0 đến 1. Từ đó :



$$\mathcal{A} = \int_0^1\left(\frac{t}{1+t^3}\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{t^2}{1+t^3}\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{1+t^3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Bài tập

◊ **4.1.1** Vẽ các đường cong sau, với phương trình là $y = f(x)$, trong đó cho $f(x)$:

$a)\ \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ $b)\ x+\dfrac{\ln|x|}{|x|}$ $c)\ \dfrac{x^2}{e^x-1-x}$ $d)\ (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

$e)\ e^x+e^{\frac{1}{x}}$ $f)\ (\tan x)^{\tan 2x}$ $g)\ x\ln|e^x-1|$ $h)\ \ln(x-1+2e^{-x})$

$i)\ |x^2-1|^{2x}$ $j)$ Arcsin(tan$x$) $k)$ Arctan(1+tan x).

◊ **4.1.2** Cho $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a > b$.

Chứng minh rằng đường cong $C_{a,b}$ có phương trình $y = \ln(a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x)$ có thể suy ra từ đường cong C có phương trình $y = \ln \operatorname{ch} x$ bằng một phép dẳng cự; hãy chỉ rõ phép dẳng cự đó.

◊ **4.1.3*** Vẽ các đường cong sau đây, biểu diễn tham số bởi điểm $M(t)$ có tọa độ Descartes $(x(t), y(t))$ và chỉ rõ các phần tử được nêu ra:

a) $\left(\dfrac{t+1}{t(t-1)}, \dfrac{t(t+1)}{t-1}\right)$ phép đối xứng

b) $\left(\dfrac{t^2+1}{2t}, \dfrac{2t-1}{t^2}\right)$, điểm dừng

c) $\left(\dfrac{1}{t^4-1}, \dfrac{t^3}{t^4-1}\right)$

d) $\left(\dfrac{t^2+t+1}{t+1}, \dfrac{t^2-1}{2-t}\right)$, điểm kép

e) $(t^4 - t^3 - t^2, t^4 + t^3 + t^2)$ điểm dừng

f) $\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2}\right)$, điểm dừng

g) $(t^3 + t^4, t^5 + t^6)$

h) $(t - t^3, t^2 - t^4)$, lập phương trình Descartes

i) $\left(\dfrac{t}{\ln t}, t^2+\ln t\right)$

j) $\left(\dfrac{1}{t}+\ln(2+t), t+\dfrac{1}{t}\right)$

k) $\left(e^{t+\frac{1}{t}}, e^{t-\frac{1}{t}}\right)$

l) $\left(\dfrac{t+1}{e^t-1}, \dfrac{t^2+1}{t}\right)$

m) $\left(\dfrac{e^t}{t+1}, \dfrac{te^t}{t+1}\right)$ điểm uốn

n) $\left(\dfrac{\operatorname{ch} t}{t}, \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}\right)$

o) $\left(\dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t}, \cos t\right)$

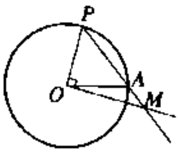
p) $\left(\dfrac{1}{\sin 2t}, \dfrac{1}{\sin 3t}\right)$, điểm kép

q) $\left(\tan t+\sin t, \dfrac{1}{\cos t}\right)$

r) $\left(\ln(t^2+1)+\operatorname{Arctan} t, \dfrac{4t+3}{(t+1)^2}\right)$.

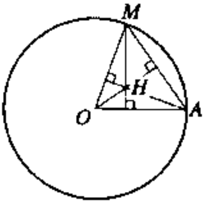
◊ **4.1.4** Tìm tất cả các đường thẳng đồng thời là tiếp tuyến và pháp tuyến với $C \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$.

◊ **4.1.5** Cho C là một đường tròn, O là tâm của nó, $A \in C$. Một điểm P chạy trên C ; đường vuông góc tại O với (OP) và đường thẳng (AP) cắt nhau tại một điểm được ký hiệu là M. Xác định quỹ tích điểm M khi P vạch nên C (trừ A).

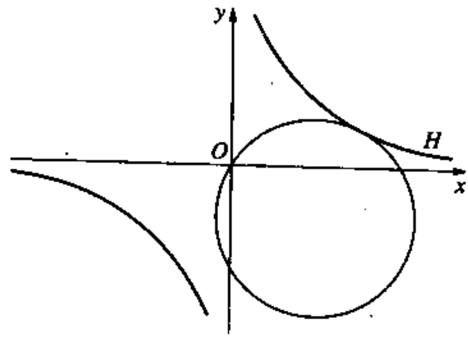


◊ **4.1.6** Cho C là một đường tròn, O là tâm của nó, $A \in C$, M là một điểm chạy khắp C.

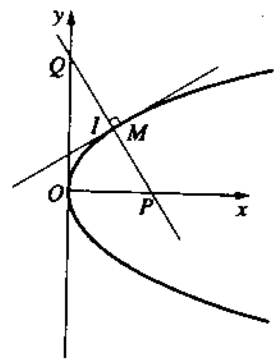
Xác định quỹ tích trực tâm H của tam giác OAM.



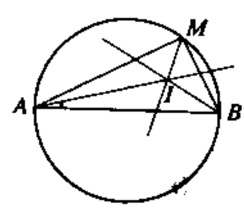
◊ **4.1.7** Cho H là một hypebol vuông. O là tâm của nó. Xác định quỹ tích của tâm đường tròn đi qua O và tiếp xúc với H.



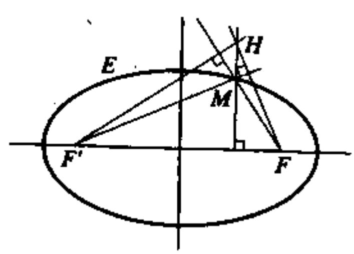
◊ **4.1.8** Giả sử C là một parabol có phương trình $y^2 = 2px$ ($p > 0$ cố định). Một điểm M chạy khắp C; pháp tuyến với C tại M cắt $x'x$ tại một điểm P, và $y'y$ tại một điểm Q. Xác định quỹ tích của trung điểm I của PQ.



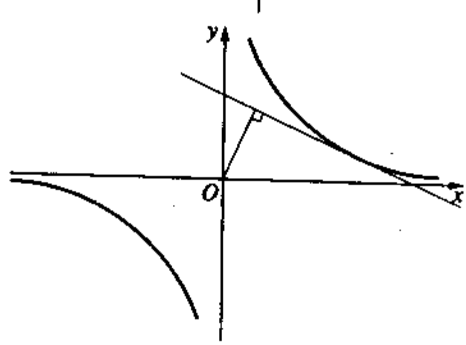
◊ **4.1.9** Giả sử A, B là hai điểm phân biệt, C là đường tròn có đường kính AB, $M \in C$, I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác AMB. Xác định quỹ tích của I khi M chạy khắp C.



◊ **4.1.10** Cho E là một elip, F, F' là các tiêu điểm của nó. Một điểm M chạy khắp E. Xác định quỹ tích của trực tâm H của tam giác $FF'M$.



◊ **4.1.11** Xác định quỹ tích của các chân của các đường pháp tuyến hạ từ O đến các tiếp tuyến của hypebol vuông C có phương trình $xy = 1$.



◊ **4.1.12** Với $\lambda \in \mathbb{R}^*$, Ta ký hiệu, $C_\lambda : \begin{cases} x = t - \lambda \sin t \\ y = 1 - \lambda \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a) Vẽ C_λ

b) Xác định tập hợp Γ các điểm uốn của các C_λ khi λ khi chạy khắp $\mathbb{R}^*$.

◊ **4.1.13** Giả sử C là một parabol có phương trình $y^2 = 2px$ ($p > 0$ cố định) M_i $(1 \le i \le 4)$ là bốn điểm của C. Chứng minh rằng các M_i $(1 \le i \le 4)$ đồng chu khi và chỉ khi $\sigma_1 = 0$, trong đó $\sigma_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, y_i là tung độ của M_i $(1 \le i \le 4)$. (Có thể sử dụng bài tập 2.2.43)

◊ **4.1.14** Cho $I =]-1\,;+\infty[$, $F : I \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall\, t \in I, \quad F(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ t\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

a) Vẽ $F(I)$.

b) Chứng minh rằng $F : I \to F(I)$ là một song ánh liên tục, nhưng ánh xạ ngược không liên tục.

◊ **4.1.15*** Ta ký hiệu C là đường cong: $x = t + t^2$, $y = \dfrac{1}{t(1-t)}$.

a) Vẽ C.

b) α) Tìm một ĐKCĐ để bốn điểm M_i (t_i), $1 \le i \le 4$, của C thẳng hàng, bằng cách xét các hàm đối xứng sơ cấp $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ của t_1, t_2, t_3, t_4.

β) Từ đó suy ra các tiếp tuyến kép của C.

c) α) Tìm một ĐKCĐ để ba điểm M_i (t_i), $1 \le i \le 3$, của C thẳng hàng bằng cách xét các hàm đối xứng sơ cấp τ_1, τ_2, τ_3 của t_1, t_2, t_3.

β) Từ đó suy ra các điểm uốn của C.

◊ **4.1.16 Đường lemniscat Bernoulli**

a) Vẽ đường cong $C\left(x = \dfrac{t}{1+t^4},\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$, được gọi là **đường lemniscat Bernoulli.**

b) Tìm một ĐKĐC đối với các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 để cho các điểm $M_i(t_i)$ của C đồng chu hay thẳng hàng.

c) α) Tìm một ĐKCĐ đối với các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 để cho các điểm M_i (t_i) của C thẳng hàng.

β) Từ đó suy ra một ĐKCĐ đối với các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, để cho các điểm M_i (t_i) của C thẳng hàng.

d) Cho $M(t) \in C$; tiếp tuyến với C tại $M(t)$ cắt lại C tại hai điểm $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$. Xác định quỹ tích của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OM_1M_2 khi t chạy khắp $\mathbb{R}$.

e) Cho $M_1(t_1) \in C$; lập phương trình bậc bốn đối với t có các nghiệm là những tham số t của các điểm $M(t)$ của C sao cho tiếp tuyến tại $M(t)$ với C đi qua $M_1(t_1)$. Chứng minh rằng bốn điểm được liên kết đó thẳng hàng.

f) Xác định quỹ tích tâm Ω của đường tròn đi qua O và tiếp xúc với C.

◊ **4.1.17** Tính các diện tích sau đây:

a) Diện tích vòng khuyên của C: $x = 2\cos^3 t$, $y = \sin t\,(2 + \sin^2 t)$

b) Diện tích vòng khuyên của C: $x = \cos t$; $y = \sin t\,(1 + \cos t)$

c) Diện tích của $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{3},\ 0 \le y \le \dfrac{\cos^2 x}{x(\pi - 2x)}\right\}$

d) Diện tích vòng khuyên của C: $x = t^2 \ln t$, $y = t(\ln t)^2$

e) Diện tích của phần mặt phẳng nằm ở trên $y'y$ và ở dưới đường cong C:

$$x = \frac{t+1}{t^3}, \quad y = \frac{t-1}{t^2}$$

g) Diện tích của phần mặt phẳng gồm giữa Ox, Oy, và đường cong C:

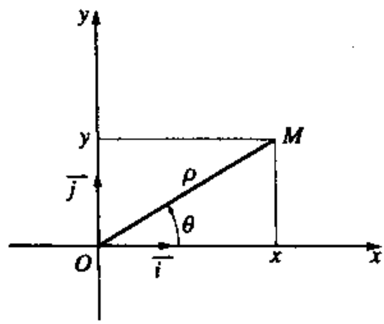
$$y \ge 0, \quad x = \sin t, \quad y = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t.$$

4.2 Đường cong trong tọa độ cực

Mặt phẳng Euclide $\mathcal{E}_2$ được quy về một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$.

4.2.1 Tọa độ cực

Với mọi điểm M có tọa độ (x, y) trong $\mathcal{R}$, ta đặt $\rho = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ và $\theta = \angle\ (\vec{i}, \overrightarrow{OM})\,[2\pi]$ (nếu $M \neq O$).
Ta nói rằng ρ là **bán kính cực** của M và θ là **góc cực** của M.
Ta có:

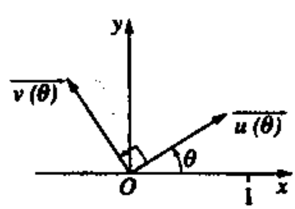


$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \qquad \text{và } \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}.$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

Nếu $x \neq 0$, thì $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ và $\frac{y}{x} = \tan\theta$.

Thay cho (θ, ρ), cặp $(\theta+\pi, -\rho)$ cũng thỏa mãn các hệ thức : $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$.
Ta nói rằng một cặp (θ,ρ) thuộc $\mathbb{R}^2$ là **một hệ tọa độ cực** (viết tắt: HTĐC) của $M(x, y)$ khi và chỉ khi : $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$, và khi đó ta ký hiệu $M\,[\theta, \rho]$.
Ta cũng chú ý ở đây rằng ρ có thể ≤ 0.
Như vậy, mọi điểm M thuộc $\mathcal{E}_2 - \{O\}$ nhận làm HTĐC đúng những (θ,ρ) và những $(\theta+\pi,-\rho)$, trong đó θ (modulo 2π) là góc cực của M và $\rho = OM$. Ngược lại, với mọi (θ,ρ) thuộc $\mathbb{R}^2$, tồn tại một điểm M duy nhất của $\mathcal{E}^2$ nhận (θ,ρ) làm một HTĐC.

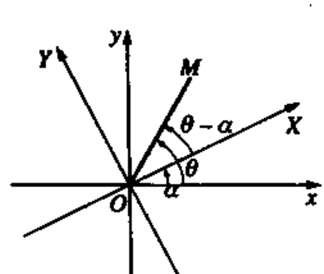
Với $\theta \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, là vectơ chuẩn hóa có góc cực θ, và $\overrightarrow{v(\theta)} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}\,(\overrightarrow{u(\theta)}) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.



Như vậy, $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ là một cơ sở trực chuẩn thuận của $\mathcal{E}_2$.

Đổi trục cực

Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}'$ là hệ quy chiếu trực chuẩn thuận suy từ $\mathcal{R}$ bằng phép quay tâm O và góc quay α.
Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$, nếu (θ,ρ) là một HTĐC của M trong $\mathcal{R}$, thì một HTĐC của M trong $\mathcal{R}'$ là $(\theta-\alpha,\rho)$, theo hệ thức Chasles đối với góc.



4.2.2 Biểu diễn một đường cong trong tọa độ cực

Giả sử $\begin{array}{l} f: I \to \mathcal{E}_2 \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó. Ta giả thiết : $\forall t \in I,\ M(t) \neq O$.

Ta ký hiệu $(x(t), y(t))$ là tọa độ của $M(t)$ trong $\mathcal{R}$.

Ánh xạ $g : I \to U$ định nghĩa bởi : $\forall t \in I,\ g(t) = \dfrac{x(t) + iy(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}}$ thuộc lớp C^1 trên I. Theo định lý thay thế (Tập 2, 7.10, Định lý 3) tồn tại một ánh xạ $\theta : I \to$: $\mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho : $\forall t \in I,\ g(t) = e^{i\theta(t)}$.

Khi đó ta có, với mọi t thuộc I : $\begin{cases} x(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}\ \cos\theta(t) \\ y(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}\ \sin\theta(t) \end{cases}$,
vậy $\theta(t)$ là góc cực của $M(t)$.

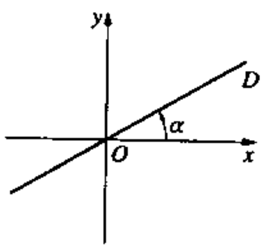
Ta ký hiệu $J = \theta(I)$ (là một khoảng của $\mathbb{R}$), và giả thiết: $\forall t \in I,\ \theta'(t) \neq 0$.

Vậy $\theta : I \to J$ là một C^1 - vi phôi, tức là một phép đổi tham số, và vì thế $f \circ \theta^{-1}$ là một biểu diễn tham số thuộc lớp C^1 chấp nhận được của Γ.

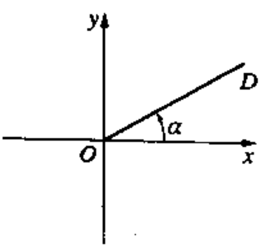
Đường cong C khi đó được biểu diễn bởi $\rho = \rho(\theta)$, trong đó $\rho : J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1. Ta nói rằng Γ nhận **phương trình cực** $\rho = \rho(\theta)$. Trong hệ thức $\rho = \rho(\theta)$, ρ có thể ≤ 0.

4.2.3 Đường thẳng trong tọa độ cực

1) Phương trình cực của một đường thẳng đi qua O là $\theta \equiv \alpha\,[\pi]$, trong đó α là góc cực của D.



2) Phương trình cực của nửa đường thẳng D gốc O là $\theta \equiv \alpha\,[2\pi]$, trong đó α là góc cực của nửa đường thẳng D.



3) Giả sử D $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0,0)$, $c \neq 0$, là một đường thẳng không đi qua O. Khi ký hiệu $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, ta có:

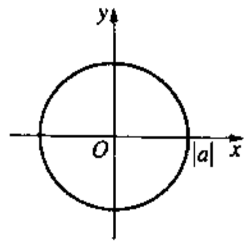
$$ax+by+c = 0 \Leftrightarrow (a\cos\theta + b\sin\theta)\rho + c = 0 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{-\frac{a}{c}\cos\theta - \frac{b}{c}\sin\theta}.$$

Ngược lại, với mỗi (λ, μ) thuộc $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$, phương trình cực $\rho = \dfrac{1}{\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta}$ biểu diễn đường thẳng D có phương trình Descartes $\lambda x + \mu y - 1 = 0$.

4.2.4 Đường tròn trong tọa độ cực

1) Đường tròn tâm O, bán kính R ($R > 0$) nhận phương trình cực $\rho = R$.

Ngược lại, với mọi a thuộc $\mathbb{R}^*$, phương trình cực $\rho = a$ biểu diễn đường tròn tâm O và bán kính $|a|$.



2) • Cho C là một đường tròn đi qua O. Phương trình Descartes của nó có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0.$$

Ta có : $\quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + 2\,(a\cos\theta + b\sin\theta)\,\rho = 0$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\rho = 0\\ \text{hoặc}\\ \rho = -2(a\cos\theta + b\sin\theta)\end{array}\right.$$

Vì tồn tại $\theta \in \mathbb{R}$ sao cho $-2(a\cos\theta + b\sin\theta) = 0$, nên cuối cùng C nhận phương trình cực : $\rho = \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta$, trong đó $\lambda = -2a$, $\mu = -2b$.

• Ngược lại, phương trình cực $\rho = \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta$ biểu diễn đường tròn có phương trình Descartes $x^2 + y^2 - \lambda x - \mu y = 0$, đường tròn này đi qua O.

4.2.5 Các đường cônic có tiêu điểm tại gốc tọa độ

Ta đã biết (xem 2.2.5, *4*)) rằng đường cônic C với tiêu điểm O, đường chuẩn liên kết D, tâm sai e, có phương trình cực là :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)},$$

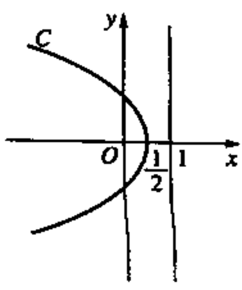
trong đó $d = d(O, D)$, $p = de$, $\varphi = \widehat{(\vec{i}, D)} + \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

VÍ DỤ :

Phương trình cực $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ biểu diễn đường parabol có tiêu điểm O và đường chuẩn liên kết D với phương trình $x = 1$.

Vả lại phương trình Descartes của đường parabol này là:

$$y^2 = 1 - 2x.$$



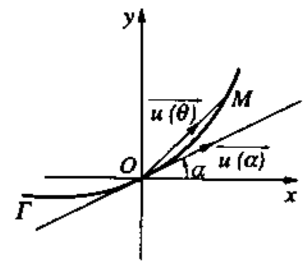
4.2.6 Khảo sát một đường cong xác định bởi một phương trình cực trong lân cận một điểm

Cho Γ là một đường cong nhận một phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$, trong đó $\rho : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp thích hợp.

1) Khảo sát tại O

Giả thiết tồn tại $\alpha \in I$ sao cho $\rho(\alpha) = 0$ và ρ liên tục tại α (và rằng α là một không điểm cô lập của ρ).

Vectơ chuẩn hóa $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, là vectơ định hướng (OM), có giới hạn là $\overrightarrow{u(\alpha)}$ khi θ tiến tới α; vậy Γ nhận đường thẳng đi qua O và có góc cực α làm tiếp tuyến tại O.

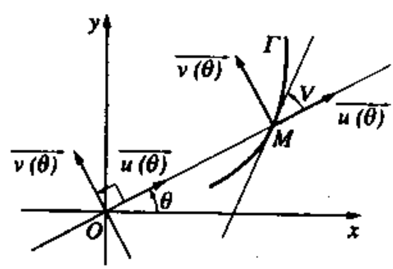


2) Khảo sát tại một điểm khác O

Ta có: $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}$, suy ra, nếu ρ thuộc lớp C^1:

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + \rho(\theta)\overrightarrow{v(\theta)}.$$

Vì $\rho(\theta) \neq 0$, nên ta có $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} \neq \vec{0}$, vậy $M(\theta)$ là một điểm chính quy của Γ, Γ nhận một tiếp tuyến tại $M(\theta)$, và tiếp tuyến này được định phương bởi $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$.



Ta ký hiệu $T(\theta)$ là tiếp tuyến tại $M(\theta)$ với Γ, và $V(\theta) = \angle\,((OM), T(\theta))\ [\pi]$.

Nếu $\rho'(\theta) \neq 0$, thì: $\tan V(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.

Nếu $\rho'(\theta) = 0$, thì: $V(\theta) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

Ta thường ký hiệu $\alpha(\theta)$ (hoặc $\varphi(\theta)$) là góc xác định bởi:

$$\alpha(\theta) = (\widehat{\vec{i}, T(\theta)})\ [\pi]$$

(xem thêm 5.12).

Nhờ hệ thức Chasles, ta được :

$$\alpha(\theta) = \angle(\vec{i}, (OM)) + \angle((OM), T(\theta)) = \theta + V(\theta)\,[\pi].$$

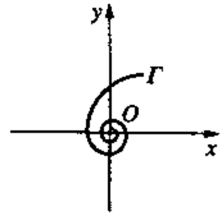
Để cho gọn, ta ký hiệu ρ, T, V, α thay vì $\rho(\theta)$, $T(\theta)$, $V(\theta)$, $\alpha(\theta)$. Vậy ta có các công thức :

$$\boxed{\tan V = \frac{\rho}{\rho'}} \qquad \boxed{\alpha = \theta + V\ [\pi]}$$

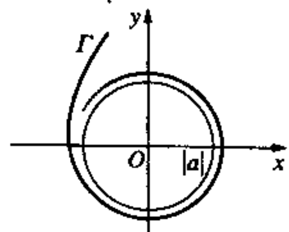
4.2.7 Các nhánh vô tận

Cho Γ là một đường cong có phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$.

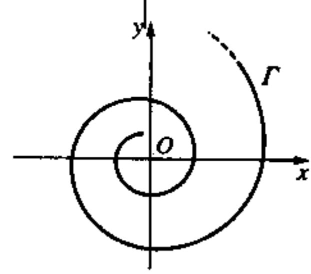
1) Nếu $\rho(\theta) \underset{\theta \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, ta nói rằng O là một **điểm - tiệm cận** của Γ.



2) Nếu $\rho(\theta) \underset{\theta \to \pm\infty}{\longrightarrow} a \neq 0$, ta nói rằng đường tròn tâm O và bán kính $|a|$ là một **đường tròn - tiệm cận** với Γ.



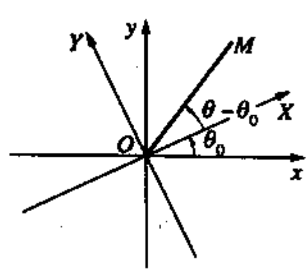
3) Nếu $\rho(\theta) \underset{\theta \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, ta nói rằng Γ có một **nhánh - xoắn ốc**.



4) Bây giờ ta giả thiết tồn tại θ_0 sao cho $\rho(\theta) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Ta thực hiện một phép đổi hệ quy chiếu, bằng cách lấy hệ quy chiếu mới $\mathcal{R}'$ là hệ quy chiếu suy từ $\mathcal{R}$ bằng phép quay tâm O và góc quay θ_0; ta ký hiệu XX, YY là các trục của $\mathcal{R}'$. Các tọa độ Descartes X, Y của một điểm chạy của Γ là :

$$\begin{cases} X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \\ Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \end{cases}$$



Theo giả thiết, $X(\theta) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \pm\infty$ và khi θ tiến đến θ_0, $Y(\theta)$ được biểu thị dưới một dạng không xác định.

Nếu $Y(\theta) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} L \in \mathbf{R}$, thì Γ nhận đường thẳng có phương trình Descartes là $Y = L$ trong $\mathcal{R}$ làm tiệm cận.

Nếu $Y(\theta) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \pm\infty$ thì Γ nhận một nhánh parabôlic có phương tiệm cận (XX), vì $\dfrac{Y(\theta)}{X(\theta)} = \tan(\theta - \theta_0) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} 0$.

VÍ DỤ :

1) Khảo sát nhánh vô tận (khi $\theta \to \frac{\pi}{4}^-$) của đường cong Γ có phương trình cực :

$$\rho = \frac{\tan\theta}{\cos 2\theta}.$$

Ta có : $\rho(\theta) \underset{\theta\to\frac{\pi}{4}}{\to} +\infty$.

Nếu ký hiệu $u = \theta - \frac{\pi}{4}$, ta được :

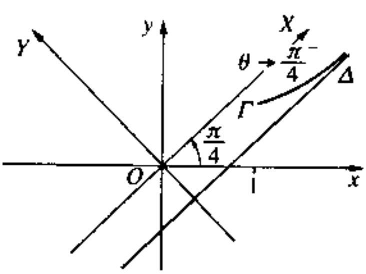
$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2u\right)}\sin u = -\frac{1+\tan u}{2(1-\tan u)\cos u} \underset{u\to 0^-}{\to} -\frac{1}{2},$$

vậy Γ nhận đường thẳng Δ có phương trình $Y = -\frac{1}{2}$ trong hệ quy chiếu suy từ $\mathcal{R}$ bởi phép quay tâm O và góc quay $\frac{\pi}{4}$, làm tiệm cận.

Hơn nữa, nhờ khai triển hữu hạn :

$$Y(\theta) = -\frac{1+\tan u}{2(1-\tan u)\cos u} = -\frac{1}{2} - u + o(u),$$

vậy $\quad Y(\theta) + \frac{1}{2} \underset{u\to 0^-}{\sim} -u > 0$.



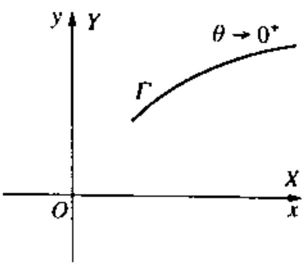
Từ đó ta kết luận rằng Γ nằm về phía trên đường tiệm cận (trong hệ quy chiếu $(O; X, Y)$) khi $\theta \to \frac{\pi}{4}^-$.

2) Khảo sát nhánh vô tận (khi θ dần tới 0^+) của đường cong Γ có phương trình cực :

$$\rho = \frac{2+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Trước hết: $\quad \rho(\theta) \underset{\theta\to 0^+}{\to} +\infty$.

Sau đó: $\quad Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \frac{2+\cos\theta}{\sin\theta} \underset{\theta\to 0^+}{\to} +\infty$.



Vậy Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $x'x$.

4.2.8 Các tính chất đối xứng

Cho Γ là một đường cong nhận một phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$.

1) Tính tuần hoàn

a) Ta giả thiết rằng ρ tuần hoàn và ký hiệu T (> 0) là một chu kỳ của ρ. Vì, với mọi θ, $\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$, nên ta chuyển từ $M\left[\theta,\rho(\theta)\right]$ sang $M\left[\theta+T,\rho(\theta)\right]$ bằng phép quay $\mathrm{Rot}_{O,T}$, vậy Γ bất biến đối với phép quay ấy.

Ta thu được đường cong Γ từ một đường cong Γ_0 (ứng với θ biến thiên trong một khoảng có độ dài T) bằng những phép quay liên tiếp tâm O và các góc quay T, $2T$...

Nếu T là một bội của 2π, thì ta thu được toàn bộ đường cong khi cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài T.

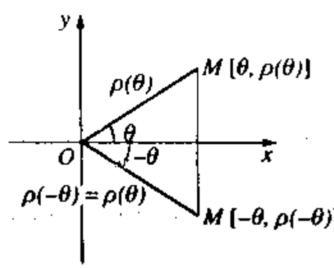
Nếu tồn tại một bội của T cũng là bội của 2π (tức là nếu $\frac{T}{\pi} \in \mathbb{Q}$), ta lại đưa về trường hợp trên.

Nếu $\frac{T}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, thì cách vẽ Γ sẽ khó khăn hơn.

b) Ta giả thiết rằng tồn tại $T > 0$ sao cho, với mọi θ, $\rho(\theta + T) = -\rho(\theta)$ (ta nói rằng T là một **phản - chu kỳ** của ρ) ; khi đó, với mọi θ, $\rho(\theta + 2T) = -\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$, vậy ρ tuần hoàn và $2T$ là một chu kỳ của ρ, như thế ta quy về a).

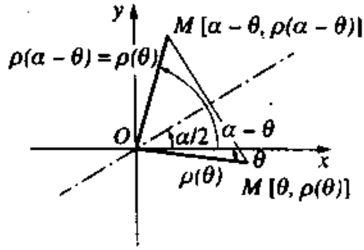
Hơn nữa, ta chuyển từ $M\left[\theta,\rho(\theta)\right]$ sang $M[\theta+T, -\rho(\theta)]$ bằng phép quay tâm O và góc quay $T + \pi$.

2) *a*) Ta giả thiết rằng, với mọi θ, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$; vậy thì ta sẽ chuyển từ $M[\theta, \rho(\theta)]$ sang $M[-\theta, \rho(-\theta)]$ bởi phép đối xứng qua $x'x$. Vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0;+\infty[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $x'x$.

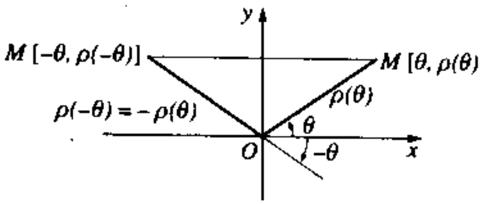


b) Tổng quát hơn, giả thiết tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi θ, $\rho(\alpha - \theta) = \rho(\theta)$; khi đó ta sẽ chuyển từ $M[\theta, \rho(\theta)]$ sang $M[\alpha-\theta, \rho(\alpha-\theta)]$ bởi phép đối xứng qua đường thẳng đi qua O và có góc cực $\frac{\alpha}{2}$.

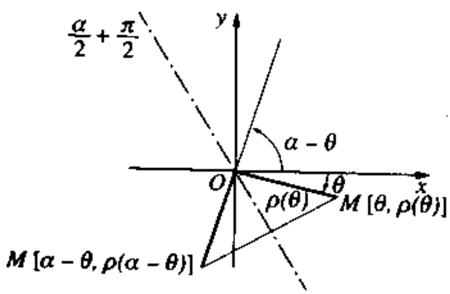
Vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[\frac{\alpha}{2};+\infty\right[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua đường thẳng đó.



c) Giả thiết rằng, với mọi θ, $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$; khi đó ta chuyển từ $M[\theta, \rho(\theta)]$ sang $M[-\theta, \rho(-\theta)]$ bởi phép đối xứng qua $y'y$. Vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0 ; +\infty[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.



d) Tổng quát hơn, giả thiết rằng tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi θ, $\rho(\alpha - \theta) = -\rho(\theta)$; khi đó ta chuyển từ $M[\theta, \rho(\theta)]$ sang $M[\alpha - \theta, \rho(\alpha - \theta)]$ bởi phép đối xứng qua đường thẳng đi qua O và có góc cực $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$. Ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[\frac{\alpha}{2};+\infty\right[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua đường thẳng ấy.



4.2.9 Phía lõm đối với gốc tọa độ, điểm uốn

Giả sử Γ là một đường cong nhận một phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$, trong đó ρ thuộc lớp C^2.

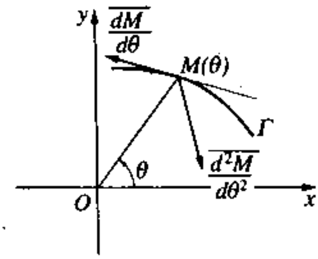
Ta ký hiệu (một cách lạm dụng) $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, và M là điểm chạy của Γ, xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$; ta có :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v}, \text{ trong đó } \vec{v} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j},$$

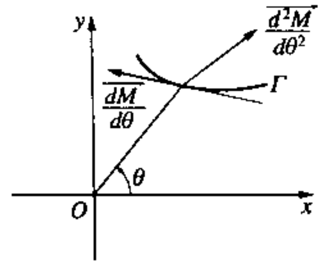
và
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2} = (\rho''-\rho)\vec{u} + 2\rho'\vec{v},$$

từ đó:
$$\det_{(\vec{u},\vec{v})}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}\right) = \begin{vmatrix} \rho' & \rho''-\rho \\ \rho & 2\rho' \end{vmatrix} = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''.$$

Nếu $\rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) > 0$, thì Γ **quay phía lõm** (trong lân cận của $M(\theta)$) về phía O.



Nếu $\rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) < 0$, thì Γ **quay phía lồi** (trong lân cận của $M(\theta)$) về phía O.



Nếu $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$ triệt tiêu và đổi dấu tại θ, thì $M(\theta)$ là một **điểm uốn** của Γ.

NHẬN XÉT :

Nếu ký hiệu $u = \frac{1}{\rho}$, ta có $u' = -\frac{\rho}{\rho^2}$ và $u'' = \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2}{\rho^3}$, từ đó $u + u'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^3}$, điều này có thể cho phép đơn giản các phép tính.

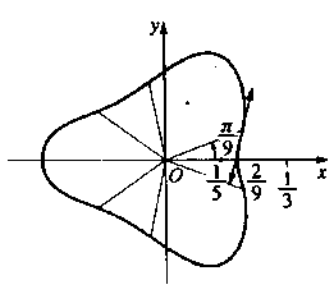
VÍ DỤ :

Xác định các điểm uốn của đường cong Γ có phương trình cực $\rho = \frac{1}{4 + \cos 3\theta}$.

Trước tiên ta chú ý rằng ρ là $\frac{2\pi}{3}$ - tuần hoàn và chẵn, điều này cho phép quy việc khảo sát về $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ta có: $u = \frac{1}{\rho} = 4 + \cos 3\theta$, $u'' = -9\cos 3\theta$, từ đó $u + u'' = 4 - 8\cos 3\theta$, biểu thức này triệt tiêu và đổi dấu khi và chỉ khi $\theta = \frac{\pi}{9}$.

Như vậy, Γ nhận sáu điểm uốn; đó là điểm ứng với $\theta = \frac{\pi}{9}$, và các điểm có được từ điểm đó bởi phép đối xứng qua $x'x$ và bởi các phép quay tâm O và các góc quay $\frac{2\pi}{3}$ và $-\frac{2\pi}{3}$.



4.2.10 Điểm bội

Cho Γ là một đường cong có phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$.

Ta sẽ bắt đầu bằng việc định nghĩa một khoảng (hay một hợp của những khoảng) liên quan đến θ, mà từ chúng ta thu được toàn bộ đường cong.

Ta sẽ khảo sát riêng trường hợp của O (nếu $O \in \Gamma$).

Những điểm bội có thể của Γ gồm trong những điểm $M(\theta)$ sao cho tồn tại $k \in \mathbb{Z}^*$ thỏa mãn $\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta)$, hoặc sao cho tồn tại $l \in \mathbb{Z}^*$ thỏa mãn $\rho(\pi + \theta + 2l\pi) = -\rho(\theta)$. Vậy ta sẽ giải hai phương trình này, với các ẩn θ, k, l.

VÍ DỤ :

Vẽ đường cong Γ có phương trình cực $\rho = 1 + 2\cos\theta - 4\cos^2\theta$ và chỉ rõ các điểm kép của Γ.

• ρ có tính 2π - tuần hoàn; vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π để nhận được toàn bộ đường cong.

• ρ chẵn; vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0\,;\,\pi]$, sau đó sẽ thực hiện phép đối xứng qua $(x'x)$.

$$\bullet\ \rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}, \ \text{ký hiệu là } \alpha \\ \text{hoặc} \\ \theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}, \ \text{ký hiệu là } \beta \end{array}\right.$$

Ta có: $\alpha \simeq 0{,}628$, $\beta \simeq 1{,}885$.

• ρ thuộc lớp C^1 trên $[0; \pi]$ và :

$$\forall \theta \in [0\,;\,\pi], \quad \rho'(\theta) = -2\sin\theta\,(1 - 4\cos\theta),$$

vậy ρ' triệt tiêu và đổi dấu tại một và chỉ một giá trị của θ, $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$, ký hiệu là γ, và ta có $\rho(\gamma) = \frac{5}{4}$.

Ta được bảng biến thiên của ρ :

θ	0		α		γ		β		π
ρ'	0		$+$		0		$-$		0
ρ	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-5

• **Điểm bội**

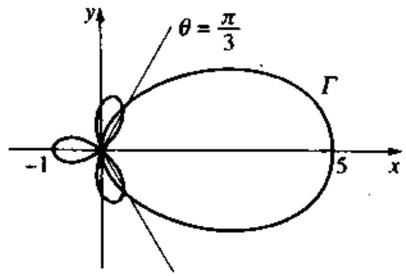
Vì ta thu được Γ (toàn bộ) khi cho θ biến thiên trong $[-\pi\,;\,\pi]$, nên ta sẽ giải phương trình $\rho(\theta - \pi) = -\rho(\theta)$, với ẩn $\theta \in [0\,;\,\pi]$.

Ta có, với mọi θ thuộc $[0\,;\,\pi]$:

$$\rho(\theta - \pi) = -\rho(\theta) \Leftrightarrow 1 - 2\cos\theta - 4\cos^2\theta = -(1 + 2\cos\theta - 4\cos^2\theta)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Vậy Γ nhận hai điểm kép (không kể O) có hệ tọa độ cực $\left[\frac{\pi}{3},1\right]$; $\left[\frac{2\pi}{3},-1\right]$.



4.2.11 Lược đồ khảo sát một đường cong cho bởi một phương trình cực

Cho Γ là đường cong có phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$.

a) Khảo sát ρ

1) Xác định miền xác định của ρ.

2) Tìm các tính đối xứng có thể của Γ, bằng cách tìm các chu kỳ, phản - chu kỳ, các công thức có chứa $\rho(-\theta)$, $\rho(\alpha - \theta)$ (α cố định phải tìm).

3) Các trị của θ làm triệt tiêu ρ, dấu của ρ, giới hạn của ρ tại các cận của các khoảng.

4) Khảo sát (không bắt buộc) sự biến thiên của ρ.

5) Bảng ghi lại các kết quả trên đây.

b) Khảo sát Γ

1) Gốc O có thuộc Γ không, và nếu có, xác định một hay các tiếp tuyến với Γ tại O.

2) Khảo sát các nhánh vô tận.

3) Xác định các điểm bội.

4) Khảo sát (không bắt buộc) về tính lõm và các điểm uốn.

5) Vẽ Γ.

4.2.12 Ví dụ về cách vẽ đường cong trong tọa độ cực

Trước tiên (các ví dụ 1 và 2) là các đường cong "cổ điển"; a chỉ một số thực > 0, cố định.

1) Đường hình tim $\Gamma: a(1 + \cos\theta)$

• $\mathrm{Def}(\rho) = \mathbb{R}$.

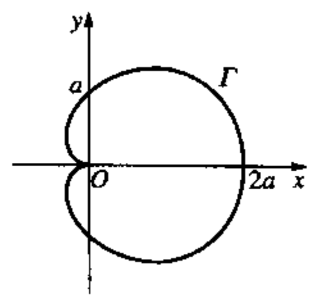
• ρ là 2π - tuần hoàn ; ta được toàn bộ đường cong bằng cách cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π.

• ρ chẵn; ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0 ; \pi]$, rồi thực hiện một phép đối xứng qua $x'x$.

• $\rho(\pi) = 0$ và, với mọi θ thuộc $[0 ; \pi]$, $\rho(\theta) > 0$.

• ρ khả vi trên $[0 ; \pi]$ và: $\forall\theta \in [0 ; \pi]$, $\rho'(\theta) = -a\sin\theta$.

θ	0		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$	0
$\rho(\theta)$	$2a$	↘	0



2) Đường xoắn ốc loga $\Gamma: \quad \rho = ae^{\lambda\theta}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ cố định)

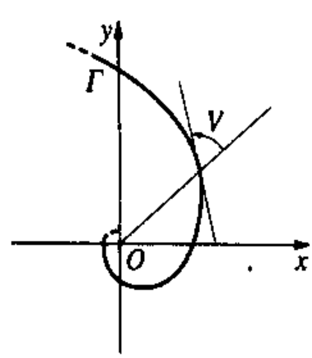
• Ta chuyển từ đường cong Γ_λ ứng với λ sang đường cong $\Gamma_{-\lambda}$, ứng với $-\lambda$, bằng phép đối xứng qua $x'x$. Mặt khác, Γ_0 là đường tròn tâm O và bán kính a. Bây giờ ta giả thiết $\lambda > 0$.

• $\rho(\theta) \underset{\theta\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, vậy O là điểm - tiệm cận của Γ.

• $\rho(\theta) \underset{\theta\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, vậy Γ nhận một nhánh xoắn ốc.

• ρ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và: $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\rho'(\theta) = ae^{\lambda\theta} > 0$.

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ'		$+$	
ρ	0	↗	$+\infty$



NHẬN XÉT :

- Ta có, với mọi θ thuộc $\mathbb{R}$, $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \dfrac{1}{\lambda}$, vậy góc V không đổi.

- Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ và $k = e^{\lambda\alpha}$; Γ bất biến đối với phép đồng dạng thuận, tâm O, tỷ số k, góc α, vì nếu $M[\theta\,;\,ae^{\lambda\theta}]$ thuộc Γ, thì $M'[\theta+\alpha\,;\,ae^{\lambda(\theta+\alpha)}]$ thuộc Γ, và M' suy ra từ M bằng phép đồng dạng đó.

3) **Đường** $\quad \Gamma :\ \rho = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$

- ρ là 2π - tuần hoàn ; vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong $[-\pi\,;\,\pi]$ để có được toàn bộ đường cong Γ.

- $\mathrm{Def}\,(\rho) \cap [-\pi\,;\,\pi] = \left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}\,;\pi\right]$

- $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

- ρ khả vi và, với mọi θ,

$$\rho'(\theta) = \frac{-2(2+\cos\theta+\sin\theta)}{(2\sin\theta+1)^2} < 0.$$

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của ρ.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
ρ'		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
ρ	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-1

- Nhánh vô tận, $\theta \to -\dfrac{5\pi}{6}$

Ta ký hiệu $u = \theta + \dfrac{5\pi}{6} \xrightarrow[\theta\to-\frac{5\pi}{6}]{} 0$. Ta có:

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+u\right)+1}{2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+u\right)+1}\sin u = \frac{-\sqrt{3}\cos u + \sin u + 1}{-\sqrt{3}\sin u - \cos u + 1}\sin u$$

$$= \frac{(1-\sqrt{3}) + u + o(u)}{-\sqrt{3}u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}(u + o(u^2)) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\,\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}-1}u + o(u)}{1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}u + o(u)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}+3}{6}u + o(u)\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3} - \frac{1+\sqrt{3}}{6}u + o(u).$$

Vậy Γ nhận làm tiệm cận đường thẳng Δ_1 có phương trình $Y_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O;\overrightarrow{OX_1};\overrightarrow{OY_1})$ xác định bởi $\angle\ (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX_1}) = -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$, và, khi $\theta \to (-\dfrac{5\pi}{6})^+$ (tương ứng : $(-\dfrac{5\pi}{6})^-$) nằm ở dưới (tương ứng : ở trên) đường thẳng Δ_1 (so với $(O;\overrightarrow{OX_1};\overrightarrow{OY_1})$).

• Nhánh vô tận, $\theta \to -\dfrac{\pi}{6}$

Với ký hiệu $v = \theta + \dfrac{\pi}{6} \underset{\theta\to-\frac{\pi}{6}}{\to} 0$, sau khi thực hiện các phép tính ta được :

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{6}v + o(v).$$

Vậy Γ nhận làm tiệm cận đường thẳng Δ_2 có phương trình $Y_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ trong hệ q.c.t.c.t. $(O;\overrightarrow{OX_2};\overrightarrow{OY_2})$ xác định bởi $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX_2}) = -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, và khi $\theta \to (-\dfrac{\pi}{6})^+$ (tương ứng : $((-\dfrac{\pi}{6})^-$), Γ nằm ở trên (tương ứng : ở dưới) Δ_2 (so với $(O;\overrightarrow{OX_2};\overrightarrow{OY_2})$).

• Điểm kép

Với mọi θ thuộc $[-\pi;0]$, ta có:

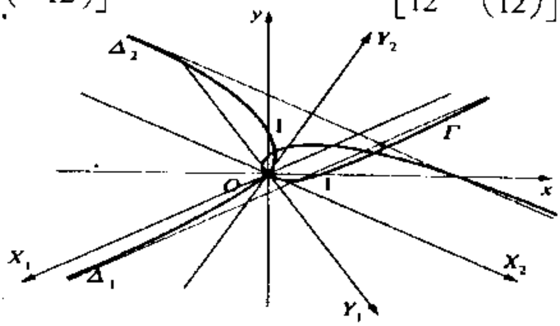
$$\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta) \Leftrightarrow \frac{-2\cos\theta+1}{-2\sin\theta+1} = -\frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\theta\cos\theta = 1 \Leftrightarrow 2\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2\theta \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ \text{hoặc} \\ \pi - 2\theta \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2\theta \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [\pi] \\ \text{hoặc} \\ \theta \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [\pi] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\theta = -\frac{11\pi}{12} \quad \text{hoặc} \quad \theta = -\frac{7\pi}{12}\right).$$

Vậy Γ nhận hai điểm kép (không kể O) có tọa độ cực là $\left[-\dfrac{11\pi}{12},\rho\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right)\right]$, $\left[-\dfrac{7\pi}{12},\rho\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$, các tọa độ này quy về $\left[\dfrac{\pi}{12},\ \rho\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$, $\left[\dfrac{5\pi}{12},\ \rho\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]$



4.2.13 Tính diện tích phẳng trong tọa độ cực

Ta nhắc lại các kết quả đã biết trong Tập 2, 13.1.6.

◆ **Mệnh đề** Cho một đường cong được định hướng Γ có phương trình $\rho = \rho(\theta)$, gốc A, mút B. Diện tích của hình quạt D giới hạn bởi Γ, OA, OB là :

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \rho^2 \mathrm{d}\theta.$$

VÍ DỤ :

Tính diện tích của phần mặt phẳng gồm giữa một vòng khuyên lớn và một vòng khuyên bé của đường cong Γ có phương trình $\rho = 1 + 2\cos 3\theta$.

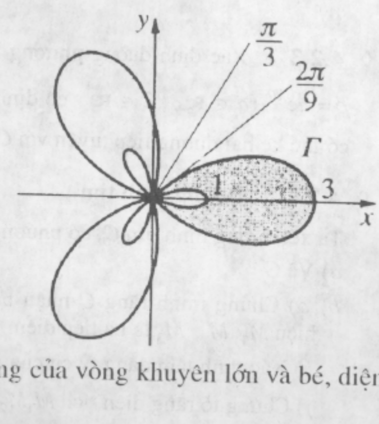
Ta bắt đầu bằng việc khảo sát Γ và vẽ đường cong Γ.

- ρ là $\frac{2\pi}{3}$ - tuần hoàn ; vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài $\frac{2\pi}{3}$, rồi thực hiện hai lần phép quay tâm O và góc quay $\frac{2\pi}{3}$.

- ρ chẵn; vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua trục $x'x$.

- Rất dễ xác định dấu của $\rho(\theta)$ và $\rho'(\theta)$.

θ	0		$\frac{2\pi}{9}$		$\frac{\pi}{3}$
ρ'	0	$-$		$-$	0
ρ	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Ta ký hiệu $\mathcal{A}_1$ và $\mathcal{A}_2$ là hai diện tích tương ứng của vòng khuyên lớn và bé, diện tích phải tìm sẽ là $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$.

Vì các lý do đối xứng, ta có:

$$\mathcal{A}_1 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{9}} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{và} \quad \mathcal{A}_2 = 2\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

- $\mathcal{A}_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{9}} (1 + 4\cos 3\theta + 4\cos^2 3\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{9}} (3 + 4\cos 3\theta + 2\cos 6\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

- $\mathcal{A}_2 = \int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} (3 + 4\cos 3\theta + \cos 6\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Cuối cùng: $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \simeq 2{,}799.$

Bài tập

◊ **4.2.1** Vẽ các đường cong xác định trong tọa độ cực sau đây:

a) $\rho = \sin 2\theta + \sin\theta$ *b)* $\rho = \sin\dfrac{\theta}{3}$ *c)* $\rho = \sin\dfrac{2\theta}{3}$ *d)* $\rho = \dfrac{\tan\theta}{1-\sin\theta}$

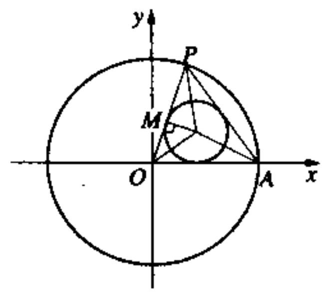
e) $\rho = \dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta}$ *f)* $\rho = 1 + \tan\theta$ *g)* $\rho = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1-2\cos\theta}$ *h)* $\rho = \dfrac{1-\sqrt{2}\cos\theta}{1-2\sin\theta}$

i) $\rho = \dfrac{\sin 2\theta}{1-\tan\theta}$ *j)* $\rho = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ *k)* $\rho = \ln\left(1+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ *l)* $\rho = e^{\frac{1}{2\sin\theta}}$

m) $\rho = \theta$ *n)* $\rho = \theta^2$ *o)* $\rho = \dfrac{1}{\theta}$ *p)* $\theta = \sqrt{\theta(\theta-1)}$

q) $p = \dfrac{1}{e^{\theta}-1}$.

◊ **4.2.2** Một điểm P vạch đường tròn C tâm O bán kính OA. Xác định quỹ tích các điểm tiếp xúc M của đường tròn nội tiếp tam giác OAP với đường thẳng (OP).



◊ **4.2.3** Xác định đường **phương khuy** của đường xoắn ốc loga C có phương trình cực $\rho = ae^{\lambda\theta}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \in \mathbb{R}^*$ cố định), tức là quỹ tích các điểm thuộc mặt phẳng từ đó ta có thể kẻ hai đường tiếp tuyến với C và hai đường tiếp tuyến này trực giao với nhau.

◊ **4.2.4*** **Đường hình tim**

Ta xét đường hình tim C, có phương trình cực $\rho = 1 + \cos\theta$.

a) Vẽ C.

b) α) Chứng minh rằng C nhận ba đường tiếp tuyến có cùng phương cho trước; ta kí hiệu M_1, M_2, M_3 là ba tiếp điểm.

β) Xác định tâm đẳng tỷ cự của M_1, M_2, M_3.

γ) Chứng tỏ rằng diện tích $M_1M_2M_3$ không đổi.

c) Một điểm M vạch nên C; chứng tỏ tồn tại M_1, M_2 trên C sao cho các tiếp tuyến với C tại M, M_1, M_2, song song (xem b) α)). Xác định quỹ tích trung điểm I của M_1M_2.

d) Xác định quỹ tích của điểm đối xứng của O qua một tiếp tuyến di động của C.

e) Một đường thẳng di động D đi qua O cắt C tại hai điểm P, Q ngoài điểm O ; ta ký hiệu $A(2, 0)$.

α) Xác định quỹ tích của tâm đẳng tỷ cự của APQ.

β) Xác định quỹ tích của giao điểm I của các tiếp tuyến với C tại P và Q.

◊ **4.2.5** Tính các diện tích sau:

a) Diện tích vòng khuyên lớn của C: $\rho = \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$.

b) Diện tích trong toàn phần của đường cong $C : \rho = \sin 2\theta$.

4.3 Đường cong cho bởi phương trình Descartes

4.3.1 Đại cương

Cho U là một tập mở của $\mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, f: $U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^k trên U. Ta khảo sát đường cong Γ có **phương trình Descartes** (viết tắt: PTD) : $f(x, y) = 0$, tức là tập hợp Γ các điểm $M(x, y)$ của $\mathcal{E}_2$ sao cho $f(x, y) = 0$.

Chẳng hạn, phương trình $x^2 + y^2 - 1 = 0$ biểu diễn đường tròn tâm O và bán kính 1.

Nếu Γ được cho bởi một BDTS $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, thì ta sẽ thu được PTD bằng cách khử t trong $x = x(t)$ và $y = y(t)$.

VÍ DỤ :

Ta xét hình lá Descartes Γ có BDTS $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ (xem 4.1.7, Ví dụ 4).

Ta có: $\left(\exists t \in \mathbf{R} \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\exists t \in \mathbf{R} \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = tx \end{cases} \right)$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = y = 0 \\ \text{hoặc} \\ x \neq 0 \text{ và } x\left(1 + \dfrac{y^3}{x^3}\right) = \dfrac{y}{x} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - xy = 0 .$$

Như vậy, một PTD của Γ là: $x^3 + y^3 - xy = 0$.

Ngược lại, cho Γ là một đường cong được cho bởi một PTD $f(x, y) = 0$. Nói chung, không thể nhận được một BDTS "đơn giản" của Γ. Ta có thể thử biểu diễn Γ (một cách cục bộ) bởi một hệ thức $y = \varphi(x)$ (hoặc $x = \Psi(y)$), trong đó φ là một hàm số, tường minh hoặc ẩn.

Ta nhắc lại định lý hàm ẩn (xem Tập 2, 12.6.2, Định lý) :

◆ **Định lý 1** Cho U là một tập mở của $\mathbb{R}^2$, $A = (a, b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ.

Ta giả thiết : $\begin{cases} f(A) = 0 \\ f \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } U \\ f'_y(A) \neq 0 \end{cases}$.

Khi đó tồn tại hai khoảng mở J, K có tâm lần lượt tại a và b sao cho $J \times K \subset U$ và thỏa mãn điều kiện sau : tồn tại $\varphi : J \to K$ thuộc lớp C^1, và duy nhất, sao cho :

$$\forall (x, y) \in J \times K, \quad (f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)).$$

Hơn nữa (xem Tập 2, 12.6.2, Mệnh đề) :

◆ **Mệnh đề** Với các giả thiết và với các ký hiệu của định lý hàm ẩn, nếu f thuộc lớp C^k trên U ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), thì φ thuộc lớp C^k trong lân cận của a, và trong lân cận của a ta có :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}.$$ ■

Với các giả thiết và với các ký hiệu của định lý hàm ẩn, tại A (a, b) đường cong Γ có PTD $f(x,y) = 0$ có một tiếp tuyến T với hệ số chỉ phương $\varphi'(a)$, tức là, $-\dfrac{f'_x(A)}{f'_y(A)}$, vậy T nhận PTD :

$$(x-a)f'_x(A) + (y-b)f'_y(A) = 0.$$

Khi đó chú ý rằng, nếu $f'_y(A) = 0$ và $f'_x(A) \neq 0$, thì có thể áp dụng định lý hàm ẩn bằng cách trao đổi các vai trò của x và y, và tại A, Γ có một tiếp tuyến với PTD trên đây.

Ta nhắc lại một định nghĩa (xem Tập 2, 12.8.1, Định nghĩa 1).

◆ **Định nghĩa 1** Cho U là một tập mở của $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1. Ta gọi ánh xạ từ U vào $\mathbb{R}^2$, ký hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}} f$ định nghĩa bởi :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = (f'_x, f'_y).$$

là **gradient** của f.

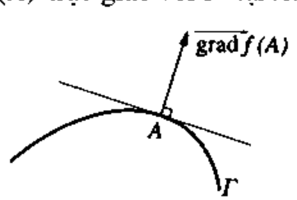
◆ **Định lý 2** Cho U là một tập mở của $\mathbb{R}^2$, $A = (a, b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1, Γ là đường cong có PTD $f(x, y) = 0$.

Ta giả thiết $\begin{cases} f(A) = 0 \\ \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \neq \vec{0} \end{cases}$.

Khi đó tại A, Γ có một tiếp tuyến với PTD :

$$(x-a)f'_x(A) + (y-b)f'_y(A) = 0.$$

Nói cách khác, $\overrightarrow{\text{grad}} f(A)$ trực giao với Γ tại A.



◆ **Định nghĩa 2** Cho U là một tập mở của $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1. Ta gọi các đường cong Γ_λ có PTD $f(x, y) = \lambda$, với $\lambda \in \mathbb{R}$, là các **đường đồng mức** của f.

Với các ký hiệu đó, Γ_λ nhận PTD $f_\lambda(x, y) = 0$, trong đó $f_\lambda : U \xrightarrow[(x,y) \mapsto f(x,y) - \lambda]{} \mathbb{R}$, và như thế, với mọi (x, y) thuộc U, $\overrightarrow{\text{grad}} f_\lambda (x, y)$ không phụ thuộc λ.

4.3.2 Ví dụ

1) Để nhớ lại ta phải nhắc đến các đường thẳng được cho bằng một PTD (xem 1.2.1, 2) và các đường cônic được định nghĩa bằng một PTD (xem 2.2.5, *3*)).

2) Vẽ đường cong Γ có PTD : $xy(x - y) + x^2 + y^2 = 0$.

Ta ký hiệu $f :\ \mathbf{R}^2 \xrightarrow[xy\mapsto(xy)(x-y)+x^2+y^2]{} \mathbf{R}$.

• Tính đối xứng

Ta chú ý : $\forall(x,y)\ \mathbb{R}^2$, $f(-y, -x) = f(x, y)$, vậy Γ nhận đường phân giác thứ hai B_2 làm trục đối xứng.

• Khảo sát tại O

Đường cong Γ đi qua O, vì $f(0, 0) = 0$.

Chuyển sang tọa độ cực : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, ta có :

$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow (\rho = 0 \text{ hoặc } \cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta) + 1 = 0).$$

Vả lại, điều này còn cung cấp một phương trình cực của Γ, làm cơ sở cho việc khảo sát và vẽ Γ.

Ta chú ý rằng : $1 = |\rho\cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)| \le 2\rho$,

vậy $\rho \ge \dfrac{1}{2}$. Điều này chứng tỏ O là một điểm cô lập của Γ.

• Cho $x \in \mathbb{R}$; ta có : $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (1 - x)y^2 + x^2y + x^2 = 0$.

Nếu $x = 1$, thì : $f(1, y) = 0 \Leftrightarrow y = -1$.

Giả thiết $x \ne 1$. Tam thức (đối với y) $(1 - x)y^2 + x^2y + x^2$ có biệt thức :

$$\Delta(x) = x^4 - 4x^2(1 - x) = x^2(x^2 + 4x - 4).$$

Từ đó, tùy theo vị trí của x đối với x_1, x_2 (trong đó $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$ là những không điểm khác không của Δ), ta suy ra số lượng các điểm thuộc Γ có hoành độ là x :

x	$-\infty$		$-2-2\sqrt{2}$		0		$-2+2\sqrt{2}$		1		$+\infty$
Số điểm trên Γ có hoành độ x		2	1	0	1	0	1	2	1	2	

Chúng ta tìm những điểm $M(x, y)$ thuộc Γ sao cho $f'_x(x,y) \ne 0$ và $f'_y(x,y) = 0$; tại các điểm này tiếp tuyến song song với $y'y$.

Vì $f(x, .)$ là một tam thức bậc hai, nên đó chính là các điểm thuộc Γ có hoành độ x_1, x_2 vừa xác định trên đây. Hơn nữa :

$$\begin{cases} x = x_1 \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = -2 - 2\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{x_1^2}{2(1 - x_1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{2} \\ y = -2 \end{cases},$$

và, tương tự : $\begin{cases} x = x_2 \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy các điểm $(-1 - 2\sqrt{2}, -2)$ và $(-2 + 2\sqrt{2}, -2)$ là các điểm thuộc Γ tại đó tiếp tuyến song song với $y'y$.

• Nhánh vô tận

Ta thừa nhận rằng sẽ thu được các phương tiệm cận của một đường cong đại số Γ bằng cách cho triệt tiêu phần thuần nhất có bậc cao nhất trong PTĐ của Γ; ở đây Γ nhận ba phương tiệm cận, có PTĐ $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 0$.

Khi cắt Γ bởi một đường thẳng có PTĐ $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), ta được (các tính toán đã đưa ra ở phần trên) :

$$(1-\alpha)y^2 + \alpha^2 y + \alpha^2 = 0.$$

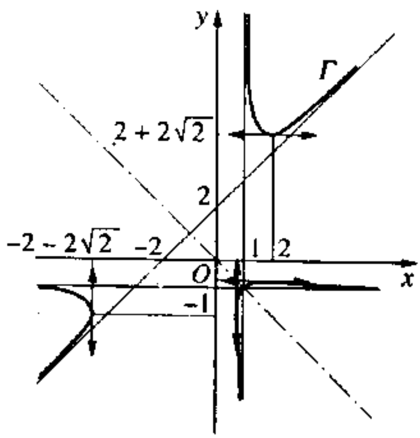
Nếu $\alpha \neq 1$, phương trình bậc hai này có thể có hai nghiệm thực ; khi $\alpha = 1$, một trong hai nghiệm sẽ "đi ra vô tận", và khi đó Γ sẽ nhận đường thẳng có phương trình $x = 1$ làm tiệm cận.

Nhờ phép đối xứng qua B_2, Γ cũng nhận đường thẳng có phương trình $y = -1$ làm tiệm cận.

Bây giờ ta cắt Γ bởi đường thẳng có PTĐ $y = x + \beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} y = x+\beta \\ xy(x-y) + x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+\beta \\ (2-\beta)x^2 + (2\beta-\beta^2)x + \beta^2 = 0. \end{cases}$$

Với $\beta > 2$, phương trình này có hai nghiệm cho x ; với $\beta = 2$, cả hai nghiệm ấy "đều đi ra vô tận", và khi đó Γ nhận đường thẳng có PTĐ $y = x + 2$ làm tiệm cận.



3) Khảo sát dáng điệu của các đường đồng mức của $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2}\,dt$$

Với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu Γ_λ là đường đồng mức của f có độ cao λ, tức là đường cong trên mặt phẳng có PTĐ là : $f(x, y) = \lambda$.

Ta ký hiệu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ định nghĩa bởi : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\phi(u) = \int_0^u e^{-t^2}\,dt$

Vậy ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\qquad f(x, y) = \phi(y) - \phi(x)$,

và Γ_λ có PTĐ : $\qquad \phi(y) = \phi(x) + \lambda$.

Ánh xạ ϕ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}$ và : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\phi'(u) = e^{-u^2} > 0$,

vậy ϕ tăng nghiêm ngặt.

Hơn nữa, ϕ lẻ vì, bằng phép đổi biến $s = -t$:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \phi(-u) = \int_0^{-u} e^{-t^2}\,dt = -\int_0^u e^{-s^2}\,ds = -\phi(u).$$

Mặt khác, vì $t \mapsto e^{-t^2} \geq 0$ và rằng $t^2 e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$, nên ánh xạ $t \mapsto e^{-t^2}$ khả tích trên $[0\,;+\infty[$, vậy ϕ có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$, và giới hạn này là $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

u	0	$+\infty$
ϕ'	$+$	
ϕ	0 $\nearrow$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Theo Tập 3, bài tập 2. 5. 6. *c*) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ánh xạ ϕ là một C^1 - vi phôi từ $\mathbb{R}$ lên $\left]-\frac{\sqrt{\pi}}{2};\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right[$.

Nếu $\lambda \leq -\sqrt{\pi}$ hoặc $\lambda \geq \sqrt{\pi}$, thì $\Gamma_\lambda = \varnothing$

Vậy ta giả thiết $-\sqrt{\pi} < \lambda < \sqrt{\pi}$.

Ta chú ý là : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x, y) = \lambda \Leftrightarrow f(y,x) = -\lambda$,

vậy $\Gamma_{-\lambda}$ suy từ Γ_λ bằng phép đối xứng qua đường phân giác thứ nhất. Vậy ta giới hạn việc khảo sát vào trường hợp $0 \leq \lambda < \sqrt{\pi}$.

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có :

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} < \phi(x) + \lambda < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \lambda < \phi(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \lambda \Leftrightarrow \phi(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \lambda,$$

vậy nếu $\lambda > 0$ thì Γ_λ là đường cong biểu diễn ánh xạ

$$\varphi_\lambda : D_\lambda = \left]-\infty\,;\phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \lambda\right)\right[\underset{x \mapsto \phi^{-1}(\phi(x)+\lambda)}{\to} \mathbb{R}$$

Ánh xạ φ_λ thuộc lớp C^1 trên D_λ và, với mọi x thuộc D_λ :

$$\varphi'_\lambda(x) = (\phi^{-1})'(\phi(x)+\lambda)\phi'(x) = \frac{\phi'(x)}{\phi'(\phi^{-1}(\phi(x+\lambda)))} > 0.$$

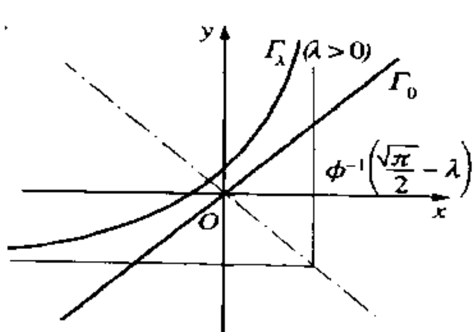
x	$-\infty$	$\phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \lambda\right)$
φ'_λ	$+$	
φ_λ	$\phi^{-1}\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \lambda\right)$ $\nearrow$	$+\infty$

Với $\lambda = 0$, Γ_0 là đường phân giác thứ nhất.

Vì, với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$f(-y,-x) = \int_{-y}^{-x} e^{-t^2}\,dt \underset{[u=-t]}{=} -\int_y^x e^{-u^2}\,du = f((x,y),$$

nên Γ_λ đối xứng đối với đường phân giác thứ hai.



Bài tập

◊ **4.3.1** Vẽ các đường cong có phương trình Descartes $F(x,y) = 0$, với $F(x,y)$ cho sau đây:

a) $y^3 - y + 2x^2 - x = 0$

b) $x^4 - y^4 - 96x^2 + 100y^2 = 0$

c) $x^5 + 2y^5 - 5xy^2 = 0$

d) $x^7 + 3x^2y^2 + 2y^3 = 0$

e) $x^5y^4 - 4x^3y + 3 = 0$.

◊ **4.3.2** *a*) Chứng minh rằng đường cong C có phương trình Descartes :

$$y^2(2 - y^2) - x^2(x-2)(x-1) = 0 \quad \text{bị chặn.}$$

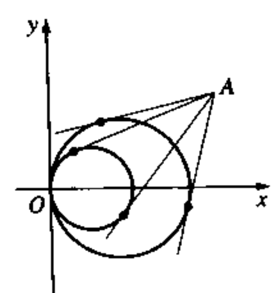
b) Tổng quát hơn, cho $P, Q \in \mathbf{R}[X] - \{0\}$, có cùng bậc chẵn n và với các hệ tử của X^n có dấu đối nhau. Chứng minh rằng đường cong C có phương trình Descartes $P(x) = Q(y)$ bị chặn.

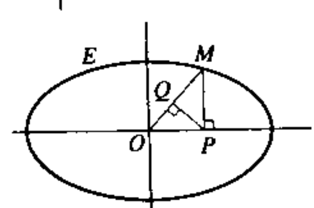
◊ **4.3.3** Vẽ đường cong C có phương trình Descartes $\displaystyle\int_x^y \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} = 1$.

◊ **4.3.4** Vẽ đường cong C có phương trình Descartes $F(x, y) = 0$, trong đó :

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto \int_x^y f \quad \text{và} \quad F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \le 0 \\ \cos t & \text{nếu } t > 0 \end{cases}$$

◊ **4.3.5** Xác định một phương trình Descartes của quỹ tích các điểm tiếp xúc của các tiếp tuyến kẻ từ một điểm cố định A (x_0, y_0) đến các đường tròn vị tự của đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 - 2x = 0$ trong các phép vị tự tâm O.





◊ **4.3.6** Cho E là một elip, O là tâm của nó, $M \in E$, P là hình chiếu vuông góc của M lên trục lớn của E. Xác định một phương trình Descartes của quỹ tích của giao điểm Q của (OM) với đường vuông góc kẻ từ P đến (OM).

4.4 Hình bao của một họ đường thẳng trong mặt phẳng

Mục §4.4 này dành cho sinh viên năm thứ hai.

4.4.1 Lý thuyết

Cho $(D_t)_{t\in I}$ là một họ đường thẳng của mặt phẳng, họ này được chỉ số hóa bởi một khoảng I của $\mathbb{R}$ (không rỗng cũng không suy biến thành một điểm). Ta giả thiết tồn tại các ánh xạ $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên I sao cho, với mọi t thuộc I, D_t nhận PTĐ : $\quad a(t)x + b(t)y + c(t) = 0.$

1) Ta giả thiết tồn tại một cung tham số hóa $\Gamma\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases}$ $(t \in I)$ sao cho x, y thuộc lớp C^1 trên I và rằng, với mọi t thuộc I, tiếp tuyến với Γ tại $M(t)$ là đường thẳng D_t.

Vậy ta có : $\quad \forall t \in I, \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0\end{cases}.$

Lấy đạo hàm đẳng thức thứ nhất và sau khi trừ từng vế, ta có :

$$\forall t \in I \quad \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0\end{cases}.$$

Ta giả thiết : $\qquad \forall t \in I, \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t)\end{vmatrix} \neq 0.$

Khi đó, hệ hai phương trình hai ẩn :

$$(S_t)\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0\end{cases}$$

có một và chỉ một nghiệm (x, y) trong $\mathbb{R}^2$, mà ta có thể tính theo công thức Cramer.

2) Ngược lại, giả thiết : $\forall t \in I$, $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t)\end{vmatrix} \neq 0$ và xét cung tham số hóa Γ biểu thị bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases}$, trong đó $(x(t), y(t))$ là nghiệm trong $\mathbb{R}^2$ của hệ phương trình

$$(S_t)\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0\end{cases}.$$

Ta có thể (trên lý thuyết) biểu diễn $x(t)$ và $y(t)$ theo t bằng công thức Cramer :

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -c(t) & b(t) \\ -c'(t) & b'(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t)\end{vmatrix}}, \qquad y(t) = \frac{\begin{vmatrix} a(t) & -c(t) \\ a'(t) & -c'(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t)\end{vmatrix}}.$$

Giả thiết a, b, c thuộc lớp C^2 trên I ; khi đó x, y thuộc lớp C^1 trên I. Khi lấy đạo hàm đẳng thức thứ nhất rồi trừ từng vế, ta có :

$$\forall t \in I, \quad a(t)\,x'(t) + b(t)\,y'(t) = 0.$$

Từ đó suy ra rằng, với mọi t thuộc I sao cho $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$, tiếp tuyến tại M với Γ có PTĐ : $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, vậy đó là D_t.

Ta tóm tắt việc khảo sát bằng một Định nghĩa và một Định lý.

◆ **Định nghĩa** Cho $(D_t)_{t \in I}$ là một họ đường thẳng của mặt phẳng có PTĐ :

$$D_t \mid a(t)x + b(t)y + c(t) = 0,$$

trong đó $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 và :

$$\forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ta gọi mỗi đường cong Γ của mặt phẳng thỏa mãn :

- Mọi D_t đều tiếp xúc với Γ
- Tại mỗi điểm Γ có một tiếp tuyến và tiếp tuyến này là một đường thẳng thuộc họ $(D_t)_{t\in I}$

là **hình bao** của $(D_t)_{t\in I}$.

◆ **Định lý** Cho $(D_t)_{t \in I}$ là một họ đường thẳng của mặt phẳng có PTĐ :

$$D_t \mid a(t)x + b(t)y + c(t) = 0,$$

trong đó $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 và :

$$\forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Khi đó $(D_t)_{t \in I}$ nhận một hình bao Γ, và Γ là cung tham số hóa $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, trong đó với mọi t thuộc I, $(x(t), y(t))$ là nghiệm của hệ phương trình (với ẩn $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}.$$

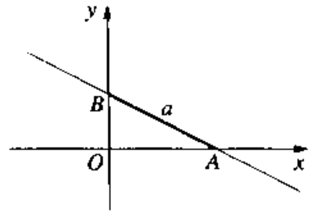
(Ta giả thiết ở đây : $\forall t \in I, \quad (x'(t), y'(t) \neq (0, 0))$.

Với mọi t thuộc I, điểm $(x(t), y(t))$, nghiệm của hệ phương trình trên, được gọi là **điểm đặc trưng** của D_t (hoặc của Γ).

Đường thẳng có PTĐ $a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0$ thường được ký hiệu là D'_t, và được gọi là **đường thẳng - đạo hàm** của D_t.

4.4.2 Ví dụ

1) Xác định hình bao của đường thẳng (AB), trong đó $A \in x'x$, $B \in y'y$, $AB = a > 0$ (a cố định).



Ta tham số hóa : $A\,(a\cos t, 0)$, $B\,(0, a\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Đường thẳng (AB), được ký hiệu là D_t, có PTĐ :

$$D_t \mid x\sin t + y\cos t = a\cos t\sin t.$$

Từ đó : $$D'_t \mid x\cos t - y\sin t = a(\cos^2 t - \sin^2 t).$$

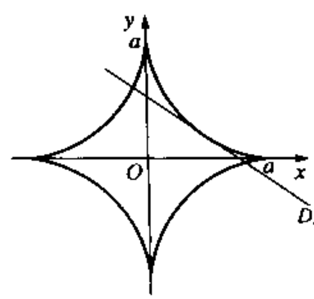
Giải hệ hai phương trình, ta có :

$$\begin{cases} x = a\cos t\sin^2 t + a\cos t\,(\cos^2 t - \sin^2 t) = a\cos^3 t \\ y = a\cos^2 t\sin t + a\cos t\,(\cos^2 t - \sin^2 t) = a\sin^3 t \end{cases}.$$

Như vậy, hình bao Γ của (AB) là đường hình sao

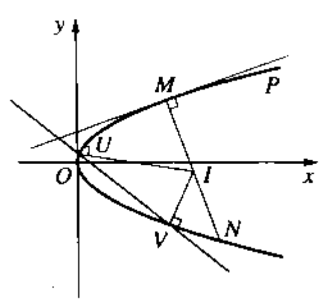
(xem 4.1.7) có PTĐ $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Điểm đặc trưng của D_t, với tọa độ $(a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, là điểm tại đó D_t tiếp xúc với Γ.



2) Cho P là parabol có PTĐ $y^2 = 2px$ ($p > 0$ cố định).

Một điểm M vạch nên P ; pháp tuyến với P tại M cắt lại P tại một điểm N. Từ trung điểm I của MN ta kẻ các pháp tuyến với P (khác với (IM)) cắt P tại hai điểm U, V. Xác định hình bao của (UV).



Ta tham số hóa : $M\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Một vectơ tiếp xúc với P tại M là : $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\left(\dfrac{t}{p}, 1\right)$, hoặc, do tính cộng tuyến, (t, p).

Từ đó một PTĐ của pháp tuyến N_t tại M với P là :

$$t\left(x-\frac{t^2}{2p}\right)+p(y-t)=0 .$$

Vậy ta khảo sát $N_t \cap P$:

$$(x, y) \in N_t \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ t\left(x-\dfrac{t^2}{2p}\right)+p(y-t)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2px} \\ (y-t)\left(\dfrac{t}{2p}(y+t)+p\right)=0 \end{cases}$$

từ đó có tọa độ của N :

$$y_N = -\frac{2p^2}{t}-t \text{, và do đó } x_N = \frac{y_N^2}{2p} = \frac{2p^3}{t^2}+2p+\frac{t^2}{2p} ,$$

và cuối cùng các tọa độ của trung điểm I của MN :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{p^3}{t^2}+p+\frac{t^2}{2p} , \quad y_I = \frac{1}{2}(y_M + y_N) = -\frac{p^2}{t} .$$

Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$, $W\left(\dfrac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$ là một điểm thuộc P ; một PTĐ của pháp tuyến N_λ với P tại W là (xem trên đây) :

$$\lambda\left(x-\frac{\lambda^2}{2p}\right)+p(y-\lambda)=0 .$$

$$\text{Từ đó : } \quad I \in N_\lambda \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{p^3}{t^2}+p+\frac{t^2}{2p}-\frac{\lambda^2}{2p}\right)+p\left(-\frac{p^2}{t}-\lambda\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^3}{t^2}(\lambda-t)+\frac{\lambda}{2p}(t^2-\lambda^2)=0$$

$$\Leftrightarrow -2p^4+\lambda t^2(t+\lambda)=0 \text{, nếu } t \neq \lambda.$$

Điều này chứng tỏ rằng các tung độ u, v của các điểm U, V là các nghiệm của phương trình bậc hai $t^2\lambda^2 + t^3\lambda - 2p^4 = 0$, với ẩn $\lambda \in \mathbb{R}$.

Biệt thức là : $t^6 + 8p^4t^2 \geq 0$.

Ta có : $u + v = -t$ và $uv = -\dfrac{2p^4}{t^2}$.

Một PTD của (UV) là (do $u \neq v$) :

$$\begin{vmatrix} x-\dfrac{u^2}{2p} & \dfrac{v^2}{2p}-\dfrac{u^2}{2p} \\ y-u & v-u \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-\frac{u^2}{2p}-\frac{u+v}{2p}(y-u)=0$$

$$\Leftrightarrow 2px - (u+v)y + uv = 0$$

$$\Leftrightarrow 2px + ty - \frac{2p^4}{t^2} = 0\,.$$

Như vậy, đường thẳng (UV), ký hiệu là D_t, có PTD :

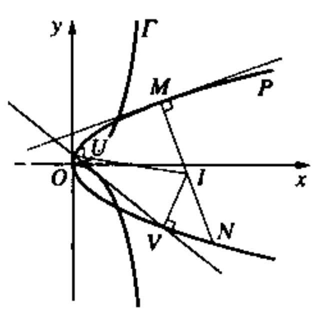
$$D_t \mid 2px + ty - \frac{2p^4}{t^2} = 0\,.$$

Ta sẽ được một BDTS của hình bao Γ của (UV) bằng cách giải

$$\begin{cases} 2px + ty - \dfrac{2p^4}{t^2} = 0 & D_t \\ y + \dfrac{4p^4}{t^3} = 0 & D'_t \end{cases}$$

Từ đó $\quad \Gamma: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{2p^4}{t^2}+\dfrac{4p^4}{t^2}\right) = \dfrac{3p^3}{t^2} \\ y = -\dfrac{4p^4}{t^3} \end{cases}.$

Ta được một PTD của Γ bằng cách khử t : $\quad \Gamma : 27py^2 = 16x^3$.



Bài tập

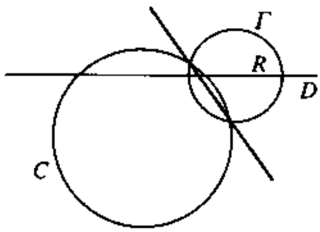
◊ **4.4.1** Xác định hình bao của họ đường thẳng $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$, có phương trình Descartes cho dưới đây :

$a)$ $(1 - t^2)x + 2ty - (1 + t^2) = 0$

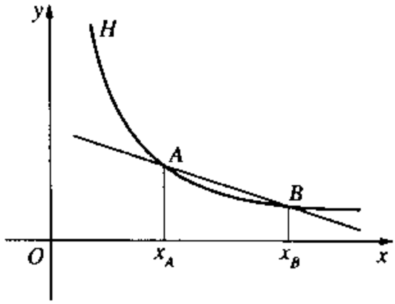
$b)$ $x\,\mathrm{ch}^2 t + y\,\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 2t = 0$

$c)$ $(t - 2)x + (3t - 2t^2)y + t^3 = 0.$

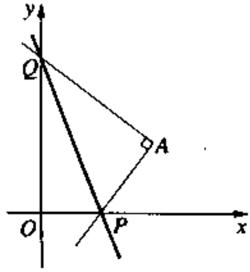
◊ **4.4.2** Cho một đường tròn C và một đường thẳng D. Một đường tròn Γ với bán kính không đổi R dịch chuyển song song với D. Xác định hình bao của dây cung chung của C và Γ.



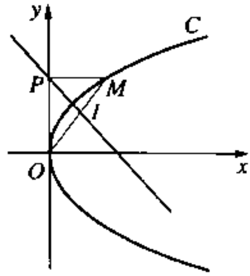
◊ **4.4.3** Cho H là hypebol có phương trình $xy = 1$, và A, B là hai điểm thuộc H sao cho hoành độ của điểm này gấp đôi hoành độ của điểm kia. Hãy xác định hình bao của (AB).



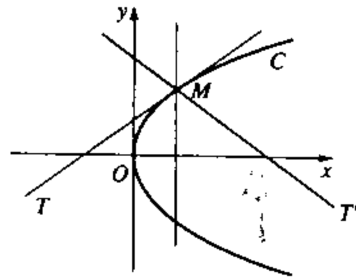
◊ **4.4.4** Cho $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $A(a, b)$, $P \in x'x$, $Q \in y'y$ sao cho $(AP) \perp (AQ)$. Xác định hình bao của đường thẳng (PQ).



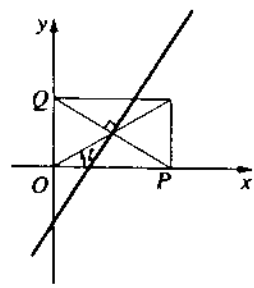
◊ **4.4.5** Một điểm M vạch nên parabol C có phương trình $y^2 = 2px$ ($p > 0$ cố định) ; giả sử P là hình chiếu vuông góc của M lên $y'y$, I là trung điểm của OM. Xác định hình bao của đường thẳng (IP).



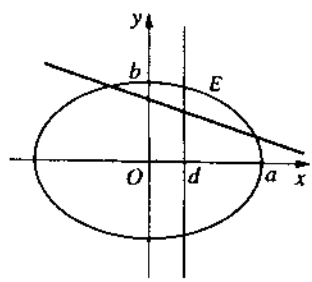
◊ **4.4.6** Một điểm M vạch parabol C có phương trình $y^2 = 2px$ ($p > 0$ cố định) ; giả sử T là tiếp tuyến với C tại M và T' là đường thẳng đối xứng của T qua đường thẳng song song với $y'y$ kẻ từ M. Xác định hình bao của T'.



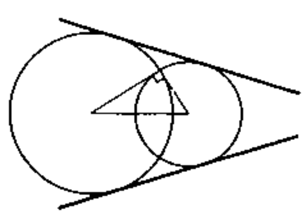
◊ **4.4.7** Cho $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos t, 0)$, $Q(0, \sin t)$. Xác định hình bao của đường trung trực của (PQ).



◊ **4.4.8** Cho $(a, b, d) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ và E là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Xác định hình bao của các dây cung của E có trung điểm nằm trên đường thẳng phương trình $x = d$.



◊ **4.4.9** Xác định hình bao của các tiếp tuyến chung của hai đường tròn di động cùng đi qua hai điểm cố định và luôn trực giao với nhau.



◊ **4.4.10** Với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu C_λ : $x = \dfrac{3t - t^3}{t - \lambda}$ $y = \dfrac{1 - 3t^2}{t - \lambda}$.

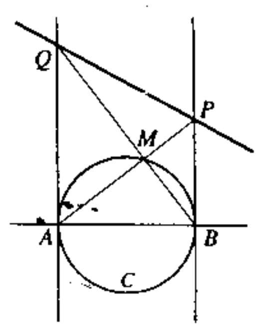
a) α) Chứng minh rằng C_λ có một và chỉ một điểm uốn ; ta ký hiệu tiếp tuyến với C_λ tại điểm uốn ấy là D_λ.

β) Xác định hình bao của $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

b) α) Chứng tỏ rằng C_λ có một và chỉ một tiệm cận, ký hiệu là Δ_λ, với giả thiết $\lambda \notin \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

β) Xác định hình bao của $(\Delta_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}}$.

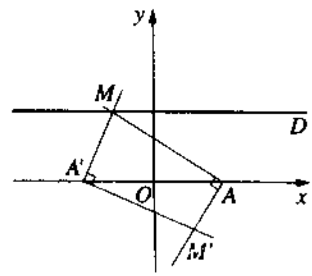
◊ **4.4.11** Một điểm M vạch một đường tròn C đường kính AB. Đường thẳng (AM) (tương ứng : BM) cắt tiếp tuyến với C tại B (tương ứng : A) tại một điểm ký hiệu là P (tương ứng : Q). Xác định hình bao của đường thẳng (PQ).



◊ **4.4.12** Cho $a \in \mathbb{R}_+^*$, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, D là đường thẳng có phương trình $y = a$. Với mọi điểm M thuộc D ta cho liên kết điểm M', là giao của đường vuông góc tại A với (MA) và đường vuông góc tại A' với (MA').

a) Quỹ tích C của M' là gì ?

b) Xác định hình bao E của đường thẳng (MM').



◊ **4.4.13** Cho C là đường cong có phương trình cực $\rho = \dfrac{1}{\cos 3\theta}$.

a) Hãy vẽ C.

b) Xác định hình bao của các dây cung của C nhìn thấy từ O dưới một góc vuông.

Chương 5

Các tính chất mêtric của đường cong trên mặt phẳng

Việc nghiên cứu được tiến hành trong mặt phẳng afin định hướng, ký hiệu là $\mathcal{E}_2$, khi cần được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$; tích vô hướng được ký hiệu là $(\cdot \mid \cdot)$ hoặc $\cdot$, chuẩn liên kết được ký hiệu là $\|\cdot\|$, và khoảng cách giữa hai điểm A, B được ký hiệu là $d(A, B)$, hoặc $\|\overrightarrow{AB}\|$, hoặc AB.

I chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng cũng không suy biến thành một điểm (việc khảo sát có thể thích ứng với trường hợp một hợp những khoảng như vậy), và k chỉ một số nguyên ≥ 1 hoặc $= +\infty$.

Như thông lệ, ta đồng nhất $\mathcal{E}_2$ với $\mathbb{R}^2$.

$f : I \to \mathcal{E}_2$ chỉ một cung tham số hóa thuộc lớp C^1 (trong 5.1), hoặc lớp C^2 (trong 5.2), $\Gamma = f(I)$ là quỹ đạo của nó. Với $t \in I$, ta có thể ký hiệu $M(t)$ thay cho $f(t)$. Với $t \in I$, ta ký hiệu $(x(t), y(t))$ là các tọa độ của $M(t)$ trong $\mathcal{R}$; chẳng hạn, với mọi t thuộc I :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

5.1 Các tính chất cấp một

Việc nghiên cứu có thể tiến hành trong một không gian afin Euclide (với số chiều hữu hạn nào đó) thay cho mặt phẳng Euclide mà không phải thay đổi gì lớn.

5.1.1 Hoành độ cong

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi ánh xạ $s : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên I sao cho:

$$\forall\, t \in I, \quad s'(t) = \|f'(t)\|,$$

là **hoành độ cong trên Γ.**

NHẬN XÉT:

1) Vì ánh xạ $\begin{array}{l} I \to R \\ t \mapsto \|f'(t)\| \end{array}$ liên tục trên I, nên một ánh xạ $s : I \to \mathbb{R}$ là một hoành độ cong trên Γ khi và chỉ khi tồn tại $t_o \in I$ sao cho :

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_{t_o}^{t} \|f'(u)\|\, du.$$

Như vậy, Γ nhận vô số hoành độ cong, được suy ra từ một trong chúng bằng cách cộng thêm một hằng.

Việc tính s được gọi là **phép cầu trường** Γ.

Khi ta chọn một phần tử t_o của I để định nghĩa một hoành độ cong

$s : t \mapsto \int_{t_o}^{t} \| f'(u) \| du$ trên Γ, ta nói rằng $M(t_o)$ (hoặc , đúng hơn, t_o) là **gốc hoành độ cong trên** Γ.

2) Ta thừa nhận rằng việc khảo sát có thể mở rộng cho trường hợp f thuộc lớp C^1 từng khúc trên I.

3) *Tác động của một phép đổi tham số chấp nhận được*

Giả sử J là một khoảng, $\varphi : J \to I$ là một **phép đổi tham số** của f, tức là (xem 4.1.1 4), Định nghĩa 2) một ánh xạ sao cho :

$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } J \\ \varphi \text{ là song ánh} \\ \varphi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I. \end{cases}$$

Khi đó ta đã biết rằng : $\varphi' > 0$ hoặc $\varphi' < 0$.

Cho $s : I \to \mathbb{R}$ là một hoành độ cong trên Γ ; ta ký hiệu $\sigma = s \circ \varphi$, là một ánh xạ thuộc lớp C^1 trên J. Ta có, với mọi u thuộc J : $\sigma'(u) = s'(\varphi(u))\, \varphi'(u) = \|f'(\varphi(u)\|\, \varphi'(u)$.

Nếu $\varphi' > 0$, thì ta suy ra : $\forall u \in J$, $\sigma'(u) = \|\varphi'(u) f'(\varphi(u))\| = \|(f \circ \varphi)'(u)\|$, và như thế σ là một hoành độ cong trên Γ.

Cũng vậy, nếu $\varphi' < 0$, thì $-\sigma$ là một hoành độ cong trên Γ.

Vậy khái niệm hoành độ cong không phụ thuộc việc chọn biểu diễn tham số (thuận), mà chỉ phụ thuộc vào đường cong (định hướng) Γ. Chính vì thế mà ta đã định nghĩa khái niệm hoành độ cong "trên Γ" thay cho "trên f".

4) Với các ký hiệu trong Định nghĩa 1, ta có :

$$\forall t \in I,\quad s'^2(t) = \| f'(t) \|^2 = x'^2(t) + y'^2(t),$$

mà đôi khi ta viết một cách lạm dụng là :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

♦ **Định nghĩa 2** Cho s là một hoành độ cong trên Γ, $a, b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. Ta gọi

- **độ dài (đại số)** của cung $\widehat{AB}$ trên Γ, và ta ký hiệu ở đây là $l(\widehat{AB})$, là số thực $s(b) - s(a)$, tức là :

$$l(\widehat{AB}) = \int_b^a \|f'(t)\| dt$$

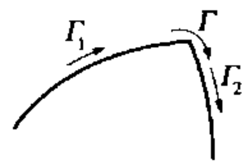
- trị tuyệt đối của độ dài (đại số) của $\widehat{AB}$ trên Γ là **độ dài** của cung $\widehat{AB}$ của Γ.

Ngữ cảnh sẽ chỉ ra khi nào thì các độ dài của các cung được nói đến là "đại số" (định hướng) , hoặc "số học" (dương hoặc bằng không).

♦ **Mệnh đề 1** **(Cộng tính của độ dài cung)**

Cho Γ_1, Γ_2 là hai đường cong thuộc lớp C^1 sao cho mút của Γ_1 là gốc của Γ_2. Khi đó độ dài của đường cong Γ có được do nối Γ_1 và Γ_2 là tổng của các độ dài của Γ_1 và Γ_2.

Chứng minh :



Đường cong Γ nhận một biểu diễn tham số f thuộc lớp C^1 từng khúc trên khoảng $I = I_1 \cup I_2$ (sao cho mút của I_1 là gốc của I_2), I_1 và I_2 là các khoảng sao cho $f\,|\,_{I_1}$ và $f\,|\,_{I_2}$ là các biểu diễn tham số của Γ_1 và Γ_2. Ta có

$$l(\Gamma) = \int_{I_1 \cup I_2} \|f'\| = \int_{I_1} \left\|(f\,|_{I_1})'\right\| + \int_{I_2} \left\|(f\,|_{I_2})'\right\| = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2). \qquad \blacksquare$$

Đường gấp khúc nội tiếp một đường cong trên mặt phẳng

Việc khảo sát sau đây, vốn không thuộc chương trình, cho phép ta xét độ dài của đường cong như là giới hạn của độ dài những đường gấp khúc.

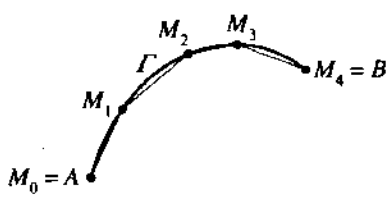
Cho $a, b \in I$ sao cho $a < b$, $A = f(a)$, $B = f(b)$.

Ta ký hiệu S là tập hợp các *phân hoạch* của $[a, b]$, tức là (xem Tập 1, 6.1.1, Định nghĩa 1) tập hợp các họ hữu hạn $(t_i)_{0\le i\le n}$ thuộc $[a, b]$ sao cho :

$$n \ge 1 \quad \text{và} \quad a = t_0 < t_1 < \dots t_{n-1} < t_n = b.$$

Với mọi $\sigma = (t_i)_{0\le i\le n-1}$ thuộc S, ta gọi số thực $p(\sigma)$ xác định bởi : $p(\sigma) = \max\limits_{0\le i\le n-1} (t_{i+1} - t_i)$ là *bước đi* của σ.

Cho $\sigma = (t_i)_{0\le i\le n-1} \in S$; ta ký hiệu, với mọi i thuộc $\{0, \dots, n\}$, $M_i = f(t_i)$, và $L(\sigma) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1}$ là độ dài của *đường gấp khúc* $M_0M_1\dots M_n$, "*nội tiếp trong* Γ".



Sử dụng một bất đẳng thức về chuẩn của một tích phân (xem Tập 1, 6.3, Mệnh đề 2) cho trường hợp $\mathcal{E}_2$ được đồng nhất với $\mathbb{C}$, hoặc Tập3, 2.3.4, 2), Định lý 2, cho trường hợp một không gian Euclide), ta có với mọi i thuộc $\{0, \dots, n-1\}$:

$$l(M_iM_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|\,dt \ge \left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)\,dt\right\| = \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = M_iM_{i+1}\,.$$

Và, mặt khác thì :

$$l(M_iM_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|\,dt \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i)\|\,dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\|f'(t)\| - \|f'(t_i)\|\right) dt.$$

Vì :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f'(t_i) \right\| \mathrm{d}t = (t_{i+1} - t_i) \left\| f'(t_i) \right\| = \left\| (t_{i+1} - t_i) f'(t_i) \right\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i) \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f'(t_i) - f'(t)) \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| f(t_{i+1}) - f(t_i) \right\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f'(t) - f'(t_i) \right\| \mathrm{d}t,$$

và rằng : $\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\| f'(t) \| - \| f'(t_i) \|) \, \mathrm{d}t \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f'(t) - f'(t_i) \right\| \mathrm{d}t,$

nên ta suy ra : $\displaystyle l\left(\widehat{M_i M_{i+1}}\right) \leq M_i M_{i+1} + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f'(t) - f'(t_i) \right\| \mathrm{d}t.$

Cho $\varepsilon > 0$ cố định.

Vì f' liên tục trên đoạn $[a, b]$, nên theo định lý Heine (Tập 1, 4.3.6, Định lý), f' liên tục đều trên $[a, b]$; vậy tồn tại $\eta > 0$ sao cho :

$$\forall (u, v) \in [a\,;\, b]^2, \quad (|u - v| \leq \eta \Rightarrow \| f'(u) - f'(v) \| \leq \varepsilon).$$

Khi đó, với mọi phân hoạch $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ của $[a, b]$ sao cho $p(\sigma) \leq \eta$, ta có :

$$l\left(\widehat{AB}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} l(\widehat{M_i M_{i+1}}) \geq \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} = L(\sigma)$$

và

$$l\left(\widehat{AB}\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(M_i M_{i+1} + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f'(t) - f'(t_i) \right\| \mathrm{d}t \right)$$

$$\leq L(\sigma) + 2\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \left(t_{i+1} - t_i\right) = L(\sigma) + 2\varepsilon (b - a).$$

Ta được :

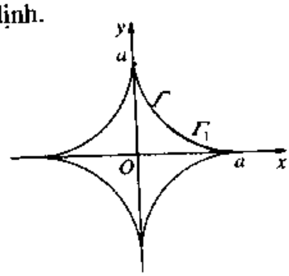
$$\forall \sigma \in S, \quad p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow 0 \leq l(\widehat{AB}) - L(\sigma) \leq 2(b - a)\,\varepsilon,$$

và cuối cùng : $\quad L(\sigma) \xrightarrow[p(\sigma) \to 0]{} l\left(\widehat{AB}\right).$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng độ dài của một đường gấp khúc nội tiếp trong Γ dần đến độ dài của Γ khi bước đi của phân hoạch tiến đến 0.

VÍ DỤ :

1) Độ dài của đường hình sao $\Gamma \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $a > 0$ cố định.



Vì lý do đối xứng, $l(\Gamma) = 8l(\Gamma_1)$, trong đó Γ_1 là cung có được bằng cách cho t biến thiên trong $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Ta có, với các ký hiệu thông thường :

$$\begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases} \Bigg|,$$

$$s'(t) = (x'^2(t) + y'(t))^{\frac{1}{2}} = \left(9a^2\cos^2 t\sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}} = 3a\cos t\sin t,$$

từ đó : $l(\Gamma_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3a\cos t\sin t\,dt = \frac{3a}{4}$, và do vậy : $l(\Gamma) = 6a$.

2) Cầu trường đường parabol

Ta tính hoành độ cong tại mọi điểm của parabol $\Gamma | y^2 = 2px$, lấy điểm O làm gốc hoành độ cong trên Γ.

Một BDTS của Γ là $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{array}\right|$, $t \in \mathbb{R}$, suy ra $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = \dfrac{t}{p} \\ y'(t) = 1 \end{array}\right|$.

$s'(t) = (x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{t^2}{p^2} + 1}$, và vì thế $s(t) = \int_o^t \sqrt{\dfrac{u^2}{p^2} + 1}\,du$.

Thực hiện phép đổi biến $v = \ln\left(\dfrac{u}{p} + \sqrt{\dfrac{u^2}{p^2} + 1}\right)$, do đó $\dfrac{u}{p} = \operatorname{sh} v$; nếu ký hiệu

$\beta(t) = \ln\left(\dfrac{t}{p} + \sqrt{\dfrac{t^2}{p} + 1}\right)$ để tránh trùng lặp, ta có :

$$s(t) = \int_0^{\beta(t)} p\operatorname{ch}^2 v\,dv = \frac{p}{2}\int_0^{\beta(t)} (1 + \operatorname{ch}2v)dv = \frac{p}{2}\beta(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\beta(t))$$

$$= \frac{p}{2}(\beta(t) + \operatorname{sh}\beta(t)\operatorname{ch}\beta(t)) = \frac{p}{2}\ln\left(\frac{t}{p} + \sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1}. \qquad \blacksquare$$

◆ **Mệnh đề 2** **(Tính hoành độ cong trong tọa độ cực)**

Cho Γ là một đường cong có phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$, trong đó $\rho : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1. Khi đó, nếu ký hiệu s là hoành độ cong trên Γ, ta có :

$$\forall \theta \in I, \quad s'(\theta) = (\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Chứng minh :

Ta ký hiệu $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ và $v(\theta) = \operatorname{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u(\theta)}) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

Một BDTS của Γ là $f : I \to \mathcal{E}_2$ xác định bởi :

$$\forall \theta \in I, \quad f(\theta) = \rho(\theta)\,\overrightarrow{u(\theta)}.$$

Ta có : $\forall \theta \in I,\ f'(\theta) = \rho'(\theta)\,\overrightarrow{u(\theta)} + \rho(\theta)\,\overrightarrow{v(\theta)}$.

Vì $(u(\theta), v(\theta))$ là một c.s.t.c. của $\vec{\mathcal{E}}_2$, nên ta rút ra :

$$\forall \theta \in I, \quad \|f'(\theta)\|^2 = \rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta). \qquad \blacksquare$$

NHẬN XÉT :

Đôi khi ta viết một cách lạm dụng : $(\mathrm{d}s^2) = (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2\,(\mathrm{d}\theta)^2$.

VÍ DỤ :

1) Độ dài của đường hình tim (xem 4.2.12, Ví dụ 1).

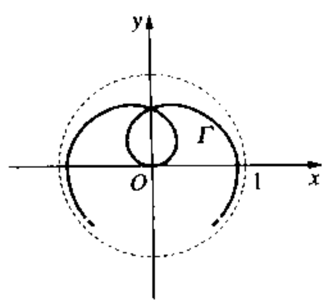
Đường hình tim Γ với phương trình cực $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0)$, do lý do đối xứng, có độ dài là :

$$l(\Gamma) = 2\int_0^{\pi}\left(\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{\pi}\left((1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\left(2(1+\cos\theta)\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 8a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a.$$

2) Cầu trường đường cong có phương trình cực : $\rho = \operatorname{th}\dfrac{\theta}{2}$.

Ta có : $\rho = \operatorname{th}\dfrac{\theta}{2}$, $\rho' = \dfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2}\right)$.



từ đó :

$$s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = \operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\left(1-2\operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{th}^4\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{th}^4\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1+\operatorname{th}^2\frac{\theta}{2})\right)^2,$$

và vì vậy : $s' = \dfrac{1}{2}\left(1+\operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Khi chọn điểm của Γ ứng với $\theta = 0$, tức là điểm O làm gốc hoành độ cong trên Γ, ta được với mọi θ thuộc $\mathbb{R}$:

$$s(\theta) = \int_0^{\theta}\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{th}^2\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\theta}\left(1-\frac{1}{2}(1-\operatorname{th}^2\frac{t}{2})\right)\mathrm{d}t = \theta - \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Bài tập

◊ **5.1.1** a) Vẽ đường cong Γ có phương trình Descartes $y = \dfrac{2}{x}+\dfrac{x^3}{24}$, $x > 0$.

b) Tính hoành độ cong tại mỗi điểm thuộc Γ, lấy điểm thuộc Γ có hoành độ 2 làm gốc.

◊ **5.1.2** Tính độ dài của đường đentôit Γ (xem 4.1.7, Ví dụ 5) có biểu diễn tham số là :

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases},\ t \in [-\pi\,;\,\pi].$$

◊ **5.1.3** a) Vẽ đường cong Γ có biểu diễn tham số : $\begin{cases} x = (1-t)^2 e^t \\ y = 2(1-t)e^t \end{cases}$.

b) Tính hoành độ cong tại mỗi điểm thuộc Γ, lấy gốc là điểm của Γ ứng với $t = 1$.

c) Tính độ dài L của vòng khuyên của Γ (sẽ phải tính một tích phân trên $]-\infty\,;\,1]$).

◊ **5.1.4** a) Vẽ đường cong Γ có phương trình cực $\rho = \dfrac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}$.

b) Tính hoành độ cong tại mỗi điểm thuộc Γ, lấy gốc là điểm của Γ ứng với $\theta = 0$.

c) Tính độ dài L của vòng khuyên của Γ.

◊ **5.15** a) Vẽ đường cong Γ có phương trình cực là $\rho = 1 - \theta^2$.

b) Tính hoành độ cong tại mỗi điểm thuộc Γ, lấy gốc là điểm của Γ ứng với $\theta = 0$.

c) Với $n \in \mathbb{N}^*$ hãy tính độ dài L_n của Γ với $n\pi \le \theta \le (n+1)\pi$, rồi xác định một biểu thức tương đương đơn giản cho L_n khi n tiến ra vô cực.

◊ **5.1.6** a) Vẽ đường cong Γ có phương trình cực $\rho = \sqrt{1 - 4\theta^2}$.

b) Tính độ dài L của Γ.

◊ **5.1.7** a) Vẽ đường cong Γ có phương trình cực : $\rho = 1 + 2\cos\left(\dfrac{\theta\sqrt{3}}{2}\right)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

b) Tính độ dài L của Γ.

5.1.2 Biểu diễn tham số theo hoành độ cong

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi biểu diễn tham số chấp nhận được $g : J \to \mathcal{E}_2$ thuộc lớp C^1 của f sao cho : $\forall u \in J$, $\|g'(u)\| = 1$, là **biểu diễn tham số chuẩn của** f.

♦ **Mệnh đề 1** Nếu f là chính quy, thì :

- Với mỗi hoành độ cong s trên Γ, $f \circ s^{-1}$ là một biểu diễn tham số chuẩn của f.
- Với mỗi biểu diễn tham số chuẩn g của f, tồn tại một hoành độ cong s trên Γ sao cho :
$$g = f \circ s^{-1} \quad \text{hoặc} \quad g = f \circ (-s)^{-1}.$$

Ta nói một cách đơn giản hơn rằng s và $-s$ là những biểu diễn tham số chuẩn của Γ.

Chứng minh :

Ta giả thiết f chính quy, tức là $\forall t \in I,\ f'(t) \neq 0$.

Ký hiệu $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ là một hoành độ cong.

- Ánh xạ s thuộc lớp C^1 trên I, $J = s(I)$ là một khoảng của $\mathbb{R}$ và :

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \|f'(t)\| > 0.$$

Từ đó suy ra rằng $s : I \to J$ là song ánh và rằng $s^{-1} : J \to I$ thuộc lớp C^1 trên J. Như vậy $f \circ s^{-1}$ là một biểu diễn tham số chấp nhận được của f.

Hơn nữa, khi ký hiệu $g = f \circ s^{-1}$, ta có :

$$\forall u \in J, \quad \|g'(u)\| = \left\|\frac{1}{s'(s^{-1}(u))} f'(s^{-1}(u))\right\| = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}\left\|f'(s^{-1}(u))\right\| = 1,$$

vậy g là một biểu diễn tham số chuẩn của f.

- Ngược lại, cho $y : J \to \mathcal{E}_2$ một biểu diễn tham số chuẩn của f. Vì g là một biểu diễn tham số chấp nhận được của f, nên tồn tại $\varphi : J \to I$ sao cho :

$$\begin{cases} \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } J \\ \varphi \text{ là song ánh} \\ \varphi^{-1} \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } I \\ g = f \circ \varphi. \end{cases}$$

Ánh xạ $\psi = \varphi^{-1} : I \to J$ thuộc lớp C^1 trên I và :

$$\forall t \in I, \quad \|f'(t)\| = \|(g \circ \psi)'(t)\| = \|\psi'(t) g'(\psi(t))\| = |\psi'(t)|.$$

Vì $\psi' > 0$ hoặc $\psi' < 0$, ta suy ra :

$$(\forall t \in I, \quad \psi'(t) = \|f'(t)\| \quad \text{hoặc} \quad (\forall t \in I,\ \psi'(t) = -\|f'(t)\|),$$

điều này chứng tỏ rằng ψ hoặc $-\psi$ là một hoành độ cong trên Γ. ■

Ta nhắc lại (xem 4.1.2, *I*) Nhận xét 1)) rằng một đường cong Γ được gọi là *chính quy* khi và chỉ khi Γ nhận ít nhất một biểu diễn tham số chính quy f. Khi đó ta có thể tham số hóa Γ bằng hoành độ cong (bằng cách chọn một gốc hoành độ cong trên Γ) và ta cũng nhận được một biểu diễn tham số chuẩn $s \to M(s)$ của Γ. Để thuận tiện cho 5.1.2 này, ta sẽ giả thiết rằng Γ được tham số hóa bằng một hoành độ cong s.

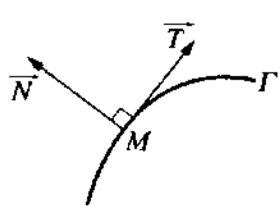
♦ Định nghĩa - Ký hiệu 2

- **Vectơ tiếp tuyến đơn vị (định hướng) của** Γ tại $M(s)$ là vectơ :

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}$$

- $\vec{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T})$
- $(M, \vec{T}, \vec{N})$ là một hệ q.c.t.c.t., được gọi là **hệ quy chiếu Frenet tại** M **của** Γ.

Xem thêm 4.1.2 1), Định nghĩa 4.



Thực tế sử dụng đã tạo nên sự lẫn lộn giữa $\vec{T}(t)$, $\vec{T}(s)$, $\vec{T}$, và giữa $\vec{N}(t)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{N}$. Khi cần, ngữ cảnh sẽ cho phép ta nhận ra các ký hiệu đúng đắn.

NHẬN XÉT :

Bằng một phép đổi tham số chấp nhận được thuận (tương ứng : nghịch), s, $\vec{T}$, $\vec{N}$ được bảo toàn (tương ứng : đổi thành đối của chúng).

◆ **Mệnh đề 2** Cho $f : J \to \mathcal{E}_2$ là một biểu diễn tham số chuẩn thuộc lớp C^k $(k \geq 2)$ của Γ. Tồn tại một ánh xạ $\varphi : J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{k-1} sao cho :

$$\forall s \in J, \quad \vec{T}(s) = \cos\varphi(s)\,\vec{i} + \sin\varphi(s)\,\vec{j}\,.$$

Chứng minh :

Nếu đồng nhất $\vec{\mathcal{E}}_2$ và $\mathbb{C}$, thì ánh xạ $\vec{T} : s \to \vec{T}(s)$ thuộc lớp $C^{k-1}(k - 1 \geq 1)$ trên khoảng J, và lấy giá trị trong đường tròn - đơn vị $\mathbb{U}$. Theo định lý thay thế (Tập 2, 7.10), tồn tại $\varphi : J \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{k-1} sao cho :

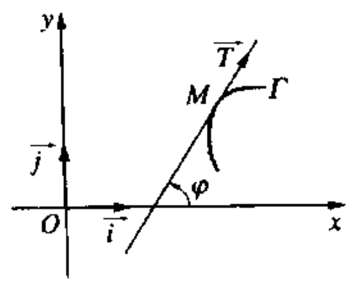
$$\forall s \in J, \quad \vec{T}(s) = \cos\varphi(s)\,\vec{i} + \sin\varphi(s)\,\vec{j}\,. \qquad \blacksquare$$

Hơn nữa, nếu $\varphi_1, \varphi_2 : J \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ như vậy, thì $\varphi_1 - \varphi_2$ là ánh xạ hằng và là bội của 2π.

NHẬN XÉT :

1) Với các giả thiết và các ký hiệu của Mệnh đề trên, và các ký hiệu lạm dụng thông thường, ta có :

- $\varphi \equiv (\widehat{\vec{i}, \vec{T}})\ [2\pi]$
- $\cos\varphi = \dfrac{dx}{ds}$ và $\sin\varphi = \dfrac{dy}{ds}$
- $\tan\varphi = \dfrac{dy}{dx}$ tại mọi điểm ở đó x' không triệt tiêu.



2) Bằng một phép đổi tham số chấp nhận được thuận (tương ứng : nghịch), φ được bảo toàn (tương ứng : đổi thành đối của nó).

Trường hợp tọa độ cực

Cho Γ là một đường cong có một phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$, trong đó $\rho : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2.

Ta đã ký hiệu :

$\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$, φ sao cho $\varphi \equiv (\widehat{\vec{i}, \vec{T}})\ [2\pi]$,

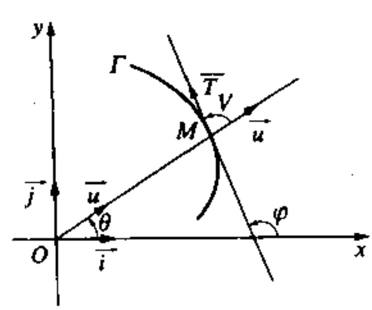
$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\,.$

Ta ký hiệu $V = \varphi - \theta$.

Khi đó ta có :

$V \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{T}})[2\pi]$ và $\varphi \equiv \theta + V\ [2\pi]$.

Hơn nữa, tại mọi điểm ở đó ρ không triệt tiêu, ta có (xem 4.2.6, 2)) : $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$.



5.2 Các tính chất cấp hai

Các §§ từ 5.2.2 đến 5.2.4 dành cho sinh viên năm thứ hai.

5.2.1 Bán kính cong

$f : I \to \mathcal{E}_2$ biểu thị một cung tham số hóa chính quy thuộc lớp C^2, $\Gamma = f(I)$ là quỹ đạo của nó, s là một hoành độ cong trên Γ. Ta đã biết (xem 5.1.2, Mệnh đề 1) rằng Γ nhận s (hoặc : $f \circ s^{-1}$) làm biểu diễn tham số chuẩn.

Ta ký hiệu : $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$, $\vec{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T})$, φ là một phép nâng thỏa mãn $\varphi \equiv (\widehat{\vec{i}, \vec{T}})\ [2\pi]$.

♦ **Định nghĩa** Ta định nghĩa

- **bán kính cong** của Γ tại một điểm $M(s)$ là số thực R xác định bởi : $R = \dfrac{ds}{d\varphi}$
- **độ cong** của Γ tại $M(s)$ là số thực γ xác định bởi : $\gamma = \dfrac{1}{R}$.

Ta không phân biệt R và $R(s)$, γ và $\gamma(s)$.

Ta thừa nhận rằng R hoặc γ có thể lấy các trị $0, +\infty, -\infty$.

Cụ thể hơn, việc định nghĩa $R(s)$ như là một số thực đã giả định rằng tại điểm s ta có $\varphi'(s) \neq 0$. Xét một biểu diễn tham số chuẩn của Γ theo một hoành độ cong s :

$f : s \in J \mapsto x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$. Khi ấy ta có :

$$\forall s \in J, \quad \begin{cases} \cos\varphi(s) = x'(s) \\ \sin\varphi(s) = y'(s) \end{cases},$$

vậy khi đạo hàm :

$$\forall s \in J, \quad \begin{cases} -\varphi'(s)\sin\varphi(s) = x''(s) \\ \varphi'(s)\cos\varphi(s) = y''(s) \end{cases},$$

rồi, kết hợp lại :

$$\forall s \in J, \quad \varphi'(s) = \cos\varphi(s)y''(s) - \sin\varphi(s)x''(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s).$$

Như vậy, nếu $\left(\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}, \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{ds^2}\right)$ độc lập, thì $\varphi'(s) \neq 0$, $R(s)$ là một số thực hoàn toàn xác định, và $R(s) = \dfrac{1}{\varphi'(s)}$.

NHẬN XÉT :

Bằng một phép đổi tham số chấp nhận được thuận (tương ứng : nghịch) R và γ được bảo toàn (tương ứng : đổi thành đối của chúng). ■

VÍ DỤ :

Tính bán kính cong tại mọi điểm của cung đường dentôit (xem 4.1.7, Ví dụ 5) :

$$\Gamma \begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}, \quad t \in \left]0 ; \frac{2\pi}{3}\right[.$$

Trước tiên ta tính s' ; ta có liên tiếp (các dấu phẩy chỉ phép đạo hàm theo t) :

- $x' = -2\sin t(1 + 2\cos t), \quad y' = 2(1 - \cos t)(1 + 2\cos t)$
- $s'^2 = x'^2 + y'^2 = 4(\sin^2 t + (1 - \cos t)^2)(1 + 2\cos t)^2 = 16\sin^2\frac{t}{2}(1 + 2\cos t)^2$,

  $s' = 4\sin\frac{t}{2}(1 + 2\cos t)$
- $\tan\varphi = \frac{y'}{x'} = -\frac{1-\cos t}{\sin t} = -\tan\frac{t}{2} = \tan\left(-\frac{t}{2}\right), \quad \varphi \equiv -\frac{t}{2}\,[\pi], \quad \varphi' = -\frac{1}{2}$
- $R = \frac{s'}{\varphi'} = -8\sin\frac{t}{2}(1 + 2\cos t)$. ■

Cách tính bán kính cong

Ta giả thiết Γ được xác định bởi một biểu diễn tham số chính quy thuộc lớp C^2 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Khi đó ta có :

- $s' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\begin{cases} x' = s'\cos\varphi \\ y' = s'\sin\varphi \end{cases}$, từ đó $\begin{cases} x'' = s''\cos\varphi - s'\sin\varphi\ \varphi' \\ y'' = s''\sin\varphi + s'\cos\varphi\ \varphi' \end{cases}$, rồi $x'y'' - x''y' = s'^2\varphi'$,

vậy $\quad \varphi' = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$

- $R = \dfrac{s'}{\varphi'} = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$. ■

Ta hãy khảo sát hai trường hợp riêng thường gặp.

1) Đường cong biểu diễn một hàm số

Giả thiết Γ được cho bởi $y = f(x)$ trong đó $f : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2. Khi đó, Γ được tham số hóa bởi tham số x, và, tại mọi điểm mà f'' không triệt tiêu :

$$R = \frac{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

mà ta có thể viết một cách lạm dụng : $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, các dấu phẩy ở đây chỉ đạo hàm theo x.

Ta có thể chấp nhận rằng $R = \pm\infty$ tại một điểm mà f'' triệt tiêu.

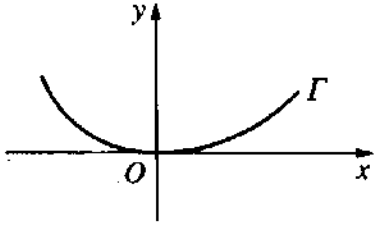
VÍ DỤ :

Tính bán kính cong tại mọi điểm thuộc đường cong Γ có phương trình : $y = -\ln|\cos x|$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Ta có : $y' = \tan x$, $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, suy ra $\quad R = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \cos^2 x(1 + \tan^2 x)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\cos x}$.

2) Đường cong tiếp xúc với $x'x$ tại O

Giả thiết Γ tiếp xúc với $x'x$ tại O và ký hiệu R_O là bán kính cong của Γ tại O.



Đường cong Γ có một biểu diễn tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, và điểm O của Γ ứng với một (nhiều ?) trị t_0 của tham số t.

Giả thiết rằng O là một điểm chính quy của Γ, tức là : $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$. Vì Γ tiếp xúc với $x'x$ tại O, nên ta có : $y'(t_0) = 0$ và $x'(t_0) \neq 0$.

Vậy trong lân cận của t_0, x là một C^2 - vi phôi, và ta có thể tham số hóa địa phương Γ bởi $y = f(x)$, trong đó f thuộc lớp C^2 trong lân cận của 0 và $f(0) = f'(0) = 0$.

Giả thiết $f''(0) \neq 0$; khi đó ta có :

$$R_0 = \frac{(1 + f'^2(0))^{\frac{3}{2}}}{f''(0)} = \frac{1}{f''(0)}.$$

Mặt khác, theo định lý Taylor - Young, trong lân cận của 0 ta có :

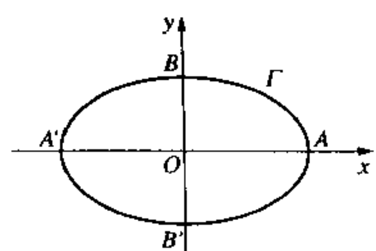
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2) = \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2),$$

suy ra : $\dfrac{x^2}{2f(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{f''(0)} = R_o$.

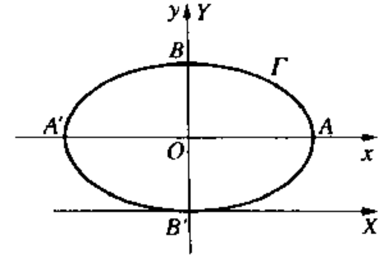
Như vậy : $R_0 = \lim\limits_{t \to t_o} \dfrac{\dot{x}^2}{2\dot{y}}$.

VÍ DỤ :

Tính các bán kính cong tại các đỉnh của một elip.



Xét elip Γ có phương trình Descartes $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (trong đó $a > b > 0$), với biểu diễn tham số : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $t \in [0 ; 2\pi]$, và ký hiệu A, B, A', B' là các đỉnh của Γ, theo thứ tự ứng với các trị 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ của tham số t. Để tính bán kính cong $R_{B'}$ của Γ tại B', ta thực hiện một phép đổi hệ quy chiếu trực chuẩn thuận bằng phép tịnh tiến lấy B' làm gốc mới. Các công thức đổi hệ quy chiếu là :



$$\begin{cases} x = X \\ y = Y - b \end{cases}$$

từ đó có được một BDTS của Γ trong hệ quy chiếu mới $(B' ; \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} X = a\cos t \\ Y = b(1+\sin t) \end{cases}.$$

Vì Γ tiếp xúc với $X'X$ tại B', ta có :

$$R_{B'} = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} \frac{X^2}{2Y}.$$

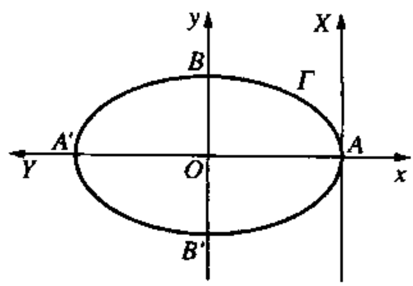
Bằng phép đổi biến $u = t + \dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{X^2}{2Y} = \frac{a^2\cos^2 t}{2b(1+\sin t)} = \frac{a^2\sin^2 u}{ab(1-\cos u)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{a^2u^2}{bu^2} = \frac{a^2}{b}.$$

Ta kết luận : $R_{B'} = \dfrac{a^2}{b}$.

• Để tính bán kính cong R_A của Γ tại A, ta lại lấy $(A ; \vec{j}, -\vec{i})$ làm hệ quy chiếu trực chuẩn thuận mới. Vậy ta có các công thức đổi hệ quy chiếu :

$$\begin{cases} x = a - Y \\ y = X \end{cases}$$



từ đó có được một BDTS của Γ trong hệ quy chiếu mới :

$$\begin{cases} X = b\sin t \\ Y = a(1-\cos t) \end{cases}$$

rồi : $\dfrac{X^2}{2Y} = \dfrac{b^2\sin^2 t}{2a(1-\cos t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{b^2}{a}$, suy ra $R_A = \dfrac{b^2}{a}$.

Ta cũng có thể hoán vị các vai trò của a và b trong kết quả vừa rồi.

Do đối xứng, ta suy ra $R_B = \dfrac{a^2}{b}$, $R_{A'} = \dfrac{b^2}{a}$. ■

Tính bán kính cong trong tọa độ cực

Cho Γ là một đường cong nhận phương trình cực $\rho = \rho(\theta)$, trong đó ρ thuộc lớp C^2. Ta tính lần lượt :

• s' từ $s' = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$

• tan từ $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$

• dV từ cách lấy vi phân $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$:

$$(1+\tan^2 V)\mathrm{d}V = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}\mathrm{d}\theta, \quad \text{suy ra} \quad \mathrm{d}V = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta$$

• $\mathrm{d}\varphi$ từ $\varphi = \theta + V$, vậy $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}V$.

• R từ $R = \dfrac{ds}{d\varphi}$.

VÍ DỤ :

Tính bán kính cong tại mọi điểm của đường hình tim có phương trình $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$.

Ta lần lượt có, với $\theta \in]-\pi ; \pi[$:

• $s' = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}} = a(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = a(2(1 + \cos\theta))^{\frac{1}{2}} = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$

• $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = -\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}\right)$,

từ đó suy ra : $V \equiv \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}[\pi]$, rồi $\mathrm{d}V = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\theta$

• $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}V = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}\theta$

• $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{4q}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}$. ■

Cách tính bán kính cong trong tọa độ cực

Lặp lại và hoàn chỉnh việc khảo sát trên đây, ta có :

• $s' = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$

• $\mathrm{d}V = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta$

• $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}V = \dfrac{\rho + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho + \rho'^2}\mathrm{d}\theta$

• $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{(\rho + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

Đặc biệt, nếu Γ đi qua O với một trị θ_0 của θ, thì :

$$R_0 = \frac{(\rho'^2(\theta_0))^{\frac{3}{2}}}{2\rho'^2(\theta_0)} = \frac{|\rho(\theta_0)|}{2}.$$

VÍ DỤ :

Tính các bán kính cong tại O của đường cong Γ có phương trình cực: $\rho = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$ (xem 4.2.12, Ví dụ *3*).

Ta sẽ được cả đường cong bằng cách cho θ biến thiên trong $[-\pi ; \pi]$, và gốc O ứng với hai trị $\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$ của θ. Hơn nữa : $\rho'(\theta) = -\dfrac{2(2 + \cos\theta + \sin\theta)}{(2\sin\theta + 1)^2}$.

Từ đó suy ra : $R_{-\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\left|\rho'\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right| = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{4}$, $R_{\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\left|\rho'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right| = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{4}$. ■

♦ **Mệnh đề** **(Công thức Frenet)**

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}, \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{R}.$$

Chứng minh :

- $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{d\vec{T}}{d\varphi} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$
- $\dfrac{d\vec{N}}{ds} = \dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{d\vec{N}}{d\varphi} = \dfrac{1}{R}(-\vec{T}) = -\dfrac{1}{R}\vec{T}.$ ■

NHẬN XÉT :

Ta có thể ghi nhớ các công thức Frenet dưới hình thức lạm dụng sau đây :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{T}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{R} \\ \dfrac{-1}{R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{pmatrix}$$

Bài tập

◊ **5.2.1** Thác triển liên tục $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ tại 1 và xác định bán kính cong của đường cong Γ biểu thị f tại điểm có hoành độ 1. (Có thể sử dụng một khai triển thành chuỗi nguyên (lũy thừa) hay một khai triển hữu hạn).

◊ **5.2.2** Tính bán kính cong tại mọi điểm của đường cong Γ có BDTS :

$$\begin{cases} x = 3\cos t + 3\cos 2t + \cos 3t \\ y = 3\sin t + 3\sin 2t + \sin 3t. \end{cases}$$

◊ **5.2.3** Tính bán kính cong tại mọi điểm của đường cong Γ có phương trình Descartes :

$$2e^{x+y} = (1 + e^x)(1 + e^y).$$

◊ **5.2.4** Tính bán kính cong tại điểm ứng với $\theta = 0$ của đường cong Γ có phương trình cực :

$$\rho = \cos\theta + \cos\frac{\theta}{2}.$$

◊ **5.2.5** Tính bán kính cong tại O của đường cong Γ có BDTS : $x = 2t^2 + t - 1,\quad y = (t+1)e^{\frac{1}{t}}$.

◊ **5.2.6** Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, Γ là đường cong có phương trình cực :

$$\rho = (\cos n\theta)^{\frac{1}{n}}, \quad -\frac{\pi}{2n} < \theta < \frac{\pi}{2n}.$$

Tính bán kính cong tại mọi điểm của Γ.

◊ **5.2.7** Tính bán kính cong tại A (0, 1) của đường cong Γ có PTD : $x^2y^2 + x + y - 1 = 0$.

(Ta có thể sử dụng định lý hàm ẩn).

5.2.2 Tâm cong

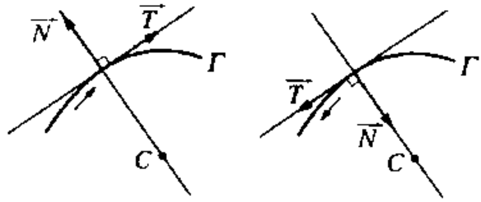
Ở đây ta giữ nguyên các giả thiết và ký hiệu của §5.2.1.

♦ **Định nghĩa 1** Tâm cong tại M của Γ là điểm C thuộc $\mathcal{E}_2$ xác định bởi

$$\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}.$$

NHẬN XÉT :

Vì qua một phép đổi tham số chấp nhận được, R và $\overrightarrow{N}$ đồng thời được bảo toàn hoặc đổi dấu, nên tâm cong vẫn được bảo toàn.



♦ **Mệnh đề**

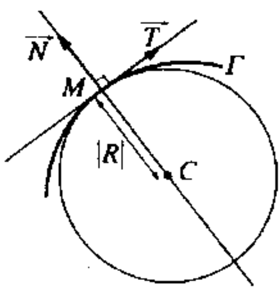
Tâm cong C tại M của Γ nằm về phía lõm địa phương tại M của Γ.

Chứng minh :

Đường cong Γ nhận một biểu diễn tham số chuẩn $f:\ \begin{matrix} J \to \mathcal{E}_2 \\ s \mapsto f(s) \end{matrix}$ theo hoành độ cong.

Theo 4.1.2, 2) phía lõm địa phương tại M của Γ là nửa mặt phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến với Γ tại M và "chứa" $\overrightarrow{f''(s)}$. Nhưng ở đây, $\overrightarrow{f'(s)} = \overrightarrow{T}, \overrightarrow{f''(s)} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\overrightarrow{N}$ và $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$, vậy $\overrightarrow{f''(s)}$ và $\overrightarrow{MC}$ cộng tuyến và cùng hướng. Ta kết luận là C thuộc nửa mặt phẳng đó.

♦ **Định nghĩa 2** Ta gọi đường tròn tâm C (tâm cong của Γ tại M) và bán kính $|R|$ (trong đó R là bán kính cong tại M của Γ) là **đường tròn chính khúc tại M của Γ.**



NHẬN XÉT :

Đường tròn chính khúc của Γ tại M tiếp xúc với Γ tại M, vì nó có tâm trên đường pháp tuyến với Γ tại M.

VÍ DỤ :

Xác định đường tròn chính khúc (bởi tâm và bán kính của nó) tại điểm M ứng với $t = \dfrac{1}{3}$, của đường cong Γ có BDTS $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^4}{4} \\ y = \dfrac{2}{3}t^3 \end{cases}$.

Tại mọi điểm $M(t)$ thuộc Γ, ta có :

- $x' = t - t^3$, $y' = 2t^2$
- $s'^2 = x'^2 + y'^2 = t^2((1 - t^2)^2 + 4t^2) = t^2(1 + t^2)^2$, suy ra (với $t > 0$) $s' = t(1 + t^2)$
- $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \dfrac{x'}{s'}\vec{i} + \dfrac{y'}{s'}\vec{j} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{2t}{1+t^2}\vec{j}$,

  $\vec{N} = Rot_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}) = -\dfrac{2t}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\vec{j}$
- $x'' = 1 - 3t^2$, $y'' = 4t$, $x'y'' - x''y' = 2t^2(2(1 - t^2) - (1 - 3t^2)) = 2t^2(1 + t^2)$
- $R = \dfrac{s'^3}{x'y'' - x''y'} = \dfrac{t}{2}(1+t^2)^2$.
- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, trong đó :

$$\begin{cases} X = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t}{2}(1+t^2)^2\,\dfrac{-2t}{1+t^2} = -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{5t^4}{4} \\[2ex] Y = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{t}{2} + (1+t^2)^2\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{t^5}{2}. \end{cases}$$

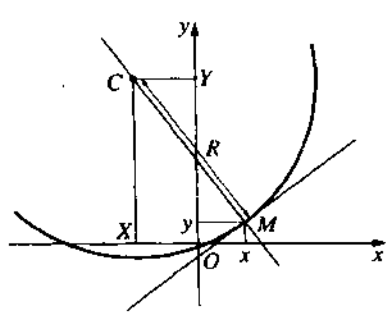
Đặc biệt, với $t = \dfrac{1}{3}$, ta được :

$x = \dfrac{17}{324} \simeq 0{,}0525$, $y = \dfrac{2}{81} \simeq 0{,}0247$.

$x' = \dfrac{8}{27} \simeq 0{,}296$, $y' = \dfrac{2}{9} \simeq 0{,}0222$.

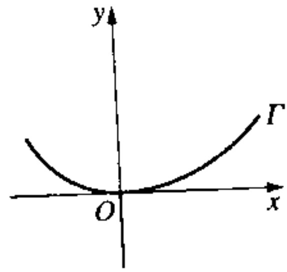
$R = \dfrac{50}{243} \simeq 0{,}206$,

$$C\begin{cases} X = -\dfrac{23}{243} \simeq -0{,}071 \\[2ex] Y = \dfrac{46}{243} \simeq 0{,}190. \end{cases}$$



Khái niệm về đường tròn mật tiếp

Việc khảo sát sau đây, vốn không thuộc chương trình, cho phép ta nắm được đặc tính riêng biệt của đường tròn chính khúc của Γ tại M trong số các đường tròn tiếp xúc với Γ tại M.



Trong hệ quy chiếu Frenet tại M của Γ, ta sẽ quy về trường hợp Γ tiếp xúc tại O với $x'x$, điều mà bây giờ ta sẽ giả định.

Khi đó, tại lân cận của O, Γ là đường cong biểu thị một hàm f thuộc lớp C^2 trong lân cận của 0.

Ta giả thiết $f''(0) \neq 0$, và thậm chí $f''(0) > 0$, do trường hợp $f''(0) < 0$ sẽ được quy về trường hợp này bằng một phép đối xứng.

Cho $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\Omega(0, \lambda)$, C_λ là đường tròn tâm Ω và đi qua O. Một phương trình Descartes của C_λ là :

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0.$$

Nửa đường tròn của C_λ đi qua O là đường cong biểu diễn hàm số $g_\lambda :]-\lambda\ ;\ \lambda[\to \mathbb{R}$ xác định bởi : $g_\lambda(x) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - x^2}$.

Ta khảo sát vị trí tương đối và sự tiếp xúc giữa C_λ và Γ tại O, tức là dấu và bậc của phần chính quy của $f(x) - g_\lambda(x)$ khi x dần tới 0.

Bằng cách tính một khai triển hữu hạn, ta có :

$$g_\lambda(x) = \lambda - \lambda\sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda}}$$

$$= \lambda - \lambda\left(1 - \frac{x^2}{2\lambda^2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{x^2}{2\lambda} + o(x^2).$$

Mặt khác, theo định lý Taylor - Young (xem thêm 5.2.1)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2) = \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$$

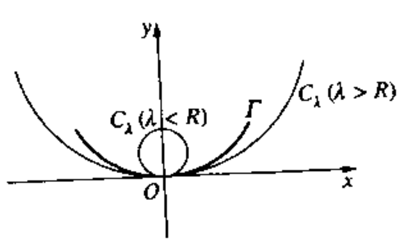
$$= \frac{x^2}{2R} + o(x^2),$$

trong đó R là bán kính cong của Γ tại O.

Như thế ta cũng được : $f(x) - g_\lambda(x) = \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{2\lambda}\right)x^2 + o(x^2)$.

Nếu $\lambda > R$, thì trong lân cận của điểm O, Γ hoàn toàn nằm về phía trên C_λ.

Nếu $\lambda < R$, thì trong lân cận của điểm O, Γ hoàn toàn nằm về phía dưới của C_λ.



Bây giờ ta giả thiết $\lambda = R$ và f thuộc lớp C^3 trong lân cận của O. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} g_R(x) = \dfrac{x^2}{2R} + o(x^3) \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2R} + \dfrac{x^3}{6} f'''(0) + o(x^3), \end{cases}$$

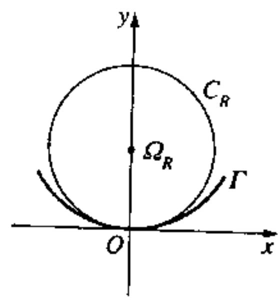
từ đó :
$$f(x) - g_R(x) = \frac{f'''(0)}{6} x^3 + o(x^3).$$

Nói chung, tức là nếu $f'''(0) \neq 0$, ta có

$$f(x) - g_R(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{f'''(0)}{6} x^3,$$

điều này chứng tỏ rằng, trong lân cận của O, C_R đi xuyên qua Γ.

Ta nói rằng C_R và Γ có một điểm tiếp xúc bậc ba tại O, và C_R được gọi là **đường tròn mật tiếp tại** O **với** Γ. Trong số các đường tròn $C_\lambda (\lambda \in]0 ; +\infty[)$, đường tròn C_R này là đường tròn gần với Γ "nhất" trong lân cận của O.



Trong thực hành, thường Γ nhận $y'y$ làm trục đối xứng, tức là f chẵn. Ta giả thiết f chẵn và thuộc lớp C^4 trong lân cận của 0. Khi đó ta có $f'''(0) = 0$ và :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2R} + O(x^4) \\ g_R(x) = \dfrac{x^2}{2R} + O(x^4), \end{cases}$$

từ đó suy ra : $f(x) - g_R(x) = O(x^4)$.

Trong trường hợp này, C_R và Γ tiếp xúc với nhau với bậc ≥ 4, và ta nói rằng C_R là **đường tròn thượng mật tiếp tại** O với Γ.

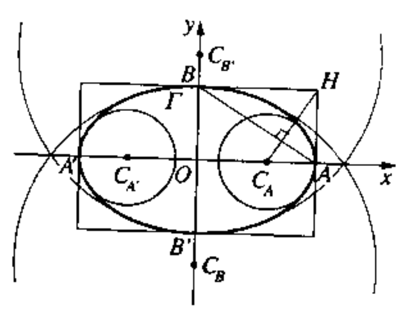
VÍ DỤ : Tìm các đường tròn thượng mật tiếp tại các đỉnh của elip.

Cho Γ là elip có phương trình Descartes

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, A, B, A', B' là các đỉnh của nó.

Ta đã tính các bán kính cong tại các điểm này (xem 5.2.1, Ví dụ)

$$R_{B'} = R_B = \frac{a^2}{b}, \; R_{A'} = R_A = \frac{b^2}{a}.$$



Từ đó ta suy ra các tâm cong tương ứng $C_{B'}, C_B, C_A, C_{A'}$ và hình vẽ của bốn đường tròn thượng mật tiếp tại các đỉnh của Γ. Về mặt đồ họa hình vẽ của Γ rất gần với đường nối các cung của bốn đường tròn ấy.

Ta cũng có thể chú ý rằng, C_A chẳng hạn là giao điểm của (AA') với đường vuông góc với (AB) kẻ từ $H(a, b)$.

Bài tập

◊ **5.2.8** Xác định tâm cong C tại $A(1, 0)$ của đường cong Γ có phương trình cực : $\rho = \dfrac{2}{1+\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

◊ **5.2.9** Xác định các tâm cong tại O của đường cong Γ có phương trình cực $\rho = \dfrac{2\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$.

◊ **5.2.10** Một điểm M vạch nên elip Γ có PTĐ $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$; giả sử C là tâm cong của Γ tại M, P là đối xứng của C qua M. Xác định quỹ tích của P.

◊ **5.2.11** Với $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, xét đường parabol Γ_λ có PTĐ : $(y - \lambda x)^2 - (y + \lambda x) = 0$. Xác định quỹ tích của tâm cong tại O của Γ_λ khi λ chạy khắp $\mathbb{R}_+^*$.

◊ **5.2.12** Một điểm M vạch một hyperbol vuông H ; pháp tuyến với H tại M cắt lại H tại một điểm N. Giả sử C là tâm cong của H tại M. Chứng tỏ : $\overline{MN} = -2\overline{MC}$.

◊ **5.2.13*** Cho C là đường lemniscat có BĐTS : $x = \dfrac{t}{1+t^4}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^4}$.

a) Tìm một ĐKCĐ đối với các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 để cho bốn điểm $M(t_i)$ $(1 \le i \le 4)$ của C đồng chu hoặc thẳng hàng.

b) Từ đó suy ra phương trình đường tròn mật tiếp với C tại $M(t_0)$.

c) Tồn tại hay không những đường tròn siêu mật tiếp với C ? Nếu có, hãy xác định chúng.

◊ **5.2.14*** Cho $p \in \mathbb{R}_+^*$, P là parabol có phương trình $y^2 = 2px$, $A \in P$. Một điểm M vạch đường pháp tuyến với P tại A ; giả sử U và V là những chân (khác với A) của những đường pháp tuyến kẻ từ M tới P, và R, S là các tâm cong của P theo thứ tự tại U, V.

Xác định hình bao E của đường thẳng (RS).

◊ **5.2.15*** Chứng minh rằng đường tròn mật tiếp với một parabol P tại một điểm M cắt lại parabol P tại một điểm, ký hiệu là M', và xác định hình bao của đường thẳng (MM') khi M vạch nên P.

◊ **5.2.16*** Cho $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, E là elip có PTĐ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Một điểm M vạch E ; đường tròn mật tiếp với E tại M cắt lại E tại một điểm ký hiệu là M'. Chứng minh rằng, nếu bốn điểm M_1, M_2, M_3, M_4 của E đồng chu, thì bốn điểm liên kết M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 cũng đồng chu.

5.2.3 Đường túc bế của một đường cong trên mặt phẳng

♦ **Định nghĩa** **Đường túc bế** của một đường cong Γ trên mặt phẳng là tập hợp các tâm cong C tại M của Γ khi M vạch nên Γ.

VÍ DỤ :

Đường túc bế của elip

Cho Γ là elip có BDTS $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $(a > 0, b > 0)$.

Ta lần lượt có :

- $x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t$
- $s' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}$
- $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{cotan} t,\ (1 + \tan^2\varphi)d\varphi = \dfrac{b}{a\sin^2 t}\,dt,\ d\varphi = \dfrac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$
- $R = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$
- $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \dfrac{x'}{s'}\vec{i} + \dfrac{y'}{s'}\vec{j} = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}(-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j})$,

  $\vec{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}) = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}(-b\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j})$
- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, trong đó :

$$X = a\cos t + \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}\ \frac{-b\cos t}{\left(a^2 - \sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= a\cos t - \cos t\left(a\sin^2 t + \frac{b^2}{a}\cos^2 t\right) = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

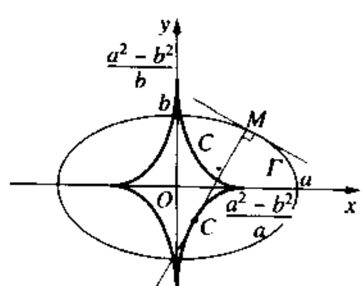
$$Y = b\sin t + \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}\ \frac{-a\sin t}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= b\sin t - \sin t\left(\frac{a^2}{b}\sin^2 t + b\cos^2 t\right) = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

Vậy đường túc bế C của Γ nhận BDTS :

$$\begin{cases} X = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ Y = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

và như vậy là ảnh afin của một đường hình sao.



◆ **Định lý**

Đường túc bế của Γ cũng là hình bao các pháp tuyến của Γ.

Chứng minh :

Ta tham số hóa Γ bằng hoành độ cong :

$$M : s \in J \to M(s) = O + x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} \ ,$$

và kí hiệu $N(s)$ là pháp tuyến với Γ tại $M(s)$.

Một phương trình Descartes của $N(s)$ là (với các tọa độ được ký hiệu là X, Y để tránh lẫn lộn với các tọa độ x, y của điểm chạy $M(s)$ của Γ) :

$$x'(s)(X - x(s)) + y'(s)(Y - y(s)) = 0.$$

Theo 4.4.1, Định lý, ta được một BDTS của hình bao của họ đường thẳng $(N(s))_s$ bằng cách giải hệ phương trình (với các ẩn X, Y) :

$$\begin{cases} N(s) \mid x'(s)X + y'(s)Y = x'(s)x(s) + y'(s)y(s) \\ N'(s) \mid x''(s)X + y''(s)Y = x''(s)x(s) + y''(s)y(s) + x'^2(s) + y'^2(s). \end{cases}$$

Ta giả thiết là : $\forall s \in J, \ \ x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \neq 0.$

Ta suy ra : $\quad X = x - \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\,y', \quad Y = y + \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' + x''y'}\,x'.$

Vì $\quad R = \dfrac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$ và $\vec{N} = (x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y'\vec{i} + x'\vec{j})$, nên đối với điểm chạy P trên hình bao ta có :

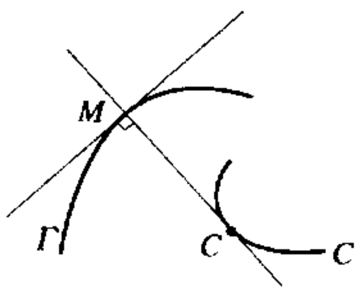
$$\overrightarrow{OP} = X\vec{i} + Y\vec{j} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = \overrightarrow{OC} \ ,$$

vậy $P = C$.

Cuối cùng, hình bao của các pháp tuyến của Γ là đường túc bế của Γ.

NHẬN XÉT :

Điểm đặc trưng của đường pháp tuyến với Γ tại M là tâm cong C tại M của Γ.



VÍ DỤ :

Bằng cách sử dụng định lý trên hãy xác định đường túc bế của một parabol.

Đường parabol Γ với PTD $y^2 = 2px$ ($p > 0$ cố định) nhận BDTS : $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Một vectơ tiếp tuyến với Γ tại $M(t)$ là : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t}{p}\bar{i} + \bar{j}$.

Từ đó suy ra một PTD của pháp tuyến $N(t)$ với Γ tại $M(t)$:

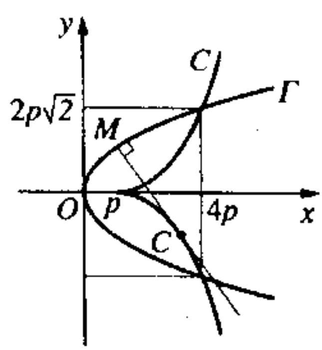
$$\frac{t}{p}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + (y - t) = 0,$$

hoặc :
$$\frac{t}{p}x + y = \frac{t^3}{2p^2} + t.$$

Ta sẽ được một BDTS của hình bao C của $(N(t))_{t \in \mathbb{R}}$ bằng cách giải hệ (với ẩn x, y) :

$$\begin{cases} N(t) \left| \dfrac{t}{p}x + y = \dfrac{t^2}{2p^2} + t \right. \\ N'(t) \left| \dfrac{1}{p}x = \dfrac{3t^2}{2p^2} + 1 \right. \end{cases}$$

Ta được : $x = \dfrac{3t^2}{2p} + p$, $y = -\dfrac{t^3}{p^2}$.



Ta có thể nêu rõ vị trí của C đối với Γ bằng cách xác định $\Gamma \cap C$.

Một điểm $C\left(x = \dfrac{3t^2}{2p} + p, y = -\dfrac{t^3}{p^2}\right)$ sẽ nằm trên Γ khi và chỉ khi $y^2 = 2px$, tức là :

$$\left(-\frac{t^3}{p^2}\right)^2 = 2p\left(\frac{3t^2}{2p} + p\right).$$

Và ta có : $t^6 - 3p^4t^2 - 2p^6 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + p^2)^2(t^2 - 2p^2) = 0$.

Vậy $\Gamma \cap C$ bao gồm hai điểm đối xứng qua $x'x$; một trong chúng, ứng với trị $t = p\sqrt{2}$ của tham số t trên C, có tọa độ :

$$x = 4p, \quad y = -2p\sqrt{2} .$$

Bài tập

5.2.17 Xác định đường túc bế C của các đường cong Γ sau đây :

a) $y = e^x$

b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$ (đường cyclôit)

c) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$ (hypebol)

d) $\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)\sin t \\ y = \sin^2 t \cos t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $a > 0$ (đường hình sao)

f) $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ (đường lemniscat)

g) $\begin{cases} x = p\cos\dfrac{t}{p} - q\cos\dfrac{t}{q} \\ y = p\sin\dfrac{t}{p} - q\sin\dfrac{t}{q} \end{cases}$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2, 2 \le p < q$

h) $\rho = a(1 + \cos\theta), (a > 0)$ (đường hình tim)

i) $\rho = ae^{\lambda\theta}, (a, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (đường xoắn ốc lôga).

5.2.18 Xác định các đường túc bế kế tiếp của C_0 :

$$\begin{cases} x = \sin t \,\mathrm{ch} t + \cos t \,\mathrm{sh} t \\ y = \sin t \,\mathrm{sh} t - \cos t \,\mathrm{ch} t \end{cases}$$

5.2.19* Cho một đường cong Γ là hình bao của họ các đường thẳng (D_θ) có các phương trình dạng chuẩn $x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$, trong đó $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp thích hợp, C là đường túc bế của nó, $M \in \Gamma$, C_1 là tâm cong của Γ tại M, C_2 là tâm cong của C tại C_1. Xác định Γ để đường thẳng (MC_2) có phương cố định.

5.2.4 Các đường thân khai của một đường cong trên mặt phẳng

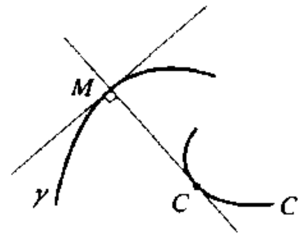
◆ **Định nghĩa** Cho γ, C là hai đường cong thuộc lớp C^2 trên mặt phẳng. Ta nói rằng γ là một **đường thân khai** của C khi và chỉ khi C là đường túc bế của γ.

Giả sử C là một đường cong thuộc lớp C^2 trên mặt phẳng.

Ta ký hiệu s là một hoành độ cong trên C, $C(s)$ là điểm chạy của C, $\vec{T}(s) = \dfrac{\overrightarrow{dC}}{ds}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị định hướng C tại $C(s)$.

1) Giả sử γ là một đường thân khai của C (nếu tồn tại) ; γ nhận một BDTS $s \in J \mapsto M(s)$ thuộc lớp C^2, và với mọi s thuộc J, tồn tại $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + \lambda(s)\vec{T}(s)\,.$$



Vì M, C, $\vec{T}$ đều thuộc lớp C^1 và vì $\vec{T}$ là vectơ đơn vị, nên λ thuộc lớp C^1 trên J. Với mọi s thuộc J, ta có :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dC}}{ds} + \lambda'(s)\vec{T}(s) + \lambda(s)\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = (1 + \lambda'(s))\vec{T}(s) + \frac{\lambda(s)}{R(s)}\vec{N}(s)\,,$$

trong đó $R(s)$ chỉ bán kính cong của C tại $C(s)$, và $\vec{N}(s) = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{T}(s))$.

Vì : $\quad \forall s \in J, \quad \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} \perp \vec{T}(s)\,,$

nên ta có : $\quad \forall s \in J, \quad 1 + \lambda'(s) = 0.$

Vậy tồn tại $s_0 \in \mathbb{R}$ sao cho : $\quad \forall s \in J, \quad \lambda(s) = -s + s_0.$

Ta được : $\quad \forall s \in J, \quad \overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\vec{T}(s).$

2) Ngược lại, giả sử $s_0 \in \mathbb{R}$ và γ là đường cong có BDTS :

$$\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\vec{T}(s).$$

Rõ ràng rằng γ thuộc lớp C^1 và rằng, nếu C thuộc lớp C^3 thì γ thuộc lớp C^2.

Với mọi s thuộc J, ta có :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dC}}{ds} - \vec{T}(s) + (s_0 - s)\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \frac{s_0 - s}{R(s)}\vec{N}(s)\,,$$

điều này chứng tỏ rằng pháp tuyến với γ tại $M(s)$ được định phương bởi $\vec{T}(s)$.

Như vậy, pháp tuyến với γ tại $M(s)$ là tiếp tuyến với C tại $C(s)$, và C là hình bao của các pháp tuyến của γ.

Cuối cùng, γ là một đường thân khai của C.

Ta tóm tắt việc khảo sát :

♦ **Định lý** Cho C là một đường cong thuộc lớp C^3 trên mặt phẳng. Ta ký hiệu s là một hoành độ cong trên C, $C(s)$ là điểm chạy của C, $\vec{T}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}s}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị định hướng C tại $C(s)$. Khi đó, các đường thân khai của C là các đường cong được xác định bởi các biểu diễn tham số:

$$\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\vec{T}(s),$$

với $s_0 \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

VÍ DỤ : Xác định các đường thân khai của đường dây xích.

Đường dây xích là đường cong C có PTĐ $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ ($a > 0$ cố định). Ta xác định các đường thân khai của nó. Ta có :

$$s' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{ch}\frac{x}{a},$$

rồi :

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{ch}\frac{x}{a}}\left(\vec{i} + \mathrm{sh}\frac{x}{a}\vec{j}\right).$$

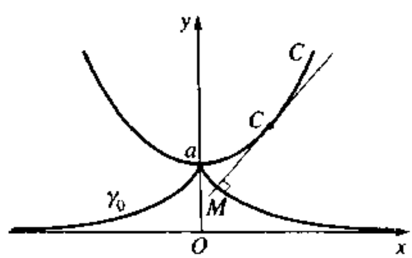
Nếu chọn điểm $A(a, 0)$, ứng với $x = 0$ làm gốc hoành độ cong trên C, thì ta có $s = a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$.

Các đường thân khai của C là các đường cong γ_λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) xác định bởi các biểu diễn tham số :

$$\begin{cases} X = x + (\lambda - s)\dfrac{1}{\mathrm{ch}\frac{x}{a}} = x + \left(\lambda - a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{1}{\mathrm{ch}\frac{x}{a}} \\ Y = y + (\lambda - s)\mathrm{th}\dfrac{x}{a} = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a} + \left(\lambda - a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}\right)\mathrm{th}\dfrac{x}{a} \end{cases}$$

Đặc biệt γ_0 được gọi là **đường *tractrice* của đường dây xích**, có BDTS :

$$\begin{cases} X = x - a\,\mathrm{th}\dfrac{x}{a} \\ Y = \dfrac{a}{\mathrm{ch}\frac{x}{a}}. \end{cases}$$



Bài tập

◊ **5.2.20** Xác định các đường thân khai của đường tròn C có PTĐ $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ cố định. Hãy vẽ đường thân khai đi qua điểm $A(R, 0)$.

◊ **5.2.21** a) Xác định các đường thân khai của đường cong C $\begin{cases} x = 3\,\mathrm{sh}^2 t \\ y = 2\,\mathrm{sh}^3 t \end{cases}$

b) Nhận dạng đường thân khai đi qua điểm $A(-2, 0)$.

Chương 6

Đường cong trong không gian và mặt cong

Việc khảo sát được tiến hành trong không gian afin Euclide ba chiều, ký hiệu là $\mathcal{E}_3$, khi cần được trang bị một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $\mathcal{R} = \left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; tích vô hướng được ký hiệu (.|.) hoặc ., chuẩn liên kết được ký hiệu là ‖.‖, và khoảng cách giữa hai điểm A, B được ký hiệu là $d(A, B)$ hoặc $\|\overrightarrow{AB}\|$ hoặc AB.

Như thông lệ, ta đồng nhất $\mathcal{E}_3$ với $\mathbb{R}^3$.

Ta có thể khái quát hóa, có điều chỉnh chút ít, việc khảo sát ở các 6.1.1 và 6.1.2 cho trường hợp một không gian vectơ định chuẩn hữu hạn chiều, và việc khảo sát ở các 6.1.3 và 6.1.4 cho trường hợp một không gian Euclide.

6.1 Đường cong trong không gian

I chỉ một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng cũng không suy biến thành một điểm (việc khảo sát có thể tương thích cả với trường hợp một hợp những khoảng như vậy), và k chỉ một số nguyên ≥ 1 hoặc $= +\infty$.

6.1.1 Đại cương

Việc khảo sát cũng tương tự như ở § 4.1.1.

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi ánh xạ $f : \begin{array}{l} I \to \mathcal{E}_3 \\ t \mapsto f(t) \end{array}$ thuộc lớp C^k

là **cung tham số hóa thuộc lớp C^k.**

Tùy theo $f(t)$ được xem như một điểm hoặc một vectơ, ta có thể ký hiệu là $f(t)$ hoặc $\overrightarrow{f(t)}$.

♦ **Định nghĩa 2** Cho $f : I \to \mathcal{E}_3$ là một cung tham số hóa. **Quỹ đạo của** f là bộ phận $f(I) = \{f(t) \,;\, t \in I\}$ của $\mathcal{E}_3$.

Ta cũng nói rằng $f(I)$ là một **đường cong (trong không gian)** nhận f làm **biểu diễn tham số** (viết tắt : BDTS).

Đáng lẽ nói đường cong trong không gian, người ta cũng còn nói : **đường cong ghềnh.**

♦ **Định nghĩa 3** Cho $f : I \to \mathcal{E}_3$ là một cung tham số hóa (thuộc lớp C^k).

1) Mọi ánh xạ $\varphi : J \to I$, trong đó J là một khoảng của $\mathbb{R}$, sao cho :

$$\begin{cases} \varphi \text{ là thuộc lớp } C^k \text{ trên } J \\ \varphi \text{ là song ánh} \\ \varphi^{-1} \text{ là thuộc lớp } C^k \text{ trên } J \end{cases}$$

gọi là **phép đổi tham số (thuộc lớp C^k)** của f.

2) Mọi ánh xạ $g : J \to \mathcal{E}_3$, trong đó J là một khoảng của $\mathbb{R}$, sao cho tồn tại một phép đổi tham số (thuộc lớp C^k) φ của f thỏa mãn $g = f \circ \varphi$, gọi là **biểu diễn tham số hóa chấp nhận được (thuộc lớp C^k)** của f.

Các nhận xét ở 4.1.1. 4) cũng còn giá trị ở đây, bằng cách thay $\mathcal{E}_2$ bởi $\mathcal{E}_3$.

Một đường cong trong không gian có thể được định nghĩa bằng một **hệ phương trình Descartes** (viết tắt : HPTD) : $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Trong thực hành, ta chuyển từ một BDTS của một đường cong không gian sang một HPTD bằng cách khử các tham số.

VÍ DỤ :

Một HPTD của đường cong Γ có BDTS ($x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$) là $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$.

Ta nhắc lại định lý hàm ẩn, trong các trường hợp mà ở đây ta quan tâm (xem Tập 4, 8.4).

♦ **Định lý** Cho V là một tập mở của $\mathbb{R}^3$, $A = (a, b, c) \in V$, $F, G : V \to \mathbb{R}$ là hai ánh xạ.

Ta giả thiết : $\begin{cases} \bullet\ F(A) = G(A) = 0 \\ \bullet\ F, G \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } V \\ \bullet\ \begin{vmatrix} F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_y(A) & G'_z(A) \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$

Khi đó, tồn tại một khoảng mở v của $\mathbb{R}$, có tâm tại a, và những khoảng mở w_1, w_2 của $\mathbb{R}$ lần lượt có tâm tại b và c, sao cho :

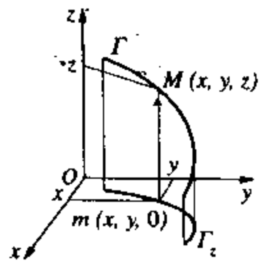
- $v \times w_1, \times w_2 \subset V$
- tồn tại một cặp ánh xạ duy nhất $\varphi : v \to w_1$, $\psi : v \to w_2$
  thỏa mãn : $\forall x \in v$, $\begin{cases} F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases}$
- φ và ψ đều thuộc lớp C^k trên v.

Hơn nữa, nếu F, G đều thuộc lớp C^k ($k \geq 1$) trên V, thì φ, ψ thuộc lớp C^k trên v. ■

Hình chiếu của một đường cong trong không gian lên các mặt phẳng tọa độ

Giả sử Γ là một đường cong trong không gian, có BDTS là :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in I.$$



Rõ ràng là hình chiếu Γ_z củ Γ lên mặt phẳng xOy

(song song với $z'z$) có BDTS : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = 0. \end{cases}$

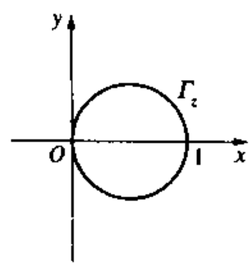
Kết quả tương tự đối với hai hình chiếu kia của Γ.

VÍ DỤ :

Xác định và vẽ các hình chiếu vuông góc lên ba mặt phẳng tọa dộ của đường

cong Γ có BDTS : $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = \sin t \end{cases}$ gọi là **cửa sổ Viviani**.

- Hình chiếu Γ_z của Γ lên xOy, song song với $z'z$,

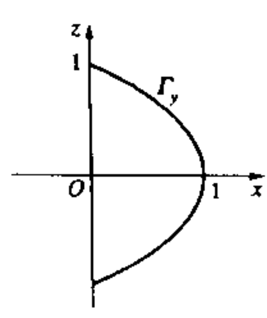


có BDTS : $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \sin t \\ z = 0 \end{cases}$, hoặc : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

Vậy Γ_z là một đường tròn (trong mặt phẳng $z = 0$), tâm $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$ và bán kính $\dfrac{1}{2}$.

- Hình chiếu Γ_y của Γ lên xOz, song song với $y'y$,

có BDTS : $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = 0 \\ z = \sin t \end{cases}$.



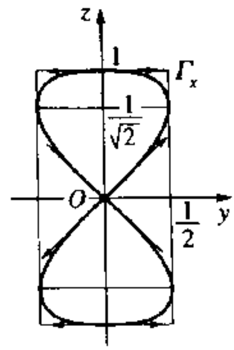
Bằng cách khử t, ta thu được một HPTD : $\begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y = 0 \\ -1 \le z \le 1. \end{cases}$

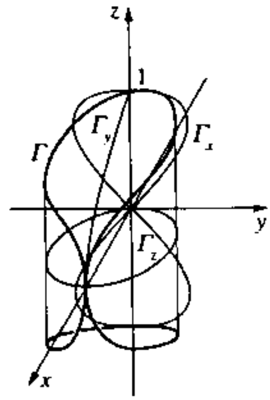
Vậy, Γ_y là một cung parabol.

• Hình chiếu Γ_x của Γ lên yOz,

song song với $x'x$, có BDTS : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos t \sin t, \\ z = \sin t \end{cases}$

và HPTĐ : $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = z^2(1 - z^2). \end{cases}$





6.1.2 Tiếp tuyến tại một điểm

Việc khảo sát tương tự như ở 4.1.2, *1*).

♦ **Định nghĩa 1** Cho $f : \begin{array}{l} I \to \mathcal{E}_3 \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, $\Gamma = f(I)$ là quỹ đạo của nó, $M(t)$ là một điểm thuộc Γ.

Ta nói rằng $M(t)$ là một điểm **chính quy** của Γ khi và chỉ khi $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$.

Nếu f thuộc lớp C^2, ta nói rằng $M(t)$ là một điểm **song chính quy** của Γ khi và chỉ khi họ $(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$ độc lập.

Một điểm không chính quy của Γ cũng được gọi là **điểm dừng.**

NHẬN XÉT :

Các khái niệm về điểm chính quy và điểm song chính quy là bất biến đối với phép đổi tham số (tương ứng thuộc lớp C^1 hoặc C^2).

♦ **Định nghĩa 2** Ta nói rằng một cung tham số hóa : $\underset{t \mapsto M(t)=f(t)}{f : I \to \varepsilon_3}$ thuộc lớp C^1 (tương ứng : C^2) là **chính quy** (tương ứng : **song chính quy**) khi và chỉ khi, với mọi t thuộc I, $M(t)$ là một điểm chính quy (tương ứng : song chính quy) đối với f.

Các nhận xét ở 4.1.2, *1*) cũng còn giá trị ở đây, bằng cách thay ε_2 bởi ε_3.

♦ **Định nghĩa 3** Cho $\underset{t \mapsto M(t)=f(t)}{f : I \to \varepsilon_3}$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của f, $t_0 \in I$, $A = M(t_0)$, còn được ký hiệu là $A(t_0)$.

1) Ta nói rằng Γ **nhận một nửa tiếp tuyến** tại $A(t_0^+)$ (tương ứng : $A(t_0^-)$) khi và chỉ khi vectơ chuẩn hóa $\dfrac{\overrightarrow{AM(t)}}{\|AM(t)\|}$ (nếu tồn tại) có giới hạn khi t tiến đến t_0^+ (tương ứng : t_0^-).

Trong trường hợp đó, ta gọi nửa đường thẳng gốc A được định phương và định hướng bởi giới hạn đó, là **nửa tiếp tuyến với Γ tại** $A(t_0^+)$ (tương ứng $A(t_0^-)$).

2) Ta nói rằng Γ **nhận một tiếp tuyến tại** $A(t_0)$ khi và chỉ khi Γ nhận hai nửa tiếp tuyến bằng nhau hay đối nhau tại $A(t_0^+)$ và $A(t_0^-)$. Trong trường hợp đó, ta gọi đường thẳng đi qua A và mang hai nửa tiếp tuyến là **tiếp tuyến tại** $A(t_0)$ **với** Γ.

NHẬN XÉT :

Sự tồn tại một bán tiếp tuyến hoặc một tiếp tuyến tại một điểm của Γ là bất biến đối với phép đổi tham số.

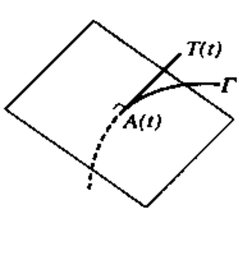
♦ **Định lý** Cho $f : I \to \mathcal{E}_3$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó. Tại một điểm chính quy $A(t)$ của Γ, Γ nhận một tiếp tuyến, và tiếp tuyến này được định phương bởi $\overrightarrow{f'(t)}$.

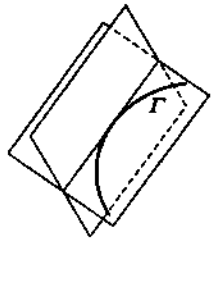
♦ **Định nghĩa 4** Cho $f : I \to \mathcal{E}_3$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó, $A(t)$ là một điểm chính quy của Γ, $T(t)$ là tiếp tuyến tại $A(t)$ với Γ.

Ta gọi :

- mặt phẳng đi qua $A(t)$ và vuông góc với $T(t)$ là **pháp diện với** Γ **tại** $A(t)$.
- mọi mặt phẳng chứa $T(t)$ là **tiếp diện với** Γ **tại** $A(t)$.

Như vậy, tại $A(t)$ Γ nhận một và chỉ một mặt pháp, và vô số mặt tiếp (còn gọi là : tiếp diện) (làm thành chùm tuyến tính các mặt phẳng được xác định bởi $T(t)$, xem bài tập 1. 2.9.)





◆ **Định nghĩa 5** Cho $f: I \to \mathcal{E}_3$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, Γ là quỹ đạo của nó, $A(t)$ là một điểm chính quy của Γ. Ta gọi vectơ, ký hiệu là $\vec{T}(t)$ (hoặc : $\vec{T}$) xác định bởi :

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}$$

là **vectơ tiếp tuyến đơn vị (định hướng)** của Γ tại $A(t)$.

Ta kết thúc § này bằng cách khảo sát một loại đường cong trong không gian đặc biệt, đó là các đường đinh ốc.

◆ **Định nghĩa 6** Ta gọi mọi đường cong Γ trong không gian, thuộc lớp C^1, chính quy, sao cho tồn tại một vectơ chuẩn hóa cố định $\vec{K}$ sao cho góc $(\vec{K},\overrightarrow{T(t)})$ có độ đo không đổi (modulo 2π), là **đường đinh ốc.**

VÍ DỤ :

1) Đường đinh ốc tròn bước cố định

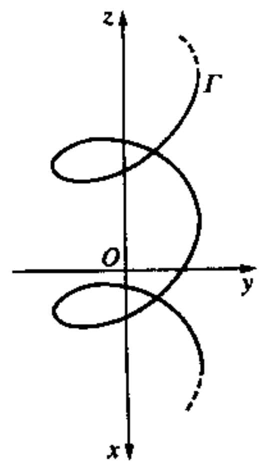
Cho $r \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{R}^*$, Γ là đường cong có BDTS :

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = ht \end{cases}$$

Với mọi t thuộc $\mathbb{R}$ ta có : $\left\{\begin{array}{l} x' = -r\sin t \\ y' = r\cos t \\ z' = h \end{array}\right|$, từ đó :

$$\frac{\vec{k}.\overrightarrow{T(t)}}{\|\vec{k}\|\,.\,\|\overrightarrow{T(t)}\|} = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

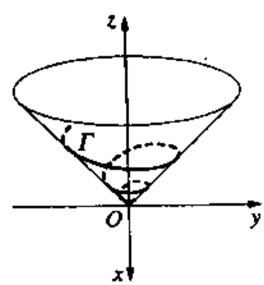
Như vậy, góc $(\vec{k},\overrightarrow{T(t)})$ không đổi, Γ là một đường đinh ốc, gọi là **đường đinh ốc tròn bước cố định.**



2) Tương tự, đường cong Γ có BDTS :

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t\,, \\ z = e^{-t} \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$, là một đường đinh ốc, vạch trên hình nón (xem dưới đây, 6.2.3, 2)) có PTĐ : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.



6.1.3 Hoành độ cong

$f : I \to \mathcal{E}_3$ chỉ một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, $\Gamma = f(I)$ là quỹ đạo của nó. Với $t \in I$, ta có thể ký hiệu $M(t)$ thay vì $f(t)$. Với $t \in I$, ta ký hiệu $(x(t), y(t), z(t))$ là các tọa độ của $M(t)$ trong $\mathcal{R}$; như vậy với mọi t thuộc I :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

♦ **Định nghĩa 1** **Hoành độ cong trên** Γ là mọi ánh xạ $s : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên I sao cho :

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \|\overrightarrow{f'(t)}\|.$$

Các nhận xét ở 5.1.1 vẫn còn giá trị ở đây, bằng cách thay $\mathcal{E}_2$ bởi $\mathcal{E}_3$. Với các ký hiệu ở Định nghĩa 1, ta có :

$$\forall t \in I, \quad s'^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t),$$

mà đôi lúc ta còn viết theo một cách lạm dụng :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

♦ **Định nghĩa 2** Cho s là một hoành độ cong trên Γ, $a, b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. Ta gọi :

- số thực $s(b) - s(a)$, tức là :

$$l(\widehat{AB}) = \int_a^b \|\overrightarrow{f'(t)}\|\, dt$$

là **độ dài (đại số)** của cung $\widehat{AB}$ của Γ, và ký hiệu ở đây là $l(\widehat{AB})$.

- trị tuyệt đối của độ dài (đại số) của cung $\widehat{AB}$ trên Γ là **độ dài** của $\widehat{AB}$ trên Γ.

NHẬN XÉT :

Đối với độ dài cung ta cũng có tính chất "cộng tính" như ở Mệnh đề 1, 5.1.1.

VÍ DỤ :

Tính độ dài L của đường cong Γ trong không gian có BDTS :

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = -\ln \cos t,\ t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Ta có : $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $z' = \tan t$,

từ đó : $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$,

vậy : $s' = \dfrac{1}{\cos t}$,

và : $$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} s'(t)dt \underset{(u=\sin t)}{=} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \ln(\sqrt{2}+1) \simeq 0{,}881.$$

◆ **Định nghĩa 3** Ta gọi mọi biểu diễn tham số chấp nhận được $g : J \to \mathcal{E}_3$ thuộc lớp C^1 của f sao cho

$$\forall u \in J, \qquad \|\overrightarrow{g'(u)}\| = 1$$

là **biểu diễn tham số chuẩn** của f.

◆ **Mệnh đề** Nếu f chính quy thì :

- với mọi hoành độ cong s trên Γ, $f \circ s^{-1}$ là một biểu diễn tham số chuẩn của f.
- với mọi biểu diễn tham số chuẩn g của f, tồn tại một hoành độ cong s trên Γ sao cho :

$$g = f \circ s^{-1} \quad \text{hoặc} \quad g = f \circ (-s)^{-1}.$$

Ta nói một cách giản đơn rằng s và $-s$ đều là những biểu diễn tham số chuẩn của Γ.

NHẬN XÉT :

Ta giả thiết f chính quy và cho s là một hoành độ cong trên Γ. Khi đó, tại mọi điểm $M(s)$ của Γ, vectơ tiếp tuyến chuẩn hoá (có định hướng) $\overrightarrow{T(s)}$ là :

$$\overrightarrow{T(s)} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s}.$$

Khái niệm về mặt phẳng mật tiếp tại một điểm song chính quy

Việc khảo sát sau đây dành cho sinh viên năm thứ hai.

◆ **Định nghĩa 4** Cho $\begin{array}{c} f : I \to \mathcal{E}_3 \\ t \mapsto M(t) = f(t) \end{array}$ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^2, Γ là quỹ đạo của nó, $M(t)$ là một điểm song chính quy của Γ.

Ta gọi mặt phẳng đi qua $M(t)$ và được định phương bởi $(f'(t), f''(t))$ là **mặt phẳng mật tiếp** với Γ tại $M(t)$.

NHẬN XÉT :

1) Mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ tiếp xúc với Γ tại $M(t)$.

2) Ta có thể chứng minh (xem thêm 5.2.2) rằng mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ *tiếp xúc với Γ với bậc ≥ 3.*

VÍ DỤ :

Lập một PTD của mặt phẳng mật tiếp $\Pi(t)$ tại mỗi điểm $M(t)$ của đường cong Γ có BDTS : $x = \mathrm{ch}\, t,\ y = \mathrm{sh}\, t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng rằng Γ là thuộc lớp C^2 và, với mọi t thuộc $\mathbb{R}$:

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{sh}\,t\,\vec{i} + \mathrm{ch}\,t\,\vec{j} + \vec{k},\quad \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{ch}\,t\,\vec{i} + \mathrm{sh}\,t\,\vec{j},$$

Vậy $M(t)$ song chính quy :

Ta được một PTD của $\Pi(t)$:

$$P(X, Y, Z) \in \Pi(t) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X - \mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t \\ Y - \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t \\ Z - t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow X\,\mathrm{sh}\,t - Y\,\mathrm{ch}\,t - Z - t = 0.$$

6.1.4 Khảo sát định lượng

§ 6.1.4 này dành cho sinh viên năm thứ hai.

$f : I \to \mathcal{E}_3$ chỉ một cung tham số hóa thuộc lớp C^2, $\Gamma = f(I)$ là quỹ đạo của nó, s là một hoành độ cong trên Γ.

Ta đã biết (xem 6.1.3, Mệnh đề) rằng Γ nhận s (hoặc : $f \circ s^{-1}$) làm biểu diễn tham số chuẩn. Bây giờ ta giả thiết rằng Γ được tham số hóa bởi s ($s \in J$) và ta xét một điểm song chính quy $M(s)$ của Γ. Vậy mọi điểm của Γ gần với $M(s)$ cũng là song chính quy.

Ta ký hiệu **vectơ tiếp tuyến chuẩn hóa (định hướng)** tại $M(s)$ với Γ, xác định bởi :

$$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} \quad \text{là } \vec{T}(s) \text{ (hoặc } \vec{T}\text{)}.$$

◆ **Định nghĩa 1** **Độ cong của Γ tại** $M(s)$, ký hiệu là $\gamma(s)$ (hoặc : γ), là số thực xác định bởi :

$$\gamma = \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \right\|.$$

Vì $M(s)$ song chính quy nên ta có $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \neq \vec{0}$, và vì vậy : $\gamma > 0$.

◆ **Định nghĩa 2**

1) **Bán kính cong của Γ tại** $M(s)$, ký hiệu là $R(s)$ (hoặc : R), là số thực định nghĩa bởi : $R = \dfrac{1}{\gamma}$.

2) **Vectơ pháp tuyến chính với Γ tại** $M(s)$, ký hiệu là $\overrightarrow{N(s)}$ (hoặc $\vec{N}$), là vectơ định nghĩa bởi :

$$\vec{N} = R\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s},$$

Vậy ta có : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{N}}{R}$, $\left\|\vec{N}\right\| = 1, R > 0.$

Ta có thể chú ý rằng mặt phẳng mặt tiếp với Γ tại $M(s)$, được định phương bởi $\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}s^2}\right)$, thì cũng được định phương bởi $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$.

Vì : $\forall s \in J, \left\|\overrightarrow{T(s)}\right\|^2 = 1$, nên bằng cách lấy đạo hàm, ta có :

$$\forall s \in J,\ \vec{T}.\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = 0, \text{ tức là : } \vec{T}.\vec{N} = 0.$$

◆ **Định nghĩa 3**

1) **Vectơ trùng pháp tuyến với Γ tại** $M(s)$, ký hiệu $B(s)$ (hoặc : $\vec{B}$), là vectơ được định nghĩa bởi :

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}.$$

2) $\left(M; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$ là một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận, gọi là **hệ quy chiếu Frenet với Γ tại M.**

Ta giả thiết thêm nữa rằng f thuộc lớp C^3, và rằng $M(s)$ là điểm **tam chính quy** của Γ, tức là rằng $\left(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}, f'''(t)\right)$ độc lập.

♦ Định nghĩa 4

1) **Độ xoắn của Γ tại** $M(s)$, ký hiệu là $\tau(s)$ (hoặc : τ), là số thực được định nghĩa bởi : $\tau = \vec{B}.\dfrac{d\vec{N}}{ds}$.

2) Nếu $\tau \neq 0$, **bán kính xoắn của Γ tại** $M(s)$, và ký hiệu là $T(s)$ (hoặc : T), là số thực được định nghĩa bởi : $T = \dfrac{1}{\tau}$.

Ta chú ý tránh không lẫn lộn giữa vectơ $\vec{T}(s)$ với số thực $T(s)$.

Vì : $\vec{T}.\vec{N} = 0$, nên sau khi lấy đạo hàm ta được : $\dfrac{d\vec{T}}{ds}.\vec{N} + \vec{T}.\dfrac{d\vec{N}}{ds} = 0$.

Do $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{R}$, ta suy ra : $\vec{T}.\dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\dfrac{1}{R}$.

Mặt khác : $\vec{N}^2 = 1$, vậy $\vec{N}.\dfrac{d\vec{N}}{ds} = 0$.

Vì $\left(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$ là một cơ sở trực chuẩn, nên ta có :

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \left(\vec{T}.\frac{d\vec{N}}{ds}\right)\vec{T} + \left(\vec{N}.\frac{d\vec{N}}{ds}\right)\vec{N} + \left(\vec{B}.\frac{d\vec{N}}{ds}\right)\vec{B} = -\frac{1}{R}\vec{T} + \frac{1}{T}\vec{B}.$$

Cuối cùng, bằng cách lấy đạo hàm một tích vectơ :

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{N} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{T}\vec{T} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{T}\vec{N}.$$

Vậy ta nhận được các **công thức Frenet :**

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{R} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\dfrac{\vec{T}}{R} + \dfrac{\vec{B}}{T} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds} = -\dfrac{\vec{N}}{T}. \end{cases}$$

Ta có thể ghi nhớ các công thức Frenet dưới dạng lạm dụng ký hiệu sau đây :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{T}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{R} & 0 \\ -\dfrac{1}{R} & 0 & \dfrac{1}{T} \\ 0 & -\dfrac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}.$$

Khảo sát định lượng một đường cong trong không gian, đó là tính các phần tử $\vec{T}, R, \vec{N}, \vec{B}, T$ tại mọi điểm M của Γ.

VÍ DỤ :

1) Đường đinh ốc tròn có bước không đổi

Đó là Γ: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, trong đó $(r, h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ cố định (xem thêm 6.1.2 ,Ví dụ 1).

Ta có :

• $x' = -r\sin t$, $y' = r\cos t$, $z' = h$, $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 + h^2$, $s' = \sqrt{r^2 + h^2}$

• $\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-r\sin t\,\vec{i} + r\cos t\,\vec{j} + h\vec{k})$

• $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{r^2 + h^2}(-r\cos t\,\vec{i} - r\sin t\,\vec{j})$, $\dfrac{1}{R} = \left\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \dfrac{r}{r^2 + h^2}$,

$R = \dfrac{r^2 + h^2}{r}$, $\vec{N} = R\dfrac{d\vec{T}}{ds} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$

• $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = -\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-h\sin t\,\vec{i} + h\cos t\,\vec{j} - r\vec{k})$

• $\dfrac{d\vec{N}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\vec{N}}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}\left(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}\right)$, $\dfrac{1}{T} = \vec{B}.\dfrac{d\vec{N}}{ds} = \dfrac{h}{r^2 + h^2}$, $T = \dfrac{r^2 + h^2}{h}$.

2) Khảo sát định lượng Γ: $\begin{cases} x = \operatorname{sh} 2t - 2t \\ y = \operatorname{ch} 2t - 1 \\ z = 4\operatorname{ch} t \end{cases}$, $t \in]0\,; +\infty[$.

Ta có :

• $x' = 2\operatorname{ch} 2t - 2$, $y' = 2\operatorname{sh} 2t$, $z' = 4\operatorname{sh} t$,

$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4(\operatorname{ch} 2t - 1)^2 + 4\operatorname{sh}^2 2t + 16\operatorname{sh}^2 t$

$= 8\operatorname{ch}^2 2t - 8\operatorname{ch} 2t + 8(\operatorname{ch} 2t - 1) = 8\operatorname{sh}^2 2t$, $s' = 2\sqrt{2}\operatorname{sh} 2t$

• $\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\operatorname{sh} 2t}\left((2\operatorname{ch} 2t - 2)\,\vec{i} + 2\operatorname{sh} 2t\,\vec{j} + 4\operatorname{sh} t\,\vec{k}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{th} t\,\vec{i} + \vec{j} + \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{k}\right)$

• $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \dfrac{1}{4\operatorname{sh} 2t}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{i} - \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{k}\right) = \dfrac{1}{4\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch}^2 t}\left(\vec{i} - \operatorname{sh} t\,\vec{k}\right)$

$\dfrac{1}{R} = \left\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}}{4\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch}^2 t} = \dfrac{1}{4\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch} t}$, $R = 8\operatorname{sh} t\operatorname{ch}^2 t$

• $N = R\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{i} - \operatorname{th} t\,\vec{k}$

• $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{th} t\,\vec{i} + \vec{j} - \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{k}\right)$

• $\dfrac{d\vec{B}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\vec{B}}{dt} = \dfrac{1}{4\operatorname{sh} 2t}\left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{i} + \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{k}\right)$, $-\dfrac{\vec{N}}{T} = -\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{i} - \operatorname{th} t\,\vec{k}\right)$.

Từ đó, vì : $\dfrac{d\vec{B}}{ds} = -\dfrac{\vec{N}}{T}$, nên : $\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{4\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch} t}$, $T = 8\operatorname{sh} t\operatorname{ch}^2 t$.

Trong giai đoạn cuối cùng này (tính T), trong thực hành chỉ cần đồng nhất một tọa độ (khác không) của $\dfrac{d\vec{B}}{ds}$ với $-\dfrac{\vec{N}}{T}$.

Bài tập

◊ **6.1.1.** Cho $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$. Chứng minh rằng đường cong Γ với BDTS :

$$x = \frac{P(t)}{1+t^2},\ y = \frac{Q(t)}{1+t^2},\ z = \frac{R(t)}{1+t^2},\ t \in \mathbb{R},\quad \text{là phẳng.}$$

◊ **6.1.2** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đường cong Γ với BDTS : $x = \operatorname{ch}(t+a), y = \operatorname{ch}(t+b), z = \operatorname{ch}(t+c),\ t \in \mathbb{R}$, là phẳng và nhận dạng Γ.

◊ **6.1.3** Nhận dạng đường cong Γ: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - \dfrac{z}{4} = 0 \\ x^2 + xy + z^2 - \dfrac{y}{4} = 0. \end{cases}$

◊ **6.1.4** Cho D là đường thẳng $x = y = z$, Γ là đường cong được biểu diễn tham số bởi ($x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$). Lập một phương trình Descartes cho mặt cong là hợp của các đường thẳng Δ không đi qua O, cắt D, và cắt Γ tại hai điểm phân biệt (của Γ).

◊ **6.1.5*** Cho Γ: $x = t^4$, $y = t^3 + t$, $z = t^2$.

a) Tìm ĐKCĐ đối với các hàm số đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 để cho bốn điểm của Γ ứng với tham số t_i ($1 \le i \le 4$) đồng phẳng.

b) α) Từ đó suy ra các mặt phẳng song tiếp với Γ.

β) Chứng tỏ rằng các mặt song tiếp đi qua một điểm cố định hoặc đều song song với $y'y$.

γ) Lập một phương trình Descartes cho mặt cong là hợp các dây nối hai điểm tiếp xúc của các mặt phẳng song tiếp với Γ.

Các bài tập 6.1.6 đến 6.1.20 *liên hệ với khái niệm mặt phẳng mật tiếp*

◊ **6.1.6** Lập một phương trình Descartes của mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm $M(t)$ của Γ:

$$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}.$$

◊ **6.1.7** Lập một phương trình Descartes của mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm với đường cong được xác định trong tọa độ trụ bởi : $\rho = e^{m\theta}$, $z = e^{m\theta}$ ($m \in \mathbb{R}^*$ cố định).

◊ **6.1.8** Cho $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}_3$, $(a, h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$, Γ là **đường đinh ốc tròn bước không đổi**, có biểu diễn tham số : $a = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ ($t \in \mathbb{R}$). Chứng tỏ rằng các điểm tiếp xúc của các những mặt phẳng mật tiếp với Γ, và đi qua từ M_0, là đồng phẳng.

◊ **6.1.9** Lập một phương trình Descartes của mặt phẳng mật tiếp tại A với Γ:

a) $A(0,0,0)$, Γ: $\begin{cases} \tan x - \tan y = \tan z \\ \operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh}z + 2z^2 \end{cases}$

b) $A(2,1,2)$, Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

c) $A(1,0,0)$, Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \operatorname{ch}^2 z \\ x - 1 = y - z^2 \end{cases}$

◊ **6.1.10** Xác định các điểm thuộc Γ ($x = 2t^3$, $y = -2t^2$, $z = -3t$) mà tại đó mặt phẳng mật tiếp đi qua $A(1, 1, 1)$.

◊ **6.1.11** Với ký hiệu $\Gamma: x = t, y = t^2, z = f(t)$, xác định $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 để có

- $A(1, 1, 1) \in \Gamma$
- tiếp tuyến tại A với Γ song song với $\vec{u}\ (1, 2, 3)$
- mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm M của Γ đi qua hình chiếu vuông góc m của M trên $y'y$.

◊ **6.1.12*** Cho Γ: $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = t^3\ (t \in \mathbb{R})$.

a) Lập một PTD của mặt phẳng $\Pi(t)$ mật tiếp với Γ tại $M(t)$.

b) Với mọi điểm P của $\mathcal{E}_3$, tồn tại ba trị (thực hay phức) t_1, t_2, t_3 của tham số t sao cho $P \in \Pi(t)$. Chứng minh rằng bốn điểm $M(t_1), M(t_2), M(t_3), P$ đồng phẳng.

◊ **6.1.13** Cho $\Gamma: x = t,\ y = \dfrac{t^2}{2},\ z = \dfrac{t^3}{3}$. Xác định hình bao của vết trên mặt phẳng xOy của mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ khi t chạy khắp $\mathbb{R}$.

◊ **6.1.14** Cho Γ: $y = x^2, z = x^3$.

a) Xác định các dây của Γ mà tại các mút của chúng các mặt phẳng mật tiếp với Γ trực giao nhau.

b) Lập một phương trình Descartes của mặt cong là hợp của các dây ấy.

◊ **6.1.15** Cho $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ và $\Gamma: x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^3$.

Xác định quỹ tích của các điểm từ đó có thể vẽ hai mặt phẳng mật tiếp với Γ có các vết trên mặt phẳng xOy trực giao.

◊ **6.1.16** Xác định các ánh xạ $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, sao cho mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm M của Γ $\left(x = t, y = \dfrac{t^2}{2}, z = \varphi(t)\right)$ chứa đường vuông góc hạ từ M xuống $z'z$.

◊ **6.1.17*** Cho $\Gamma: x = t^4,\ y = t^3 + 3t^2,\ z = t^2 + 4t,\ t_0 \in \mathbb{R}$, M_0 là điểm của Γ có tham số t_0. Chứng tỏ rằng nói chung có 3 mặt phẳng mật tiếp với Γ đi qua M_0 và rằng các điểm tiếp xúc của các mặt phẳng này với Γ thẳng hàng.

◊ **6.1.18*** Cho Γ: $x = t^3 - 1,\ y = \dfrac{t^3 - 1}{t}, z = \dfrac{t^2 + 1}{t}$.

a) Tìm ĐKCĐ đối với các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 để cho bốn điểm của Γ với tham số $t_i\ (1 \le i \le 4)$ đồng phẳng.

b) Từ đó suy ra một phương trình của mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$.

c) Γ có điểm kép hay không ?

◊ **6.1.19*** Cho Γ: $x = t^2, y = t^3, z = t^2$.

a) Tìm ĐKCĐ đối với các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 để cho bốn điểm của Γ với tham số $t_i\ (1 \le i \le 4)$ đồng phẳng.

b) Từ đó suy ra một phương trình Descartes của mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$; mặt phẳng này cắt lại Γ tại một điểm ký hiệu là $M'(t)$.

c) Chứng minh rằng, nếu $M_i(t_i)\ (1 \le i \le 4)$ đồng phẳng, thì các $M_i'(t_i')$ liên kết (xem b)) cũng đồng phẳng.

◊ **6.1.20*** Cho $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}_3$ và $\Gamma: x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$.

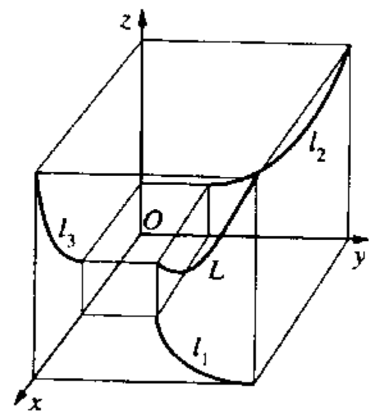
a) Xác định các mặt phẳng mật tiếp với Γ và đi qua điểm A.

b) Lập một phương trình Descartes của quỹ tích các điểm A, sao cho tồn tại hai mặt phẳng mật tiếp với Γ, đi qua A và cắt mặt phẳng xOy theo hai đường thẳng trực giao.

◊ **6.1.21** Tính độ dài L của cung tham số hoá Γ: $x = \dfrac{\cos at}{\operatorname{ch} t},\ y = \dfrac{\sin at}{\operatorname{sh} t},\ z = \operatorname{th} t$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*_+$ cố định (Cần tính một tích phân của hàm khả tích trên $\mathbb{R}$).

◊ **6.1.22** Cho Γ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^1, L là độ dài của nó, l_1, l_2, l_3 là các độ dài của hình chiếu vuông góc của Γ lên ba mặt phẳng tọa độ.

Chứng minh : $2L \le l_1 + l_2 + l_3 \le L\sqrt{6}$.



◊ **6.1.23** Tính bán kính cong tại $A\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ của Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$.

◊ **6.1.24** Chứng minh rằng đường cong Γ có BDTS : $x = \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$, $y = \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$, $z = \operatorname{th} t$, $t \in \mathbb{R}$ được vạch trên một hình cầu S và nó cắt các vĩ tuyến (ngang) của S dưới một góc không đổi.

◊ **6.1.25 Cách tính *R* và *T***

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathcal{E}_3$ thuộc lớp C^3, $\Gamma = f(I)$, $M(t)$ là một điểm tam chính quy của Γ. Chứng minh rằng :

$$R = \frac{\|\overrightarrow{f'(t)}\|^3}{\|\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}\|}, \qquad T = \frac{\|\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}\|^2}{[\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}, \overrightarrow{f'''(t)}]}.$$

(Biểu diễn $\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}, \overrightarrow{f'''(t)}$ theo $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ bằng cách sử dụng các công thức Frenet).

◊ **6.1.26** Tính bán kính cong và bán kính xoắn tại mỗi điểm của Γ : $x = 3t^2$, $y = t^3 - 3t$, $z = t^3 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$.(Có thể dùng bài tập 6.1.25).

◊ **6.1.27** Tính các phần tử $\vec{T}, R, \vec{N}, \vec{B}, T$ tại mỗi điểm của các cung tham số hóa sau đây :

a) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = (t+1)^3 \\ z = 3t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a(1+\cos t)\cos t \\ y = a(1+\cos t)\sin t, (a,b) \in \mathbb{R}^*_+ \\ z = 4b\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 \\ y = \dfrac{1}{2}(\text{Arcsin}\, t + t\sqrt{1-t^2}\ ) \\ z = 3t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \\ z = \sqrt{2}\ln t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{\text{sh} t} \\ y = \dfrac{\sin t}{\text{sh} t} \\ z = \coth t \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = t\sqrt{2} + \text{ch}\, t + \sqrt{2}\,\text{sh}\, t \\ y = -t\sqrt{2} + \text{ch}\, t + \sqrt{2}\,\text{sh}\, t \\ z = 2\,\text{sh}\, t - \sqrt{2}\,\text{ch}\, t \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t. \\ z = \text{ch}\, t \end{cases}$

◊ **6.1.28*** Cho Γ là một cung tham số hóa thuộc lớp C^∞, s là hoành độ cong, R là bán kính cong, T là bán kính xoắn.

a) Chứng minh rằng Γ được vẽ trên một mặt cầu khi và chỉ khi :

$$T\frac{d^2R}{ds^2} + \frac{dR}{ds}\frac{dT}{ds} + \frac{R}{T} = 0 .$$

b) α) Cho $a \in \mathbb{R}^*_+$; chứng minh rằng, nếu Γ được vẽ trên một mặt cầu bán kính a, thì:

$$R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = a^2 .$$

β) Xét phần đảo của *b) α)*.

6.2 Mặt cong

U chỉ một tập mở của $\mathbb{R}^2$, và k chỉ một số nguyên ≥ 1 hoặc $= +\infty$.

6.2.1 Đại cương

◆ **Định nghĩa** Ta gọi mọi ánh xạ $\phi : U \to \mathcal{E}_3$ thuộc lớp C^k trên U là **mặt tham số hóa (thuộc lớp C^k)**.

Nếu $\phi : U \to \mathcal{E}_3$ là một mặt tham số hóa, thì **ảnh** của ϕ là bộ phận $\phi(U)$ của $\mathcal{E}_3$. Ta cũng nói rằng $\phi(U)$ là **một mặt cong** nhận ϕ làm **biểu diễn tham số** (viết tắt BDTS).

Giả sử S là một mặt cong nhận $\phi : U \to \mathcal{E}_3$ làm biểu diễn tham số (thuộc lớp C^k), $(x(u, v), y(u,v), z(u, v))$ là các tọa độ của $\phi(u, v)$ trong $\mathbb{R}$. Ta sẽ được một **phương trình Descartes** (viết tắt là PTD) của S bằng cách khử (u, v) trong hệ đẳng thức :

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}.$$

VÍ DỤ :

1) Mặt cong có BDTS $\left\{\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u^4 \end{array}\right|$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, có PTD : $(x^2 + y^2)^2 - z = 0$.

2) Cho S là mặt cong có BDTS $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Ta có :

$$\left\{\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv \\ z = u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3(u+v)uv \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = x^2 - 2uv \\ z = x^3 - 3xuv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = x \\ uv = \dfrac{x^2 - y}{2} \\ z = x^3 - \dfrac{3x(x^2 - y)}{2} \end{cases}$$

Vì ở đây u, v được xác định bởi tổng σ và tích π của chúng, nên chung là các không điểm của đa thức $X^2 - \sigma X + \pi$, vậy ta có :

$$\left(\exists (u,v) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} u + v = x \\ uv = \dfrac{x^2 - y}{2} \end{cases}\right) \Leftrightarrow x^2 - 4\frac{x^2 - y}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2y - x^2 \geq 0.$$

Như vậy, một PTD của S sẽ là : $\begin{cases} x^3 - 3xy + 2z = 0 \\ y \geq \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Nói cách khác, S là mặt cong có PTD $x^3 - 3xy + 2z = 0$, bị "giới hạn" bởi điều kiện $y \geq \dfrac{x^2}{2}$.

Ngược lại, việc tìm một BDTS của một mặt cong có PTD $F(x, y, z) = 0$ thường là vấn đề khá tế nhị. Ta nhắc lại định lý hàm ẩn, trong trường hợp mà ta cần ở đây (xem Tập 4, 8.4)

◆ **Định lý** Cho V là một tập mở của $\mathbb{R}^3$, $A = (a, b, c) \in V$, $F : V \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ.

Ta giả thiết : $\begin{cases} \bullet\ F(A) = 0 \\ \bullet\ F \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } V \\ \bullet\ F'_z(A) \neq 0. \end{cases}$

Khi đó, tồn tại các khoảng mở v_1, v_2 của $\mathbb{R}$ có tâm lần lượt tại a, b, và một khoảng mở w của $\mathbb{R}$ có tâm tại c sao cho :

$$\begin{cases} \bullet\ v_1 \times v_2 \times w \subset V \\ \bullet\ \text{tồn tại một và chỉ một ánh xạ } \varphi : \ v_1 \times v_2 \to w \text{ thỏa mãn:} \\ \qquad \forall (x, y) \in v_1 \times v_2, \quad F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ \bullet\ \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } v_1 \times v_2. \end{cases}$$

Hơn nữa, nếu F thuộc lớp C^k ($k \geq 1$) trên V, thì φ thuộc lớp C^k trên $v_1 \times v_2$. ■

NHẬN XÉT :

1) Giao của hai mặt cong "nói chung" là một đường cong. Chẳng hạn, giao của một mặt cầu tâm O và bán kính R (> 0) với một mặt phẳng (cách O một khoảng $< R$) là một đường tròn.

2) Mỗi đường cong đều có thể xem (theo vô số cách) như là giao của hai mặt cong. Chẳng hạn, đường cong Γ có BDTS ($x = t^3, y = t^4, z = t^5, t \in \mathbb{R}$) là giao của hai mặt cong có PTD : $y^3 = x^4$, $y^5 = z^4$.

6.2.2 Tiếp diện

1) Tiếp diện tại một điểm của một mặt cong xác định bởi một biểu diễn tham số

◆ **Định nghĩa** Cho $\phi : U \xrightarrow[(u,v) \mapsto M(u,v) = \phi(u,v)]{} \mathcal{E}_3$ là một mặt tham số hóa thuộc lớp C^1, $S = \phi(U)$, $M(u, v)$ là một điểm thuộc S.

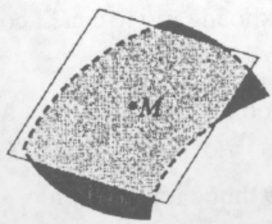
Ta nói rằng $M(u,v)$ là một điểm **chính quy** của ϕ (hoặc : của S) khi và chỉ khi họ $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u, v), \dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u, v) \right)$ độc lập.

Ta nói rằng ϕ là một mặt tham số hóa **chính quy** (hoặc : S là một mặt cong **chính quy**) khi và chỉ khi, với mọi (u, v) thuộc U, $M(u, v)$ là một điểm chính quy của S.

NHẬN XÉT :

Bằng cách định nghĩa khái niệm về phép đổi tham số chấp nhận được (sử dụng khái niệm C^k - vi phôi từ một tập mở của $\mathbb{R}^2$ lên tập mở U của $\mathbb{R}^2$), ta có thể chứng minh rằng khái niệm điểm chính quy là bất biến qua phép đổi tham số chấp nhận được, điều này lý giải cho việc định nghĩa điểm chính quy của S, thay vì của ϕ.

♦ **Định nghĩa 2** Cho $\phi : U \xrightarrow[(u,v)\mapsto M(u,v)=\phi(u,v)]{} \mathcal{E}_3$ là một mặt tham số hóa thuộc lớp C^1, $S = \phi(U)$, $M(u, v)$ là một điểm chính quy của S. **Tiếp diện với S tại** $M(u, v)$ là mặt phẳng đi qua $M(u, v)$ và được định phương bởi $\left(\overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}}(u,v), \overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial v}}(u,v)\right)$.



NHẬN XÉT:

Ta có thể chứng minh rằng tiếp diện tại một điểm chính quy của S là bất biến khi thực hiện một phép đổi tham số chấp nhận được.

VÍ DỤ :

Chứng minh rằng điểm A ứng với các tham số ($u = 1$, $v = 1$) của mặt S có BDTS $\left\{\begin{array}{l} x = u + v^2 \\ y = u^2 + v \\ z = uv \end{array}\right|$ là một điểm chính quy của S, và lập một PTD của tiếp diện Π với S tại A.

Ánh xạ $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[(u,v)\mapsto M(u+v^2,u^2+uv)]{} \mathcal{E}_2$ thuộc lớp lớp C^1, và với mọi (u, v) thuộc $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{\frac{\partial\phi}{\partial u}}(u,v) = 1, 2u, v),\ \overrightarrow{\frac{\partial\phi}{\partial v}}(u,v) = (2v,\ 1,\ u)\ .$$

Nói riêng : $\overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}}(1,1) = (1,2,1)$, $\overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial v}}(1,1) = (2,1,1)$, $\left(\overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}}(u,v), \overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial v}}(u,v)\right)$ độc lập, vậy

A là điểm chính quy của S.

Một PTD của Π là :

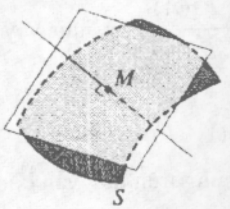
$$M(X, Y, Z) \in \Pi \iff \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 2 \\ Y-2 & 2 & 1 \\ Z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff X + Y - 3Z - 1 = 0. \qquad \blacksquare$$

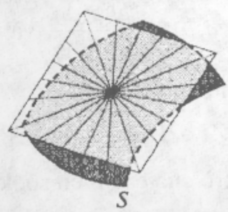
♦ **Định nghĩa 3** Với các ký hiệu và các giả thiết của Mệnh đề trên, thì :

- (đường thẳng) **pháp tuyến với** S **tại** M là đường thẳng trực giao tại M với tiếp diện với S tại M.
- (đường thẳng) **tiếp tuyến với** S **tại** M là mọi đường thẳng đi qua M và nằm trong tiếp diện với S tại M.

Như vậy tại M thì mặt S có :

- một và chỉ một pháp tuyến
- vô số tiếp tuyến (mà hợp là tiếp diện với S tại M).





2) Tiếp diện tại một điểm của một mặt cong được cho bằng một phương trình Descartes

Cho V là một tập mở của $\mathbb{R}^3$, $F : V \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên V, S là mặt cong có PTD $F(x, y, z) = 0$, $A(a, b, c) \in S$.

Trước tiên ta giả thiết : $F'_z(A) \neq 0$.

Theo định lý hàm ẩn (xem 6.2.1), tồn tại hai khoảng mở v_1, v_2 của $\mathbb{R}$ có tâm lần lượt tại a, b và một khoảng mở w của $\mathbb{R}$ có tâm tại c sao cho:

$$\begin{cases} \bullet\ v_1 \times v_2 \times w \subset V \\ \bullet\ \text{tồn tại một và chỉ một ánh xạ } \varphi : v_1 \times v_2 \to w \text{ thỏa mãn :} \\ \qquad \forall (x, y) \in v_1 \times v_2, F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ \bullet\ \varphi \text{ thuộc lớp } C^1 \text{ trên } v_1 \times v_2. \end{cases}$$

Vậy trong lân cận của A mặt S có BDTS $\Phi : v_1 \times v_2 \xrightarrow[(x,y) \mapsto (x, y, \varphi(x,y))]{} \varepsilon_3$.

Vì $\varphi'_x(x,y) = (1, 0, \varphi'_x(x,y))$ và $\varphi'_y(x,y) = (0, 1, \varphi'_y(x,y))$, nên rõ ràng

$(\phi'_x(a,b), \phi'_y(a,b))$ độc lập, và vì thế tại A, S có một tiếp diện Π, và Π có PTD :

$$P(X,Y,Z) \in \Pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X-a & 1 & 0 \\ Y-b & 0 & 1 \\ Z-c & \varphi'_x(a,b) & \varphi'_y(a,b) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\varphi'_x(a,b)(X-a) - \varphi'_y(a,b)(Y-b) + (Z-c) = 0.$$

Vì : $\forall (x, y) \in v_1 \times v_2$, $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, nên sau khi lấy đạo hàm đối với x và đối với y, ta được :

$$\forall (x, y) \in v_1 \times v_2 , \quad \begin{cases} F'_x(x, y, \varphi(x,y)) + F'_z(x, y, \varphi(x,y))\varphi'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x, y, \varphi(x,y)) + F'_z(x, y, \varphi(x,y))\varphi'_y(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Vì $F''_z(A) \neq 0$ và $(x,y) \mapsto F'_z(x,y,\varphi(x,y))$ liên tục tại A, nên ta có trong lân cận của (a,b) : $F'_z(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0$.

Nếu cần ta hiệu chỉnh v_1 và v_2, và có thể giả thiết rằng :

$$\forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad F'_z(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0.$$

Ta được :

$$\forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad \varphi'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))} \text{ và } \varphi'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}.$$

Nói riêng : $\varphi'_x(a,b) = -\dfrac{F'_x(A)}{F'_z(A)}$ và $\varphi'_y(a,b) = -\dfrac{F'_y(A)}{F'_z(A)}$, và như vậy khi trở lại PTD của Π đã thu được trên đây :

$$P(X,Y,Z) \in \Pi \Leftrightarrow F'_x(A)(X-a) + F'_y(A)(Y-b) + F'_z(Z-c) = 0.$$

Khi hoán vị vai trò của các biến số, kết quả cuối cùng trên đây vẫn còn giá trị khi $F'_x(A) \neq 0$ hoặc $F'_y(A) = 0$.

Nhắc lại rằng *gradient* của F là ánh xạ $\overrightarrow{grad}\ F : V \xrightarrow[M \mapsto (F'_x(M), F'_y(M), F'z(M))]{} \mathbb{R}^3$ và ta tóm tắt việc khảo sát như sau.

◆ **Định lý (Xác định tiếp diện tại một điểm của một mặt cong cho bằng một phương trình Descartes)**

Cho V là một tập mở của $\mathbb{R}^3$, $F : V \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 trên V, S là mặt cong có PTD $F(x,y,z) = 0$, $A(a,b,c) \in S$.

Nếu $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(A) \neq \vec{0}$ thì A là một điểm chính quy của S, tiếp diện với S tại A trực giao với $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(A)$ và nhận PTD:

$$(X-a)F'_x(A) + (Y-b)F'_y(A) + (Z-c)F'_z(A) = 0.$$

VÍ DỤ :

Lập một PTD của tiếp diện tại $A(1, 1, -1)$ với mặt S có PTD : $x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0$.

Ta ký hiệu $F : \mathbb{R}^3 \xrightarrow[(x,y,z) \mapsto x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1]{} \mathbb{R}$. Rõ ràng $F(1, 1, -1) = 0$, F thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^3$ và, với mọi (x, y, z) thuộc $\mathbb{R}^3$:

$$F'_x(x,y,z) = 2xy^3 + 3z^2x^2, F'_y(x,y,z) = 3x^2y^2 + 2yz^3, F_z(x,y,z) = 3y^2z^2 + 2zx^3,$$

suy ra $\quad F'_x(A) = 5, F'_y(A) = 1, F'_z(A) = 1,$

và như thế : $\quad \overrightarrow{\text{grad}}\, F(A) \neq \vec{0}.$

Vậy, S có một tiếp diện Π tại A, và một PTD của Π là :

$$5(X-1) + (Y-1) + (Z+1) = 0,$$

hoặc : $$5X + Y + Z - 5 = 0.$$

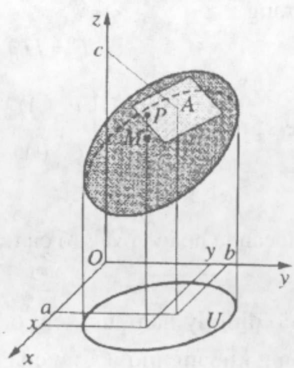
3) Vị trí của một mặt cong đối với một tiếp diện

Xét một mặt cong S có PTD $z = \varphi(x, y)$, trong đó $\varphi : U \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên tập mở U của $\mathbb{R}^2$. Ta đã thấy ở 2) rằng định lý hàm ẩn cho phép, dưới một số giả thiết nào đó, đưa vấn đề về trường hợp ấy.

Cho $(a, b) \in U$, $c = \varphi(a, b)$, $A(a, b, c)$, Π là tiếp diện với S tại A; Π được định phương bởi $\vec{i} + p\vec{k}$ và $\vec{j} + q\vec{k}$, trong đó ta ký hiệu $p = \varphi'_x(a,b)$, $q = \varphi'_y(a,b)$ (**ký hiệu Monge**).

Ta sẽ khảo sát vị trí của S đối với Π trong lân cận của A.

Nhằm mục đích ấy, với $(x, y) \in U$, ta ký hiệu $h = x - a$, $k = y - b$, và khảo sát điểm $M(x, y, z_M)$ của S và điểm $P(x, y, z_P)$ của Π.



Vậy ta có : $z_M = \varphi(x, y) = \varphi(a + h, b + k)$,

và mặt khác : $\begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ z_P - c & p & q \end{vmatrix} = 0,$

từ đó : $z_P = c + ph + qk$.

Vị trí tương đối giữa S và Π được xác định bởi dấu của $z_M - z_P$.

Ta giả thiết rằng φ thuộc lớp C^2 trên U, và ta ký hiệu (**ký hiệu Monge**) :

$$r = \varphi''_{x^2}(a,b),\ s = \varphi''_{xy}(a,b),\ t = \varphi''_{y^2}(a,b).$$

Ta đã biết (Tập 4, 8.3.3, 1)) rằng φ nhận một khai triển hữu hạn tới bậc 2 trong lân cận (a, b), dưới dạng :

$$\varphi(a+h, b+k) = \varphi(a,b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(h^2 + k^2).$$

Ta suy ra : $z_M - z_P = \dfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(h^2 + k^2)$.

Cũng như việc khảo sát các cực trị của các hàm hai biến thực, Tập 4, 8.3.3, 2) *b*), ta kết luận :

- Nếu $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases}$, thì trong lân cận A, S nằm trên tiếp diện Π với S tại A.

- Nếu $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{cases}$, thì trong lân cận A, S nằm dưới tiếp diện Π với S tại A.

- Nếu $s^2 - rt > 0$, thì trong lân cận A, S xuyên qua tiếp diện π của nó tại A.

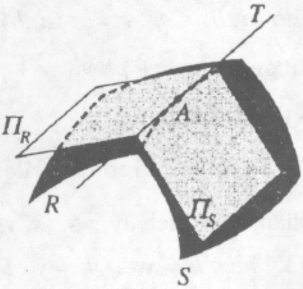
4) Giao của hai mặt cong

Giả sử Γ là một đường trong không gian, được xác định như là giao của hai mặt cong R, S. Ta giả thiết rằng R và S có các PTD :

$$R: F(x,y,z)=0, \quad S: G(x,y,z)=0,$$

trong đó $F, G: V \to \mathbb{R}$ là những ánh xạ thuộc lớp C^1 trên một tập mở V của $\mathbb{R}^3$.

Cho $A(a, b, c) \in \Gamma$. Ta giả thiết rằng họ $(\overrightarrow{\text{grad}}\ F(A), \overrightarrow{\text{grad}}\ G(A))$ độc lập. Khi đó, tại A, R và S có những tiếp diện được ký hiệu lần lượt là Π_R, Π_S, và ta có $\Pi_R \neq \Pi_S$.



Ta sẽ chứng tỏ rằng Γ tại A có một tiếp tuyến T, và rằng :

$$T = \Pi_R \cap \Pi_S.$$

Theo giả thiết : $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F'_x(A) & F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_x(A) & G'_y(A) & G'_z(A) \end{pmatrix} = 2.$

Nếu cần ta hoán vị vai trò của x, y, z, ta có thể giả thiết : $\begin{vmatrix} F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_y(A) & G'_z(A) \end{vmatrix} \neq 0.$

Theo định lý hàm ẩn (xem 6.1.1), tồn tại một khoảng mở v của $\mathbb{R}$ có tâm tại a và những khoảng mở w_1, w_2 của $\mathbb{R}$ có tâm lần lượt tại b, c, sao cho :

- $v \times w_1 \times w_2 \subset V$
- tồn tại một cặp ánh xạ duy nhất $\varphi : v \to w_1, \psi : v \to w_2$ sao cho:
  $\forall x \in v, \begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \\ G(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \end{cases}$
- φ, ψ đều thuộc lớp C^1 trên v.

Nói cách khác, trong lân cận của A, Γ có BDTS :

$$x = x, \quad y = \varphi(x), \quad z = \psi(x).$$

Vậy một vecto tiếp tuyến $\vec{V}$ với Γ tại A sẽ có tọa độ $(1, \varphi'(a), \psi'(a))$, và khác vectơ không.

Cuối cùng :

$$\vec{V}.\overrightarrow{\text{grad}}\, F(A) = F'_x(A) + \varphi'(a)F'_y(A) + \psi'(a)F'_z(A) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x,\varphi(x),\psi(x))\right)(a) = 0,$$

vậy $\vec{V} \in \overrightarrow{\Pi_R}$, và cũng tương tự $\vec{V} \in \overrightarrow{\Pi_S}$.

Ta tóm tắt việc khảo sát.

◆ **Định lý** Cho R, S là hai mặt cong, $\Gamma = R \cap S$, $A \in \Gamma$.
Ta giả thiết rằng A là một điểm chính quy của R và S, và rằng các tiếp diện Π_R, Π_S tại A với R, S khác nhau. Khi đó A là một điểm chính quy của Γ và tiếp tuyến tại A với Γ là $\Pi_R \cap \Pi_S$.

VÍ DỤ :

Xác định một vectơ tiếp xúc tại $A(-2, -1, 3)$ với đường cong Γ:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ xy + yz + zx = -7. \end{cases}$$

Đầu tiên ta chú ý rằng : $A \in \Gamma$.

Với các ký hiệu trên đây :

- $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 18$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$,

  $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(A) = (12,3,3)$.

- $G(x, y, z) = xy + yz + zx + 7$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, G(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$,

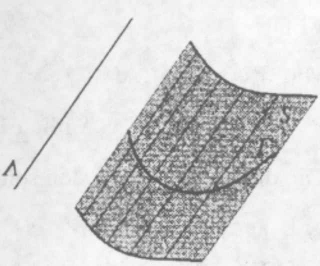
  $\overrightarrow{\text{grad}}\, G(A) = (2, 1, -3)$.

- $\overrightarrow{\text{grad}} F(A) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} G(A) = (-12, 42, 6) \neq \vec{0}$

Theo định lý trên, Γ nhận một tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến này được định phương bởi $\overrightarrow{\text{grad}} F(A) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, G(A)$, tức là bởi : $-2\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$.

6.2.3 Các mặt thông thường

1) Mặt trụ



♦ **Định nghĩa** Cho Λ là một phương đường thẳng và Γ là một đường cong. **Mặt trụ** với **đường chuẩn** Γ và **phương đường sinh** Λ là hợp S của các đường thẳng của $\mathcal{E}_3$ có phương Λ và cắt Γ.

Với mỗi điểm M của mặt trụ S, **đường sinh** của M (trên S) là đường thẳng đi qua M và có phương Λ.

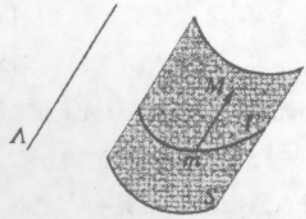
Thiết diện thẳng của mặt trụ S là giao của S với một mặt phẳng trực giao với Λ.

Trừ một số trường hợp đặc biệt mà bạn đọc dễ dàng phát hiện, mỗi điểm của mặt trụ nhận một và chỉ một đường sinh, và mặt trụ nhận vô số đường chuẩn.

Cho $\vec{u}$ là một vectơ định phương Λ và $m : \underset{t \mapsto m(t)}{I \to \mathcal{E}_3}$ là một BDTS của Γ.

Khi đó một BDTS của mặt trụ S có đường chuẩn Γ và phương đường sinh Λ là :

$$\underset{(t,\lambda) \mapsto m(t)+\lambda\vec{u}}{I \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3}$$



VÍ DỤ :

Một BDTS của mặt trụ có đường chuẩn Γ ($x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \mathbb{R}$) và các đường sinh song song với $\vec{u}$ (2, 1, -3) là : $\begin{cases} x = t + 2\lambda \\ y = t^2 + \lambda \\ z = t^3 - 3\lambda \end{cases}$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Cho S là một mặt trụ, với đường chuẩn Γ, phương đường sinh Λ. Ta xét một hệ quy chiếu $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sao cho $\vec{K}$ định phương Λ. Trong $\mathcal{R}'$ mặt trụ S nhận một PTD dạng : $f(X, Y) = 0$. Trong hệ quy chiếu ban đầu $\mathcal{R}$, S nhận một PTD dạng $f(P, Q) = 0$, trong đó P, Q đều là những " vế thứ nhất của PTD của mặt phẳng ". Từ đó suy ra quy tắc thực hành sau đây :

Ta nhận biết rằng một mặt S là mặt trụ khi nó nhận một PTD có dạng $f(P, Q) = 0$, trong đó P, Q là những mặt phẳng cắt nhau. Hơn nữa, trong các điều kiện ấy, các đường sinh của S đều song song với đường thẳng có PTD $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$.

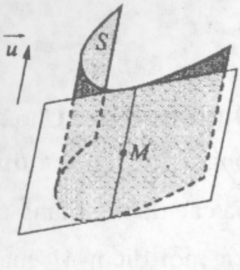
VÍ DỤ :

Mặt S có PTD : $e^{x^2+y^2+z^2} - (x+y)e^{-2xz} = 0$ là một mặt trụ, vì, khi ký hiệu $P = x + z$ và $Q = y$, S nhận PTD : $e^{P^2+Q^2} - P = 0$.

Các đường sinh của S đều song song với $\vec{i} - \vec{k}$.

◆ **Mệnh đề**

Tiếp diện tại một điểm chính quy của mặt trụ chứa đường sinh của điểm ấy.



CHỨNG MINH :

Mặt trụ S nhận một BDTS

$$\phi : \underset{(t,\lambda) \mapsto m(t)+\lambda\vec{u}}{I \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3}$$

trong đó $m : I \to \mathbb{R}$ là một BDTS của Γ, thuộc lớp C^1, và $\vec{u}$ định phương các đường sinh.

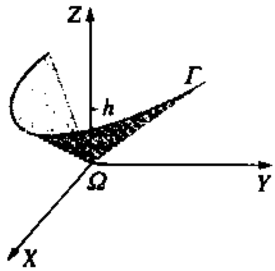
Vì $\overrightarrow{\dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda}}(t, \lambda) = \vec{u}$, nên tiếp diện với S tại $M(t, \lambda)$ chứa đường thẳng đi qua M và được định phương bởi $\vec{u}$, tức là đường sinh của M.

[redacted]

VÍ DỤ :

Mặt nón đỉnh Ω (1, -1, 1) và đường chuẩn $\Gamma(x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R})$ nhận một BDTS :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(t-1) \\ y = -1 + (t^2+1), \quad t \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + \lambda(t^3+1) \end{cases}$$



Giả sử S là một mặt nón, đỉnh Ω, đường chuẩn Γ. Ta giả thiết rằng Γ phẳng và rằng Ω không nằm trong mặt phẳng P của Γ. Tồn tại một hệ quy chiếu (trực chuẩn thuận) $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sao cho mặt phẳng P trong $\mathcal{R}'$ có PTD :

$$Z = h \quad (h \in \mathbb{R}^*_+)$$

Đường cong Γ nhận một HPTD : $\begin{cases} f(X,Y) = 0 \\ z = h. \end{cases}$

Với mọi điểm $M(X, Y, Z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$ sao cho $Z \neq 0$, ta có

$$M \in S \Leftrightarrow (\exists m \in \Gamma, \exists \lambda \in \mathbb{R}^*_+, \ \overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega m})$$
$$\Leftrightarrow (\exists (X_1, Y_1, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, X = \lambda X_1, Y = \lambda Y_1, Z = \lambda h, f(X_1, Y_1) = 0)$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{hX}{Z}, \frac{hY}{Z}\right) = 0.$$

Từ đó suy ra quy tắc thực hành :

Ta nhận biết rằng một mặt là mặt nón khi nó nhận một PTD có dạng $f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$, trong đó P, Q, R là những mặt phẳng (giao nhau tại một điểm duy nhất). Hơn nữa, trong các điều kiện đó, đỉnh Ω của S được xác định bởi : $P = 0, Q = 0, R = 0$.

VÍ DỤ :

Xét mặt S có PTD : $z^2 - xy - 2z + 1 = 0$.

Rõ ràng phương trình này có thể viết dưới dạng : $-xy + (z-1)^2 = 0$.

Để chia cho $(z-1)^2$ (chẳng hạn), ta xem như mặt S' có được bằng cách lấy đi ở S hai đường thẳng có HPTD $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$. Như vậy, S' nhận PTD :

$-\frac{x}{z-1}\frac{y}{z-1} + 1 = 0$, là phương trình có dạng $f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$, với :

$$P = x, Q = y, R = z - 1, f : (u, v) \mapsto -uv + 1.$$

Vậy S' là một mặt nón, đỉnh $\Omega(0, 0, 1)$.

Ta được một đường chuẩn của S' bằng cách cắt S' bởi một mặt phẳng không chứa Ω, chẳng hạn mặt phẳng xOy ; do đó một PTD của đường chuẩn Γ của S' là : $\begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

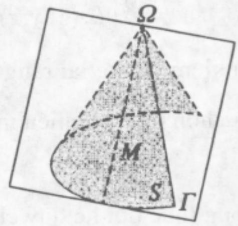
◆ Mệnh đề

Tiếp diện tại một điểm chính quy của mặt nón thì chứa đường sinh của điểm ấy.

Chứng minh :

Mặt nón S nhận một BDTS

$$\phi \ : \ \begin{array}{ccc} I\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda) & \mapsto & \Omega+\lambda\overline{\Omega m(t)} \end{array}$$



trong đó $m : I \rightarrow \mathcal{E}_3$ là một BDTS của Γ, thuộc lớp C^1, và Ω là đỉnh của S.

Vì $\overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}}(t,\lambda) = \overrightarrow{\Omega m(t)}$ và vì $\overrightarrow{\Omega m(t)}$ định phương đường sinh của M (ta giả thiết $\Omega \notin \Gamma$), nên tiếp diện của S tại M chứa đường sinh của M.

NHẬN XÉT :

1) Giả sử S là một mặt nón, với đỉnh Ω, đường chuẩn Γ. Ta giả thiết rằng Γ phẳng và chính quy, và Ω không nằm trong mặt phẳng P của Γ.

Nếu ký hiệu $m : I \rightarrow \mathcal{E}_3$ là một BDTS của Γ, thì một BDTS của S sẽ là :

$$\phi : \begin{array}{ccc} I\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda) & \mapsto & \Omega+\lambda\overline{\Omega m(t)} \end{array}.$$

Khi đó, ϕ thuộc lớp C^1 và, với mọi (t, λ) thuộc $I \times \mathbb{R}^*$:

$$\overrightarrow{\frac{\partial\phi}{\partial t}}(t,\lambda) = \lambda\overrightarrow{m'(t)},\ \ \overrightarrow{\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}}(t,\lambda) = \overrightarrow{\Omega m(t)}.$$

Theo giả thiết : $\lambda \neq 0$, $\overrightarrow{m'(t)} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{m'(t)} \neq \vec{P}$, $\overrightarrow{\Omega m(t)} \notin \vec{P}$.

Vậy suy ra $\left(\overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial t}}(t,\lambda), \overrightarrow{\dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}}(t,\lambda)\right)$ độc lập, và như vậy mọi điểm của S, trừ Ω, đều là chính quy. Hơn nữa,tiếp diện tại M ($\neq \Omega$) với S là mặt phẳng đi qua M và chứa đường sinh của M và tiếp tuyến của Γ tại m.

2) Đỉnh Ω của mặt nón S là một điểm không chính quy của S. Trong thực hành, đỉnh của một mặt nón thường là điểm duy nhất không chính quy của S. Điều này cho phép, trong các ví dụ, tìm được đỉnh có thể có của mặt nón từ một phương trình Descartes.

VÍ DỤ :

Chứng tỏ rằng $S : x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3 = 0$ là một mặt nón và tìm đỉnh Ω của nó.

Ký hiệu vế thứ nhất của phương trình đã cho là $F(x, y, z)$, ta tìm một điểm $\Omega(x, y, z)$ không chính quy của S, vì (xem 6.2.2, 2) Định lý) tại đó $\overrightarrow{\text{grad}}\ F$ triệt tiêu :

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=0 \\ F'_y(x,y,z)=0 \\ F'_z(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y+z=0 \\ -x+2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2. \\ z=1 \end{cases}$$

Ta kiểm chứng lại rằng điểm $\Omega(1, -2, 1)$ thuộc S.

Ta chọn hệ quy chiếu mới $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Công thức đổi hệ quy chiếu là : $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y-2, \\ z = Z+1 \end{cases}$

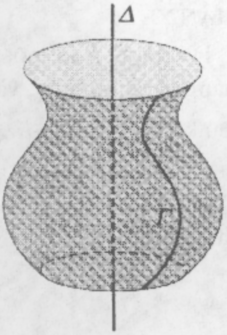
và thế trở lại, ta suy ra một PTD của S trong $\mathcal{R}'$:

$$(X+1)^2 + (X+1)(Y-2) - (X+1)(Z+1) + (Y-2)^2 + (Z+1)^2 + (X+1) + 3(Y-2) - (Z+1) + 3 = 0,$$

tức là : $\quad X^2 + XY - XZ + Y^2 + Z^2 = 0.$

Với phương trình sau cùng này, ta thấy rằng, nếu một điểm $m(X, Y, Z)$, khác với Ω, thuộc S, thì đường thẳng (Ωm) sẽ bao hàm trong S.

Cuối cùng, S là một mặt nón, đỉnh $\Omega(1, -2, 1)$.



3) Mặt tròn xoay

◆ **Định nghĩa** Ta gọi mặt S nhận được bằng cách quay một đường cong Γ quanh một đường thẳng Δ là **mặt tròn xoay.**

Ta nói rằng Δ là **trục** của S.

Ta gọi giao của S với một nửa mặt phẳng giới hạn bởi Δ là **kinh tuyến** (hoặc : **nửa kinh tuyến**) của S.

Ta gọi các đường tròn trục Δ và cắt Γ là **vĩ tuyến** của S.

NHẬN XÉT :

1) Bạn đọc chứng tỏ rằng, "trừ ngoại lệ", một mặt tròn xoay có một trục duy nhất.

2) Với các ký hiệu trong Định nghĩa, S là hợp của các vĩ tuyến của nó.

VÍ DỤ :

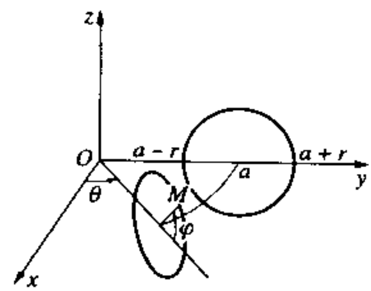
Mặt xuyến là mặt cong S có được bằng cách cho quay một đường tròn quanh một đường thẳng thuộc mặt phẳng của đường tròn ấy.

Trong $\mathcal{R}$ xét đường tròn Γ có phương trình : $\begin{cases} x = 0 \\ (y-a)^2 + z^2 = r^2, \end{cases}$

với $(a, r) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$ cố định, và cho Γ quay quanh $z'z$.
Ta được một BDTS của mặt xuyến S :

$$\begin{cases} x = a\cos\theta + r\cos\theta\cos\alpha \\ y = a\sin\theta + r\sin\theta\cos\alpha\,, \qquad (\theta, \alpha) \in [-\pi, \pi]^2 \text{ (hoặc } \mathbb{R}^2). \\ z = r\sin\alpha \end{cases}$$

Từ BDTS này ta có thể thu được PTD của S bằng cách khử (θ, α) :



$$\left(\exists(\theta,\alpha) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = (a + r\cos\alpha)\cos\theta \\ y = (a + r\cos\alpha)\sin\theta \\ z = r\sin\alpha \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 = (a + r\cos\alpha)^2 \\ z = r\sin\alpha \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 - (r^2 - z^2) = 2ar\cos\alpha \\ z = r\sin\alpha \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow ((x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2))^2 + 4a^2z^2 = 4a^2r^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(a^2 + r^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 - r^2)z^2 + (a^2 - r^2)^2 = 0.$$

Vậy mặt xuyến là *một mặt bậc bốn.* ■

Cho Δ là một đường thẳng, Γ là một đường cong, S là mặt tròn xoay có được bằng cách quay Γ quanh Δ, P là một mặt phẳng trực giao với Δ, ω là một điểm của Δ, Σ là một mặt cầu tâm ω.

Một đường tròn trục Δ, vì là giao của một mặt phẳng song song với P và một mặt cầu tâm ω, nên nhận một HPTD $\left\{\begin{array}{l} P = \lambda \\ \Sigma = \mu \end{array}\right|$, trong đó $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Đường tròn này cắt Γ khi và chỉ khi (λ, μ) thỏa mãn một hệ thức dạng $f(\lambda, \mu) = 0$. Từ đó suy ra rằng S nhận một phương trình dạng $f(P, \Sigma) = 0$, trong đó P và Σ là (các vế đầu của các phương trình) một mặt phẳng và một mặt cầu.
Do đó ta có quy tắc thực hành sau :

Ta nhận biết rằng một mặt S là mặt tròn xoay khi nó nhận một PTD có dạng $f(P, \Sigma) = 0$, trong đó P là một mặt phẳng và Σ là một mặt cầu. Hơn nữa, trong các điều kiện đó, trục của S là đường thẳng đi qua tâm của Σ và trực giao với P.

VÍ DỤ :

Mặt S có PTD $xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 0$ là một mặt tròn xoay vì, khi ký hiệu $P = x + y + z$ và $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2$, thì S có phương trình :

$$P^2 - \Sigma + 2P + 2 = 0.$$

Trục của S là đường thẳng đi qua O và được định phương bởi $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

6.2.4 Mặt bậc hai

1) Đại cương

◆ **Định nghĩa** Ta gọi mọi mặt có phương trình Descartes $F(x, y, z) = 0$, trong đó F là một đa thức bậc 2, là **mặt bậc hai.**

NHẬN XÉT :

1) Một mặt bậc hai nhận một PTD dạng :

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

trong đó $A, \ldots J \in \mathbb{R}$.

Sự có mặt các hệ tử 2 sẽ được lý giải dưới đây, khi sử dụng một dạng toàn phương hoặc một ma trận đối xứng.

2) Ta giả thiết $(A, B, C, D, E, F) \neq (0, \ldots, 0)$; trường hợp đẳng thức tương ứng với một mặt phẳng, hoặc $\varnothing$, hoặc $\mathcal{E}_3$.

3) Mọi mặt cầu (xem 2.3.3) là một mặt bậc hai.

4) Hợp của hai mặt phẳng là một mặt bậc hai.

5) Ta có thể chứng minh rằng giao của một mặt bậc hai với một mặt phẳng là $\varnothing$ hoặc một cônic.

2) Tìm tâm đối xứng (nếu có)

Giả sử S là một mặt bậc hai, có PTD :

(1) $\quad Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$

Ta hãy tìm một tâm đối xứng của S, nếu có.

Giả sử $\Omega \in \mathcal{E}_3$, (x_0, y_0, z_0) là các tọa độ của tâm đối xứng đó trong $\mathcal{R}$.

Ta xét một hệ quy chiếu $\mathcal{R}' = (\Omega ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Các công thức đổi hệ quy chiếu là :

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \\ z = z_0 + Z \end{cases}$$

với một điểm M bất kỳ của $\mathcal{E}_3$, có các tọa độ (x, y, z) trong $\mathcal{R}$, (X, Y, Z) trong $\mathcal{R}'$. Thế vào trong (1) và khai triển, ta được một PTD của S trong $\mathcal{R}'$:

$$(AX^2 + 2BXY + 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2) + 2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G)X +$$
$$2(Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H)Y + 2(Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + I)Z + J = 0.$$

Điểm Ω sẽ là tâm đối xứng của S nếu :

$$(2) \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = 0 \\ Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = 0 \\ Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + I = 0. \end{cases}$$

Xét ma trận $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ thuộc $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, vốn đối xứng.

1) Nếu Q khả nghịch, thì hệ phương trình (2) có một nghiệm duy nhất (x_0, y_0, z_0), và như vậy S nhận một tâm đối xứng, đó là điểm $\Omega(x_0, y_0, z_0)$. Trong trường hợp đó, ta nói rằng S là một **mặt bậc hai có tâm**. Ta sẽ khảo sát sâu hơn vấn đề này trong 3.

2) Nếu Q không khả nghịch, thì hệ phương trình (2), hoặc không có nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

Chẳng hạn :
- mặt bậc hai có PTD $x^2 - 2y = 0$ (mặt trụ parabolic) không có tâm đối xứng.
- mặt bậc hai của PTD $x^2 + y^2 = 1$ (mặt trụ tròn xoay) có vô số tâm đối xứng.Trong thực hành, ta sẽ chú ý rằng :

$$(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\ F(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}.$$

3) Mặt bậc hai có tâm

Ta tiếp tục việc nghiên cứu đã bắt đầu trong 2), trong trường hợp Q khả nghịch.
Trong $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, S có PTD :

$$AX^2 + 2BXY + 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2 + J_1 = 0,$$

trong đó $J_1 \in \mathbb{R}$.

Ma trận $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ là một ma trận thực, vậy chéo hóa được nhờ một phép đổi c.s.t.c (xem Tập 6, 4.4.1, Định lý), vậy tồn tại $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, $D \in \mathrm{D}_3(\mathbb{R})$ sao cho : $Q = PDP^{-1}$.

Ta ký hiệu q là dạng toàn phương của ma trận Q trong cơ sở $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Với $M \in \mathcal{E}_3$, có tọa độ (X, Y, Z) trong $\mathcal{R}$, ta kí hiệu $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, $V = P^{-1}U$. Ta có :

$$\begin{aligned} M \in S &\Leftrightarrow {}^tUQU + J_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^tU{}^tP^{-1}DPU + J_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^tUDU + J_1 = 0. \end{aligned}$$

Ta ký hiệu $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ là c.s.t.c.t. suy từ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bằng ma trận chuyển P ; nói cách khác, chẳng hạn, những thành phần của $\vec{I}$ trong $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tạo thành cột thứ nhất của P.

Ta ký hiệu $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ và $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

Mặt bậc hai S nhận PTD trong $\mathcal{R}''$ là :

(3) $$4\lambda\xi^2 + \mu\zeta^2 + \nu\eta^2 + J_1 = 0,$$

khi ký hiệu (ξ, ς, η) là các tọa độ của điểm chạy.

Vì Q khả nghịch nên : $\lambda\mu\nu \neq 0$.
Khi cần ta nhân trong (3) với -1 và hoán vị nếu cần vai trò của x, y, z, ta quy về trường hợp : $\lambda > 0$ và $\mu > 0$.
Như vậy, S nhận một PTĐ có dạng :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\varsigma^2}{b^2} + \varepsilon\frac{\eta^2}{c^2} = \varepsilon',$$

trong đó $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$, được gọi là **phương trình thu gọn** của S.
Theo thông lệ, ta viết (x, y, z) thay cho (ξ, ζ, η). Xem bảng các mặt bậc hai có tâm dưới đây.

4) Các mặt bậc hai khác

Mục 4 này, trừ bảng ở trang 278 - 279, dành cho sinh viên năm thứ hai.
Chúng ta tiếp tục việc khảo sát ở 2), trong trường hợp Q không khả nghịch.
Như vậy $\operatorname{rank}(Q) \leq 2$.
Mặt khác, vì $(A, ..., F) \neq (0, ..., 0)$ nên : $\operatorname{rank}(Q) \geq 1$.
Vì $Q \in \mathbf{S}_3(\mathbb{R})$, nên tồn tại $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_3(\mathbb{R})$ sao cho $Q = PDP^{-1}$. Và, vì $\operatorname{rank}(M) \in \{1, 2\}$, nên ta có thể, khi cần thì phải hoán vị vai trò của x, y, z, quy về trường hợp :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}.$$

Khi ký hiệu $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ là c.s.t.c.t. suy từ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bằng ma trận chuyển P, và $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, một PTĐ của S trong $\mathcal{R}_1$ sẽ có dạng :

(4) $$\lambda X^2 + \mu Y^2 + 2G_1X + 2H_1Y + 2I_1Z + J = 0,$$

trong đó $(G_1, H_1, I_1) \in \mathbb{R}^3$.

***a) Trường hợp* $\operatorname{rank}(Q) = 2$**

Ở đây, $\mu \neq 0$, và S có PTĐ trong $\mathcal{R}_1$:

$$\lambda\left(X + \frac{G_1}{\lambda}\right)^2 + \mu\left(Y + \frac{H_1}{\mu}\right)^2 + 2I_1Z - \frac{G_1^2}{\lambda} - \frac{H_1^2}{\mu} + J = 0.$$

α) Trường hợp $I_1 \neq 0$

Ta xét điểm A có tọa độ $\left(-\frac{G_1}{\lambda}, -\frac{H_1}{\lambda}, -\frac{G_1^2}{2\lambda I_1} - \frac{H_1^2}{2\mu I_1} + \frac{J}{2I_1}\right)$ trong $\mathcal{R}_1$, và q.c.t.c.t. $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Một PTĐ của S trong $\mathcal{R}_2$ sẽ là :

$$\lambda\xi^2 + \mu\zeta^2 + 2I_1\eta = 0.$$

Khi cần ta nhân với -1 và hoán vị nếu cần vai trò ξ, ζ, ta có thể đưa về trường hợp $\lambda > 0$.

Như vậy, S có PTĐ dạng

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\varepsilon\frac{\zeta^2}{b^2}=\varepsilon'\frac{2z}{c},$$

trong đó $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$.

Do đối xứng qua (chẳng hạn) trục tọa độ thứ nhất, ta có thể quy về trường hợp $\varepsilon' = 1$. Theo thông lệ, ta viết (x, y, z) thay cho (ξ, ζ, η). Ta sẽ nhận được hai mặt bậc hai :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{2z}{c}, & \textbf{mặt paraboloit eliptic} \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{2z}{c}, & \textbf{mặt paraboloit hypebolic} \end{array}\right.$$

β) *Trường hợp* $I_1 = 0$

Ta khảo sát điểm A có tọa độ $\left(-\frac{G_1}{\lambda},-\frac{H_1}{\mu},0\right)$ trong $\mathcal{R}_1$, và hệ q.c.t.c.t.

$\mathcal{R}_2 = \left(A;\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$. Một PTĐ của S trong $\mathcal{R}_2$ sẽ là :

$$\lambda\xi^2+\mu\zeta^2-\frac{G_1^2}{\lambda}-\frac{H_1^2}{\mu}+J=0.$$

Tương tự như trên đây, ta có thể đưa về trường hợp $\lambda > 0$. Như vậy S nhận một PTĐ có dạng :

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\varepsilon\frac{\zeta^2}{b^2}=\alpha,$$

trong đó $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Trường hợp $\operatorname{rank}(Q) = 1$

Trong $\mathcal{R}_1$, thì S nhận PTĐ :

$$\lambda\left(X+\frac{G_1}{\lambda}\right)^2+2H_1Y+2I_1Z-\frac{G_1^2}{\lambda}+J=0.$$

Nếu $(H_1, I_1) = (0, 0)$, thì S là rỗng, hoặc là một mặt phẳng, hoặc là hợp của hai mặt phẳng song song.

Vậy ta giả thiết $(H_1, I_1) \neq (0, 0)$.

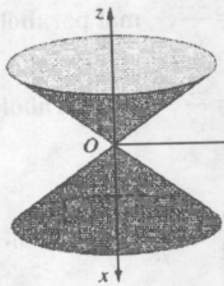
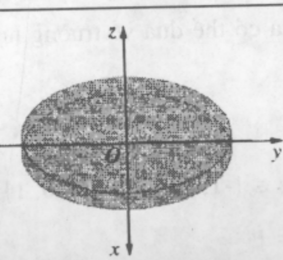
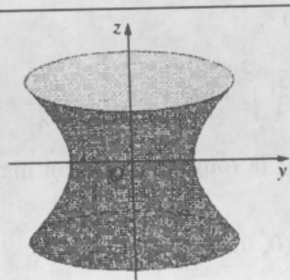
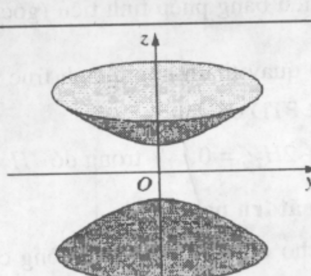
Bằng cách đổi hệ quy chiếu bằng phép tịnh tiến (gốc mới có tọa độ $\left(-\frac{G_1}{\lambda},0,0\right)$ trong $\mathcal{R}_1$), rồi bằng phép quay thích hợp quanh trục tọa độ thứ nhất mới, rồi lại tịnh tiến, ta sẽ đưa về một PTĐ có dạng :

$$\lambda\xi^2 + 2H_2\zeta = 0, \qquad \text{trong đó } H_2 \in \mathbb{R}^*,$$

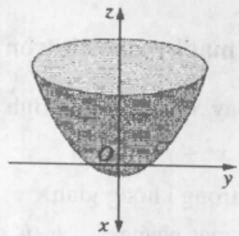
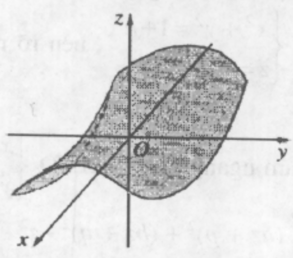
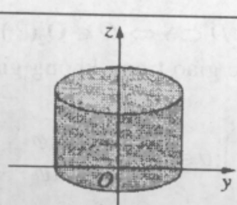
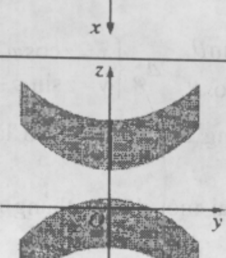
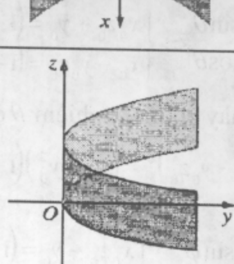
là phương trình của một **mặt trụ parabôlic.**

Bảng ở trang 278 - 279 cho các mặt bậc hai không có tâm, còn các trường hợp tầm thường trong đó S là một mặt phẳng hoặc hợp của hai mặt phẳng thì không đề cập đến.

Các mặt bậc hai có tâm

Phương trình thu gọn	Dáng điệu	Loại, tên
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$	Ω.	đơn tử $\{\Omega\}$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$		mặt nón (bậc hai) đỉnh O
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$		$\varnothing$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$		mặt elipxôit
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$		mặt hypebôlôit một tầng H_1
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$		mặt hypebôlôit hai tầng H_2

Các mặt bậc hai khác

Phương trình thu gọn	Dáng điệu	Loại, tên
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{2z}{c}$		mặt parabôlôit eliptic
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{2z}{c}$		mặt parabôlôit hypebôlic
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$		$\varnothing$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$		mặt trụ eliptic
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$		mặt trụ hypebôlic
$x^2=2py$		mặt trụ parabôlic

5) Ví dụ về việc khảo sát các đường thẳng kẻ trên mọi mặt bậc hai

Ta sẽ xét các trường hợp mặt hypebôlôit tròn xoay một tầng và mặt parabôlôit hypebôlic

a) Đường thẳng kẻ trên một mặt hypebôlôit tròn xoay một tầng

Ta sẽ khảo sát một H_1 tròn xoay S, có phương trình thu gọn là :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 .$$

Giả sử D là một đường thẳng trong không gian.

Nếu D nằm ngang, trong một mặt phẳng $z = h$ ($h \in \mathbb{R}$), thì, vì giao của S với mặt phẳng $z = h$ là đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + h^2 \\ z = h \end{cases}$, nên rõ ràng rằng D không bao hàm trong S.

Vậy ta giả thiết D không nằm ngang ; D có HPTD $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$, $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$.

Ta có : $D \subset S \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R}, (az + p)^2 + (bz + q)^2 - z^2 - 1 = 0)$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 = 1, ap + bq = 0, p^2 + q^2 = 1).$$

Xét ma trận $\Omega = \begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}$ thuộc $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$; vậy ta có :

$$D \subset S \Leftrightarrow \Omega \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R}).$$

Theo việc khảo sát nhóm trực giao trong không gian 2 chiều (xem Tập 5, 10, 4, Mệnh đề 1) :

$$\mathbf{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Với $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, nếu ký hiệu :

$$D_\theta \begin{cases} x = z\cos\theta - \sin\theta \\ y = z\sin\theta + \cos\theta \end{cases}, \quad \Delta_\varphi \begin{cases} x = z\cos\varphi + \sin\varphi \\ y = z\sin\varphi - \cos\varphi \end{cases},$$

thì ta kết luận rằng các đường thẳng kẻ trên S là những đường D_θ ($\theta \in \mathbb{R}$) và những đường Δ_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$).

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Tồn tại một đường thẳng D_θ và một đường thẳng Δ_φ duy nhất đi qua S. Thật vậy, ta có :

- $$\begin{cases} x_0 = z_0\cos\theta - \sin\theta \\ y_0 = z_0\sin\theta + \cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 z_0 + y_0 = (1 + z_0^2)\cos\theta \\ x_0 - y_0 z_0 = (1 + z_0^2)\sin\theta \end{cases},$$

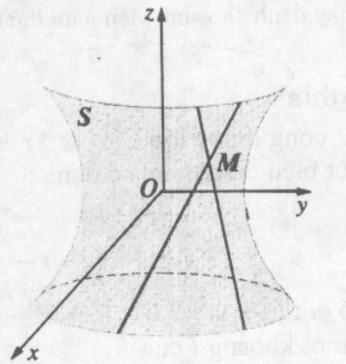
và hệ phương trình sau cùng này có một nghiệm θ duy nhất (modulo 2π), vì :

$$(x_0 z_0 + y_0)^2 + (x_0 - y_0 z_0)^2 = (x_0^2 + y_0^2)(1 + z_0^2) = (1 + z_0^2)^4$$

- $$\begin{cases} x_0 = z_0\cos\varphi + \sin\varphi \\ y_0 = z_0\sin\varphi - \cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 z_0 - y_0 = (1 + z_0^2)\cos\varphi \\ x_0 + y_0 z_0 = (1 + z_0^2)\sin\varphi \end{cases},$$

và, cũng như vậy, hệ phương trình sau cùng này có một nghiệm φ duy nhất (modulo 2π).

Ta nói rằng S là một **mặt kẻ kép** (xem dưới đây, 6.2.5).



NHẬN XÉT :

1) Vì S quay quanh $z'z$, nên hai đường thẳng D_θ, Δ_φ kẻ trên S và đi qua M_0 đối xứng nhau qua mặt phẳng chứa $z'z$ và M_0.

2) Nếu ký hiệu Π là tiếp diện tại M_o với S và D_θ, Δ_φ là hai đường thẳng kẻ trên S và cùng đi qua M_0, ta có : $\Pi \cap S = D_\theta \cup \Delta_\varphi$.

3) Với mọi (θ_1, θ_2) thuộc $\mathbb{R}^2$ sao cho $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$, D_{θ_1} và D_{θ_2} không đồng phẳng. Cũng vậy, với mọi (φ_1, φ_2) thuộc $\mathbb{R}^2$ sao cho $\varphi_1 \equiv \varphi_2\ [2\pi]$, Δ_{φ_1}, và Δ_{φ_2} không đồng phẳng.

4) Ta có thể tìm lại hai họ đường thẳng trên đây bằng phép tính cổ điển và đẹp đẽ sau :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow (x + z)(x - z) = (1 + y)(1 - y)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x + z = \lambda(1+y) \\ \lambda(x-z) = 1-y \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x + z = \mu(1-y) \\ \mu(x-z) = 1+y \end{cases}\right).$$

b) Đường thẳng kẻ trên một mặt parabôlôit hypebôlic

Ta hãy khảo sát một PH S, có phương trình thu gọn là :

$$x^2 - y^2 - 2hz = 0, \qquad h > 0 \text{ cố định.}$$

Trong hệ q.c.t.c.t. $\mathcal{R}' = \left(O; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} - \vec{j}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right),\ \vec{k}\right)$, có được từ $\mathcal{R}$ bằng phép quay với trục đi qua O, được định phương và định hướng bởi $\vec{k}$, góc $-\frac{\pi}{4}$, S có một PTD sau, đơn giản hơn : $xy - hz = 0$.

Cũng lập luận như ở a) (cách tính toán ở đây đơn giản hơn), các đường thẳng vẽ trên S là các đường thẳng có phương trình sau :

$$\begin{cases} x = p \\ py = hz \end{cases}, p \in \mathbb{R}, \qquad \text{hay} \begin{cases} qx = hz \\ y = q \end{cases}, q \in \mathbb{R}.$$

6.2.5 Mặt kẻ, mặt khả triển

Mục 6.2.5 này dành cho sinh viên năm thứ hai.

1) Mặt kẻ

♦ **Định nghĩa**

Một mặt cong thuộc lớp C^k $(k \geq 1)$ được gọi là **mặt kẻ** khi và chỉ khi nó nhận một biểu diễn tham số dạng :

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\to \mathcal{E}_3 \\ (u, v) &\mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}, \end{aligned}$$

trong đó $m : I \to \mathcal{E}_3$ và $\overrightarrow{G} : I \to \mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$ là những ánh xạ thuộc lớp C^k trên một khoảng I của $\mathbb{R}$.

Vì, với $u \in I$ cố định, $\begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathcal{E}_3 \\ v \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ là một BDTS của một đường thẳng D_u, nên ta thấy rằng, một cách đơn giản hơn, một mặt cong S được gọi là kẻ khi và chỉ khi nó là hợp của một "họ" đường thẳng, $S = \bigcup\limits_{u \in I} D_u$. Khi đó ta nói rằng $\left(D_u\right)_{u \in I}$ là một họ các **đường sinh** của mặt kẻ S, và rằng, với $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$, D_u là **đường sinh** (trong họ vừa nói) của điểm $\phi\,(u, v)$ của S, với mọi v thuộc $\mathbb{R}$.

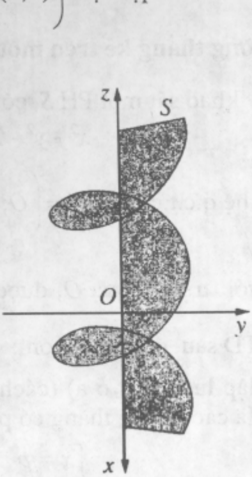
Mặt trụ và mặt nón là những mặt kẻ.

♦ **Mệnh đề** Tiếp diện tại một điểm chính quy của một mặt kẻ chứa đường sinh tại điểm ấy.

Chứng minh :

Ký hiệu ϕ: $\begin{array}{c} I \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3 \\ (u,v) \mapsto m(u) + v\,\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ là một BDTS của mặt kẻ S, trong đó $m : I \to \mathcal{E}_3$ và $\overrightarrow{G} : I \to \mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$ thuộc lớp C^1 trên I. Giả sử $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ là một điểm chính quy của S, nghĩa là sao cho $\left(\overrightarrow{\dfrac{\partial \phi}{\partial u}}(u,v),\ \ \overrightarrow{\dfrac{\partial \phi}{\partial v}}(u,v)\right)$ độc lập.

Vì $\overrightarrow{\dfrac{\partial \phi}{\partial u}}(u,v) = \overrightarrow{G(u)}$, nên tiếp diện tại $\phi(u, v)$ với S chứa đường thẳng đi qua $\phi(u, v)$, và được định phương bởi $\overrightarrow{G(u)}$, tức là đường sinh của $\phi(u, v)$ (hoặc của (u, v)) trên S.



VÍ DỤ : **Mặt đinh ốc đứng**

Mặt cong S có BDTS :

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \quad (h \in \mathbb{R}^* \text{ cố định}) \\ z = hu \end{cases}$$

được gọi là mặt **đinh ốc đứng**, là một mặt kẻ.

Thật vậy, với ký hiệu $m : \underset{u \mapsto (0,0,hu)}{\mathbb{R} \to \mathcal{E}_3}$ và $\vec{G} : \underset{u \mapsto (\cos u, \sin u, 0)}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3}$

thì S nhận BDTS $\phi : \underset{(u,v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}}{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3}$ và ta có đúng : $\forall u \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{G(u)} \neq \vec{0}$.

Vì, với mọi (u, v) thuộc $\mathbb{R}^2$: $\dfrac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial v}(u,v) = (-v\sin u, v\cos u, h)$,

$\dfrac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial v}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0)$, nên $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial v}(u,v)\right)$ độc lập.

Như vậy mọi điểm $M(u, v)$ của S đều chính quy.

Với mọi v thuộc $\mathbb{R}_+^*$, đường cong Γ_v với BDTS $\phi(., v)$, tức là $u \in \mathbb{R} \mapsto (v\cos u, v\sin u, hu)$ là một đường đinh ốc tròn có bước cố định (xem 6.1.2, Ví dụ 1), và tiếp diện tại $M(u, v)$ có thể được xác định bởi đường sinh của M và tiếp tuyến với Γ_v tại M.

2) *Mặt khả triển*

♦ Định nghĩa

Một mặt kẻ S được gọi là **khả triển** khi và chỉ khi, với mọi đường sinh G của S, tiếp diện với S tại mọi điểm chính quy của G đều là một.

Ta ký hiệu $\phi : \underset{(u,v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}}{I \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3}$ là một BDTS của S, trong đó $m : I \to \mathcal{E}_3$ và

$\vec{G} : I \to \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ thuộc lớp C^k $(k \geq 1)$.

Một đường sinh của S được tạo thành từ các điểm $\phi(u, v)$, trong đó $u \in I$ cố định và v chạy khắp $\mathbb{R}$. Vậy cho $u \in I$ cố định.

Ta giả thiết rằng $(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)})$ độc lập.

Để tiếp diện tại bất kỳ điểm chính quy nào thuộc đường sinh $m(u) + \mathbb{R}\overrightarrow{G(u)}$ cũng đều là một, cần và đủ là, với mọi v thuộc $\mathbb{R}$ (sao cho (u, v) là chính quy) :

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{m'(u)} + v\overrightarrow{G'(u)}, \overrightarrow{G(u)}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}).$$

Khi đó ta thấy rằng, nếu đường sinh có ít nhất một điểm chính quy thì :

$$\overrightarrow{G'(u)} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}).$$

Phần đảo là hiển nhiên.

Ta tóm tắt việc khảo sát.

♦ Định lý 1

Cho $\phi : \underset{(u,v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}}{I \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3}$ là một BDTS của một mặt kẻ S, trong đó $m : I \to \mathcal{E}_3$ và $\vec{G} : I \to \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ đều thuộc lớp C^1. Ta giả thiết $\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}\right)$ độc lập với mọi u thuộc I.

Khi đó S khả triển khi và chỉ khi, với mọi u thuộc I, $(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$ phụ thuộc.

VÍ DỤ :

1) Mặt trụ và mặt nón (thuộc lớp C^1) là những mặt khả triển

2) Mặt cong S có BDTS $\begin{cases} x = u + v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = \sin u + v \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ là khả triển.

Thật vậy, với các ký hiệu ở trên :

- $m(u) = (u, 0, \sin u)$, $\overrightarrow{G(u)} = (\cos u, \sin u, 1)$, vậy S là mặt kẻ.
- $\overrightarrow{m'(u)} = (1, 0, \cos u)$, vậy $\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}\right)$ độc lập với mọi u thuộc $\mathbb{R}$. Mọi điểm của S đều chính quy.
- $\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \\ \cos u & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \cos^3 u + \cos u \sin^2 u - \cos u = 0,$$

vậy $\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right)$ là phụ thuộc với mọi u thuộc $\mathbb{R}$

NHẬN XÉT :

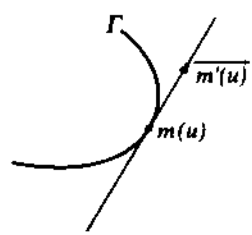
Mọi mặt khả triển (theo định nghĩa) đều là mặt kẻ. Ngược lại thì sai ; chẳng hạn, mặt đinh ốc thẳng ((xem 1) Ví dụ) là một mặt kẻ không khả triển, vì, theo các ký hiệu ở trên, với mọi u thuộc I :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = h \neq 0.$$

Mặt cong sinh bởi các tiếp tuyến với một đường cong ghềnh

Cho Γ là một đường cong ghềnh, có BDTS $\begin{array}{l} m : I \to \mathcal{E}_3 \\ m \to m(u) \end{array}$ thuộc lớp C^2, song chính quy

Với mọi u thuộc I, ta xét tiếp tuyến với Γ tại $m(u)$ đó là đường thẳng đi qua $m(u)$ và được định phương bởi $\overrightarrow{m'(u)}$.



Ta xét mặt kẻ S có BDTS

$\begin{array}{l} \phi\, I \times \mathbb{R} \to \varepsilon_3, \\ (u,v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{m'(u)} \end{array}$ tức là hợp của các tiếp tuyến với Γ; ta nói rằng S được sinh bởi các tiếp tuyến với đường cong ghềnh Γ. Với mọi (u, v) thuộc $I \times \mathbb{R}$, ta có :

$$\frac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial u}(u,v) = \overrightarrow{m'(u)} + v\overrightarrow{m''(u)}, \quad \frac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial v}(u,v) = \overrightarrow{m'(u)}.$$

Vì, với mọi u thuộc I, ($\overrightarrow{m'(u)}$, $\overrightarrow{m''(u)}$) độc lập, nên điểm $M(u, v)$ của S là chính quy khi và chỉ khi $v \neq 0$. Nói cách khác, tập hợp các điểm không chính quy (tức là : dừng) của S là Γ.

Với mọi (u, v) thuộc $I \times \mathbb{R}^*$, họ $(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{m''(u)},)$ phụ thuộc, vậy, theo định lý trên đây, S khả triển.

Hơn nữa, với mọi (u, v) thuộc $I \times \mathbb{R}^*$, tiếp diện tại $\phi(u, v)$ với Γ là mặt phẳng đi qua $\phi(u, v)$ và định phương bởi $(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{m''(u)})$; đó là mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $m(u)$ (xem 6.1.3).

Ta tóm tắt việc khảo sát.

◆ **Định lý 2** Cho Γ là một đường cong ghềnh thuộc lớp C^2, song chính quy. Mặt cong sinh bởi các tiếp tuyến với Γ là một mặt khả triển.

VÍ DỤ :

Đường cong Γ có BDTS $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases}$ $(u \in \mathbb{R})$ là song chính quy,

và mặt cong khả triển sinh bởi các tiếp tuyến với Γ có BDTS $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v.2u \\ z = u^3 + v.3u^2 \end{cases}$,

hoặc $\begin{cases} x = u + v \\ y = u(u + 2v) \\ z = u^2(u + 3v) \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. ■

Ta khảo sát phần đảo (không thuộc chương trình) của định lý trên đây.

Giả sử S là một mặt khả triển, có BDTS $\phi : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \to & \mathcal{E}_3, \\ (u, v) & \mapsto & m(u) + v\overrightarrow{G(u)} \end{array}$

trong đó $m : I \to \mathcal{E}_3$ và $\vec{G} : I \to \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, được giả thiết thuộc lớp C^2.

Giả thiết rằng, với mọi u thuộc I, $(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$ và $(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)})$ độc lập.

Vì S khả triển, nên với mọi u thuộc I, $(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$ phụ thuộc. Vậy tồn tại các ánh xạ $\lambda, \mu : I \to \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall u \in I,\ \overrightarrow{m'(u)} = \lambda(u)\ \overrightarrow{G(u)} + \mu(u)\ \overrightarrow{G'(u)}.$$

Khi chuyển qua các tọa độ trong $\mathcal{R}$, chẳng hạn, ta thấy rằng, vì m', G, G' đều thuộc lớp C^1 trên I, nên λ và μ cũng thuộc lớp C^1 trên I.

Cho $u \in I$. Ta sẽ chứng minh rằng đường sinh của $m(u)$ trên S có một và chỉ một điểm không chính quy. Với mọi v thuộc $\mathbb{R}$, nếu ký hiệu $S(u) = (\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$, ta có :

$$\det{}_{S(u)}\left(\frac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u,v), \frac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v)\right) = \det{}_{S(u)}\left(\overrightarrow{m'(u)} + v\overrightarrow{G'(u)}, \overrightarrow{G(u)}\right)$$

$$= \det{}_{S(u)}(\lambda(u)\overrightarrow{G(u)} + (\mu(u)+v)\overrightarrow{G'(u)}, \overrightarrow{G(u)})$$

$$= -(\mu(u) + v).$$

Như vậy điểm (u, v) thuộc đường sinh của $m(u)$ trên S không chính quy trên S khi và chỉ khi $v = -\mu(u)$.

Đường cong Γ có BDTS $u \in I \mapsto \phi(u, -\mu(u))$, vẽ trên S, được gọi là **gờ lùi** của mặt cong khả triển S.

Ký hiệu $n : I \to \mathcal{E}_3$ là ánh xạ xác định bởi :

$$\forall u \in I,\ n(u) = \phi(u, -\mu(u)) = m(u) - \mu(u)\ \overrightarrow{G(u)}.$$

Với mọi u thuộc I, ta có :

$$\overrightarrow{n'(u)} = \overrightarrow{m'(u)} - \mu'(u)\ \overrightarrow{G(u)} - \mu(u)\ \overrightarrow{G'(u)} = (\lambda(u) - \mu'(u))\ \overrightarrow{G(u)}.$$

Giả thiết mọi điểm thuộc Γ đều chính quy trên Γ, tức là :

$$\forall u \in I, \quad \lambda(u) - \mu'(u) \neq 0.$$

Một BDTS của mặt khả triển Σ sinh bởi các tiếp tuyến của Γ là :

$$(u, v_1) \in I \times \mathbb{R} \mapsto n(u) + v_1\ \overrightarrow{n'(u)} = m(u) + (-\mu(u) + v_1(\lambda(u) - \mu'(u)))\ \overrightarrow{G(u)}.$$

Vì ánh xạ $v_1 \mapsto -\mu(u) + v_1(\lambda(u) - \mu'(u))$ là (với u cố định) một C^1 - vi phôi từ $\mathbb{R}$ lên chính nó, nên một BDTS khác của Σ là :

$$I \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$$

$$(u, w) \mapsto m(u) + w\overrightarrow{G(u)}$$

và như vậy : $\Sigma = S$.

Tóm lại :

Nếu S là một mặt khả triển thuộc lớp C^2, thì tồn tại một đường cong Γ vẽ trên S, được gọi là **gờ lùi** của S, sao cho S là hợp của các tiếp tuyến với Γ (với các giả thiết vừa nêu trên đây).

VÍ DỤ :

Trên đây ta đã thấy rằng mặt cong S có BDTS $\begin{cases} x = u + v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = \sin u + v \end{cases}$, $(u, v) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$,

là khả triển.

Với các ký hiệu trong phần khảo sát trên, $m(u) = (u, 0, \sin u)$, $\overrightarrow{G(u)} = (\cos u, \sin u, 0)$,

suy ra $\overrightarrow{m'(u)} = (1, 0, \cos u)$, $\overrightarrow{G'(u)} = (-\sin u, \cos u, 0)$.

Vậy ta có : $\lambda(u) = \cos u, \quad \mu(u) = -\sin u,$

từ đó : $\lambda(u) - \mu'(u) = 2\cos u \neq 0.$

Gờ lùi của mặt khả triển S có BDTS :

$$u \in I \mapsto \phi(u, -\mu(u)), \text{ tức là : } \begin{cases} x = u + \sin u \cos u \\ y = \sin^2 u \\ z = 2\sin u. \end{cases}$$

6.2.6 Ví dụ về khảo sát các đường cong vẽ trên một mặt cong và thỏa mãn một điều kiện vi phân

§6.2.6 này dành cho sinh viên năm thứ hai.

1) Quỹ đạo trực giao

Giả sử S là một mặt cong, $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ là một họ đường cong vẽ trên S. **Quỹ đạo trực giao** của $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (trên S) là mọi đường cong C, vẽ trên S, và cắt vuông góc mọi đường cong Γ_λ ($\lambda \in \Lambda$).

Ta hãy khảo sát trường hợp đặc biệt khi S là một mặt phẳng ; bằng một phép đổi hệ q.c.t.c.t. ta có thể đưa về trường hợp S là mặt phẳng xOy.

Giả sử $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ là một họ đường cong của mặt phẳng, được chỉ số hóa bởi một khoảng Λ của $\mathbb{R}$. Ta giả thiết tồn tại một tập mở V của $\mathbb{R}^3$ và một ánh xạ $F : V \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên V sao cho, với mọi λ thuộc Λ, Γ_λ có PTĐ $F(x, y, \lambda) = 0$.

Ta giả thiết rằng tại mọi điểm của Γ_λ định lý hàm ẩn đều áp dụng được, và rằng Γ_λ là đường cong biểu thị một hàm một biến thực, thuộc lớp C^1.

Việc khử λ trong $\left\{\begin{array}{l} F(x,y,\lambda)=0 \\ F'_x(x,y,\lambda)+F'_y(x,y,\lambda)y'=0 \end{array}\right|$ cho ta một hệ thức có dạng $f(x, y, y') = 0$,

được gọi là **phương trình vi phân (cấp 1) của họ các đường cong** $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Giả sử C là một quỹ đạo trực giao của $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Ta giả thiết rằng C là đường cong biểu thị một hàm y_C một biến thực, thuộc lớp C^1. Vì C cắt vuông góc mọi Γ_λ nên tại mọi điểm (x, y) thuộc một Γ_λ, ta có : $y'_C(x) = -\dfrac{1}{y'_{\Gamma_\lambda}(x)}$, và như thế C thỏa mãn phương trình vi phân : $f\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0.$

Từ đó ta rút ra quy tắc thực hành sau :

Giả sử $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ là một họ đường cong của mặt phẳng, nhận một phương trình vi phân là : $f(x, y, y') = 0$. Một phương trình vi phân (PTVP) của họ các quỹ đạo trực giao của $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ là : $f\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0.$

Nói cách khác, ta thay y' bởi $-\dfrac{1}{y'}$ trong PTVP của $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Tiến hành việc khảo sát trên đây một cách thật chặt chẽ sẽ là một công việc tế nhị.

VÍ DỤ :

1) Xác định các quỹ đạo trực giao của họ các đường thẳng của mặt phẳng đi qua gốc tọa độ.

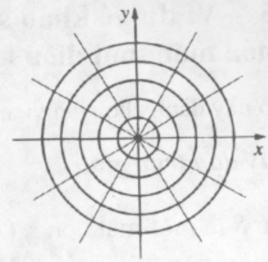
PTĐ tổng quát của các đường thẳng D_λ đi qua O (trừ yy') là $y = \lambda x$.

Ta được một PTVP của họ $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ bằng cách khử λ trong $\begin{cases} y = \lambda x \\ y' = \lambda \end{cases}$.

Vậy đó là : $y - xy' = 0$.

Vậy một PTVP của họ các quỹ đạo trực giao của $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ sẽ là :

$$y + \frac{x}{y'} = 0 \text{, hoặc :} \quad yy' + x = 0.$$



Các quỹ đạo trực giao do đó sẽ có PTĐ :

$$x^2 + y^2 = \mu \quad (\mu \in \mathbb{R}_+) ;$$

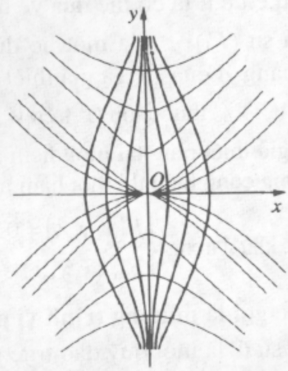
đó là những đường tròn tâm O.

2) Xác định các quỹ đạo trực giao của họ $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$ các hypebol vuông có PTĐ :

$$x^2 - y^2 - \lambda y = 0$$

Ta được một PTVP của $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$

bằng cách khử λ trong $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 + \lambda y = 0 \\ 2x - 2yy' + \lambda y' = 0 \end{array}\right|$,



do đó : $\quad 2xy - (x^2 + y^2)y' = 0.$

Bằng cách thay y' bởi $-\dfrac{1}{y'}$, ta có một PTVP của các quỹ đạo trực giao của $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$:

$$2xyy' + (x^2 + y^2) = 0.$$

Phép đổi hàm chưa biết $z = y^2$ sẽ dẫn đến PTVP $xz' + z + x^2 = 0$, mà nghiệm tổng quát là :

$$z : x \mapsto -\frac{x^2}{3} + \frac{\mu}{x}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Từ đó ta rút ra một phương trình Descartes của các quỹ đạo trực giao $(C_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$:

$$x(x^2 + 3y^2) - 3\mu = 0.$$

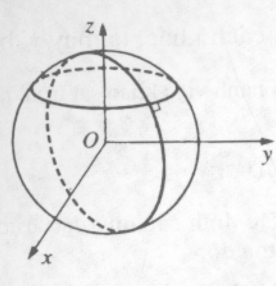
2) Đường có độ dốc lớn nhất

Cho S là một mặt cong.

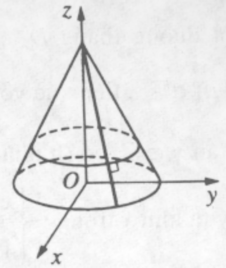
Đường mức của S là các thiết diện của S bởi những mặt phẳng nằm ngang (xem thêm 4.3.1, Định nghĩa 2). **Đường có độ dốc lớn nhất của S** là các quỹ đạo trực giao của họ các đường mức của S.

VÍ DỤ :

1) Hiển nhiên rằng về mặt đồ thị, các đường có độ dốc lớn nhất của mặt cầu S tâm O và bán kính R (> 0) là các đường tròn lớn (xuyên tâm) đi qua hai "cực" của S.



2) Tương tự, các đường có độ dốc lớn nhất của một mặt nón tròn xoay đỉnh O và trục $z'z$ là các đường sinh của nó.



3) Xác định các đường có độ dốc lớn nhất của mặt parabôloit hypebôlic S có phương trình $x^2 - y^2 = 2z$.

Các đường mức Γ_λ của S có phương trình

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right| , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Một vectơ tiếp tuyến khác không tại một điểm (x, y, z) của Γ_λ có tọa độ là $(y, x, 0)$.

Một đường có độ dốc lớn nhất C có BDTS : $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$, và một vectơ tiếp tuyến tại một điểm $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ của C có tọa độ $(x'(\lambda), y'(\lambda), z'(\lambda))$. Tính trực giao của các vectơ tiếp tuyến với Γ_λ và C được diễn đạt bởi :

$$x'y + xy' = 0,$$

suy ra :
$$xy = \mu \; (\mu \in \mathbb{R}).$$

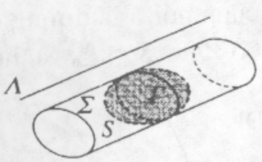
Vậy các đường có độ dốc lớn nhất của S phải có PTD :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2z \\ xy = \mu \end{cases}, \; \mu \in \mathbb{R}$$

và BDTS :
$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{\mu}{t} \\ z = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \dfrac{\mu^2}{t^2}\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}^*.$$

2) *Chu tuyến biểu kiến trụ theo một phương cho trước*

Cho S là một mặt cong, Λ là một phương đường thẳng. **Chu tuyến biểu kiến trụ của S theo phương Λ** là đường cong Γ được tạo nên bởi các điểm M của S mà tại đó đường thẳng đi qua M có phương Λ, tiếp xúc với S.



Mặt trụ Σ, hợp của các đường thẳng có phương Λ và tiếp xúc với S, được gọi là **mặt trụ ngoại tiếp S theo phương Λ.**

Ta cũng nói Γ là **đường tiếp xúc** của S và Σ.

Ta có : $\quad \Gamma \subset S \cap \Sigma$, và thường trong thực hành thì : $\Gamma = S \cap \Sigma$.

VÍ DỤ :

Lập PTD của mặt trụ Σ ngoại tiếp mặt cong S có PTD $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, theo phương có phương trình $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Một đường thẳng $D_{\lambda,\mu}$ được định phương bởi $\vec{i}-\vec{j}$, có HPTD $\begin{cases} y=-x+\lambda \\ z=\mu \end{cases}$,

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tiếp xúc với S khi và chỉ khi phương trình :

$$x^4 + (-x+\lambda)^4 + \mu^4 - 1 = 0,$$

với ẩn $x \in \mathbb{R}$, có (ít nhất) một nghiệm bội.

Vậy ta khử x trong : $\begin{cases} x^4 + (x-\lambda)^4 + \mu^4 - 1 = 0 & (1) \\ 4x^3 + 4(x-\lambda)^3 = 0 & (2) \end{cases}$

Vì : (2) $\Leftrightarrow x^3 = (\lambda - x)^3 \Leftrightarrow x = \lambda - x \Leftrightarrow x = \dfrac{\lambda}{2}$, nên $D_{\lambda,\mu}$ tiếp xúc với S khi và chỉ khi:

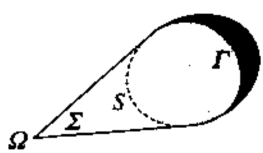
$$\frac{\lambda^4}{8} + \mu^4 - 1 = 0.$$

Ta có được một PTD của mặt trụ Σ bằng cách khử (λ, μ) trong : $\begin{cases} y=-x+\lambda \\ z=\mu \\ \dfrac{\lambda^4}{8}+\mu^4-1=0, \end{cases}$

suy ra : $\Sigma \mid (x+y)^4 + 8z^4 - 8 = 0.$

4) Chu tuyến biểu kiến nón xuất phát từ một điểm cho trước

Cho S là một mặt cong, Ω là một điểm (thường, ta sẽ giả thiết : $\Omega \notin S$). **Chu tuyến biểu kiến nón của S xuất phát từ điểm Ω** là đường cong Γ được tạo nên bởi các điểm M của S mà tại đó đường thẳng (ΩM) tiếp xúc với S.



Mặt nón Σ, hợp của những đường thẳng xuất phát từ Ω và tiếp xúc với S, được gọi là **mặt nón đỉnh Ω ngoại tiếp S.**

Ta cũng nói Γ là **đường cong tiếp xúc** của S và Σ.

Ta có : $\Gamma \subset S \cap \Sigma$, và thường trong thực hành thì : $\Gamma = S \cap \Sigma$.

VÍ DỤ :

Lập một PTD của mặt nón Σ đỉnh $\Omega(0,2,0)$ và ngoại tiếp mặt cong S có PTD $x^2+y^2-z^2=1$.

Một điểm $M(x, y, z)$ thuộc Σ khi và chỉ khi đường thẳng (ΩM) tiếp xúc với S.

Một BDTS của (ΩM) là : $\begin{cases} X=\lambda x \\ Y=2+\lambda(y-2) \\ Z=\lambda z \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Đường thẳng (ΩM) tiếp xúc với S khi và chỉ khi phương trình :

$$(\lambda x)^2 + (2 + (y-2))^2 - (\lambda z)^2 - 1 = 0$$

có (ít nhất) một nghiệm bội tại λ, tức là khi và chỉ khi :

$$(2(y-2))^2 - 3(x^2 + (y-2)^2 - z^2) = 0.$$

Như vậy, Σ có PTD : $-3x^2 + (y-2)^2 + 3z^2 = 0.$

Bài tập

Đại cương về các mặt cong, các bài tập 6.2.1 *đến* 6.2.10

◊ **6.2.1** Tìm một biểu diễn tham số của mặt cong S có phương trình :

$$(\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{z})^2 = 4.$$

◊ **6.2.2** Lập một phương trình Descartes của một mặt cong S có chứa một mặt cong có biểu diễn tham số :

$x = u + v + w$, $y = u^2 + v^2 + w^2$, $z = u^3 + v^3 + w^3$, $uvw = 1$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

◊ **6.2.3** Lập một phương trình Descartes của mặt cong S là hợp các đường thẳng Δ của $\mathcal{E}_3$ cắt 3 đường thẳng :

$$D_1\begin{cases} y = -1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad D_2\begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}, \quad D_3\begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

◊ **6.2.4** Cho $(a, h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, H là hypebol có phương trình $\begin{cases} xy = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$, $D\begin{cases} y = 0 \\ z = h \end{cases}$, $D'\begin{cases} x = 0 \\ y = -h \end{cases}$.

Lập một phương trình Descartes của mặt cong S là hợp các đường thẳng Δ của $\mathcal{E}_3$ gặp H, D, D'.

◊ **6.2.5** Cho π là mặt phẳng có phương trình $y = z$, và hai parabol $P\begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$, $P'\begin{cases} z^2 = 3x \\ y = 0 \end{cases}$.

Lập một phương trình Descartes của mặt cong S là hợp các đường thẳng Δ của $\mathcal{E}_3$ song song với π và cắt P, P'.

◊ **6.2.6** Cho $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ và Γ là đường cong biểu diễn tham số bởi :

$$x = at,\ y = bt^3,\ z = c(t^2 + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lập một phương trình Descartes của mặt cong S là hợp các dây cung của Γ song song với mặt phẳng xOy.

◊ **6.2.7** Lập một phương trình Descartes của mặt cong S là hợp của các đường thẳng của $\mathcal{E}_3$ cắt đường cong Γ có BDTS : $x = t^2$, $y = t^3 - t$, $z = t^4 - t$, $t \in \mathbb{R}$, tại 3 điểm.

◊ **6.2.8** Chứng tỏ rằng đường cong $\Gamma\begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ là một đường tròn.

◊ **6.2.9** Xác định các đường thẳng kẻ trên mặt cong S có phương trình :

a) $xy + yz + zx + xyz = 0$ b) $x(x^2 + y^2 + z^2) - yz = 0$

c) $2x^3 - 3x^2y + z^2 = 0$ d) $y^2(y^2 + z^2) - (x^2 - 1)^2 = 0$.

◊ **6.2.10** Cho S là mặt cong được biểu diễn tham số bởi $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + u \\ z = 3tu + t^3 \end{cases}$, $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, và

đường cong Γ được biểu diễn tham số bởi $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \\ z = t^3 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, được vẽ trên S.

Hỏi thiết diện của S bởi mặt phẳng mặt tiếp tại một điểm của Γ là gì ?

Tiếp diện của mặt cong, các bài tập 6.2.11 *đến* 6.2.18

◊ **6.2.11** Với các mặt cong S sau đây, hãy xác định các điểm chính quy và tìm một phương trình Descartes của tiếp diện tại mọi điểm chính quy :

$$\text{a)}\ \begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^3 + v^3 \end{cases},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{b)}\ \begin{cases} x = u + \dfrac{1}{u} \\ y = v + \dfrac{1}{v} \\ z = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} \end{cases},\ (u,v) \in (\mathbb{R}^*)^2.$$

◊ **6.1.12** Giả sử S là mặt cong có BDTS :

$$x = \frac{u}{u^2+v^2},\ y = \frac{v}{u^2+v^2},\quad z = \frac{1}{u^2+v^2},\ (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Xác định tập hợp các điểm thuộc S tại đó tiếp diện song song với $\vec{u}\,(1,1,1)$.

◊ **6.1.13** Lập một phương trình Descartes của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong S có phương trình : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$, và trực giao với đường thẳng D có phương trình là :

$$x = \frac{y}{x} = -\frac{z}{2}.$$

◊ **6.1.14** Xác định các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong S có phương trình $z^3 - xy = 0$, và chứa đường thẳng D có phương trình $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z + 3 \end{cases}$.

◊ **6.1.15** Giả sử Γ là đường cong được biểu diễn tham số bởi ($x = t$, $y = t^3$, $z = t^2 + 1$) và S là mặt cong hợp của các đường thẳng song song với mặt phẳng xOy và gặp Γ ở hai điểm.

a) Lập một biểu diễn tham số và một phương trình Descartes của S.

b) Tập hợp các điểm thuộc S tại đó tiếp diện chứa điểm O là gì ?

◊ **6.1.16** Giả sử $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $0 < a < c < b$, và hai mặt cong :

$$S_1 = y^2(x^2+z^2) = b^2x^2 + a^2z^2,\qquad S_2 = \frac{x^2}{c^2-a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2+b^2} = 1.$$

Chứng tỏ rằng S_1 và S_2 cắt trực giao nhau theo bốn đường thẳng.

◊ **6.1.17*** Xác định các mặt phẳng song tiếp xúc với mặt cong S có phương trình $z = y^2(x^3 - 1)$.

◊ **6.1.18** Khảo sát vị trí cục bộ của mặt cong S : $z\cos x - y\sin x = 0$ so với tiếp diện của nó tại $O(0,0,0)$.

Mặt trụ, các bài tập 6.2.19 *đến* 6.2.22

◊ **6.2.19** Lập một phương trình Descartes của mặt trụ S có các đường sinh song song với $\vec{v}$ và đường chuẩn Γ trong các ví dụ sau :

a) $\vec{v}(1,0,1)$. Γ: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = a\sin t\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ cố định.

b) $\vec{v}(0,1,1)$, Γ: $y + z = 1, x^2 + y^2 = z$.

◊ **6.2.20** Lập một phương trình Descartes của mặt trụ S có thiết diện thẳng

$$\Gamma:\ \begin{cases} xyz = a^3 \\ x + y + z = a \end{cases},\quad a \in \mathbb{R}_+^*\ \text{cố định.}$$

◊ **6.2.21** Nhận dạng mặt cong S cho bởi một phương trình Descartes :

a) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=0$

b) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=1$, và xác định một thiết diện thẳng

c) $2^{x-y}+2^{y-z}-2^{z-x}-1=0$.

◊ **6.2.22** Cho $a, b, c \in]0\,;+\infty[$, $S_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $S_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

a) Nhận dạng S_1 và S_2.

b) Chứng tỏ rằng $S_1 \cap S_2$ là hợp của hai đường cong phẳng, chỉ rõ loại của các đường cong đó.

c) ĐKCĐ đối với (a, b, c) để $S_1 \cap S_2$ là hợp của hai đường tròn.

Mặt nón, các bài tập 6.2.23 *đến* 6.2.27

◊ **6.2.23** Lập một phương trình Descartes của mặt nón S đỉnh Ω và đường chuẩn Γ trong các ví dụ sau :

a) $\Omega(0, 0, 0)$, Γ: $x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R}^*$

b) $\Omega(1, -1, 0)$, Γ: $y + z = 1, x^2 + y^2 = z$.

◊ **6.2.24** Với những trị nào của $\lambda \in \mathbb{R}$ thì mặt cong S_λ có phương trình :

$$x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda = 0$$

là một mặt nón ? Trong trường hợp đó hãy chỉ rõ đỉnh và một đường chuẩn.

◊ **6.2.25** Xác định quỹ tích các đỉnh các mặt nón bậc hai và đi qua một parabol cho trước và một điểm cho trước.

◊ **6.2.26** Chứng tỏ rằng mặt phẳng P có phương trình $2x + 3y - z = 0$ cắt mặt nón S có phương trình $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ theo hai đường thẳng D, D', và tính $\angle(D, D')$.

◊ **6.2.27** Chứng tỏ rằng không tồn tại một đường thẳng nào của $\mathcal{E}_3$, không đi qua O, và tiếp xúc với 3 mặt nón.

$$S_1: x^2 + y^2 = z^2,\ S_2: y^2 + z^2 = x^2,\ S_3: z^2 + x^2 = y^2.$$

Mặt tròn xoay, các bài tập 6.2.28 *đến* 6.2.33

◊ **6.2.28** Lập một phương trình Descartes của mặt tròn xoay S thu được bằng cách quay đường cong Γ $(x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t, t \in \mathbb{R})$ quanh $z'z$.

◊ **6.2.29** Cho $R \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Lập một phương trình Descartes của mặt trụ tròn xoay S bán kính R và trục quay D có hệ phương trình $\begin{cases} x = z+2 \\ y = z+1 \end{cases}$.

b) ĐKCĐ đối với R để $z'z$ tiếp xúc với S.

◊ **6.2.30** Lập một phương trình Descartes của mặt nón tròn xoay S trục $O + \mathbb{R}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ và chứa các trục tọa độ.

◊ **6.2.31** Chứng tỏ rằng mặt cong S : $x^4+y^4+z^4-4xyz(x+y+z)-1=0$ là tròn xoay và chỉ rõ trục của nó.

◊ **6.2.32** Cho Γ là đường cong có hệ phương trình $\begin{cases} x = z^2+2z \\ y = 2z^2 - z \end{cases}$.

a) Chứng tỏ rằng Γ là một parabol. Hãy tìm mặt phẳng của nó, đỉnh của nó, trục của nó.

b) Lập một phương trình Descartes của mặt tròn xoay có được bằng cách quay Γ quanh trục của nó.

◊ **6.2.33** Xét ba hình trụ tròn xoay, có cùng bán kính R ($R>0$) và các trục lần lượt là $x'x$, $y'y$, $z'z$. Hãy tính thể tích trong của ba hình trụ đó.

Mặt bậc hai, các bài tập từ 6.2.34 *đến* 6.2.51

◊ **6.2.34** Với mỗi mặt bậc hai S sau, hãy chỉ rõ :

- một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận trong đó S nhận một phương trình thu gọn
- một phương trình thu gọn của S
- loại hình của S

a) $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$

b) $7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0$

c) $x^2+y^2+z^2+2xy-1=0$

d) $x^2-4x-3y+4z-2=0$.

◊ **6.2.35** Cho $a, b, h \in \mathbb{R}_+^*$. Xác định loại của mặt cong S có phương trình Descartes :

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-2abxy-2bcyz-2cazx-h=0.$$

◊ **6.2.36** Cho S là một mặt bậc hai (không suy biến thành những mặt phẳng) với ma trận được ký hiệu là Q trong cơ sở chính tắc. Chứng tỏ rằng S là tròn xoay khi và chỉ khi Q nhận một trị riêng (ít nhất) bội hai và khác không.

◊ **6.2.37** Tìm một ĐKCĐ đối với $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ để mặt bậc hai S có phương trình :

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1$$

là tròn xoay (dùng bài tập 6.2.36).

◊ **6.2.38** Cho $(a, h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $D\begin{cases} y=0 \\ z=h \end{cases}$, $D'\begin{cases} x=0 \\ z=-h \end{cases}$, $H\begin{cases} x=0 \\ xy=a^2 \end{cases}$.

a) Lập một phương trình Descartes của mặt cong S sinh bởi các đường thẳng trong không gian gặp D, D', H.

b) ĐKCĐ đối với (a, h) để S là tròn xoay (dùng bài tập 6.2.36).

◊ **6.2.39** Chứng minh rằng mọi phương trình bậc hai đối xứng đối với x, y, z đều biểu diễn một mặt bậc hai tròn xoay.

◊ **6.2.40** Mặt bậc hai có phương trình sau thuộc loại gì :

$$(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=1 \ ?$$

◊ **6.2.41** Cho S là mặt cong có phương trình $(x+y+z)^2-2x+2y+4z-1=0$.

a) Nhận biết S.

b) Mặt phẳng đối xứng P của S là gì ?

c) Xác định tiếp diện T với S dọc theo $P\cap S$.

◊ **6.2.42** Cho D là một đường thẳng và P là một mặt phẳng sao cho $D \not\parallel P$. Chứng tỏ rằng tập hợp S các điểm của $\mathcal{E}_3$ cách đều D và P là một mặt bậc hai và chỉ rõ loại của mặt đó.

◊ **6.2.43** Cho D, D' là hai đường thẳng không đồng phẳng. Chứng tỏ rằng tập hợp S các điểm của $\mathcal{E}_3$ cách đều D và D' là một mặt bậc hai và chỉ rõ loại của mặt đó.

◊ **6.2.44** Tìm tất cả các mặt bậc hai chứa đường cong Γ:

$$x=t^3,\ y=\frac{t^3-1}{t},\ \ z=\frac{t^3+1}{t},\ t\in\mathbb{R}^*.$$

◊ **6.2.45** Giả sử $p\in\mathbb{R}_+^*$, $P\begin{cases}z=0\\ y^2=2px\end{cases}$, $D\begin{cases}x=\dfrac{p}{2}+z\\ y=p.\end{cases}$

Xác định các mặt bậc hai chứa P, D và tiếp xúc tại O với mặt phẳng yOz.

◊ **6.2.46** Cho $h\in\mathbb{R}_+^*$, $P\begin{cases}y=x^2\\ z=0\end{cases}$, $D\begin{cases}z=h\\ x=0\end{cases}$.

Xác định các mặt bậc hai chứa P và D.

◊ **6.2.47** Lập một phương trình Descartes của mặt cong S sinh ra bằng cách quay đường thẳng D $\begin{cases}z=0\\ y=x+1\end{cases}$ quanh đường thẳng Δ $\begin{cases}y=0\\ x=z\end{cases}$.

◊ **6.2.48** Cho $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$. Tìm các mặt phẳng tiếp xúc với S : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ và cắt ba trục tọa độ tại ba điểm lần lượt là P, Q, R sao cho :

$$\overrightarrow{OP}.\vec{i}=\overrightarrow{OQ}.\vec{j}=\overrightarrow{OR}.\vec{k}\ .$$

◊ **6.2.49** Cho $(p,q)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, S_1: $x^2+y^2=2pz$, S_2 : $x^2+y^2=-2qz$.

a) Nhận biết S_1 và S_2.

b) Xác định các đường cong Γ thuộc lớp C^1 vẽ trên S_1, sao cho tiếp tuyến tại mọi điểm thuộc Γ cũng là tiếp tuyến với S_2 (và không đi qua O).

◊ **6.2.50*** Cho $(A,B,C,D,E,F)\in\mathbb{R}^6-\{(0,0,0,0,0,0)\}$, S là mặt nón có phương trình :

$$Ax^2+2Bxy+2Cxz+Dy^2+2Eyz+Fz^2=0.$$

Hãy chỉ ra rằng một ĐKCĐ để tồn tại ba đường sinh của S trực giao từng cặp là :

$$A+D+F=0$$

(dùng Tập 6, bài tập 5.2.22).

◊ **6.2.51*** Cho $a,b,c,a',b',c',a'',b'',c''\in\mathbb{R}$, Q_1 và Q_2 là hai mặt bậc hai :

$$Q_1:\quad (ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''x+c''z)^2=1$$

$$Q_2:\quad (ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'x+c''z)^2=1$$

Chứng tỏ rằng Q_1 và Q_2 là đẳng cự.

Mặt kẻ, mặt khả triển, các bài tập từ 6.2.52 *đến* 6.2.54.

◊ **6.2.52** Chứng minh rằng mặt cong S có BDTS :

$x = \cos u - v\sin u,\ y = \sin u + v\cos u,\ z = u(u+2v), (u,v)\in\mathbb{R}^2$ là khả triển.

◊ **6.2.53** Chứng minh rằng mặt cong S có BDTS :

$$x = 3u + v,\ \ y = 2u^2 + 2uv,\quad z = u^3v\ \ (u,\ v) \in \mathbb{R}^2$$

khả triển và chỉ ra gờ lùi.

◊ **6.2.54** Chứng minh rằng các mặt cong sau đây là những mặt kẻ và không khả triển :

a) $x = \dfrac{uv}{u+v},\ \ y = u^3 + v^3,\ \ z = u^2 + v^2,\ (u,\ v) \in \mathbb{R}^2$ và $u + v \neq 0$.

b) $x^2z^2 - (x^2 + y^2) = 0$.

◊ **6.2.55** Lập một phương trình Descartes của mặt trụ ngoại tiếp $S : x^2 + y^2 = z$ theo phương của đường thẳng $D:\quad x = y = z$.

◊ **6.2.56** Lập một phương trình Descartes của mặt nón đỉnh $A(-2, -2, 0)$ và ngoại tiếp

$$S : xy + yz + zx = 1.$$

◊ **6.2.57** Cho $(a, k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $S_1 = x^2 + y^2 = a^2$, $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (1+k^2)a^2$.

Tìm những đường cong Γ vẽ trên S_1 sao cho tiếp tuyến tại mọi điểm của Γ cũng tiếp xúc với S_2.

◊ **6.2.58** Xác định các đường cong Γ vẽ trên $S : y = x^2$ sao cho mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm M của Γ chứa hình chiếu vuông góc của M lên $y'y$.

◊ **6.2.59*** Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,\ y,\ z) \longmapsto f(x,\ y,\ z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

và $S = \{M(x,y,z) \in \mathcal{E}_3;\ f(x,y,z) = 1\}$.

1) Chứng minh rằng S là một mặt tròn xoay, từ đó xác định trục và kinh tuyến trong độ lớn thật.

2) Với mọi $M(x,\ y,\ z)$, $M'(x',\ y',\ z')$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ta định nghĩa một điểm $P(X,\ Y,\ Z)$ của $\mathcal{E}_3$ bởi : $\quad X = xx'+yz'+zy',\ \ Y = xy'+yx'+zz',\ \ Z = xz'+yy'+zx'$.

a) Chứng minh rằng, nếu $(MM') \in S^2$, thì $P \in S$. Điều này cho phép định nghĩa một luật hợp thành trong $*$ trong S.

b) Chứng minh rằng $(S, *)$ là một nhóm Abel.

3) Ta kí hiệu $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{C}\ ;\ |u| = 1\}$.

a) Chứng minh rằng, với mọi $(t,\ u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, điểm của $\mathcal{E}_3$ xác định bởi

$$x = \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(u + \overline{u})),\ \ y = \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(j\overline{u} + j^2u)),\ \ z = \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(ju + j^2\overline{u}))$$

thuộc S.

b) Chứng minh rằng ánh xạ $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to S$ định nghĩa như vậy là một C^∞ - vi phôi từ $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ lên S, và một đẳng cấu từ $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ (trong đó $\mathbb{R}$ được trang bị + và $\mathbb{U}$ được trong bị .) lên $(S, *)$.

c) Kiểm chứng rằng điểm M_1 có các tọa độ $\left(\dfrac{1+e^2}{3e^2}, \dfrac{1+e^3}{3e^2}, \dfrac{1-2e^3}{3e^2}\right)$ thuộc S và tính, với mọi $n \in \mathbb{Z}$, các tọa độ của điểm M_n của S xác định bởi :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad M_{n+1} = M_n * M_1$$

PHẦN THỨ HAI

CHỈ DẪN
VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 1

1.2.1 (i) ⇒ (ii) : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

(ii) ⇒ (iii) : Ta ký hiệu I (tương ứng : J) là trung điểm của (A, D) (tương ứng : (B, C)). Ta có :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0}$$, suy ra $I = J$.

(iii) ⇒ (iv) : Ta ký hiệu I là trung điểm chung của (A, D) và của (B, C). Ta có :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{CD}.$$

Vậy $(AB) \parallel (CD)$. Tương tự, $(AC) \parallel (BD)$.

(iv) ⇒ (v) : Theo giả thiết, tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD} = \mu\overrightarrow{AC}$. Ta có :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \mu\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB} = \mu\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \lambda\overrightarrow{AB},$$

từ đó : $\quad (1-\mu)\overrightarrow{BC} = (\mu-\lambda)\overrightarrow{AB}$.

Vì A, B, C không thẳng hàng, nên họ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$ độc lập, vậy $1 - \mu = \mu - \lambda = 0$, tức là $\lambda = \mu = 1$, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

1.2.2 Theo giả thiết, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ thẳng hàng ; vì $n - 1 \geq 2$ và $A_1 \neq A_2$, nên các điểm $A_1, \ldots, A_{n-1}$ ở trên đường thẳng (A_1A_2). Cũng như vậy, theo giả thiết các điểm $A_1, \ldots, A_{n-2}, A_n$ thẳng hàng ; vì $n - 2 \geq 2$, nên : $A_n \in (A_1A_2)$.

1.2.3 Giả sử $[AB) = [A'B')$.

Ta lập luận phản chứng : giả thiết $A \neq A'$. Vì $A' \in]AB)$ và $A \in]A'B')$, nên ta có (xem 1.2.1, *4), Nhận xét 1)* :

$[AB) = [AA')$ và $[A'B') = [A'A)$, từ đó $[AA') = [A'A)$, mâu thuẫn : chẳng hạn, điểm M xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AA'}$ sẽ ở trên $[AA')$, mà không ở trên $[A'A)$, vì $\overrightarrow{A'M} = -\overrightarrow{A'A}$.

Điều này chứng tỏ $A = A'$.

Vì $B' \in [AB)$, nên tồn tại $k \in \mathbb{R}_+$ sao cho $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$; vậy ta có $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, và $k \neq 0$, vì nếu không, $B' = A = A'$, mâu thuẫn.

• Phần đảo là hiển nhiên.

1.2.4 Tồn tại một đường thẳng D_1 của mặt phẳng sao cho : $\forall\ (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,

$(i \neq j \Rightarrow D_1 \not\parallel (A_iA_j))$, vì số các đường thẳng (A_iA_j) $\{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j\}$ là hữu hạn.

Tiếp theo, tồn tại một đường thẳng Δ của mặt phẳng sao cho $D_1 \not\parallel \Delta$.

Khi "dịch chuyển D_1 song song với chính nó theo phương của Δ", ta đi qua từng điểm A_i một. Vậy tồn tại một đường thẳng D, song song với D_1, sao cho D tách hẳn các điểm $A_1, \ldots, A_n$, về phía này đúng p điểm và phía kia đúng q điểm còn lại.

1.2.5 a) • Chọn $(\alpha, \alpha') = (1, 0)$ hoặc $(0, 1)$, ta có : $D \in \mathfrak{F}_{D,D'}$ và $D' \in \mathfrak{F}_{D,D'}$.

• Rõ ràng là : $\mathfrak{F}'_{D,D'} \subset \mathfrak{F}_{D,D'}$.

• Cho $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(\alpha a + \alpha' a', \alpha b + \alpha' b') \neq (0, 0)$; ta ký hiệu Δ là đường thẳng có phương trình

$$\alpha(ax + by + c) + \alpha'(a'x + b'y + c') = 0,$$

và giả thiết $\Delta \neq D'$.

Khi đó ta có $\alpha \neq 0$, và, với ký hiệu $\lambda = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$, Δ sẽ có phương trình là :

$$(ax + by + c) + \lambda(a'x + b'y + c') = 0,$$

vậy $\Delta \in \mathfrak{F}'_{D,D'}$.

Điều này chứng tỏ : $\mathfrak{F}_{D,D'} - \{D'\} \subset \mathfrak{F}'_{D,D'}$.

Cuối cùng : $\mathfrak{F}'_{D,D'} = \mathfrak{F}_{D,D'} - \{D'\}$.

b) 1) Giả sử $\Delta \in \mathfrak{F}_{D,D'}$; tồn tại $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(\alpha a + \alpha' a', \alpha b + \alpha' b') \neq (0, 0)$ và :

$$\Delta \mid \alpha\left(ax+by+c\right)+\alpha'\left(a'x+b'y+c'\right) = 0 .$$

Vì $M_0\ (x_0, y_0) \in D \cap D'$, ta có $ax_0 + by_0 + c = a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$, từ đó, bằng cách tổ hợp, $M_0 \in \Delta$.

2) Ngược lại, giả sử Δ là một đường thẳng đi qua M_0, $\Delta \mid Ax + By + C = 0$. Xét các vectơ chỉ phương u, u', v theo thứ tự của D, D', Δ : $u = (b, -a)$, $u' = (b', -a')$, $v = (B, -A)$. Vì $D \nparallel D'$, nên (u, u') là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$; do đó tồn tại $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$ sao cho : $v = \alpha u + \alpha' u'$.

Khi đó ta có : $A = \alpha a + \alpha' a'$ và $B = \alpha b + \alpha' b'$.

Hơn nữa : $-C = Ax_0 + By_0 = (\alpha a + \alpha' a')x_0 + (\alpha b + \alpha' b')\, y_0$

$$= \alpha(ax_0 + by_0) + \alpha'(\, a'x_0 + b'y_0) = -\alpha c - \alpha' c'.$$

Vậy Δ có phương trình là $\alpha\,(ax + by + c) + \alpha'\,(a'x + b'y + c') = 0$, suy ra $\Delta \in \mathfrak{F}_{D,D'}$.

c) Ký hiệu $u = (b, -a)$, $u' = (b', -a')$. Vì $D \parallel D'$, nên tồn tại $k \in \mathbb{R}^*$ sao cho : $b' = kb$, $a' = ka$.

1) Cho $\Delta \mid \alpha\,(ax + by + c) + \alpha'\,(a'x + b'y + c') = 0$; khi đó Δ có phương trình là :

$$(\alpha + \alpha' k)\,(ax + by) + \alpha c + \alpha' c' = 0,$$

vậy $\Delta \parallel D$.

2) Ngược lại, giả sử Δ là một đường thẳng song song với D. Tồn tại $d \in \mathbb{R}$ sao cho $\Delta \mid ax + by + d = 0$. Vì $D \neq D'$, nên ta có $c' \neq kc$; vậy tồn tại $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$\begin{cases}\alpha + k\alpha' = 1\\ \alpha c + \alpha' c' = d\end{cases},$$

từ đó : $\Delta \mid \alpha\,(ax + by + c) + \alpha'(kax + kby + c') = 0,$

và như vậy $\Delta \in \mathfrak{F}_{D,D'}$.

1.2.6 Ta có :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$

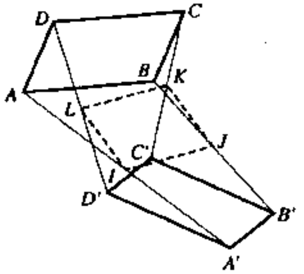
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right).$$

Tương tự : $\overrightarrow{KL} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C'D'}\right)$.

Vì $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'} = -\overrightarrow{A'B'}$, nên

ta suy ra : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{JI}$, vậy $IJKL$ là một hình bình hành.



1.2.7 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 2x+y-z-2=0 \\ 4x-3y+z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-z-3 \\ 5y-3z-8=0 \\ 5y-3z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{z+1}{5} \\ y=\dfrac{3z+8}{5} \end{cases}.$$

◊ **Trả lời** : $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ là đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x=\dfrac{z+1}{5} \\ y=\dfrac{3z+8}{5} \end{cases}$, đi qua (chẳng hạn) điểm (0,1, -1), và được định phương bởi vectơ (1, 3, 5).

1.2.8 Lập các phương trình Descartes của P và P' :

$$(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 4 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 7z - 8 = 0,$$

$$(x, y, z) \in P' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & 2 & -1 \\ z-1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - y - 2z - 1 = 0.$$

Sau đó giải hệ :

$$(x, y, z) \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y+7z-8=0 \\ 5x-y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13z-5}{10} \\ y=\dfrac{9z-7}{2} \end{cases}.$$

◊ **Trả lời** : $P \cap P'$ là đường thẳng D đi qua (chẳng hạn) điểm (6, 19, 5) và được định phương bởi vectơ (13, 45, 10).

1.2.9 a) Tương tự như ở bài tập 1.2.5, *a*).

b) 1) Giả sử $\Pi \in \mathfrak{F}_{P,P'}$, $\Pi \mid \alpha(ax+by+cz+d)+\alpha'(a'x+b'y+c'z+d')=0$.

Vì các điểm thuộc D_0 làm triệt tiêu $ax + by + cz + d$ và $a'x + b'y + c'z + d'$, nên ta suy ra rằng : $D_0 \subset \Pi$.

2) Ngược lại, giả sử Π là một mặt phẳng chứa D_0.

Cách thứ nhất

Ký hiệu A là một điểm thuộc D_0, $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của D_0, $\vec{v} \in \vec{P}$, $\vec{v'} \in \vec{P'}$, $\vec{w} \in \vec{\Pi}$ sao cho các họ $(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{u},\vec{v'})$, $(\vec{u},\vec{w})$ độc lập. Vì $P \,//\, P'$,

nên $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v'})$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, do đó tồn tại $(k, \alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^3$ sao cho :

$$\vec{w} = k\vec{u} + \alpha\vec{v} + \alpha'\vec{v'}.$$

Với ký hiệu $B = (\vec{u},\vec{v},\vec{v'})$, các PTD của P, P', Π là :

$$\det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{w}) = 0,\ \det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v'}) = 0,\ \det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{w}) = 0.$$

Nhưng : $\det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{w}) = \det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},k\vec{u}+\alpha\vec{v}+\alpha'\vec{v'})$

$$= \alpha\det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) + \alpha'\det_B(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v'}).$$

Vậy, một PTD của Π là tổ hợp tuyến tính các PTD của P và P', và cuối cùng $\Pi \in \mathfrak{F}_{P,P'}$.

Cách thứ hai

Chú ý rằng khái niệm chùm tuyến tính các mặt phẳng không phụ thuộc việc chọn hệ quy chiếu Descartes, nên ta có thể chọn hệ quy chiếu sao cho $P \mid x = 0$, $P' \mid y = 0$.

Khi ký hiệu $\Pi \mid Ax + By + Cz + D = 0$, vì $D_0 \subset \Pi$, nên ta có : $\forall z \in \mathbb{R}$, $Cz + D = 0$, từ đó $C = D = 0$, như vậy : $\Pi \mid Ax + By = 0$, nên $\Pi \in \mathfrak{F}_{PP'}$.

Ví dụ : Khi ký hiệu $P \mid x - y + z - 5 = 0$ và $P' \mid 2x + y + z - 2 = 0$, thì PTĐ tổng quát của một mặt phẳng Π chứa đường thẳng $P \cap P'$ và khác P, là :

$$x - y + z - 5 + \lambda\,(2x + y + z - 2) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

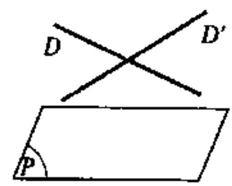
Rồi suy ra : $A \in \Pi \Leftrightarrow -1 + \lambda = 0$.

◊ **Trả lời** : $\Pi \mid 3x + 2z - 7 = 0$.

c) Lập luận như ở 1.2.5, c)

1.2.10 a) $\begin{cases} D \parallel D' \\ D' \parallel P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D} = \vec{D'} \\ \vec{D'} \subset \vec{P} \end{cases} \Rightarrow \vec{D} \subset \vec{P} \Leftrightarrow D \parallel P.$

◊ **Trả lời** : Đúng.

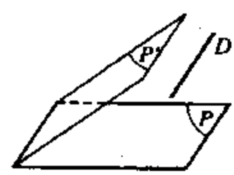


b) ◊ **Trả lời** : Sai.

c) $\begin{cases} D \parallel P \\ P \parallel P' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D} \subset \vec{P} \\ \vec{P} = \vec{P'} \end{cases} \Rightarrow \vec{D} \subset \vec{P'} \Leftrightarrow D \parallel P'.$

◊ **Trả lời** : Đúng.

◊ **Trả lời** : Sai.



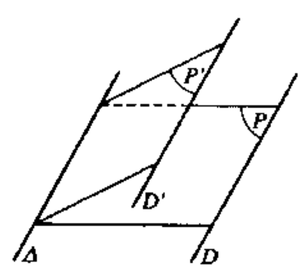
1.2.11 Vì $P \not\parallel P'$, $P \cap P'$ là một đường thẳng Δ.

Ta có :

$$\begin{cases} D \subset P \\ D' \subset P' \\ D \parallel D' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{D} \subset \vec{P} \\ \vec{D'} \subset \vec{P'} \\ \vec{D} = \vec{D'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{D} \subset \vec{P} \cap \vec{P'} = \overrightarrow{P \cap P'} = \vec{\Delta}$$

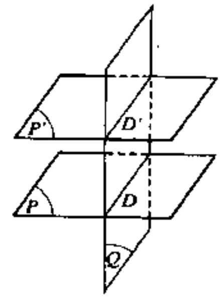
$$\Rightarrow D \parallel \Delta.$$



1.2.12 Vì $P \not\parallel Q$, nên $P \cap Q$ là một đường thẳng D ; tương tự, $P' \cap Q$ là một đường thẳng D'. Ta có :

$$\vec{D} = \overrightarrow{P \cap Q} = \vec{P} \cap \vec{Q}$$
$$= \vec{P'} \cap \vec{Q} = \overrightarrow{P' \cap Q} = \vec{D'},$$

Vậy $D \parallel D'$.



1.2.13 Ký hiệu $D = Q \cap R$, $E = P \cap R$, $F = P \cap Q$, đó là ba đường thẳng.

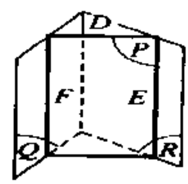
Trường hợp thứ nhất : $D \parallel P$

Ta có :

$$\left\{\begin{array}{l} D = Q \cap R \parallel R \\ D \parallel P \end{array}\right| \Rightarrow D \parallel P \cap R = E.$$

Tương tự, $D \parallel F$.

Như vậy D, E, F là ba đường thẳng song song.



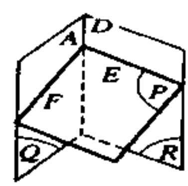
Trường hợp thứ hai : $D \not\parallel P$

Khi đó $D \cap P = \{A\}$, trong đó A là một điểm.

Ta có : $D \cap P = (Q \cap R) \cap P = P \cap Q \cap R$,

suy ra $A \in D \cap P = E \cap Q = F \cap R$.

Như vậy, $A \in D, E, F$, nên D, E, F đồng quy tại A.



1.2.14 Ký hiệu Π là mặt phẳng được xác định bởi D_1 và D_2.

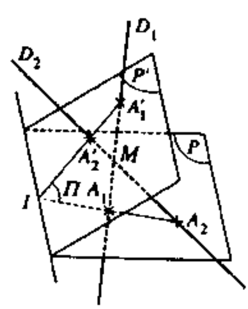
Trường hợp thứ nhất : $\Delta \not\parallel \Pi$

Ký hiệu I là giao điểm của Δ và Π. Khi đó $\Pi \cap P$ và $\Pi \cap P'$ là hai đường thẳng (A_1A_2), $(A'_1A'_2)$ (nếu $A_1 \neq A_2$ và $A'_1 \neq A'_2$), và chứa I.

Trường hợp thứ hai : $\Delta \parallel \Pi$

Khi đó : $\overrightarrow{\Pi \cap P} = \vec{\Pi} \cap \vec{P} \supset \vec{\Delta} \cap \vec{P} = \vec{\Delta}$, vậy $(A_1A_2) \parallel \Delta$.

Tương tự, $(A'_1A'_2) \parallel \Delta$, và suy ra $(A_1A_2) \parallel (A'_1A'_2)$.



1.2.15 Trong cả hai ví dụ, $(\vec{u}, \vec{u'})$ đều độc lập, do đó $D \cap D'$ là $\varnothing$ hay một đơn tử.

a) Vì $\det_{b.c}\left(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, nên $\left(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}\right)$ độc lập, và vì thế D, D' không đồng phẳng.

◊ **Trả lời** : $D \cap D' = \varnothing$.

b) $\det_{b,c}\left(\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u'}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$, vậy D và D' đồng phẳng.

Ta tìm một điểm M sao cho có tồn tại $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn : $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ và $\overrightarrow{A'M}=\lambda'\vec{u'}$.
Điều này dẫn đến :

$$\begin{cases}x-2=\lambda\\ y=-\lambda\\ z-1=2\lambda\end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases}x+1=2\lambda'\\ y-1=-\lambda'\\ z-1=\lambda'\end{cases}$$

Ta suy ra : $\begin{cases}2+\lambda=2\lambda'-1\\ -\lambda=1-\lambda'\\ 1+2\lambda=1+\lambda'\end{cases}$, từ đó $\lambda=1$, $\lambda'=2$.

◊ **Trả lời :** $D \cap D' = \{A\}$, trong đó $A(3, -1, 3)$.

1.2.16 Ta có : $(x, y, z) \in D \cap D' \Leftrightarrow \begin{cases}x=2z+1\\ y=z-1\\ x=z+2\\ y=3z-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=0\\ z=1\end{cases}$.

Như vậy D và D' đồng phẳng và $D \cap D' = \{A\}$, trong đó $A\ (3, 0, 1)$.
Mặt phẳng P xác định bởi D và D' cũng xác định bởi A và $\left(\vec{u},\vec{u'}\right)$, trong đó $\vec{u}$ (tương tự: $\vec{u'}$) định phương D (tương tự : D').
Ta có thể chọn : $\vec{u}\ (2, 1, 1)$, $\vec{u'}\ (1, 3, 1)$. Vậy :

$$M\ (x, y, z) \in P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x-3 & 2 & 1\\ y & 1 & 3\\ z-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x-3)-y+5(z-1)=0.$$

◊ **Trả lời :** $2x + y - 5z - 1 = 0$.

1.2.17 Đường thẳng D đi qua $A(-1, 1, 0)$ và được định phương bởi $\vec{u}\ (1, 2, 1)$. Đường thẳng D' đi qua $A'\ (0, 0, 1)$ và được định phương bởi $\vec{u'}\ (1, 3, 0)$.

Rõ ràng rằng tồn tại một và chỉ một cặp mặt phẳng (P, P') thích hợp và rằng P (tương ứng : P') đi qua A (tương ứng : A') và được định phương bởi $\left(\vec{u},\vec{u'}\right)$. Ta có :

$$M\ (x, y, z) \in P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x+1 & 1 & 1\\ y-1 & 2 & 3\\ z & 1 & 0\end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\,(x+1)+(y-1)+z=0,$$

$$M\ (x, y, z) \in P' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x & 1 & 1\\ y & 2 & 3\\ z-1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow -3x+y+(z-1)=0.$$

◊ **Trả lời :** $P \mid 3x - y - z + 4 = 0$, $\quad P' \mid 3x - y - z + 1 = 0$.

1.2.18 Vì $\Delta // xOy$, nên Δ có một HPTD $\left\{\begin{array}{l} y = mx + p \\ z = h \end{array}\right|$, $(m, p, h) \in \mathbb{R}^3$, hoặc $\left\{\begin{array}{l} x = x_o \\ z = h \end{array}\right|$, $(x_o, h) \in \mathbb{R}^2$.

1) Nếu Δ $\left\{\begin{array}{l} y = mx + p \\ z = h \end{array}\right|$, thì : $\Delta \cap z'z \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{l} y = mx \\ z = h + p \\ x = y = 0 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow p = 0$,

và : $\Delta \cap \mathrm{D} \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{l} y = mx \\ z = h \\ y = x + 2 \\ z = x \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow mh = h + 2.$

$$\Delta \cap \mathrm{D} \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{l} y = mx \\ z = h \\ y = 2x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow h + 2 = m\frac{h+1}{2}.$$

Tiếp theo : $\left\{\begin{array}{l} mh = h + 2 \\ h + 2 = m\dfrac{h+1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} mh = h + 2 \\ 2mh = m(h+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} mh = h + 2 \\ m(h-1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m = 0,\ h = -1 \\ \text{hoặc} \\ h = 1,\ m = 3 \end{array}\right.$.

2) Cũng theo cách đó, nếu $\Delta \left\{\begin{array}{l} x = x_o \\ z = h \end{array}\right|$, thì : $\left\{\begin{array}{l} \Delta \cap z'z \neq \varnothing \\ \Delta \cap D \neq \varnothing \\ \Delta \cap D \neq \varnothing \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_o = 0 \\ h = x_o + 2 \\ h = 2x_o - 1 \end{array}\right|$, dẫn đến mâu thuẫn.

◊ **Trả lời :** Chỉ có đúng hai đường thẳng tương thích : $\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = -2 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} y = 3x \\ z = 1 \end{array}\right.$.

1.2.19 Nếu $D // xOy$ và $D \cap D_1 \neq \varnothing$, thì D bao hàm trong mặt phẳng $z = 1$, vậy D không gặp cả D_2 lẫn D_3. Như vậy, $D // xOy$, nên D nhận một HPTD $\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right.$, $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$. Ta có :

$$\mathrm{D} \cap D_1 \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 2x + 1 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow -b + q = 2(-a + p) + 1.$$

$$D \cap D_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -x + 3 \\ x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow p = -q + 3.$$

$$D \cap D_3 \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ y = x + 2 \\ x = az + b \\ y = bz + q \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow 2b + q = 2a + p + 2.$$

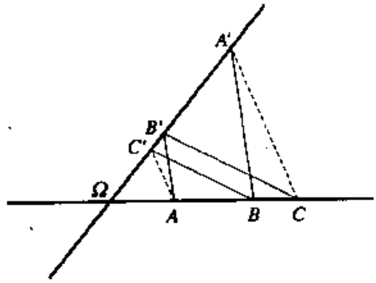
Một vectơ chỉ phương của D là $\vec{v}(a,b,1)$, vậy : $D // P \Leftrightarrow \vec{v} \in \vec{P} \Leftrightarrow a + b - 1 = 0$.

Cuối cùng, ta giải hệ phương trình với ẩn (a, b, p, q) : $\left\{\begin{array}{rcl} -b + q &=& 2(-a + p) + 1 \\ q &=& -p + 3 \\ 2b + q &=& 2a + p + 2 \\ a + b - 1 &=& 0. \end{array}\right.$

◊ **Trả lời :** Có một và chỉ một đường thẳng thích hợp : $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{18}z + \dfrac{13}{18} \\ y = \dfrac{11}{18}z + \dfrac{41}{18}. \end{array}\right.$

1.3.1 *Trường hợp thứ nhất : $(AB) \not\parallel (A'B')$*

Ta ký hiệu Ω là giao điểm của (AB) và $(A'B')$.



Cách thứ nhất :

Dùng định lý Thalès :

$$\frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega C}} = \frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega B}} \cdot \frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega C}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}} \cdot \frac{\overline{\Omega C'}}{\overline{\Omega B'}} = \frac{\overline{\Omega C'}}{\overline{\Omega A'}},$$

vậy $(AC') \parallel (CA')$.

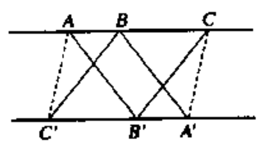
Cách thứ hai :

Trong hệ quy chiếu Descartes $(\Omega; \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'})$:

$$\Omega\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix},\ A'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ B'\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{b}\end{pmatrix},\ C'\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{c}\end{pmatrix},\ (b, c) \in (\mathbb{R}^*)^2.$$

Ta được các PTĐ : $(AC') \mid \ x + cy = 1$, $\quad (CA') \left| \frac{x}{c} + y = 1 \right.$,

vậy $(AC') \parallel (CA')$.



Trường hợp thứ hai : $(AB) \parallel (A'B')$

Vì $AB'A'B$ và $BC'B'C$ là những hình bình hành, nên ta có :

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CB}$, từ đó :

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$,

vậy $CA'C'A$ là một hình bình hành, $(AC') \parallel (CA')$.

1.3.2 *Trường hợp thứ nhất : $D \not\parallel D'$*

Trong một hệ quy chiếu thích hợp :

$A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix},\ A'\begin{pmatrix}0\\a'\end{pmatrix},\ B'\begin{pmatrix}0\\b'\end{pmatrix},\ C'\begin{pmatrix}0\\c'\end{pmatrix}$, trong đó $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}^*$ (trường hợp một trong sáu điểm là giao điểm của D và D' thì kết quả là hiển nhiên).

Ta có các PTĐ :

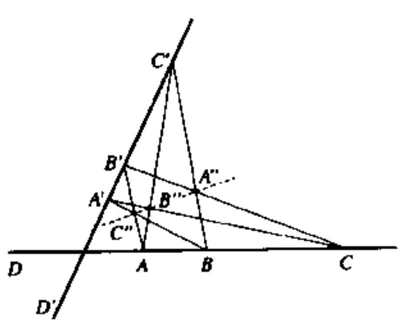
$$(AB') \left| \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1, \right. \ (BA') \left| \ \frac{x}{b} + \frac{y}{a'} = 1. \right.$$

Ta suy ra các tọa độ của C'' sau khi giải một hệ phương trình, với ký hiệu

$\alpha = \frac{1}{a},\ \beta = \frac{1}{b}, ..., \gamma' = \frac{1}{c'}$:

$$C''\left(\frac{\alpha' - \beta'}{\alpha\alpha' - \beta\beta'},\ \frac{\alpha - \beta}{\alpha\alpha' - \beta\beta'}\right).$$

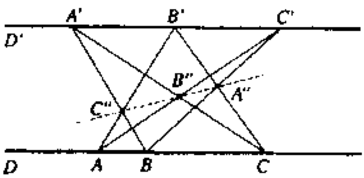
Tương tự với A'', B''.



Ta lập định thức :
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha'-\beta'}{\alpha\alpha'-\beta\beta'} & \dfrac{\beta'-\gamma'}{\beta\beta'-\gamma\gamma'} & \dfrac{\gamma'-\alpha'}{\gamma\gamma'-\alpha\alpha'} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\alpha'-\beta\beta'} & \dfrac{\beta-\gamma}{\beta\beta'-\gamma\gamma'} & \dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma\gamma'-\alpha\alpha'} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\alpha\alpha'-\beta\beta')(\beta\beta'-\gamma\gamma')(\gamma\gamma'-\alpha\alpha')} \begin{vmatrix} \alpha'-\beta' & \beta'-\gamma' & \gamma'-\alpha' \\ \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \alpha\alpha'-\beta\beta' & \beta\beta'-\gamma\gamma' & \gamma\gamma'-\alpha\alpha' \end{vmatrix},$$

định thức này bằng không vì tổng các cột bằng không.
Từ đó kết luận rằng A'', B'', C'' thẳng hàng.



Trường hợp thứ hai : $D \nparallel D$

Theo đề bài, $D \neq D'$. Trong một hệ quy chiếu Descartes thích hợp :

$A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}a'\\1\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}b'\\1\end{pmatrix}$, $C'\begin{pmatrix}c'\\1\end{pmatrix}$,

với $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.

Ta có các PTĐ : $(AB')\ |x + (a - b')y = a$, $(BA')\ | x + (b - a')y = b$.

Từ đó ta suy ra các tọa độ của C'' :

$C''\left(\dfrac{aa'-bb'}{a+a'-b-b'}, \dfrac{a-b}{a+a'-b-b'}\right)$ (nếu $a + a' - b - b' = 0$, thì $(AB') \,//\, (BA')$, loại).

Tương tự với A'',B''. Ta lập định thức :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{aa'-bb'}{a+a'-b-b'} & \dfrac{bb'-cc'}{b+b'-c-c'} & \dfrac{cc'-aa'}{c+c'-a-a'} \\ \dfrac{a-b}{a+a'-b-b'} & \dfrac{b-c}{b+b'-c-c'} & \dfrac{c-a}{c+c'-a-a'} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cdots}\begin{vmatrix} aa'-bb' & bb'-cc' & cc'-aa' \\ a-b & b-c & c-a \\ a+a'-b-b' & b+b'-c-c' & c+c'-a-a' \end{vmatrix},$$

định thức này bằng không vì tổng của các cột bằng không.
Từ đó kết luận rằng A'', B'', C'' thẳng hàng.

1.3.3 Trong một hệ quy chiếu Descartes $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$;

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix}1-\beta\\\beta\\0\end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix}0\\1-\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}0\\0\\\delta\end{pmatrix}$,

trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^*$ (do các trường hợp $M = A$, $N = B$... là hiển nhiên). Ta có :

$$(M, N, P, Q \text{ đồng phẳng}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma - \delta \begin{vmatrix} \alpha & 1-\beta & 0 \\ 0 & \beta & 1-\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + \delta(1 - \alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma(1 - \delta) - \delta(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 0.$$

Mặt khác : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$, $MB\begin{pmatrix}1-\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$, suy ra : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Tương tự ta có : $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}}=-\dfrac{\beta}{1-\beta}$, $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PD}}=-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}$, $\dfrac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=-\dfrac{1-\delta}{\delta}$.

Vậy : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\dfrac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\dfrac{\beta}{1-\beta}\,\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\,\dfrac{1-\delta}{\delta}=1$

và ta lại có được điều kiện đã thấy ở trên.

1.3.4 Trong hệ quy chiếu Descartes $(O;\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OC_1})$: $A_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$P_1\,|x+y+z=1$, $P_2\,|x+y+z=\alpha$, $P_3\,|x+y+z=\beta$,

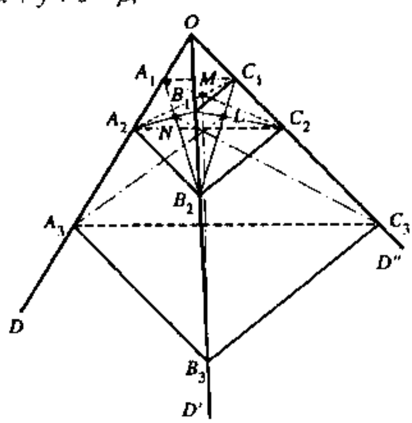
$A_2\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$, $B_2\begin{pmatrix}0\\\alpha\\0\end{pmatrix}$, $C_2\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$,

$A_3\begin{pmatrix}\beta\\0\\0\end{pmatrix}$, $B_3\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}$, $C_3\begin{pmatrix}0\\0\\\beta\end{pmatrix}$.

Ta có : $(L)=(B_1C_2)\cap(B_1C_1)=$

$(OB_1C_1)\cap(A_1B_1C_2)\cap(A_1B_2C_1)$.

Từ đó thu được các tọa độ của L bằng cách



giải hệ : $\begin{cases}x=0\\x+y+\dfrac{z}{\alpha}=1\\x+\dfrac{y}{\alpha}+z=1\end{cases}$, $L\begin{pmatrix}0\\\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\\\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\end{pmatrix}$. Ta suy ra một BDTS của (LA_3) : $\begin{cases}x=(1-\lambda)\beta\\y=\lambda+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\\z=\lambda\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\end{cases}$, $\lambda\in R$.

Tương tự, một BDTS của (MB_3) là $\begin{cases}x=\mu\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\\y=(1-\mu)\beta\\z=\mu\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\end{cases}$, $\mu\in R$, và một BDTS của (NC_3) là $\begin{cases}x=\nu\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\\y=\nu\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\\z=(1-\nu)\beta\end{cases}$,

$\nu\in\mathbb{R}$.

Vậy : $M(x,y,z)\in(LA_3)\cap(MB_3)\cap(NC_3)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=(1-\lambda)\beta=\mu\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=\nu\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\\y=\lambda\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=(1-\mu)\beta=\nu\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\\z=\lambda\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=\mu\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=(1-\nu)\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\mu=\nu\\(1-\lambda)\beta=\lambda\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\\x=y=z=(1-\lambda)\beta\end{cases}.$$

Nếu $\alpha+\beta+\alpha\beta\neq0$, thì ba đường thẳng (LA_3), (MB_3), (NC_3) có điểm chung là điểm có các tọa độ $x=y=z=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

Nếu $\alpha+\beta+\alpha\beta=0$, tức là $-\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, thì cả ba đường thẳng (LA_3), (MB_3), (NC_3) đều được định phương bởi $(1,1,1)$, do đó song song.

1.3.5 Trong hệ quy chiếu Descartes $(A;\ \overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3},\ \overrightarrow{A_1A_4})$:

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, trong đó $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Một PTD của mặt phẳng (MA_1A_2) là $\begin{vmatrix}x & 1 & \alpha\\ y & 0 & \beta\\ z & 0 & \gamma\end{vmatrix} = 0$, tức là $\gamma y - \beta z = 0$. Khi ký hiệu $B_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ta có :

$B_1 \in (A_3A_4) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{A_3B_1}, \overrightarrow{A_3A_4})$ phụ thuộc$) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ phụ thuộc $\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ z=-y+1\end{cases}$

Từ đó suy ra các tọa độ của B_1 bằng cách giải hệ $\begin{cases}z=0\\ z=-y+1\\ \lambda y - \beta z = 0\end{cases}$: $B_1\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\beta}{\beta+\gamma}\\ \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\end{pmatrix}$.

Theo cách tương tự ta cũng thu được các tọa độ của B_2, B_3, B_4 :

$$B_2\begin{pmatrix}0\\0\\ -\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-1}\end{pmatrix},\quad B_3\begin{pmatrix}-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-1}\\0\\0\end{pmatrix},\quad B_4\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\\0\end{pmatrix}.$$

Ta lập định thức :

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & -\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\beta}{\beta+\gamma} & 0 & 0 & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma} & -\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-1} & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\beta+\gamma)(\alpha+\beta-1)(\beta+\gamma-1)(\alpha+\beta)}\begin{vmatrix}0 & 0 & -\alpha & \alpha\\ \beta & 0 & 0 & \beta\\ \gamma & -\gamma & 0 & 0\\ \beta+\gamma & \alpha+\beta-1 & \beta+\gamma-1 & \alpha+\beta\end{vmatrix},$$

định thức này bằng không do các cột thỏa mãn : $C_4 = C_1 + C_2 - C_3$.

Ta kết luận : B_1, B_2, B_3, B_4 đồng phẳng.

1.3.6 Ta khảo sát điểm O được xác định bởi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{u}$ (rõ ràng O tồn tại và duy nhất), và ta xét trong hệ quy chiếu Descartes $(O;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC})$; các điểm O, A, B, C không đồng phẳng, vì nếu không $\vec{u}$ sẽ thuộc phương của mặt phẳng (ABC).

Trong hệ quy chiếu ấy : $A'\begin{pmatrix}1+\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}\beta\\ 1+\beta\\ \beta\end{pmatrix}$, $C'\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma\\ 1-\gamma\end{pmatrix}$.

Ta lập một PTD của mặt phẳng $(A'BC)$: $M(x, y, z) \in (A'BC) \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1-\alpha & -1-\alpha & 0\\ y-\alpha & 1-\alpha & -1\\ z-\alpha & -\alpha & 1\end{vmatrix} = 0.$

từ đó, sau khi tính toán : $(A'BC) \mid 3\alpha x - (1+\alpha)(x+y+z-1) = 0,$

Tương tự : $(AB'C) \mid 3\beta y - (1+\beta)(x+y+z-1) = 0,$

$(ABC') \mid 3\gamma z - (1+\gamma)(x+y+z-1) = 0.$

Ta khảo sát giao E của ba mặt phẳng đó :

$$M(x,y,z)\in E \Leftrightarrow \frac{3\alpha x}{1+\alpha}=\frac{3\beta y}{1+\beta}=\frac{3\gamma z}{1+\gamma}=x+y+z-1$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists\lambda\in\mathbb{R},\begin{cases}x=\lambda\dfrac{1+\alpha}{3\alpha}, y=\lambda\dfrac{1+\beta}{3\beta}, z=\lambda\dfrac{1+\gamma}{3\gamma}\\ \lambda\left(\dfrac{1+\alpha}{3\alpha}+\dfrac{1+\beta}{3\beta}+\dfrac{1+\gamma}{3\gamma}\right)-1=\lambda\end{cases}\right).$$

Nếu $\dfrac{1+\alpha}{3\alpha}+\dfrac{1+\beta}{3\beta}+\dfrac{1+\gamma}{3\gamma}\neq 1$, thì E là một đơn tử, đó là trường hợp cả ba mặt phẳng không song song với cùng một đường thẳng.

Nếu $\dfrac{1+\alpha}{3\alpha}+\dfrac{1+\beta}{3\beta}+\dfrac{1+\gamma}{3\gamma}=1$, thì $E=\varnothing$, vậy đường thẳng $(A'BC)\cap(AB'C)$ song song với mặt phẳng (ABC').

Cuối cùng, tồn tại một đường thẳng song song với cả ba mặt phẳng khi và chỉ khi

$$\frac{1+\alpha}{3\alpha}+\frac{1+\beta}{3\beta}+\frac{1+\gamma}{3\gamma}=1,\ \text{tức là}\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0.$$

1.4.1 1) Giả thiết tồn tại một phép vị tự - tịnh tiến f sao cho : $A'=f(A)$ và $B'=f(B)$.

Nếu $f=\mathrm{T}_{\vec{u}}$ $(\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}_2})$, thì $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=-\vec{u}+\overrightarrow{AB}+\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Nếu $f=\mathrm{H}_{\Omega,k}(\Omega\in\overrightarrow{\mathcal{A}_2}, k\in\mathbb{R}^*)$, thì $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{\Omega B'}-\overrightarrow{\Omega A'}=k\overrightarrow{\Omega B}-k\overrightarrow{\Omega A}=k\overrightarrow{AB}$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ phụ thuộc.

2) Ngược lại, giả thiết $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ phụ thuộc, tồn tại $k\in\mathbb{R}^*$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$.

Trường hợp thứ nhất : $k=1$

Phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AA'}}$ đưa A đến A', và B đến B', vì $B+\overrightarrow{AA'}=B+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}=B+\overrightarrow{BB'}=B'$.

Giả sử f là một phép vị tự - tịnh tiến đưa A đến A', B đến B'.

- Nếu $f=\mathrm{T}_{\vec{u}}$ $(\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}_2})$, thì $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$.
- Nếu $f=\mathrm{H}_{\Omega',k'}(\Omega'\in\mathcal{A}_2, k'\in\mathbb{R}^*)$, thì (xem 1)) $\overrightarrow{A'B'}=k'\overrightarrow{AB}$, vậy $k'=1$, $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_2}$ và $T_{\overrightarrow{AA'}}=f$.

Như vậy, tồn tại một và chỉ một phép vị tự - tịnh tiến đưa A đến A' và B đến B', và đó là $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AA'}}$.

Trường hợp thứ hai : $k\neq 1$

Ta ký hiệu Ω là điểm thuộc $\mathcal{A}_2$ xác định bởi $\overrightarrow{A\Omega}=\dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$, sao cho $\overrightarrow{\Omega A'}=k\overrightarrow{\Omega A}$; nói cách khác $\Omega=\mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix}A & A'\\ k & -1\end{bmatrix}$, (xem dưới đây, 1.5.1). Ta có : $\overrightarrow{\Omega B'}=\overrightarrow{\Omega A'}+\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{\Omega A}+k\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{\Omega B}$, vậy $\mathrm{H}_{\Omega,k}$ đưa A đến A' và B đến B'.

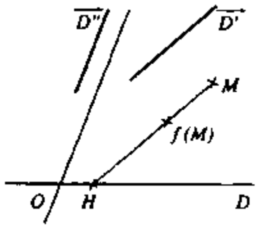
Giả sử f là một phép vị tự - tịnh tiến đưa A đến A' và B đến B'.

- Nếu $f=\mathrm{T}_{\vec{u}}$ $(\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}_2})$, thì (xem I) $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $k=1$, loại.
- Nếu $f=\mathrm{H}_{\Omega',k'}$ $(\Omega'\in\overrightarrow{\mathcal{A}_2}$, $k'\in\mathrm{R}^*)$, thì (xem 1)) $\overrightarrow{A'B'}=k'\overrightarrow{AB}$, vậy $k=k'$, rồi
$\begin{cases}\overrightarrow{\Omega'B'}= k\overrightarrow{\Omega'B}\\ \overrightarrow{\Omega B'}= k\overrightarrow{\Omega B}\end{cases}$, vậy $\overrightarrow{\Omega\Omega'}=k\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, $\Omega=\Omega'$.

Như vậy, tồn tại một và chỉ một phép vị tự - tịnh tiến đưa A đến A' và B đến B', và đó là $\mathrm{H}_{\Omega,k}$, trong đó Ω xác định bởi : $\overrightarrow{\Omega A'}=k\overrightarrow{\Omega A}$.

1.4.2 Xét $\vec{i} \in \vec{D} - \{\vec{0}\}$, $\vec{j} \in \vec{D''} - \{\vec{0}\}$, $O \in D$, và chọn hệ quy chiếu Descartes $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Tồn tại một và chỉ một $a \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{u}$ $(a, 1)$ định phương D'.

• Trước tiên ta xây dựng công thức của f trong $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Giả sử $M(x, y) \in \mathcal{A}_2$, $H(X, 0)$ là hình chiếu của M lên D song song với $\vec{D'}$, $f(M)(x', y')$.



Vì $\overrightarrow{MH} \in \vec{D'}$, nên :

$\begin{vmatrix} X-x & a \\ -y & 1 \end{vmatrix} = 0$, từ đó $X = x - ay$.

Sau đó :

$$\overrightarrow{Hf(M)} = \alpha \overrightarrow{HM},$$

vậy :

$$x' = x - ay + \alpha ay, \quad y' = \alpha y.$$

• Suy ra : $g \circ f(M)(x - ay + \alpha ay, \beta\alpha y)$.

• Ta hãy xét xem liệu có tồn tại $(b, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $g \circ f$ là phép co h có trục D, phương $\vec{\Delta}$ định phương bởi $\vec{v}(b,1)$, tỷ số γ; với mọi $M(x, y)$ thuộc $\mathcal{A}_2$, ta có : $h(M)$ $(x - by + \gamma by, \gamma y)$.

Vậy : $$g \circ f = h \Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x - by + \gamma by = x - ay + \alpha ay \\ \gamma y = \beta\alpha y \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\gamma - 1)b = (\alpha - 1)a \\ \gamma = \beta\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha\beta \\ b = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1} a. \end{cases}$$

◊ **Trả lời** : $g \circ f$ là một phép co trục D, tỷ số $\alpha\beta$.

1.4.3 Theo giả thiết, với mọi (M, N) thuộc $\mathcal{A}_2^2$, tồn tại một và chỉ một $\lambda_{M,N} \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda_{M,N} \overrightarrow{MN}.$$

Rõ ràng là tồn tại $(A, B) \in \mathcal{A}_2^2$ sao cho $A \neq B$; ta cố định một cặp (A, B) như vậy.

1) Giả sử $M \in \mathcal{A}_2$. Ta có : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(M)}$, từ đó :

$\lambda_{A,B} \overrightarrow{AB} = \lambda_{A,M} \overrightarrow{AM} - \lambda_{B,M} \overrightarrow{BM}$, và vì vậy: $(\lambda_{A,B} - \lambda_{A,M})\overrightarrow{AM}(\lambda_{A,B} - \lambda_{B,M})\overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Nếu $M \notin (AB)$ thì $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$ độc lập, suy ra $\lambda_{A,B} = \lambda_{A,M}$ (và $\lambda_{A,B} = \lambda_{B,M}$)

Nếu $M \in (AB)$ và $M \neq A$, thì tồn tại $C \in \mathcal{A}_2$ sao cho $C \notin (AB)$; do $C \notin (AB)$ và $M \notin (AC)$, nên theo lập luận vừa rồi, $\lambda_{A,C} = \lambda_{A,B}$ và $\lambda_{A,M} = \lambda_{A,C}$, suy ra $\lambda_{A,M} = \lambda_{A,B}$.

Như vậy ta đã chứng minh rằng : $\forall M \in \mathcal{A}_2$, $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \lambda_{A,B} \overrightarrow{AM}$.

2) Cho $(M, N) \in \mathcal{A}_2^2$. Ta có :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(A)f(N)} - \overrightarrow{f(A)f(M)} = \lambda_{A,B} \overrightarrow{AN} - \lambda_{A,B} \overrightarrow{AM} = \lambda_{A,B} \overrightarrow{MN},$$

từ đó (nếu $M \neq N$) : $\lambda_{M,N} = \lambda_{A,B}$.

Như vậy : $\forall (M, N) \in \mathcal{A}_2^2$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda_{A,B} \overrightarrow{MN}$.

Nếu $\lambda_{A,B} = 0$, thì f là ánh xạ hằng.

Nếu $\lambda_{A,B} = 1$, thì f là một phép tịnh tiến.

Nếu $\lambda_{A,B} \neq 0$ và $\neq 1$, thì f là một phép vị tự.

1.4.4 Giả sử A, B, C, D là bốn điểm thuộc $\mathcal{A}_3$ không đồng phẳng, A', B', C', D' là bốn điểm thuộc $\mathcal{A}_3$, $f: \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ là một ánh xạ afin. Ta có :

$$\begin{cases} A' = f(A) \\ B' = f(B) \\ C' = f(C) \\ D' = f(D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' = f(A) \\ \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \\ \vec{f}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A'D'}. \end{cases}$$

Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ nên tồn tại một và chỉ một ánh xạ tuyến tính φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho :

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'},\ \varphi(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'C'},\ \varphi(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{C'D'},$$

do đó tồn tại một và chỉ một ánh xạ afin thích hợp : đó là ánh xạ afin chuyển A thành A' và có thành phần tuyến tính là φ.

1.4.5 • Tập hợp các điểm bất biến của f là mặt phẳng $P \mid x + 2y + z - 2 = 0$.

• Với $M(x, y, z) \in \mathcal{A}_3$, ta tính các tọa độ của $\overrightarrow{Mf(M)}$: $\quad (2x + 4y + 2z - 4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ký hiệu $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{D} = \mathbb{R}\vec{u}$, p là phép chiếu lên P song song với $\vec{D}$.

Cho $M(x, y, z) \in \mathcal{A}_3$, $p(M)(X, Y, Z)$. Tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{Mp(M)} = \lambda\vec{u}$, suy ra :

$$X = x + \lambda, \quad Y = y - \lambda, Z = z + 2\lambda.$$

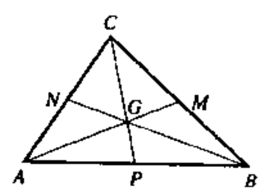
Rồi : $p(M) \in P \Leftrightarrow (x + \lambda) + 2(y - \lambda) + (z + 2\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -(x + 2y + z - 2)$.

Vậy : $\overrightarrow{Mp(M)} = -(x + 2y + z - 2)\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{Mf(M)}$,

và : $\overrightarrow{p(M)f(M)} = \overrightarrow{Mf(M)} - \overrightarrow{Mp(M)} = 3\overrightarrow{p(M)M}$.

◊ **Trả lời** : f là phép co trục là mặt phẳng $P \mid x + 2y + z - 2 = 0$, phương là đường thẳng vectơ sinh bởi $\vec{u}(1,-2,2)$, và tỷ số 3.

1.5.1 Do tính kết hợp của khái niệm tâm tỷ cự :

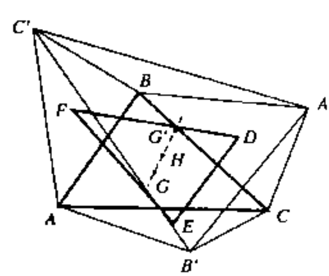


$$G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & M \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & N \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} C & P \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

suy ra $\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Đặc biệt, các trung tuyến (AM), (BN), (CP) đồng quy tại G.

1.5.2 $H = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} D & E & F \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$



$$= \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & C & A' & C & A & B' & A & B & C' \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & A' & B' & C' \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

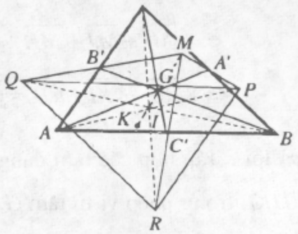
$$= \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} G & G' \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} G & G' \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

suy ra $2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{G'H} = \vec{0}$, tức là : $\overrightarrow{HG'} = -2\overrightarrow{HG}$.

1.5.3 a) Trước tiên ta chú ý rằng G là trọng tâm của $A'B'C'$, vì :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A' & B' & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & C & C & A & A & B \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = G.$$



Nếu ký hiệu h là phép vị tự tâm M và tỷ số 2 thì :

$$K = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} h(A') & h(B') & h(C') \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= h\left(\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A' & B' & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = h(G).$$

tức là : $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MG}.$

b) Vì $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{A'M} + 2\overrightarrow{MB'} = 2\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA},$ nên $ABPQ$ là hình bình hành, do đó AP và BQ có cùng trung điểm, ký hiệu là I.

Tương tự như vậy, AP và CR có cùng trung điểm I.

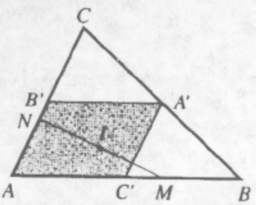
Ký hiệu J là trung điểm của GK. Ta có :

$$J = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} G & K \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & P & Q & R \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & P & B & Q & C & R \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} I & I & I \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = I.$$

Cuối cùng, bốn cặp điểm AP, BQ, CR, GK đều có cùng trung điểm.

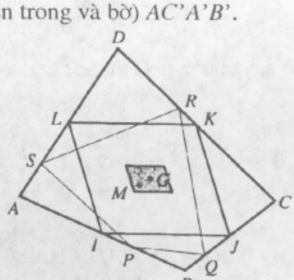
1.5.4 Trong hệ quy chiếu Descartes $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$:



$$M\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\ I\begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix},\ (x, y) \in [0;1]^2.$$

◊ **Trả lời** *:* Khi ký hiệu A', B', C' là các trung điểm theo thứ tự của BC, CA, AB, thì I vạch hình bình hành (bên trong và bờ) $AC'A'B'$.

1.5.5 Các điểm P, Q, R, S được đặc trưng bởi :



$$P = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.\quad Q = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & C \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

$$R = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} C & D \\ \gamma & 1-\gamma \end{bmatrix}.\quad S = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} D & A \\ \delta & 1-\delta \end{bmatrix}.$$

với $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ chạy khắp $[0\,;\,1]^4$.

Nếu ký hiệu M là tâm đẳng tỷ cự của $PQRS$, thì ta có :

$$M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ 1+\alpha-\delta & 1+\beta-\alpha & 1+\gamma-\beta & 1+\delta-\gamma \end{bmatrix},$$

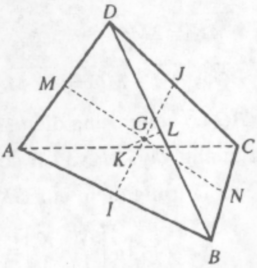
Ký hiệu I, J, K, L là các trung điểm theo thứ tự của AB, BC, CD, DA. Khi nhân đôi mọi số từ trong tâm tỷ cự trên, ta được :

$$M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} I & J & K & L \\ 2+\beta-\delta & 2+\gamma-\alpha & 2+\delta-\beta & 2+\alpha-\gamma \end{bmatrix}.$$

Ký hiệu $u = \alpha - \gamma$, $v = \beta - \delta$; khi $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ chạy khắp $[0 ; 1]^4$, thì (u, v) chạy khắp $[-1, 1]^2$, và ta có, nếu ký hiệu G là tâm đẳng tỷ cự của $ABCD$ (do đó cũng là của $IJKL$) :

$$M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} I & J & K & L \\ 2+v & 2-u & 2-v & 2+u \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}\right) + v\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MK}\right) + u\left(\overrightarrow{ML} - \overrightarrow{MJ}\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 8\overrightarrow{MG} + v\overrightarrow{KI} + u\overrightarrow{JL} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\left(v\overrightarrow{GI} + u\overrightarrow{GL}\right)$$

◊ **Trả lời** *:* Tập hợp các tâm đẳng tỷ cự của $PQRS$ là hình bình hành vị tự của hình bình hành $IJKL$ trong phép vị tự tâm G, tỷ số $\frac{1}{4}$, trong đó I, J, K, L theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA và G là tâm đẳng tỷ cự của $ABCD$.



1.5.6 Với ký hiệu $G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

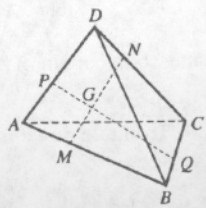
thì do tính kết hợp của khái niệm tâm tỷ cự, ta có :

$G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} I & J \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, vậy G là trung điểm của IJ.

Tương tự, G là trung điểm của KL, MN.

1.5.7 Vì $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)$, nên :

$(1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



Vậy : $M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$. Cũng như vậy :

$N = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} C & D \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}$, $P = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & D \\ 1-\mu & \mu \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} B & C \\ 1-\mu & \mu \end{bmatrix}$.

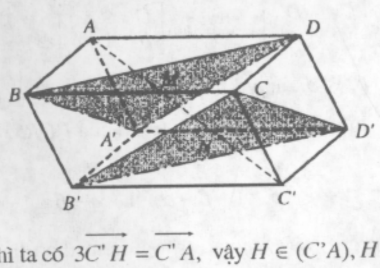
Nếu ký hiệu $G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ (1-\lambda)(1-\mu) & \lambda(1-\mu) & \lambda\mu & (1-\lambda)\mu \end{bmatrix}$,

thì do tính kết hợp của khái niệm tâm tỷ cự, ta được :

$$G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} M & N \\ 1-\mu & \mu \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} P & Q \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

Điều này chứng tỏ G thuộc các đường thẳng (MN) và (PQ), suy ra (MN) và (PQ) đồng phẳng.

1.5.8 Ta ký hiệu $G = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & D & A' \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in (BDA')$.



Ta có : $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

$= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$,

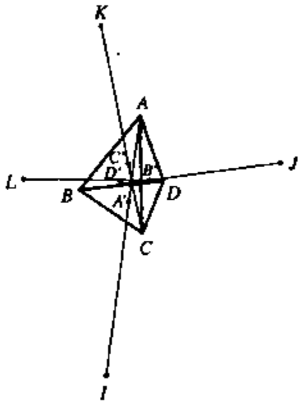
vậy $G \in (AC')$.

Điều này chứng tỏ : $G = M$.

Cũng vậy, khi ký hiệu $H = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B' & C' & D' \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, thì ta có $3\overrightarrow{C'H} = \overrightarrow{C'A}$, vậy $H \in (C'A)$, $H = N$.

Cuối cùng, vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{C'N} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'A}$, ta suy ra : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$.

1.5.9 Tồn tại $O \in \mathcal{A}_3$; ta ký hiệu $a = \overrightarrow{OA},...,d = \overrightarrow{OD}, i = \overrightarrow{OI},...,l = \overrightarrow{OL}$. Điều kiện đặt ra quy về hệ phương trình :



$$\begin{cases} 3a = j+k+l \\ 3b = i+k+l \\ 3c = i+j+l \\ 3d = i+j+k \end{cases},$$

hệ này chỉ có một nghiệm duy nhất là :

$$\begin{cases} i = -2a+b+c+d \\ j = a-2b+c+d \\ k = a+b+2c+d \\ l = a+b+c-2d \end{cases}.$$

Dựng I, J, K, L :

Với ký hiệu $A' = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B & C & D \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

thì theo những điều nói trên, ta có :

$I = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & A' \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, từ đó có vị trí của I trên (AA') :

$$\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AA'}.$$

Cũng vậy, $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DL} = 3\overrightarrow{DD'}$.

1.5.10 Đường thẳng D có thể xác định bởi hai điểm U, V. Vì A_1, A_2, A_3, A_4 không đồng phẳng, nên tồn tại các số thực $u_k, v_k (1 \le k \le 4)$ sao cho :

$$U = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_k \\ u_k \end{bmatrix}_{1\le k\le 4}, V = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_k \\ v_k \end{bmatrix}_{1\le k\le 4}, \sum_{k=1}^{4} u_k = \sum_{k=1}^{4} v_k = 1, (u_1, u_2, u_3, u_4) \ne (v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Cho $k \in \{1, ..., 4\}$. Vì $B_k \in D$, nên tồn tại $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$ sao cho :

$$B_k = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} U & V \\ \alpha_k & \beta_k \end{bmatrix} \text{ và } \alpha_k + \beta_k \ne 0.$$

Vậy ta có : $B_k = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \alpha_k u_1 + \beta_k v_1 & \alpha_k u_2 + \beta_k v_2 & \alpha_k u_3 + \beta_k v_3 & \alpha_k u_4 + \beta_k v_4 \end{bmatrix}$.

Vì $B_k \in P_k$, nên phải có : $\alpha_k u_k + \beta_k v_k = 0$.

Và vì (α_k, β_k) được định nghĩa sai khác một hệ tử nhân khác không, nên : $\alpha_k = v_k$ và $\beta_k = -u_k$.

Như vậy : $\beta_k = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} U & V \\ v_k & -u_k \end{bmatrix}$.

Cho O là một điểm bất kỳ thuộc $\mathcal{A}_3$. Ta có : $2\overrightarrow{OC_k} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OB_k}$, vậy :

$$2(v_k - u_k)\overrightarrow{OC_k} = (v_k - u_k)\overrightarrow{OA_k} + v_k\overrightarrow{OU} - u_k\overrightarrow{OV}.$$

Cộng lại, ta suy ra :

$$2\sum_{k=i}^{4}(v_k - u_k)\overrightarrow{OC_k} = \sum_{k=1}^{4} v_k\overrightarrow{OA_k} - \sum_{k=1}^{4} u_k\overrightarrow{OA_k} + \left(\sum_{k=1}^{4} v_k\right)\overrightarrow{OU} - \left(\sum_{k=1}^{4} u_k\right)\overrightarrow{OV}$$

$$= \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OV} = \vec{0}.$$

Vì $\sum_{k=1}^{4}(v_k - u_k) = \sum_{k=1}^{4} v_k - \sum_{k=1}^{4} u_k = 0$, và vì $(v_k - u_k)_{1\le k\le 4} \ne (0,0,0,0)$, nên ta suy ra rằng C_1, C_2, C_3, C_4 đồng phẳng.

1.5.11 Trong hệ quy chiếu Descartes $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$:

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{1+\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}\frac{1}{1+\beta}\\\frac{\beta}{1+\beta}\\0\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1+\gamma}\\\frac{\gamma}{1+\gamma}\end{pmatrix}, H\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{1+\delta}\end{pmatrix}$$

a) (E, F, G, H đồng phẳng) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1}{1+\beta} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\beta}{1+\beta} & \frac{1}{1+\gamma} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{1+\gamma} & \frac{1}{1+\delta}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha & 1 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 1 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 1\\ 1+\alpha & 1+\beta & 1+\gamma & 1+\delta\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma\delta = 1.$$

◊ **Trả lời** : $\alpha\beta\gamma\delta = 1$.

b) Lập PTĐ của các mặt phẳng :

$$(ECD) \mid (1+\alpha)x + \alpha y + \alpha z - \alpha = 0$$
$$(FDA) \mid \beta x - y = 0$$
$$(GAB) \mid -\gamma y + z = 0$$
$$(HBC) \mid x + y + (1+\delta)z - 1 = 0.$$

Suy ra : $(ECD) \cap (FDA) \cap (GAB) \cap (HBC) \neq \varnothing$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases}\beta x - y = 0\\ \gamma y - z = 0\\ (1+\alpha)x + \alpha y + \alpha z - \alpha = 0\\ x + y + (1+\delta)z - 1 = 0\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists x \in \mathbb{R},\ \begin{cases}(1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma)x - \alpha = 0\\ (1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta)x - 1 = 0\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta \neq 0\\ 1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma - \alpha(1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta) = 0\end{cases}$$

◊ **Trả lời** : $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ và $1 + \beta + \beta\gamma + \beta\gamma\delta \neq 0$.

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 2

2.1.1 Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho $u = (k)_{1\le k\le n}$ và $v = (\sqrt{k})_{1\le k\le n}$ trong $\mathbb{R}^n$ thông thường :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 = (u \cdot v)^2 \le \|u\|^2\|v\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

2.1.2 Áp dụng bất dẳng thức Cauchy-Schwarz cho $(\sqrt{k})_{1\le k\le n-1}$ và $\left(\frac{\sqrt{k}}{n-k}\right)_{1\le k\le n-1}$ trong $\mathbb{R}^{n-1}$ thông thường :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2}\right).$$

Vì $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k} \ge 1$ (lấy $k = n - 1$, $n \ge 2$), suy ra :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k} \le \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2 \le \frac{(n-1)n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2}.$$

2.1.3 Ký hiệu : $\lambda = \|u\| \ge 1$, $\mu = \|v\| \ge 1$, $U = \frac{1}{\lambda}u$, $V = \frac{1}{\mu}v$. Ta có :

$$\left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| \le \|u - v\| \Leftrightarrow \|U - V\|^2 \le \|\lambda U - \mu V\|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2U.V + 1 \le \lambda^2 - 2\lambda\mu U.V + \mu^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\lambda\mu - 1)(U.V - 1) \le (\lambda - \mu)^2,$$

và bất đẳng thức cuối cùng là đúng vì $\lambda\mu - 1 \ge 0$ và $U.V - 1 \le 0$ (bất đẳng thức Cauchy - Schwarz).

Khảo sát trường hợp đẳng thức : $\left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| = \|u - v\| \Leftrightarrow (\lambda\mu - 1)(U.V - 1) = \lambda - \mu = 0$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\lambda = \mu = 1\\ \text{hoặc}\\ \lambda = \mu \ \text{ và } \ U.V = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\|u\| = \|v\| = 1\\ \text{hoặc}\\ u = v.\end{array}\right.$$

◊ **Trả lời :** Có đẳng thức khi và chỉ khi : $\|u\| = \|v\| = 1$ hoặc $u = v$.

2.1.4 Giả sử (x, y) là một nghiệm. Khi đó ta có :

$$\begin{cases}(a+b)\wedge(x-y) = 0 \ \text{ và } \ (a+b)\,.\,(x-y) = 0\\ (a-b)\wedge(x+y) = 0 \ \text{ và } \ (a-b)\,.\,(x+y) = 0.\end{cases}$$

Từ đó, do $a + b \neq 0$ và $(a - b) \neq 0$, nên $x - y = x + y = 0$, và vì vậy $x = y = 0$.

Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời :** $\{(0, 0)\}$.

2.1.5 *a*) Hiển nhiên.

b) Cho $(a, b) \in (\mathbb{R}^3)^2$ sao cho $a.b = 0$.

Cách thứ nhất

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}^3$, vì ($b \wedge x \perp b$ và $(a.x)a \perp b$), nên $f_{a,b}(x) \perp b$. Vậy $\mathrm{I_m}(f_{a,b})$ thuộc mặt phẳng (vectơ) trực giao với b, vậy rank $(f_{a,b}) \le 2$.

Cách thứ hai

Vì trường hợp $b = 0$ là hiển nhiên, nên ta giả thiết $b \neq 0$.

Vì $f_{a,b}(b) = 0$, nên ta có $\mathrm{Ker}(f_{a,b}) \neq \{0\}$, từ đó, theo định lý về hạng :

$$\mathrm{rank}(f_{a,b}) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}\,(f_{a,b})) \le 2.$$

c) • Giả sử $x \in \mathbb{R}^3$; ký hiệu $y = f_{a,b}(x)$. Khi đó ta có :

$b.y = b((a.x)a + b\wedge x) = (a.x)(a.b)$, suy ra $a.x = \dfrac{b.y}{a.b}$, rồi :

$$a\wedge y = a\wedge((a.x)a + b\wedge x) = a\wedge(b\wedge x) = (a.x)b - (a.b)x = \frac{b.y}{a.b}b - (a.b)x,$$

vậy : $x = \dfrac{b.y}{(a.b)^2}b - \dfrac{1}{a.b}a\wedge y$, tức là $x = f_{\frac{1}{a.b}b, -\frac{1}{a.b}a}(y)$.

Điều này chứng tỏ : $f_{\frac{1}{a.b}b, -\frac{1}{a.b}a} \circ f_{a,b} = \mathrm{Id}_{\mathrm{R}^3}$.

• Ký hiệu $a' = \dfrac{1}{a.b}b$ và $b' = -\dfrac{1}{a.b}a$, ta có $a'.b' = -\dfrac{1}{a.b} \neq 0$, $\dfrac{1}{a'.b'}.b' = a$ và $-\dfrac{1}{a'.b'}a' = b$, từ đó, bằng cách áp dụng kết quả trên cho (a', b') thay vì (a, b) : $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = \mathrm{Id}_{\mathrm{R}^3}$.

Điều này chứng tỏ $f_{a,b}$ là song ánh và $f_{a,b}^{-1} = f_{a'b'}$.

◊ **Trả lời :** $f_{a,b}^{-1} = f_{\frac{1}{a.b}b, -\frac{1}{a.b}a}$.

2.1.6 *a*) Ánh xạ $\varphi : (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$, xác định bởi :

$$\forall (u, v, w) \in (\mathbf{R}^3)^3, \quad \varphi(u, v, w) = [f(u), v, w] + [u, f(v), w] + [u, v, f(w)]$$

hiển nhiên là tam tuyến tính, và thay phiên vì, chẳng hạn : $\varphi(u, v, w) = 0$.

Như vậy (xem Tập 5, 9.2.1) ; $\varphi \in A_3(E)$.

Theo Tập 5, 9.2.1, Định lý - Định nghĩa, $\dim(A_3(E)) = 1$, vậy tồn tại $\alpha \in \mathbf{R}$ (α phụ thuộc f) sao cho :

$$\forall (u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3,\ \varphi(u, v, w) = \alpha\,[u, v, w].$$

Giả sử $B = (e_1, e_2, e_3)$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ (chẳng hạn, cơ sở chính tắc). Ta có :

$$[f(e_1), e_2, e_3] = f(e_1).(e_2 \wedge e_3) = f(e_1).e_1,$$

và tương tự : $[e_1, f(e_2), e_3] = f(e_2).e_2$, $[e_1, e_2, f(e_3)] = f(e_3).e_3$.

Ta ký hiệu $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3} = \mathrm{Mat}_B(f)$. Vì B trực chuẩn, nên ta có :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}^2,\ a_{ij} = e_i.f(e_j).$$

Từ đó : $\varphi(e_1, e_2, e_3) = f(e_1).e_2 + f(e_2).e_2 + f(e_3).e_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f)$.

Cuối cùng : $\forall (u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $\varphi(u, v, w) = tr(f)[u, v, w]$.

b) Với mọi (u,v,w) thuộc $(\mathbb{R}^3)^3$ ta có :

$$(f(u)\wedge v + u\wedge f(v)).w = [f(u), v, w] + [u, f(v), w] = \mathrm{tr}(f)[u, v, w] - [u, v, f(w)]$$

$$= \mathrm{tr}(f)\,(u \wedge v).w - (u \wedge v).f(w).$$

Ta nhắc lại (xem Tập 6, 5.2.1) rằng liên hợp của f là tự đồng cấu f^* của $\mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad f(x).y = x.f^*(y).$$

Với mọi (u, v, w) thuộc $(\mathbb{R}^3)^3$, ta được :

$$(f(u)\wedge v + u\wedge f(v)).w = (\mathrm{tr}(f)\ u\wedge v).w - f^*(u\wedge v).w = ((\mathrm{tr}(f)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f^*)(u\wedge v)).w.$$

Từ đó, với mọi g thuộc $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}&(\forall(u,v)\in(\mathbf{R}^3)^2,\ f(u)\wedge v+u\wedge f(v)=g(u\wedge v))\\ &\Leftrightarrow (\forall(u,v,w)\in(\mathbf{R}^3)^3,\ ((\mathrm{tr}(f)\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}-f^*)(u\wedge v)).w=(g(u\wedge v)).w)\\ &\Leftrightarrow (\forall(u,v)\in(\mathbf{R}^3)^2,\ (\mathrm{tr}(f)\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}-f^*)(u\wedge v)=g(u\wedge v))\\ &\Leftrightarrow g=\mathrm{tr}(f)\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}-f^*.\end{aligned}$$

2.1.7 ◊ **Trả lời :**

a) $f=\mathrm{Rot}_{\vec{D},\theta}$, trong đó $\vec{D}$ được định phương và định hướng bởi (1, 1, 3), và $\theta=\mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$.

b) $f=\mathrm{Rot}_{\vec{D},\theta}\circ\mathrm{Ref}_P$, trong đó $\vec{D}$ được định phương và định hướng bởi (1, 1, 0), và $\theta=-\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P=D^{\perp}$.

c) $f=\mathrm{Ref}_P$, trong đó P là mặt phẳng trực giao với vectơ $(-\sqrt{1-x^2},x,1)$.

2.1.8 a) Tồn tại $(v, w)\in(\mathbb{R}^3)^2$ sao cho $\mathcal{B}'=(u, v, w)$ là một c.s.t.c.t. của $\mathbb{R}^3$. Mọi x thuộc $\mathbb{R}^3$ đều có thể phân tích thành $x=\alpha u+\beta v+\gamma w$, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$, và do

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

nên ta có : $f(x)=\alpha u+(\beta\cos\theta-\gamma\sin\theta)v+(\beta\sin\theta+\gamma\cos\theta)w$

$$=\alpha u+\cos\theta(\beta v+\gamma w)+\sin\theta(-\gamma v+\beta w).$$

Vì $x.u=\alpha$, $\beta v+\gamma w=x-(x.u)u$, và $u\wedge x=u\wedge(\alpha u+\beta v+\gamma w)=\beta w-\gamma v$, nên ta được :

$f(x)=(x.u)u+\cos\theta(x-(x.u)u)+\sin\theta(u\wedge x)=x+\sin\theta(u\wedge v)+(1-\cos\theta)u\wedge(u\wedge x)$,

theo công thức tích vectơ kép :

$$u\wedge(u\wedge x)=(u.x)u-(u.u)x.$$

b) Với mọi x thuộc $\mathbb{R}^3$: $f(x)=x+\frac{2t}{1+t^2}\frac{1}{t}u'\wedge x+\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{t}u'\wedge\left(\frac{1}{t}u'\wedge x\right)$

$$=x+\frac{2}{1+t^2}u'\wedge(x+u'\wedge x).$$

2.2.1 $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}.(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})-\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})$

$$=(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=BC^2.$$

2.2.2 $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}^2$

$$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}).\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}^2=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BD}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{EC}=0.$$

2.2.3. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong $\mathbb{R}^3$ thông thường :

$$(AB+BC+CD)^2 \le (AB^2+BC^2+CD^2)(1^2+1^2+1^2)=3(AB^2+BC^2+CD^2).$$

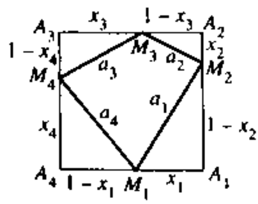
Mặt khác, theo bất đẳng thức tam giác và vì A, B, C, D không thẳng hàng :

$$AD < AB + BC + CD.$$

Từ đó : $AD^2 < 3(AB^2 + BC^2 + CD^2)$.

2.2.4 Ký hiệu A_i là các đỉnh của hình vuông, M_i là các đỉnh của tứ giác

$$(M_1 \in [A_4A_1]),\ x_i = M_iA_i\ (1 \le i \le 4).$$



Theo định lý Pythagore :

$$a_1^2 = x_1^2 + (1-x_2)^2 \ldots$$

Từ đó : $\sum_{i=1}^{4} a_i^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \sum_{i=1}^{4}(1-x_i)^2$.

Ta có : $\forall x \in [0\,;1],\ x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$

Vậy : $\forall x \in [0\,;1],\quad \frac{1}{2} \le x^2+(1-x)^2 \le 1,$

từ đó, bằng cách lấy tổng : $2 \le \sum_{i=1}^{4} a_i^2 \le 4.$

2.2.5 Với ký hiệu $\theta = \widehat{MBP}$, ta có : $MP = MB\sin\theta$ và $AC = BC\sin\theta$. Vì $MB \le AB < BC$ và vì $\sin\theta > 0$, nên kết luận : $MP < AC$.

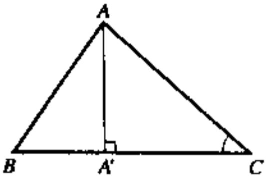
2.2.6 Theo bất đẳng thức tam giác : $\begin{cases} AM = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\| \le \frac{1}{2}(AB+AC) \\ \frac{1}{2}BC \le \frac{1}{2}(AB+AC), \end{cases}$

suy ra : $AM + \frac{1}{2}BC \le AB + AC.$

2.2.7 *a*) $c^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2 = a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2.$

b) Nếu ký hiệu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (BC), thì ta có :

$$S = \frac{1}{2}AA'.BC \text{ và } AA' = AC\sin\hat{C}.$$



Từ đó : $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}.$

Theo a) : $16S^2 = 4a^2b^2\sin\hat{C} = 4a^2b^2 - 4a^2b^2\cos^2\hat{C} = 4a^2b^2 - (c^2-a^2-b^2)^2$

$= (2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2) = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)$

$= (a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c) = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$

c) Khi ký hiệu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (BC), ta có :

$$AA' = AB\sin\widehat{ABC} = AC\sin\widehat{ACB},$$

từ đó : $c\sin\hat{B} = b\sin\hat{C}.$

2.2.8 Vì $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$ và vì $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{A} + \hat{B}$ đều khác $\frac{\pi}{2}$, nên :

$$\tan\hat{C} = -\tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\frac{\tan\hat{A} + \tan\hat{B}}{1 - \tan\hat{A}\tan\hat{B}},$$

từ đó có kết quả cần thiết.

2.2.9 (i) $\Rightarrow$ (iii) : Đã biết

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Tầm thường

(ii) $\rightarrow$ (i) :

Ta ký hiệu M là trung điểm của BC và A' là hình chiếu vuông góc của A lên (BC). Vì trong giả thiết các vai trò của A, B, C đối xứng nên chỉ cần chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\hat{A} = \hat{B}$.

1) Nếu $G = H$ hoặc $G = O$, thì $(AM) \perp (BC)$, vậy $AB = AC$.

2) Nếu $G = I$, thì $AB = \dfrac{BM}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \dfrac{MC}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = AC$.

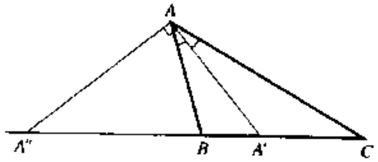
3) Nếu $H = O$, thì $OB = OC$ và $(OA') \perp (BC)$, vậy $A'B = A'C$, $A' = M$, $(AM) \perp (BC)$, $AB = AC$.

4) Nếu $H = I$, thì $AB = \dfrac{AA'}{\cos\frac{\hat{A}}{2}} = AC$.

5) Nếu $O = I$, thì vì $OA = OB$, ta có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, tức là $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2}$, vậy $\hat{A} = \hat{B}$.

2.2.10 *a*) Theo bài tập 2.2.7, *c*), áp dụng vào các tam giác $AA'B$ và $AA'C$:

$$\frac{BA'}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AB}{\sin\widehat{AA'B}} \quad \text{và} \quad \frac{CA'}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AC}{\sin\widehat{AA'C}}.$$



Vì $\widehat{AA'B} + \widehat{AA'C} = \pi$, ta suy ra :

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Cuối cùng, vì $A' \in [BC]$, ta kết luận :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = -\frac{c}{b}.$$

Cũng lập luận tương tự ta được :

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \frac{BA''}{CA''} = \frac{c}{b}.$$

b) • Xét $M = \mathrm{T}_{tc}\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix}$.

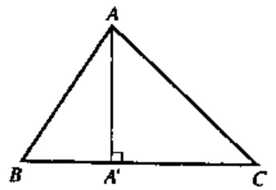
Theo a), $A' = \mathrm{T}_{tc}\begin{bmatrix} B & C \\ b & c \end{bmatrix}$, vậy $M = \mathrm{T}_{tc}\begin{bmatrix} A & A' \\ a & b+c \end{bmatrix} \in (AA')$.

Cũng vậy, $M \in (BB')$, $M \in (CC')$, từ đó $M = I$.

• Lập luận tương tự đối với I_A, I_B, I_C.

2.2.11 *a*) Đầu tiên ta giả thiết $\hat{B}$ và $\hat{C}$ nhọn.

Ta có : $\dfrac{AA'}{BA'} = \tan\hat{B}$ và $\dfrac{AA'}{CA'} = \tan\hat{C}$,



từ đó : $BA'\tan\hat{B} = CA'\tan\hat{C}$.

Vì $A' \in [BC]$, ta suy ra :

$$\tan\hat{B}\,\overrightarrow{BA'} + \tan\hat{C}\,\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{0},$$

tức là ; $A' = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} B & C \\ \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{bmatrix}$.

Lập luận tương tự nếu $\hat{B}$ hoặc $\hat{C}$ tù.

b) Dùng $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$, đầu tiên ta chứng tỏ $\tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C} \neq 0$;

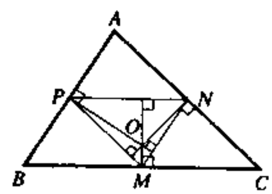
ký hiệu $H' = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \tan\hat{A} & \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{bmatrix}$.

Theo a) : $H' = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A & A' \\ \tan\hat{A} & \tan\hat{B} + \tan\hat{C} \end{bmatrix} \in (AA')$.

Cũng vậy, $H' \in (BB')$, $H' \in (CC')$, từ đó $H' = H$.

Cuối cùng : $H = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \tan\hat{A} & \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{bmatrix}$.

2.2.12 Ta ký hiệu M, N, P là các trung điểm theo thứ tự của BC, CA, AB. Rõ ràng là các đường trung trực của ABC là các đường cao của MNP, và rằng các góc $\hat{M}, \hat{N}, \hat{P}$ của MNP cũng tương ứng bằng các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ của ABC, vì $(MN) \mathbin{/\mkern-6mu/} (AB)$, $(NP) \mathbin{/\mkern-6mu/} (BC)$, $(PM) \mathbin{/\mkern-6mu/} (CA)$.



Theo bài tập 2.2.11 : $O = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} M & N & P \\ \tan\hat{M} & \tan\hat{N} & \tan\hat{P} \end{bmatrix}$.

Vì $M = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} B & C \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ..., ta suy ra :

$$O = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} B & C & C & A & A & B \\ \tan\hat{A} & \tan\hat{A} & \tan\hat{B} & \tan\hat{B} & \tan\hat{C} & \tan\hat{C} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \tan\hat{B} + \tan\hat{C} & \tan\hat{C} + \tan\hat{A} & \tan\hat{A} + \tan\hat{B} \end{bmatrix}.$$

2.2.13 *a*) Xem lời giải của bài tập 2.2.7,*b*).

b) Theo a) : $S^3 = \frac{1}{8}(abc)^2 \sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$.

Ánh xạ $f : \left]0;\pi\right[\underset{t \mapsto -\ln\sin t}{\longrightarrow} \mathbf{R}$ khả vi hai lần và : $\forall t \in \left]0;\pi\right[$, $f''(t) = \dfrac{1}{\sin^2 t} > 0$, vậy f lồi chặt.

Suy ra : $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = f\left(\dfrac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{3}\right) \le \frac{1}{3}\left(f(\hat{A}) + f(\hat{B}) + f(\hat{C})\right)$,

tức là $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \ge \sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$,

vậy : $S^3 \le \frac{1}{8}(abc)^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$, $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3}$.

Khảo sát trường hợp đẳng thức

Nếu $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$, thì vì f lồi chặt nên $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$, vậy ABC là tam giác đều.

Phần đảo là hiển nhiên.

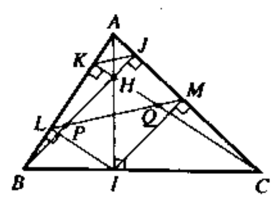
◊ **Trả lời :** Có đẳng thức khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

c) Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình cộng :

- $S\le\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$
- $S\le\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}((ab)(bc)(ca))^{\frac{1}{3}}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{ab+bc+ca}{3}$
- $S\le\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}((abc)^{\frac{1}{3}})^2\le\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$

Nếu đẳng thức xảy ra ở một trong ba đẳng thức trên, thì $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$, vậy (xem *b*)) ABC là tam giác đều. Phần đảo là hiển nhiên.

◊ **Trả lời :** Có đẳng thức khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.



2.2.14 *1*) Theo định lý Thalès :

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AI}}=\frac{\overline{AJ}}{\overline{AM}},$$

vậy, theo mệnh đề đảo của định lý Thalès :

$$(JK)\ //\ (LM).$$

2) Ta ký hiệu P (tương ứng : Q) là giao điểm của (LM) với (BJ) (tương ứng : (CK)). Theo định lý Thalès :

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CJ}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{CK}},$$

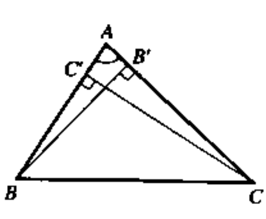
vậy, theo mệnh đề đảo : $(IQ)\ //\ (BK)=(AB)$.

Điều này chứng tỏ rằng $ILKQ$ là hình bình hành, vậy (LM) cắt $[IK]$ tại trung điểm của nó. Cũng vậy, $IMJP$ là một hình bình hành, nên (LM) cắt $[IJ]$ tại trung điểm của nó.

2.2.15 Xét trong hệ quy chiếu chuẩn tắc (nhưng nói chung không trực giao) $\mathcal{R}=(A;\vec{i},\vec{j})$, trong đó $\vec{i}=\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ và $\vec{j}=\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$.

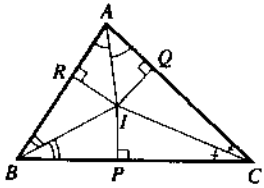
1) Ký hiệu B' và C' là các hình chiếu vuông góc theo thứ tự của B lên (AC) và của C lên (AB). Ta có :

$$\begin{cases}\overline{AB'}=AB\cos\hat{A}=c\cos\hat{A}\\ \overline{AC'}=AC\cos\hat{A}=b\cos\hat{A},\end{cases}$$



từ đó suy ra một PTD của D_1 :

$$D_1\ |\ cx+by-bc\cos\hat{A}=0.$$



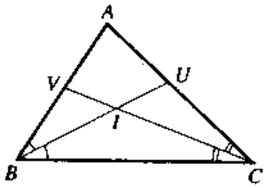
2) Ký hiệu P, Q, R là hình chiếu vuông góc của I theo thứ tự lên (BC), (CA), (AB).

Từ $\begin{cases} AQ = AR,\ BR = BP,\ CP = CQ \\ AR + RB = c,\ BP + PC = a,\ CQ + QA = b, \end{cases}$

ta suy ra $AQ = AR = p - a$ (trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$),

từ đó : $D_2 \mid x + y + a - p = 0$.

3) Ta ký hiệu U, V theo thứ tự là chân của các đường phân giác trong kẻ từ B và C.



Ta có (xem 2.2.7, c)) :

$$\frac{AU}{\sin\frac{\hat{B}}{2}} = \frac{BU}{\sin\hat{A}} \text{ và } \frac{CU}{\sin\frac{\hat{B}}{2}} = \frac{BU}{\sin\hat{C}},$$

từ đó : $b = AU + UC = \sin\frac{\hat{B}}{2}\left(\frac{1}{\sin\hat{A}} + \frac{1}{\sin\hat{C}}\right)BU$,

và : $AU = \dfrac{b}{1+\dfrac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{C}}} = \dfrac{b}{1+\frac{a}{c}} = \dfrac{bc}{a+c}$. Tương tự : $AV = \dfrac{bc}{a+b}$.

Ta suy ra : $D_3 \mid (a + b)x + (a + c)y - bc = 0$.

Rõ ràng là nếu $b = c$, thì ba đường thẳng D_1, D_2, D_3 song song.

Giả thiết $b \neq c$; khi đó D_1 và D_3 cắt nhau tại một điểm, ký hiệu là X.

Tổng của hai vế đầu của các PTĐ của D_1 và D_3 là : $2px + 2py - bc\ (1 + \cos\hat{A}\ )$.

Theo bài tập 2.2.7, a) : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\hat{A}$,

từ đó : $bc(1 + \cos\hat{A}\ ) = bc + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{1}{2}((b+c)^2 - a^2) = \frac{1}{2}(a+b+c)(b+c-a) = 2p(p-a)$.

Suy ra $X \in D_2$, vậy D_1, D_2, D_3 đồng quy.

Xem thêm chùm tuyến tính các đường thẳng, bài tập 1. 2. 5.

2.2.16 1) Vì $G_{12} = \mathbf{T}_{tc}\begin{bmatrix} A & B_1 & C_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $G_{11} = \mathbf{T}_{tc}\begin{bmatrix} A & B_1 & C_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ta có :

$$3\overrightarrow{G_{11}G_{12}} = \overrightarrow{G_{11}A} + \overrightarrow{G_{11}B_1} + \overrightarrow{G_{11}C_2} = -\overrightarrow{G_{11}C_1} + \overrightarrow{G_{11}C_2} = \overrightarrow{C_1C_2}.$$

Cũng vậy : $3\overrightarrow{G_{22}G_{21}} = \overrightarrow{C_2C_1}$.

Từ đó : $\overrightarrow{G_{11}G_{12}} = \overrightarrow{G_{21}G_{22}}$, và như vậy $G_{11}G_{12}G_{22}G_{21}$ là một hình bình hành.

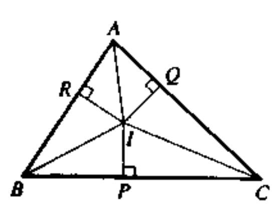
2) Ta có : $(H_{11}H_{12}) \perp (C_1C_2)$ và $(H_{21}H_{22}) \perp (C_1C_2)$, vậy $(H_{11}H_{12}) \mathbin{/\!/} (H_{21}H_{22})$.

Tương tự : $(H_{12}H_{22}) \mathbin{/\!/} (H_{11}H_{21})$, và như vậy $H_{11}H_{12}H_{22}H_{21}$ là một hình bình hành.

3) Cũng lập luận như ở 2) để chứng tỏ rằng $O_{11}O_{12}O_{22}O_{21}$ là một hình bình hành.

2.2.17 Ta ký hiệu P, Q, R là các hình chiếu vuông góc của I theo thứ tự lên (BC), (CA), (AB) ; vậy :

$$IP = IQ = IR.$$



Sử dụng định lý về cộng tính của các diện tích ta có :

$2\mathcal{A}(ARIQ) = 4\mathcal{A}(ARI)$

$= 2AR.RI = 2\left(AI\cos\dfrac{\hat{A}}{2}\right)\left(AI\sin\dfrac{\hat{A}}{2}\right) = IA^2\sin\hat{A}$.

Tương tự đối với hai diện tích khác. Từ đó suy ra :

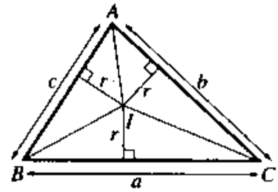
$2S = 2\mathcal{A}(ARIQ) + 2\mathcal{A}(BPIR) + 2\mathcal{A}(CQIP) = IA^2\sin\hat{A} + IB^2\sin\hat{B} + IC^2\sin\hat{C}$.

2.2.18 *a*) • Hệ thức $S = \frac{1}{2}ah_A = \frac{1}{2}bh_B = \frac{1}{2}ch_C$ đã biết.

• Ký hiệu I là tâm đường tròn nội tiếp. Áp dụng một định lý về cộng tính của các diện tích, ta có :

$$S = \mathcal{A}(IAB) + \mathcal{A}(IBC) + \mathcal{A}(ICA),$$

và $\mathcal{A}(IAB) = \frac{1}{2}ar\ldots$.



Từ đó : $2S = ar + br + cr$.

b) Theo a) $\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S}$ và $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}$.

Suy ra $$\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}.$$

c) Theo bất đẳng thức giữa các trung bình nhân và trung bình cộng :

$$\left(\frac{1}{h_A h_B h_C}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{h_A}\frac{1}{h_B}\frac{1}{h_C}\right)^{\frac{1}{3}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)=\frac{1}{3r}.$$

Từ đó : $$r^3 \le \frac{h_A h_B h_C}{27}.$$

Khảo sát trường hợp đẳng thức

Theo kết quả khảo sát trường hợp đẳng thức giữa các trung bình cộng và trung bình nhân, có đẳng thức trong bất đẳng thức vừa xét khi và chỉ khi $\frac{1}{h_A}=\frac{1}{h_B}=\frac{1}{h_C}$, điều tương đương với : $a = b = c$.

◊ **Trả lời :** Có đẳng thức khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

2.2.19 Ta có : $2\mathcal{A}(PAB) = \left\|\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}\right)\wedge\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{PM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$

$= PM.AB\ |\sin\theta|$, trong đó $\theta = <((PQ), (AB))\ [\pi]$.

Cũng vậy : $2\mathcal{A}(QAB) = QM.AB\ |\sin\theta|$. Từ đó : $\frac{\mathcal{A}(PAB)}{\mathcal{A}(QAB)}=\frac{MP}{MQ}$.

2.2.20 Ta có : $2\mathcal{A}(ABC) = \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\| = AB.BC\sin\widehat{ABC}$

và $$2\mathcal{A}\left(A'B'C'\right) = A'B'.B'C'\sin\widehat{A'B'C'}.$$

Vì $\sin\widehat{ABC}=\sin\widehat{A'B'C'}$, nên suy ra : $\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'B'C')}=\frac{AB.BC}{A'B'.B'C'}$.

2.2.21 Ký hiệu $t = \frac{BP}{BC}=\frac{CQ}{CA}=\frac{AR}{AB}$.

Theo bài tập 2.2.20, vì $\widehat{QAR}=\widehat{CAB}$, nên ta có : $\frac{\mathcal{A}(QAR)}{\mathcal{A}(CAB)}=\frac{QA.AR}{CA.AB}=t(1-t)$.

Cũng vậy : $$\frac{\mathcal{A}(RBP)}{\mathcal{A}(ABC)}=\frac{\mathcal{A}(PCQ)}{\mathcal{A}(BCA)}=t(1-t).$$

Từ đó, áp dụng một định lý về cộng tính của các diện tích :

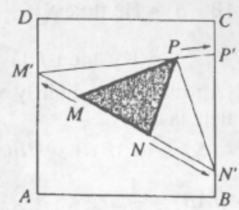
$$\mathcal{A}(PQR) = \mathcal{A}(ABC) - (\mathcal{A}(QAR) + \mathcal{A}(RBP) + \mathcal{A}(PCQ))$$

$$= (1 - 3t\,(1 - t))\mathcal{A}(ABC) = \left(\frac{1}{4}+3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)\mathcal{A}(ABC).$$

Suy ra : $\mathcal{A}(PQR) \ge \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABC)$, với đẳng thức khi và chỉ khi $t = \frac{1}{2}$.

◊ **Trả lời :** Có đẳng thức khi và chỉ khi P, Q, R là các trung điểm theo thứ tự của BC, CA, AB.

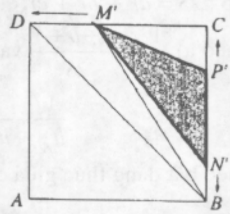
2.2.22 Giả sử $ABCD$ là một hình vuông cạnh a và MNP là một tam giác nằm bên trong hình vuông đó. Bằng cách kéo dài cạnh MN ít ra theo một cách, ta được các điểm M', N' nằm trên các cạnh của hình vuông sao cho :



$$\mathcal{A}(MNP) \le \mathcal{A}(M'NP) \le \mathcal{A}(M'N'P).$$

Rồi, bằng cách kéo dài cạnh $M'P$, ta được điểm P' nằm trên một cạnh của hình vuông và sao cho :

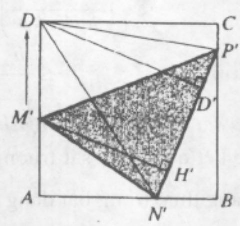
$$\mathcal{A}(M'N'P) \le \mathcal{A}(M'N'P').$$



1) Nếu hai trong các điểm M', N', P' nằm trên cùng một cạnh của hình vuông, chẳng hạn N' và P' trên $[BC]$, và M' trên $[CD]$, với B, N', P', C theo thứ tự đó, thì :

$$\mathcal{A}(M'N'P') = \frac{1}{2}M'C.N'P' \le \frac{1}{2}M'C.CB$$

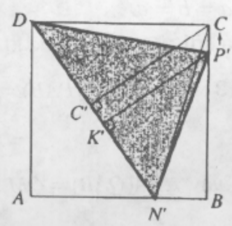
$$\le \frac{1}{2}DC.CB = \frac{a^2}{2}.$$



2) Nếu cả 3 điểm M', N', P' đều ở trên ba cạnh khác nhau của hình vuông, chẳng hạn $M' \in [DA]$, $N' \in [AB]$, $P' \in [BC]$, thì khi ký hiệu H' và D' là hình chiếu vuông góc theo thứ tự của M' và D trên $(N'P')$, ta có $M'H' \le DD'$, suy ra :

$$\mathcal{A}(M'N'P') = \frac{1}{2}M'H'.N'P'$$

$$\le \frac{1}{2}DD'.N'P' = \mathcal{A}(DN'P').$$



Tương tự, nếu ký hiệu K' và C' là các hình chiếu vuông góc theo thứ tự của P' và C trên (DN'), ta có $P'K' \le CC'$, suy ra :

$$\mathcal{A}(DN'P') = \frac{1}{2}PK'.DN'$$

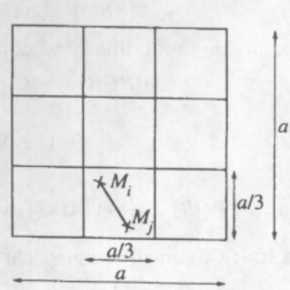
$$\le \frac{1}{2}CC'.DN' = \mathcal{A}\left(CDN'\right) = \frac{a^2}{2}.$$

Có thể cải biên các lập luận để chứng minh rằng một tam giác MNP có diện tích cực đại (bằng $\frac{a^2}{2}$) khi và chỉ khi một trong các cạnh của nó trùng với một cạnh của hình vuông, còn đỉnh thứ ba của MNP nằm trên cạnh đối diện của hình vuông.

◊ **Trả lời :** $\frac{a^2}{2}$.

2.2.23 Chia hình vuông có cạnh a thành chín hình vuông cạnh $\frac{a}{3}$, như lược đồ bên. Ít nhất một trong chín hình vuông đó chứa (ít nhất) hai trong số mười điểm đã cho, M_i, M_j $(i \ne j)$: đó là "nguyên lý ngăn kéo" ; vậy, bằng cách so sánh với đường chéo của hình vuông nhỏ, ta có :

$$M_iM_j \le \frac{a}{3}\sqrt{2}.$$



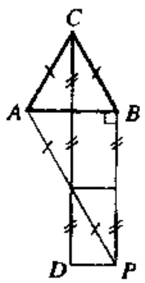
2.2.24 Tương tự như trong lời giải bài tập 2.2.23, khi chia hình vuông cạnh a thành chín hình vuông cạnh $\frac{a}{3}$, (ít nhất) một trong chín hình vuông đó chứa (ít nhất) 3 trong số 19 điểm đã cho (vì $19 > 9 \times 2$), và, theo bài tập 2.2.22, diện tích của tam giác đó $\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2$.

2.2.25 Ký hiệu $f : \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}, f(M) = MA^2+2MB^2-2MC^2$ và $P = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Ta có, với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$ (xem thêm 2.2.4,2) :

$$f(M) = (\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA})^2+2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PB})^2-2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PC})^2$$
$$= MP^2+2\overrightarrow{MP}.(\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})+PA^2+2PB^2-2PC^2$$
$$= MP^2+f(P).$$

Từ đó suy ra : $\forall M \in \mathcal{E}_2$, $\begin{cases} f(M) \geq f(P) \\ f(M)=f(P) \Leftrightarrow M=P \end{cases}$.



Nói cách khác, f có một biên dưới và đạt tới biên này tại một và chỉ một điểm, điểm P. Vấn đề còn là tính $f(P)$.

Theo trên, $f(P) = f(A) - AP^2$.

Vì $f(A)=2AB^2-2AC^2=0$,

và rằng $AP^2=(2\overrightarrow{CB})^2=4a^2$, ta suy ra : $f(P) = -4a^2$.

◊ **Trả lời** : $-4a^2$.

2.2.26 Ký hiệu $\alpha = \mathrm{Arctan}\,\lambda$ và, với $t \in \mathbb{R}$, $\theta = \mathrm{Arctan}\,t$. Vì $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{1}{\sqrt{3}}$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, ta có :

$$t^3-3t+\lambda(1-3t^2)=0 \Leftrightarrow \frac{t^3-3t}{3t^2-1}=\lambda$$

$$\Leftrightarrow \tan 3\theta = \tan\alpha \Leftrightarrow 3\theta \equiv \alpha\,[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\alpha}{3}\left[\frac{\pi}{3}\right].$$

Vậy các nghiệm là : $t_1 = \tan\frac{\alpha-\pi}{3}$, $t_2 = \tan\frac{\alpha}{3}$, $t_3 = \tan\frac{\alpha+\pi}{3}$; chú ý rằng $\frac{\alpha-\pi}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha+\pi}{3}$ thuộc $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Ký hiệu $\alpha_1 = \frac{\alpha-\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{\alpha}{3}$, $\alpha_3 = \frac{\alpha+\pi}{3}$.

Với $k \in [1, 2, 3]$, D_k có PTĐ : $\tan^2\alpha_k x - \tan\alpha_k y + a = 0$,

hoặc : $\sin\alpha_k x - \cos\alpha_k y + a\frac{\cos^2\alpha_k}{\sin\alpha_k} = 0$.

Một phương trình dạng chuẩn của D_k là :

$$x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_k\right)+y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_k\right)=a\frac{\cos^2\alpha_k}{\sin\alpha_k},$$

và do vậy : $\angle(\vec{i}, D_k) \equiv \alpha_k\,[\pi]$.

Từ đó suy ra : $\angle\,(D_1, D_2) \equiv \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$, và cũng tương tự : $\angle\,(D_2, D_3) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$ và $\angle\,(D_3, D_1) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

Cuối cùng, D_1, D_2, D_3 xác định một tam giác đều.

2.2.27 Trong hệ quy chiếu Descartes (nói chung là không trực giao cũng không chuẩn hóa) $\mathcal{R} = \left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, ta ký hiệu (x_n, y_n) là các tọa độ của M_n, $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} x_0 = 0, y_0 = 0, x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+3} = \frac{1}{3}\left(x_n + x_{n+1} + x_{n+2}\right) \\ y_{n+3} = \frac{1}{3}\left(y_n + y_{n+1} + y_{n+2}\right) \end{cases} \end{cases}$$

Các dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là những dãy truy hồi tuyến tính có hệ tử không đổi cấp 3.

Phương trình đặc trưng $r^3 - \frac{1}{3}(r^2 + r + 1) = 0$ với ẩn $r \in \mathbb{C}$, có ba nghiệm đơn :

$$r_1 = 1, r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}, r_3 = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy tồn tại $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ sao cho :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n \\ y_n = \beta_1 r_1^n + \beta_2 r_2^n + \beta_3 r_3^n. \end{cases}$$

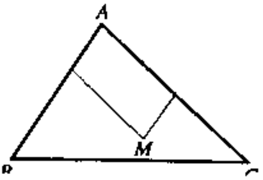
Vì $|r_2| = |r_3| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, $r_2^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ và $r_3^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, nên $x_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha_1$ và $y_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta_1$.

Ta tính α_1 và β_1 nhờ các điều kiện ban đầu, chú ý rằng r_2 và r_3 là nghiệm của phương trình $3r^2 + 2r + 1 = 0$:

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2 = 0 \end{cases} \right| \begin{matrix} \times 1 \\ \times 2 \\ \times 3 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow 6\alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 r_2 + \beta_3 r_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 r_2^2 + \beta_3 r_3^2 = 1 \end{cases} \right| \begin{matrix} \times 1 \\ \times 2 \\ \times 3 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow 6\beta_1 = 3 \Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

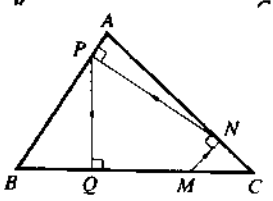
Như vậy, $x_n \underset{n\infty}{\to} \frac{1}{3}$ và $y_n \underset{n\infty}{\to} \frac{1}{2}$, nên $M_n \underset{n\infty}{\to} M$ xác định bởi :



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Nhận xét : $M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

◊ **Trả lời :** $M_n \xrightarrow[n\infty]{} M$, trong đó $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



2.2.28 Ký hiệu $D = (BC)$ và, với mọi M thuộc D, N là hình chiếu vuông góc của M lên (CA), P là hình chiếu vuông góc của N lên (AB) và Q là hình chiếu vuông góc của P lên (BC), và $f: \underset{M \mapsto Q}{D \to D}$.

Với mọi M_1, M_2 thuộc D ta có :

$N_1N_2 = M_1M_2 \cos\hat{C}$, $\quad P_1P_2 = N_1N_2 \cos\hat{A}$,

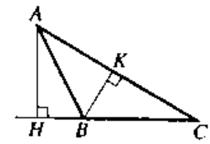
$Q_1Q_2 = P_1P_2 \cos\hat{B}$.

Từ đó : $d(f(M_1), f(M_2)) = kd(M, M_2)$, với ký hiệu $k = \cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$.

Vì $|k| < 1$, nên f là ánh xạ co. Theo định lý điểm bất động (D là một kgv định chuẩn hữu hạn chiều, 1 chiều), f có một và chỉ một điểm bất động, từ đó rút ra kết luận cần thiết.

2.2.29 Ta lập luận phản chứng : Giả thiết các điểm thuộc E không đều thẳng hàng. Tập hợp các độ dài của các đường cao các tam giác không bẹt được hình thành từ ba điểm của E có một phần tử nhỏ nhất. Vậy tồn tại $A, B, C \in E$ không thẳng hàng, sao cho đường cao AH (kẻ từ A trong ABC) là đường cao có độ dài nhỏ nhất trong các đường cao của các tam giác không bẹt hình thành từ ba điểm của E.

Trước tiên ta chú ý rằng H phải ở giữa B và C. Thật vậy, nếu H (trên (BC)) nằm ngoài $[BC]$, thì đường cao BK (kẻ từ B trong ABC) sẽ thỏa mãn $BK < AH$ (xem thêm bài tập 2.2.5), mâu thuẫn.

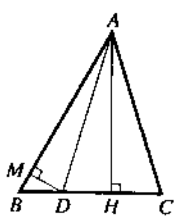


Theo giả thiết, tồn tại $D \in E$ sao cho B, C, D thẳng hàng. Vì $H \in [BC]$ và do các vai trò đối xứng của B và C, ta có thể giả thiết, chẳng hạn, rằng D và B đều ở về một bên đối với H.

Ta phân biệt hai trường hợp :

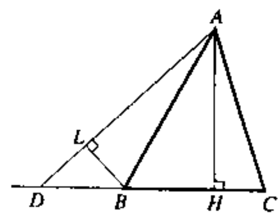
D ở giữa B và H :

Theo bài tập 2.2.5, đường cao DM (kẻ từ D trong ABD) thỏa mãn $DM < AH$, mâu thuẫn.



B ở giữa D và H :

Theo bài tập 2.2.5, đường cao BL (kẻ từ B trong ABD) thỏa mãn $BL < AH$, mâu thuẫn.



2.2.30 Nếu $O_1 = O_2$, thì $f = \mathrm{Rot}_{O_1,\theta_1+\theta_2}$.

Ta giả thiết $O_1 \neq O_2$. Tồn tại hai đường thẳng D_1, D_2 lần lượt đi qua O_1, O_2 sao cho

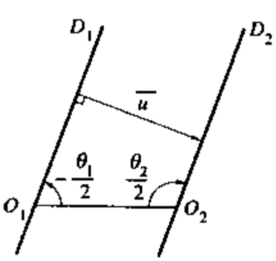
$$\mathrm{Rot}_{O_1,\theta_1} = \mathrm{Ref}_{(O_1O_2)} \circ \mathrm{Ref}_{D_1} \text{ và } \mathrm{Rot}_{O_2,\theta_2} = \mathrm{Ref}_{D_2} \circ \mathrm{Ref}_{(O_1O_2)},$$

từ đó : $f = \mathrm{Ref}_{D_2} \circ \mathrm{Ref}_{D_1}$.

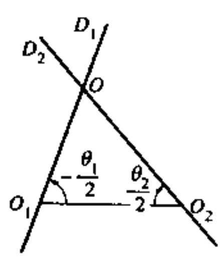
Hơn nữa : $\angle\big((O_1O_2), D_1\big) \equiv -\dfrac{\theta_1}{2}[\pi]$ và $\angle\big((O_1O_2), D_2\big) \equiv \dfrac{\theta_2}{2}[\pi]$.

Vậy : $\angle(D_1, D_2) \equiv \dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}[\pi]$.

1) Nếu $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, thì $D_1 \,//\, D_2$, và f là phép tịnh tiến theo vectơ $2\vec{u}$, trong đó $\vec{u}$ thỏa mãn : $D_2 = T_{\vec{u}}(D_1)$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{D_1}$.



2) Nếu $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, thì D_1 và D_2 cắt nhau tại một điểm, ký hiệu là O, và $f = \mathrm{Rot}_{O,\theta_1+\theta_2}$.



◊ **Trả lời :** *1*) Nếu $O_1 = O_2$, thì $f = \mathrm{Rot}_{O_1,\theta_1+\theta_2}$.

2) Nếu $O_1 \neq O_2$, ta ký hiệu D_1 và D_2 là các đường thẳng lần lượt đi qua O_1 và O_2 sao cho :

$$\angle((O_1, O_2), D_1) \equiv -\frac{\theta_1}{2}[\pi] \text{ và } \angle((O_1, O_2), D_2) \equiv \frac{\theta_2}{2}[\pi].$$

• Nếu $\theta_1+\theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, thì $f = \mathrm{T}_{2\vec{u}}$, trong đó $\vec{u}$ là vectơ thỏa mãn: $D_2 = \mathrm{T}_{\vec{u}}(D_1)$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{D_1}$.

• Nếu $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, thì $f = \mathrm{Rot}_{O,\theta_1+\theta_2}$, trong đó O là giao điểm của D_1 và D_2.

2.3.31 Theo việc khảo sát tích của hai phép phản chiếu (2.2.2) $\mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D = \mathrm{T}_{\vec{u}}$ và $\mathrm{Ref}_D \circ \mathrm{Ref}_{D''} = \mathrm{T}_{\vec{u}}$, vì Ref_D là đối hợp nên suy ra :

$$\mathrm{Ref}_{D'} = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D \quad \text{và} \quad \mathrm{Ref}_{D''} = \mathrm{Ref}_D \circ \mathrm{T}_{\vec{u}}.$$

2.3.32 Vì s_1, s_2, s_3 là đối hợp, nên nếu ký hiệu (1) là đẳng thức đang xét thì ta có :

$$(1) \Leftrightarrow s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2 \circ s_1.$$

1) Ta giả thiết $D_1 \,//\, D_2$

Với ký hiệu $\vec{u}$ là vectơ thỏa mãn $D_2 = \mathrm{T}_{\vec{u}}(D_1)$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{D_1}$, ta có $s_2 \circ s_1 = \mathrm{T}_{2\vec{u}}$ và $s_1 \circ s_2 = \mathrm{T}_{-2\vec{u}}$, từ đó

$$(1) \Leftrightarrow \mathrm{T}_{-2\vec{u}} \circ s_3 = s_3 \circ \mathrm{T}_{2\vec{u}}.$$

Ta phân tích : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, trong đó $\vec{v} \in \overrightarrow{D_3}$ và $\vec{w} \in \overrightarrow{D_3}^{\perp}$.

Nếu ký hiệu $D' = \mathrm{T}_{-\vec{u}}(D_3)$, thì theo bài tập 2.2.31 :

$$\mathrm{T}_{-2\vec{w}} \circ s_3 = \mathrm{Ref}_{D'} \text{ và } s_3 \circ \mathrm{T}_{2\vec{w}} = \mathrm{Ref}_{D'}.$$

Từ đó : $(1) \Leftrightarrow \mathrm{T}_{-2\vec{v}} \circ \left(\mathrm{T}_{-2\vec{w}} \circ s_3\right) = \left(s_3 \circ \mathrm{T}_{2\vec{w}}\right) \circ \mathrm{T}_{2\vec{v}} \Leftrightarrow \mathrm{T}_{-2\vec{v}} \circ \mathrm{Ref}_{D'} = \mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{T}_{2\vec{v}}$.

Vì $\vec{v} \in \overrightarrow{D'}$, $\mathrm{Ref}_{D'}$ giao hoán với $\mathrm{T}_{2\vec{v}}$ và $\mathrm{T}_{-2\vec{v}}$, do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \mathrm{T}_{-2\vec{v}} = \mathrm{T}_{2\vec{v}} \Leftrightarrow -2\vec{v} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \perp D_3 \Leftrightarrow D_3 \,//\, D_1.$$

2) Giả thiết $D_1 \not\parallel D_2$; ký hiệu A là giao điểm của D_1 và D_2, và $\alpha = \angle(D_1, D_2)\ [\pi]$.

Khi đó ta có $s_2 \circ s_1 = \mathrm{Rot}_{A,2\alpha}$ và $s_1 \circ s_2 = \mathrm{Rot}_{A,-2\alpha}$, từ đó :

$$(1) \Leftrightarrow \mathrm{Rot}_{A,-2\alpha} \circ s_3 = s_3 \circ \mathrm{Rot}_{A,2\alpha}.$$

• Đặc biệt, khi xét ảnh của A, và vì $-2\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$:

$$(1) \Rightarrow \mathrm{Rot}_{A,-2\alpha}\left(s_3(A)\right) = s_3(A) \Rightarrow s_3(A) = A \Rightarrow A \in D_3,$$

và như vậy D_1, D_2, D_3 đồng quy.

• Ngược lại, giả sử D_1, D_2, D_3 đồng quy tại một điểm A.

Các ánh xạ afin $f = \mathrm{Rot}_{A,-2\alpha} \circ s_3$ và $g = s_3 \circ \mathrm{Rot}_{A,2\alpha}$ thỏa mãn : $f(A) = g(A)\ (= A)$ và $\vec{f} = \mathrm{Rot}_{-2\alpha} \circ \overrightarrow{s_3} = \overrightarrow{s_3} \circ \mathrm{Rot}_{2\alpha} = \vec{g}$, do đó bằng nhau, từ đó suy ra (1).

2.2.33 • Rõ ràng là mọi phép đối xứng trượt là một phép phản dời hình của mặt phẳng.

• Cho f là một phép phản dời hình của mặt phẳng.

Giả sử $A \in \mathcal{E}_2$ (bất kỳ). Theo 1.4.2, Mệnh đề 6, tồn tại $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_2$ và g: $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ là ánh xạ afin thỏa mãn : $f = T_{\vec{v}} \circ g$ và $g(A) = A$.

Vì $\vec{g} = \vec{f}$, nên $\vec{g}$ là một phép đẳng cự nghịch của $\vec{\mathcal{E}}_2$, vậy $\vec{g} = \mathrm{Ref}_{\vec{\Delta}}$, trong đó $\vec{\Delta}$ là một trục (của $\vec{\mathcal{E}}_2$).

Ta ký hiệu Δ là trục của $\mathcal{E}_2$ đi qua A và được định phương về định hướng bởi $\vec{\Delta}$. Vậy $g = \mathrm{Ref}_\Delta$, nên $f = T_{\vec{v}} \circ \mathrm{Ref}_\Delta$.

Ta phân tích $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, trong đó $\vec{u} \in \vec{\Delta}$, $\vec{w} \in \vec{\Delta}^{\perp}$.

Theo bài tập 2.2.31, nếu ký hiệu $D = T_{\frac{\vec{w}}{2}}(\Delta)$, thì ta có $T_{\vec{w}} \circ \mathrm{Ref}_\Delta = \mathrm{Ref}_D$, và như vậy :

$f = T_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D$, trong đó $\vec{u} \in \vec{D}$.

2.3.34 Vì $\vec{u} \in \vec{D}$, nên Ref_D và $T_{\vec{u}}$ giao hoán, suy ra :

$$s' \circ s = T_{\vec{u}'} \circ (\mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D) \circ T_{\vec{u}}.$$

Khi ký hiệu $\vec{v}$ là vectơ thỏa mãn $D' = T_{\vec{v}}(D)$ và $\vec{v} \perp \vec{D}$, ta có : $\mathrm{Ref}_{D'} \circ \mathrm{Ref}_D = T_{2\vec{v}}$, suy ra :

$$s' \circ s = T_{\vec{u}' + 2\vec{v} + \vec{u}}.$$

◊ **Trả lời :** $s' \circ s = T_{\vec{u}' + 2\vec{v} + \vec{u}}$, trong đó $\vec{v}$ là vectơ thỏa mãn : $D' = T_{\vec{v}}(D)$ và $\vec{v} \perp \vec{D}$.

2.3.35 Vì các tam giác OAB và $OA'B'$ đồng dạng, nên $\dfrac{OB'}{A'B'} = \dfrac{OB}{AB}$, tức là :

$$OB'.AB = OB.A'B'.$$

Mặt khác, $OB' \leq OA$, từ đó :

$$OB'^2 + AB^2 \leq OA^2 + AB^2 = OB^2 < OB^2 + A'B'^2,$$

và do vậy : $(OB' + AB)^2 = (OB'^2 + AB^2) + 2OB'.AB < (OB^2 + A'B'^2) + 2OB.A'B' = (OB + A'B')^2$.

2.2.36 Ký hiệu M là trung điểm của AA'. Vì M và I là các trung điểm theo thứ tự của AA' và BA', nên $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Tương tự, $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

Khi ký hiệu S là phép đồng dạng tâm O biến A thành A' và B thành B' (xem các giả thiết), ta có $\overrightarrow{A'B'} = \vec{S}(\overrightarrow{AB})$, vậy :

$$\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\vec{S}(\overrightarrow{AB}) = \vec{S}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB})\right) = \vec{S}(\overrightarrow{MI}).$$

Ký hiệu S' là phép đồng dạng thuận tâm M và sao cho $\vec{S'} = \vec{S}$; khi đó ta có $J = S'(I)$. Mặt khác, vì các phép đồng dạng thuận bảo toàn các góc, nên $H' = S(H)$.

Từ đó suy ra rằng các tam giác OHH' và MIJ đồng dạng thuận. Đặc biệt :

$$\angle (IJ, MI) \equiv \angle (HH', OH)\ [\pi],$$

và do đó : $\angle(IJ, HH') \equiv \angle(IJ, MI) + \angle(MI, OH) + \angle(OH, HH') \equiv \angle(MI, OH) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

2.2.37 Rõ ràng là các ánh xạ đang xét là những phép đồng dạng nghịch.

Đảo lại, giả sử f là một phép đồng dạng nghịch. Tồn tại $k \in \mathbf{R}_+^*$ sao cho :

$$\forall M, N \in \mathcal{E}_2, \quad f(M)f(N) = kMN.$$

Nếu f là một phản-dời hình, thì (xem bài tập 2.2.33), f là một phép đối xứng-trượt.

Giả thiết f không phải là một phép phản dời hình, tức là $k \neq 1$.

Xét $B \in \mathcal{E}_2$, bất kỳ ; ký hiệu $g = \mathrm{H}_{B,k^{-1}} \circ f$.

Khi đó g là một phép phản dời hình ; tồn tại một đường thẳng D_1 và một vectơ $\vec{u} \in \vec{D}_1$ sao cho $g = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_{D_1}$, suy ra : $f = \mathrm{H}_{B,k} \circ g = (\mathrm{H}_{B,k} \circ \mathrm{T}_{\vec{u}}) \circ \mathrm{Ref}_{D_1}$.

Theo 1.4.2, 2), Mệnh đề - Định nghĩa 3, $\mathrm{H}_{B,k} \circ \mathrm{T}_{\vec{u}}$ là một phép vị tự $\mathrm{H}_{C,k}$, nên $f = \mathrm{H}_{C,k} \circ \mathrm{Ref}_{D_1}$.

Ta chứng tỏ rằng tồn tại $A \in \mathcal{E}_2$ và một đường thẳng D song song với D_1 sao cho :
$A \in D$ và $\mathrm{H}_{C,k} \circ \mathrm{Ref}_{D_1} = \mathrm{H}_{A,k} \circ \mathrm{Ref}_D$.

Ta chọn một hệ q.c.t.c.t. $(O;\vec{i},\vec{j})$ sao cho $O = C$ và $\vec{i} \in \vec{D}_1$; khi đó D_1 có một phương trình Descartes : $y = \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$).

Với $M(x, y, z)$, ta ký hiệu $M_1 = \mathrm{Ref}_{D_1}(M)$ và $M' = \mathrm{H}_{O,k}(M_1)$. Khi đó, $M_1(x, 2\mu - y)$, $M'(kx, k(2\mu - y))$.

Ta tìm $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho : $A(0, \lambda)$ và D ly $= \lambda$. Ta có :

$$M(x,y) \overset{\mathrm{Ref}_D}{\longmapsto} (x, 2\lambda - y) \overset{\mathrm{H}_{A,k}}{\longmapsto} (kx,\ k(2\lambda - y - \lambda) + \lambda).$$

Như vậy : $k(2\mu - y) = k(\lambda - y) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2k\mu}{1+k}$. Điều này chứng tỏ tồn tại A, D thích hợp. Ta cũng có thể giải bài toán bằng cách "chuyển sang số phức".

2.3.38 Sử dụng bài tập 2.3.37 :

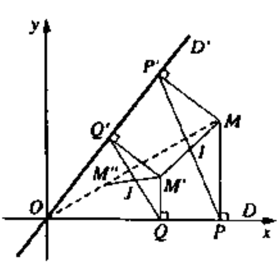
- Nếu $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_D$, trong đó $\vec{u} \in \vec{D}$, thì, $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ và Ref_D giao hoán :
$$f^2 = (\mathrm{T}_{\vec{u}})^2 \circ (\mathrm{Ref}_D)^2 = \mathrm{T}_{2\vec{u}}.$$
- Nếu $f = \mathrm{H}_{A,k} \circ \mathrm{Ref}_D$, $A \in D$, $k \in \mathbf{R}_+^*$, thì, $\mathrm{H}_{A,k}$ và Ref_D giao hoán :
$$f^2 = (\mathrm{H}_{A,k})^2 \circ (\mathrm{Ref}_D)^2 = \mathrm{H}_{A,k^2}.$$

Ta cũng có thể giải bài toán bằng "chuyển sang số phức".

2.3.39 Ta có thể chọn một hệ q.c.t.c.t. $(O;\vec{i},\vec{j})$ sao cho $D = xx'$; D' nhận một PTD : $x = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi ký hiệu $M(x, y)$, ta có $P(x, 0)$, rồi sau khi tính toán :

$$P'\left(\frac{\alpha(\alpha x + y)}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha x + y}{\alpha^2 + 1}\right),$$

và $M'\left(x' = \dfrac{\alpha(\alpha x + y)}{\alpha^2 + 1},\ y' = \dfrac{\alpha(x - \alpha y)}{\alpha^2 + 1}\right)$.



Ký hiệu $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\alpha = \angle(D, D')$.

Ta được $\begin{cases} x' = \cos\theta(x\cos\theta + y\sin\theta) \\ y' = \cos\theta(x\sin\theta - y\cos\theta) \end{cases}$, và như vậy :

$f = \mathrm{H}_{O,\cos\theta} \circ \mathrm{Ref}_\Delta$, trong đó Δ là đường thẳng đi qua O và có góc cực $\dfrac{\theta}{2}$ (Δ là một đường phân giác của (D, D')).

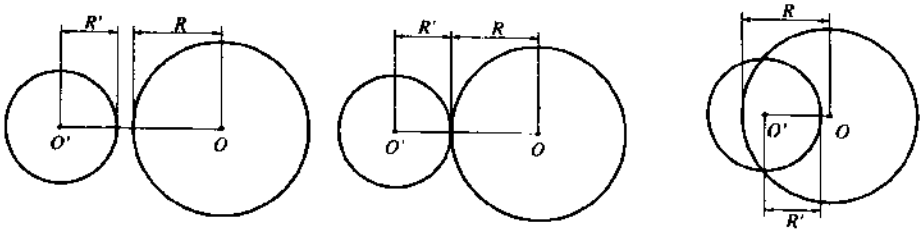
◊ **Trả lời :** f là một phép đồng dạng nghịch, $f = \mathrm{H}_{O,\cos\theta} \circ \mathrm{Ref}_\Delta$.

b) Xem thêm bài tập 2.2.38.

Vì $f = \mathrm{H}_{O,\cos\theta}$ và Ref_Δ giao hoán : $f^2 = (\mathrm{H}_{O,\cos\theta})^2 \circ (\mathrm{Ref}_\Delta)^2 = \mathrm{H}_{O,\cos^2\theta}$.

◊ **Trả lời :** $f^2 = \mathrm{H}_{O,\cos^2\theta}$ trong đó $\theta = \angle(D, D')$.

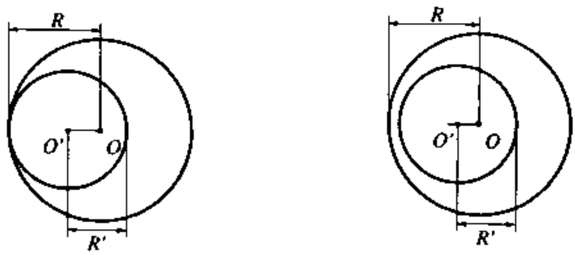
2.2.40 Ký hiệu $C = \mathrm{C}(O, R)$, $C' = \mathrm{C}(O', R')$, $d = d(O, O')$.
Việc khảo sát dễ dàng.



$d > R + R'$ — Các đường tròn ngoài nhau

$d = R + R'$ — Các đường tròn tiếp xúc ngoài

$|R - R'| < d < R + R'$ — Các đường tròn cắt nhau

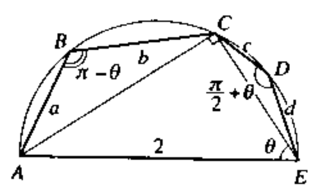


$d = |R - R'|$ — Các đường tròn tiếp xúc trong

$d < |R - R'|$ — Đường tròn này nằm trong đường tròn kia

2.2.41 Ký hiệu $\theta = \angle AEC$. Khi đó ta có :

$$\angle ABC = \pi - \theta \quad \text{và} \quad \angle CED = \frac{\pi}{2} + \theta.$$



Theo bài tập 2.2.7,*a*) :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos(\angle ABC)$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta.$$
$$CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD.DE\cos(\angle CDE)$$
$$= c^2 + d^2 + 2cd\sin\theta.$$

Mặt khác : $\begin{cases} b = BC < AC = 2\sin(\angle AEC) = 2\sin\theta \\ c = CD < CE = 2\cos(\angle AEC) = 2\cos\theta. \end{cases}$

Ta suy ra :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\theta + 2cd\sin\theta$$
$$= AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4.$$

2.2.42 Ta có thể hoán vị A, B, C, D sao cho các điểm này được sắp xếp kế tiếp theo thứ tự đó trên đường tròn Γ. Bốn điểm A, B, C, D chia đường tròn Γ thành bốn cung có độ dài tổng cộng là $2\pi R$. Vậy ít ra cũng có một trong số đó có độ dài $\geq \frac{2\pi R}{4}$, và dây cung trương nó có độ dài $\geq R\sqrt{2}$.

2.2.43 Định thức Δ đang xét là định thức của hệ tuyến tính thuần nhất

(S) $\qquad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\},\ (x_i^2 + y_i^2)u + x_i v + y_i w + h = 0,$

với ẩn $(u, v, w, h) \in \mathbb{R}^4$.

1) Nếu các M_i $(1 \le i \le 4)$ đồng chu, thì tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sao cho :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\},\ x_i^2 + y_i^2 + 2\alpha x_i + 2\beta y_i + \gamma = 0.$$

Khi đó hệ S sẽ có nghiệm $(1, 2\alpha, 2\beta, \gamma)$, vốn $\neq (0, 0, 0, 0)$, vậy $\Delta = 0$.

2) Ngược lại, giả thiết $\Delta = 0$. Khi đó hệ (S) có ít nhất một nghiệm $(u_0, v_0, \omega_0, h_0)$ khác với $(0, 0, 0, 0)$.

Nếu $u_0 = 0$, thì : $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\},\ v_0 x_i + w_0 y_i + h_0 = 0$, vậy, nếu hơn nữa $(v_0, \omega_0) \neq (0,0)$ thì cả bốn điểm M_i sẽ thẳng hàng trên đường thẳng có PTĐ $v_0 x + w_0 y + h_0 = 0$, mâu thuẫn ; và nếu $(v_0, w_0) = (0,0)$, thì $h_0 = 0$, cũng mâu thuẫn.

Vậy $u_0 \neq 0$. Nếu ký hiệu $\alpha = \dfrac{v_0}{2u_0}$, $\beta = \dfrac{w_0}{2u_0}$, $\gamma = \dfrac{h_0}{u_0}$, thì $(1, 2\alpha, 2\beta, \gamma)$ sẽ là nghiệm của (S).

Hơn nữa, vì, chẳng hạn, $x_1^2 + y_1^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + \gamma = 0$, nên ta có :

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = (x_1 + \alpha)^2 + (y_1 + \beta)^2 \geq 0,$$

vậy PTĐ $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ đúng là biểu thị một đường tròn, và cả bốn điểm M_i đều nằm trên đường tròn ấy.

2.2.44 Giả sử D là một trục của $\mathcal{E}_3$, O là một điểm thuộc D. Với $i \in \{1, ..., n\}$, xét điểm A_i thuộc D thỏa mãn $\overline{OA_i} = \dfrac{2i}{n}$, và đường tròn C_i tâm A_i, bán kính $R_i = 1$.

Với mọi (i, j) thuộc $\{1, ..., n\}^2$ thỏa mãn $i \neq j$, ta có

$$|R_i - R_j| < A_iA_j < R_i + R_j,$$

vì $|R_i - R_j| = 0$, $A_iA_j = \dfrac{2|j-i|}{n} \in \,]0\,;2[$, $R_i + R_j = 2$, và như vậy các đường tròn C_i và C_j cắt nhau.

2.2.45 Tính chất đang xét là hiển nhiên nếu M trùng với A, B hoặc C. Giả thiết M khác với A, B, C. Khi đó P, Q, R khác nhau từng cặp.

Vì M, P, Q, C đồng chu (cùng ở trên đường tròn đường kính CM), nên :

$$\angle(PQ, PM) \equiv \angle(CQ, CM)\ [\pi].$$

Tương tự, vì M, R, P, B đồng chu :

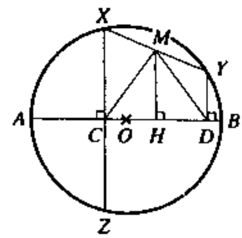
$$\angle\,(PM, PR) \equiv \angle\,(PM, BR)\ [\pi].$$

Từ đó : $\qquad (P, Q, R$ thẳng hàng$) \Leftrightarrow (PQ, PR) \equiv 0\ [\pi]$

$$\Leftrightarrow \angle\,(PQ, PM) + \angle\,(PM, PR) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \angle\,(CQ, CM) + \angle\,(BM, BR) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \angle\,(CA, CM) + \angle\,(BM, BA) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \angle\,(CA, CM) \equiv \angle\,(BA, BM)\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow (A, B, C, M \text{ đồng chu}) \Leftrightarrow M \in \Gamma.$$

2.2.46 Xét điểm Z, đối xứng của X qua (AB) ; như thế C là trung điểm của XZ và $Z \in \Gamma$. Khi đó $(MC) // (YZ)$, suy ra :

$$\angle MCX = \angle\ YZX = \frac{1}{2}\ \angle YOX.$$



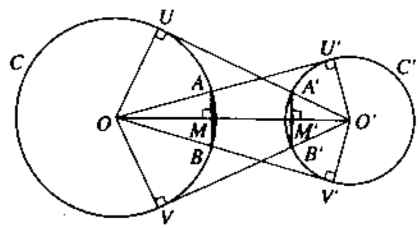
Vì XY không đổi, góc ở tâm $\angle XOY$ cũng vậy, nên

$\angle MCD = \dfrac{\pi}{2} - \angle MCX$ không đổi.

Cuối cùng, MCD cân tại M, vì hình chiếu vuông góc H của M trên (AB) là trung điểm của CD.

Ta kết luận rằng tam giác CMD luôn đồng dạng với một tam giác không đổi.

2.2.47 Ký hiệu U, V theo thứ tự là các điểm tiếp xúc của C với $(O'A')$ và $(O'B')$, tương tự với U', V', M và M' là các trung điểm của AB và $A'B'$, R và R' là bán kính của C và C'.

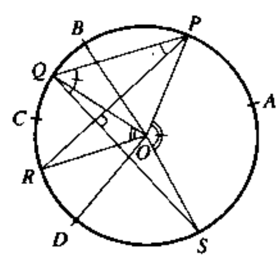


Vì các tam giác OMA và $OU'O'$ đồng dạng nên : $\dfrac{MA}{OA} = \dfrac{U'O'}{OO'}$, suy ra $AM = \dfrac{RR'}{d}$, trong đó $d = OO'$.

Tương tự, $A'M' = \dfrac{R'R}{d}$, và :

$$AB = A'B' = \frac{2RR'}{d}.$$

2.2.48 $\begin{cases} \angle RPQ = \dfrac{1}{2}\angle ROQ = \dfrac{1}{4}\angle DOB \\ \angle SQP = \dfrac{1}{2}\angle SOP = \dfrac{1}{4}(2\pi - \angle DOB) \end{cases}$



$$\Rightarrow \angle RPQ + \angle SQP = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (PR) \perp QS).$$

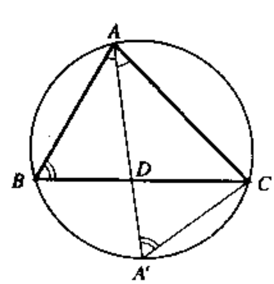
2.2.49 Các điểm O, P, M, I đồng chu, vậy $\angle\ OPI = \angle\ OMI$.

Tương tự : $\angle\ OQI = \angle\ ONI$. Nhưng OMN cân tại O, vậy $\angle\ OMI = \angle\ ONI$.

Từ đó suy ra : $\angle\ OPI = \angle\ OQI$, và do đó OPQ cân tại O. Vì I là trung điểm của AB, nên $(OI) \perp (AB)$. Trong tam giác OPQ cân tại O, đường cao OI kẻ từ O cũng là trung tuyến, vậy $IP = IQ$. Cuối cùng : $AP = IP - IA = IQ - IB = BQ$.

2.2.50 Ký hiệu D là chân của đường phân giác trong kẻ từ A. Theo tính chất của góc nội tiếp :

$\angle\ BAD = \angle\ A'AC$ và $\angle\ ABD = \angle\ AA'C$.



Vậy các tam giác ABD và $AA'C$ đồng dạng,

suy ra : $\dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{AD}{AC}$, tức là $bc = \beta_A\gamma_A$.

Cũng tương tự : $ca = \beta_B\gamma_B$ và $ab = \beta_C\gamma_C$,

vậy $(abc)^2 = \beta_A\beta_B\ \beta_C\ \gamma_A\gamma_B\gamma_C$.

2.2.51 *a*) Vì P' thuộc đường trung trực của OA' :

$\angle (A'P', A'O) \equiv \angle (OA', OP') \; [\pi]$.

Tương tự : $\angle (AP, AO) \equiv (OA, OP) \; [\pi]$.

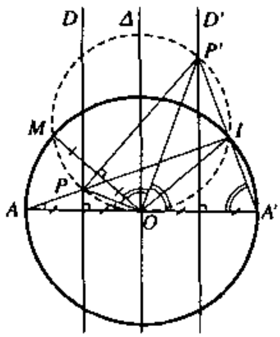
Mặt khác, vì các tam giác $P'OM$ và $P'OA'$ đối xứng nhau qua OP' :

$$\angle (OA', OP') \equiv \angle (OP', OM) \; [\pi].$$

Tương tự : $\angle (OA, OP) \equiv \angle (OP, OM) \; [\pi]$.

Từ đó suy ra : $\angle (IA, IA') \equiv \dfrac{\pi}{2} \; [\pi]$,

và do đó : $I \in C$.



b) Vì $\angle (OP, OP') \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ và vì $\angle (IP, IP') \equiv \dfrac{\pi}{2} \; [\pi]$ nên các điểm O và I cùng ở trên đường tròn đường kính PP'.

Cuối cùng : $\angle (MP, MP') \equiv -\angle (OP, OP') \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, vậy M thuộc đường tròn đó.

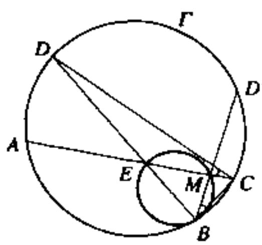
c) $\angle(OI, OA') \equiv 2 \angle(AI, AA') \equiv \angle (OA, OM) \; [\pi]$, vậy I là điểm đối xứng của M qua đường trung trực Δ của AA'.

2.2.52 Xét điểm M xác định bởi : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Khi đó ta có, chẳng hạn, $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM}$, vậy $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OK}$.

Từ đó suy ra $(IM) \perp (CD)$, vậy $M \in (II')$.

Bốn đường thẳng $(II'), (JJ'), (KK'), (LL')$ đi qua M.

2.2.53 Ký hiệu D' là điểm tại đó (BM) cắt lại Γ. Vì $\angle CBD' = \angle DCA$, nên ta có : $(DD') \,//\, (AC) = (ME)$. Từ đó suy ra rằng các tam giác BEM và BDD' vị tự nhau trong một phép vị tự H tâm B, và vì thế các đường tròn ngoại tiếp của chúng cũng vậy. Vì tâm của H (là điểm B) thuộc Γ, nên các đường tròn BME và Γ tiếp xúc tại B.



2.2.54 *a*) Ta có, modulo π :

$$\angle (A'B', A'C') \equiv \frac{1}{2}\angle(A'R, A'Q) \equiv (AR, AQ) \equiv \angle (AB, AC),$$

và tương tự khi hoán vị vòng quanh.

Vậy các tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng thuận.

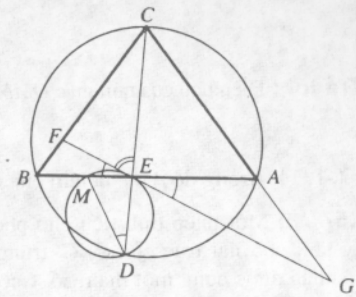
b) Ký hiệu I là giao điểm, khác với R, của các đường tròn ngoại tiếp AQR và BRP. Ta có, theo góc giữa đường thẳng modulo π :

$$\begin{aligned} \angle (IP, IQ) &\equiv \angle (IP, IR) + \angle (IR, IQ) \\ &\equiv \angle (BP, BR) + \angle (AR, AQ) \equiv \angle (BP, AQ) \equiv \angle (CP, CQ). \end{aligned}$$

Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp CPQ.

Khảo sát trường hợp các đường tròn ngoại tiếp AQR và BRP tiếp xúc.

2.2.55 Theo bài tập 2.2.19 :



$$\frac{EB}{EA}=\frac{\mathcal{A}(CEB)}{\mathcal{A}(CEA)}=\frac{\mathcal{A}(CEF)+\mathcal{A}(BEF)}{\mathcal{A}(CEG)-\mathcal{A}(AEG)}.$$

Vì $\angle\ CEF = \angle\ EMD$, $\angle\ BEF = \angle\ EDM$,

$\angle\ CEG = \pi - \angle\ EMD$, $\angle\ AEG = \angle\ EDM$,

nên ta có, theo bài tập 2.2.20 :

$$\frac{\mathcal{A}(CEF)}{\mathcal{A}(DME)}=\frac{CE.EF}{DM.ME}\cdot\frac{\mathcal{A}(BEF)}{\mathcal{A}(EDM)}=\frac{BE.EF}{ED.DM}.$$

$$\frac{\mathcal{A}(CEG)}{\mathcal{A}(EMD)}=\frac{CE.EG}{EM.MD}\cdot\frac{\mathcal{A}(AEG)}{\mathcal{A}(EDM)}=\frac{AE.EG}{ED.DM}.$$

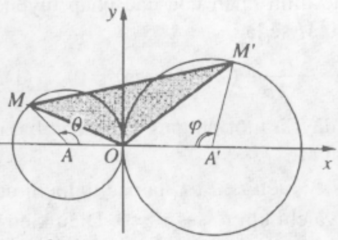
Từ đó suy ra : $\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{\dfrac{CE.EF}{DM.ME}+\dfrac{BE.EF}{ED.DM}}{\dfrac{CE.EG}{EM.MD}-\dfrac{AE.EG}{ED.DM}}=\dfrac{EF(CE.DE+BE.ME)}{EG(CE.DE-AE.ME)}.$

Mặt khác, vì A, B, C, D đồng chu và vì E thuộc các đoạn thẳng $[AB]$ và $[CD]$, nên :

$$CE\ .\ DE = AE\ .\ BE$$

Từ đó suy ra $\quad \dfrac{EB}{EA}=\dfrac{EF.BE.AM}{EG.AE.BM}$, và như vậy $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{EG}{EF}.$

2.2.56 Ta có thể chọn một hệ q.c.t.c.t. $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sao cho khi ký hiệu A và A' là các tâm theo thứ tự của C và C' thì : $A(-a, 0)$, $A'(b, 0)$, $a > 0$, $b > 0$.



Xét điểm $M \in C$, $\theta = \angle\ (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$,

$\varphi = \angle\ (\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'M})\ [2\pi]$; vậy :

$M(-a + a\cos\theta, a\sin\theta)$, $M'(b - b\cos\varphi, -b\sin\varphi)$, $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Ta có : $\qquad 2\mathcal{A}(OMM') = \left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{OM'}\right\| = ab|\sin\varphi - \sin\theta + \sin(\theta - \varphi)|.$

Ánh xạ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, xác định bởi $F(\theta, \varphi) = (\sin\varphi - \sin\theta + \sin(\theta - \varphi))^2$, thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$. Ta tìm các điểm dừng của F, ngoài những điểm tại đó F triệt tiêu :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\theta}(\theta,\varphi)=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)=0\\ F(\theta,\varphi)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos\theta+\cos(\theta-\varphi)=0\\ \cos\varphi-\cos(\theta-\varphi)=0\\ F(\theta-\varphi)\neq 0\end{cases}\qquad (S)$$

Ta có : (S) $\Rightarrow \cos\theta = \cos\varphi \Rightarrow \begin{cases}\theta\equiv\varphi\ [2\pi]\\ \text{hoặc}\\ \theta\equiv-\varphi[2\pi]\end{cases}$

Nếu $\theta = \varphi$, thì : (S) $\Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta \equiv \varphi \equiv 0\ [2\pi] \Rightarrow \mathcal{A}(OMM') = 0$, loại.

Nếu $\theta = -\varphi$, thì : (S) $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\theta\equiv\ 2\theta\,[2\pi]\\ \text{hoặc}\\ \theta\equiv-2\theta[2\pi]\end{array}\right. \Leftrightarrow \theta\equiv 0\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right].$

Vậy, nếu F có một cực đại, thì tất yếu là tại $\left(\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ hoặc $\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$, modulo $(2\pi, 2\pi)$. Mặt khác, vì F là $(2\pi, 2\pi)$ - tuần hoàn và liên tục, nên nếu xét thu hẹp của F trong tập compac $[-\pi\,;\pi]^2$, thì F bị chặn trên và đạt tới biên trên.

Cuối cùng : $F\left(\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}ab.$

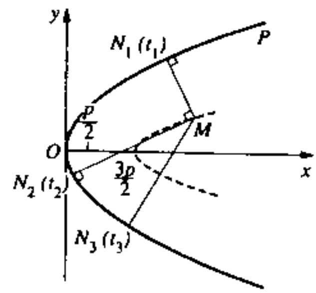
◊ **Trả lời :** Diện tích của tam giác OMM' cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} \angle(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OM}) \equiv \varepsilon\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ \angle(\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'M'}) \equiv -\varepsilon\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

$\varepsilon \in \{-1, 1\}$, (trong đó A, A' là tâm của C, C'), và khi đó bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

2.2.57 *a*) Một phép tịnh tiến cho phép làm trùng các đỉnh của C, C'. Sau đó một phép quay làm cho hai trục của C, C' trùng nhau. Tiếp đến một phép vị tự tâm tại đỉnh cho phép nhận được cùng một tham số. Cuối cùng C và C' đồng dạng thuận.

b), c), : Tương tự như a).

2.2.58 Giả sử $t \in \mathbb{R}$, $N\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$.



Một vectơ tiếp xúc với P tại N là (t, p), vậy một PTD của pháp tuyến với P tại N sẽ là :

$$t\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + p(y - t) = 0 \ .$$

Giả sử $M(X,Y) \in \mathcal{E}_2$. Vậy phương trình theo t xác định chân của các pháp tuyến với P kẻ từ M sẽ là :

$$-\frac{t^3}{2p} + (X - p)t + pY = 0 \qquad (1).$$

Do đây là một phương trình bậc ba, nên tùy theo vị trí của M, sẽ có ba pháp tuyến với P kẻ từ M.

Khi ký hiệu t_1, t_2, t_3 là các nghiệm của (1), thì các pháp tuyến với P tại N_1, N_2 trực giao khi và chỉ khi $t_1t_2 + p^2 = 0$. Điều kiện này quy về :

$$\exists(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3,\ (t_1t_2 = -p^2,\ t_1 + t_2 + t_3 = 0,\ t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -2p(X - p),\quad t_1t_2t_3 = 2p^2Y).$$

Thay t_3 bởi $-2Y$ và $t_1 + t_2$ bởi $2Y$, thì điều kiện trên sẽ quy về : $4Y^2 = 2pX - 3p^2$.

Ngược lại, với mọi $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $4Y^2 = 2pX - 3p^2$, hệ $\left\{\begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2Y \\ t_1t_2 = -p^2 \end{array}\right|$, với ẩn $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, sẽ có ít nhất một nghiệm vì $(2Y)^2 - 4(-p^2) > 0$.

◊ **Trả lời :** Parabol có phương trình $y^2 = \dfrac{p}{2}\left(x - \dfrac{3p}{2}\right)$.

2.2.59 Giả sử $M\left(\dfrac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$, $N\left(\dfrac{\mu^2}{2p}, \mu\right)$ là hai điểm thuộc P sao cho O, M, N phân biệt từng cặp. Một vectơ tiếp xúc với P tại M là (λ, p), vậy pháp tuyến với P tại M đi qua N khi và chỉ khi : $\lambda\left(\dfrac{\mu^2}{2p} - \dfrac{\lambda^2}{2p}\right) + p(\mu - \lambda) = 0$, tức là : $\lambda(\lambda + \mu) + 2p^2 = 0$.

Khi đó ta có : $\lambda + \mu = -\dfrac{2p^2}{\lambda}$ và $\mu - \lambda = -\dfrac{2p^2}{\lambda} - 2\lambda$, suy ra :

$$MN^2 = \left(\frac{\mu^2 - \lambda^2}{2p}\right)^2 + (\mu - \lambda)^2$$

$$= \frac{(\mu - \lambda)^2}{4p^2}\left((\lambda + \mu)^2 + 4p^2\right) = 4\frac{(\lambda^2 + p^2)^3}{\lambda^4}.$$

Khảo sát sự biến thiên của $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_3$, $\lambda \mapsto \frac{4(\lambda^2+p^2)}{\lambda^4}$

λ	0		$p\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$f(\lambda)$		↘		↗	

◊ **Trả lời :** $3p\sqrt{3}$.

2.2.60 Ký hiệu $\Omega(\alpha, \beta)$, vậy $\Gamma | (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \beta^2$.

Các đường tròn C và Γ cắt nhau khi và chỉ khi :

$$\left|R - |\beta|\right| \le \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \le R + |\beta|,$$

tức là : $$R^2 - 2R|\beta| \le \alpha^2 \le R^2 + 2R|\beta| \qquad (1).$$

Giả thiết (1) được thỏa mãn, và ký hiệu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ là những điểm thuộc $C \cap \Gamma$.

Các tiếp tuyến với C và Γ tại M_1 tạo thành một góc bằng $\frac{\pi}{4}$ khi và chỉ khi

$$\angle(OM_1, \Omega M_1) \equiv \pm\frac{\pi}{4}[\pi], \text{ tức là :}$$

$$\left|\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{\Omega M_1}\right| = \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| \left\|\overrightarrow{\Omega M_1}\right\| \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

điều kiện này quy về : $$R^2 - \alpha x_1 - \beta y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}R|\beta|.$$

Vậy C và Γ cắt nhau theo một góc $\frac{\pi}{4}$ khi và chỉ khi tồn tại $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn :

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2, \quad (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 = \beta^2, \quad R^2 - \alpha x_1 - \beta y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}R|\beta|.$$

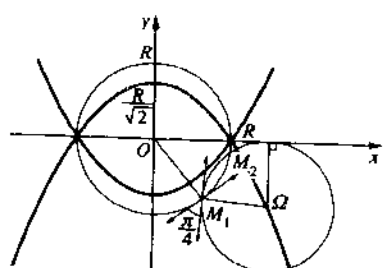
Sau khi khử x_1, y_1 ta có : $$2\left(R^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}R|\beta|\right) = \alpha^2 + R^2,$$

tức là : $$\alpha^2 + R\sqrt{2}|\beta| - R^2 = 0 \qquad (2).$$

Ta chú ý rằng : (2) ⇒ (1).

◊ **Trả lời :** Hợp của hai parabol có các phương trình Descartes :

$$y = \pm\frac{1}{R\sqrt{2}}(x^2 - R^2).$$



2.2.61 Giả sử $A\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right) \in P$, $B\left(\mu, \frac{\mu^2}{2q}\right) \in Q$,

$\overrightarrow{T_A}(\lambda, p)$ là một vectơ tiếp xúc tại A với P, $\overrightarrow{T_B}(q, \mu)$ là một vectơ tiếp xúc với Q tại B. Ta có :

$$(AB) // \overrightarrow{T_A} // \overrightarrow{T_B} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu - \frac{\lambda^2}{2p} & \lambda \\ \frac{\mu^2}{2q} - \lambda & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & q \\ p & \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p\mu + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda\mu^2}{2q} = 0 \\ \lambda\mu = pq \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \ne 0, \mu = \frac{pq}{\lambda} \\ \frac{p^2q}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{p^2q}{2\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 = -p^2q \\ \mu = \frac{pq}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}} \\ \mu = -p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}} \end{cases}.$$

Tiếp theo, tìm một PTD của đường thẳng (AB).

◊ **Trả lời :** P và Q có một và chỉ một tiếp tuyến chung, có PTD là :

$$2p^{\frac{1}{3}}x + 2q^{\frac{1}{3}}y + p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}} = 0.$$

2.2.62 Ký hiệu $M(\alpha, \beta)$. Một điểm $N\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$ thuộc P là chân của một pháp tuyến kẻ từ M với P khi và chỉ khi :

$$\lambda\left(\alpha - \frac{\lambda^2}{2p}\right) + p(\beta - \lambda) = 0.$$

Vậy $M_i\left(\frac{\lambda_i^2}{2p}, \lambda_i\right)$, trong đó $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là ba nghiệm trong $\mathbb{R}$ của phương trình (ẩn λ) :

$$\lambda^3 + 2p(p - \alpha)\lambda - 2p^2\beta = 0.$$

Ta có :

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1^4}{4p^2} + \lambda_1^2 & \frac{\lambda_1^2}{2p} & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_2^4}{4p^2} + \lambda_2^2 & \frac{\lambda_2^2}{2p} & \lambda_2 \\ \frac{\lambda_3^4}{4p^2} + \lambda_3^2 & \frac{\lambda_3^2}{2p} & \lambda_3 \end{vmatrix} = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{8p^3}\begin{vmatrix} \lambda_1^3 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^3 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^3 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vì $\lambda_i^3 = 2p(\alpha - p)\lambda_i + 2p^2\beta$, nên cột thứ nhất là tổ hợp tuyến tính của hai cột kia, và vì vậy định thức bằng không.

Theo bài tập 2.2.43, ta kết luận rằng O, M_1, M_2, M_3 đồng chu.

2.2.63 Giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq \beta$), $A\left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha\right)$, $B\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$.

Ta lập các PTĐ của các đường trung trực của $[OA]$ và $[OB]$:

$$\frac{\alpha}{p}x + 2y = \frac{\alpha^3}{4p^2} + \alpha \quad \text{và} \quad \frac{\beta}{p}x + 2y = \frac{\beta^3}{2p^2} + \beta.$$

Từ đó ta suy ra các tọa độ (X, Y) của Ω :

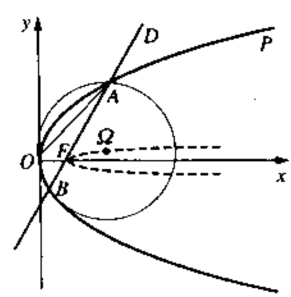
$$X = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{4p} + p, \quad Y = -\frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{8p^2}.$$

Mặt khác :

$$F \in (AB) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\alpha^2}{2p} & \frac{\beta^2}{2p} & \frac{p}{2} \\ \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \alpha\beta = -p^2.$$

Từ đó, với ký hiệu $S = \alpha + \beta$:

$$X = \frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{4p} + p = \frac{S^2}{4p} + \frac{5p}{4}, \quad Y = \frac{S}{8}.$$



Khử S (chạy khắp $\mathbb{R}$), ta sẽ có PTĐ của quỹ tích của Ω :

$$X = \frac{(8Y)^2}{4P} + \frac{5P}{4}.$$

◊ **Trả lời :** Parabol có PTĐ là $4px = 64y^2 + 5p^2$, hoặc :

$$y^2 = 2\frac{p}{32}\left(x - \frac{5p}{4}\right).$$

2.2.64 Chọn một hệ q.c.t.c.t. trong đó $P \mid y^2 = 2px$ và ký hiệu $M(0, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$,
$D \mid x = m(y - \mu)$, $m \in \mathbb{R}$.

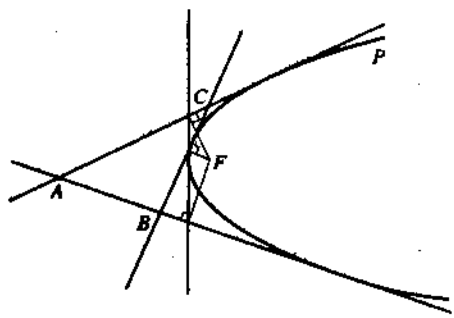
Đường thẳng D tiếp xúc với P khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho D có PTD là :

$$p\left(x - \frac{\lambda^2}{2p}\right) - \lambda(y - \lambda) = 0.$$

Điều này quy về : $\exists\lambda \in \mathbb{R}\ \begin{cases} m = \dfrac{\lambda}{p} \\ -m\mu = -\dfrac{\lambda^2}{2p} \end{cases}$, hoặc : $\mu = \dfrac{mp}{2}$.

Mặt khác : $D \perp (FM) \Leftrightarrow -\dfrac{mp}{2} + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \dfrac{mp}{2}$.

2.2.65 *1*) Nếu một điểm F là tiêu điểm của một parabol P tiếp xúc với (AB), (BC), (CA) thì, theo bài tập 2.2.64, các hình chiếu vuông góc của F lên (AB), (BC), (CA) sẽ thẳng hàng (trên tiếp tuyến với P tại đỉnh của nó), vậy (xem bài tập 2.2.45), F nằm trên đường tròn ngoại tiếp ABC.



2) Đảo lại, giả sử F là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ABC. Theo bài tập 2.2.45, các hình chiếu vuông góc của F lên (AB), (BC), (CA) sẽ thẳng hàng trên một đường thẳng D (đường thẳng Simson của F). Rõ ràng là tồn tại một và chỉ một parabol P, có tiêu điểm F và tiếp tuyến tại đỉnh là D. Theo bài tập 2.2.64, vì $(AB) \perp BF$, ..., nên các đường thẳng (AB), (BC), (CA) đều tiếp xúc P.

◊ **Trả lời :** Đường tròn ngoại tiếp ABC.

2.2.66 Ta tham số hóa C (tham số thực, ký hiệu là t), và ta dùng các đạo hàm của các hàm số có trị vectơ.

a) Ta có : $\dfrac{\mathrm{d}(FM^2)}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{FM}.\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}$,

vậy : $\dfrac{\mathrm{d}(FM)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2FM}\dfrac{\mathrm{d}(FM)^2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{FM}.\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}$.

Với ký hiệu : $\vec{u}(t) = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{FM}$ và $\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$ ta có :

$$\frac{\mathrm{d}(FM)}{\mathrm{d}t} = \vec{u}(t).\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} \quad \text{và} \quad \frac{\mathrm{d}(F'M)}{\mathrm{d}t} = \vec{v}(t).\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}.$$

Vì $MF + MF' = 2a$, là một hằng, ta suy ra :

$$(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)).\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(FM + F'M)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Như vậy, tiếp tuyến với C tại M, được định phương bởi $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}$, trực giao với $\vec{u}(t) + \vec{v}(t)$.

Nhưng $\vec{u}(t) + \vec{v}(t)$ lại định phương đường phân giác trong của góc $((MF), (MF'))$. Vậy tiếp tuyến tại M với C là đường phân giác ngoài của $((MF), (MF'))$.

b) Lập luận như ở *a*).

c) Trong một hệ q.c.t.c.t. $(O;\vec{i},\vec{j})$ đã chọn, $P\left|\ y^2 = 2px,\ M\left(\frac{t^2}{2p},t\right)\right.$ là điểm chạy của P.

Khi đó $\overrightarrow{FM} = \frac{t^2-p^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j}$ và tiếp tuyến với C tại M được định phương bởi $t\vec{i}+p\vec{j}$.

Đường phân giác ngoài của $((MF), \Delta_M)$ được định phương bởi $\frac{\overrightarrow{FM}}{FM}+\vec{i}$. Vì

$$\overrightarrow{FM} + FM\vec{i} = \frac{t^2-p^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{\left(\frac{t^2-p^2}{2p}\right)^2 + t^2}\ \vec{i}$$

$$= \frac{t^2-p^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j} + \frac{t^2+p^2}{2p}\vec{i} = \frac{t}{p}\left(t\vec{i}+p\vec{j}\right),$$

nên ta kết luận rằng tiếp tuyến với P tại M là đường phân giác ngoài của $((MF), \Delta_M)$.

2.2.67 Trước tiên rõ ràng là, nếu hai cônic đồng dạng thì chúng phải cùng loại (elip, hypebol, parabol). Trường hợp hai parabol đã xét ở bài tập 2.2.57.

1) Giả sử C, C' là hai elip, a, b, a', b' là các bán trục, e, e' là các tâm sai.

- Nếu C' suy ra từ C qua một phép đồng dạng f, thì, vì qua f các trục sẽ tương ứng với nhau (nếu C, C' không phải là những đường tròn), nên $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, tức là $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$.

- Đảo lại, ta giả thiết $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$.

Một phép quay tâm O (tâm của C) cho phép đưa các trục của C đến song song với các trục của C'. Rồi một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$ (O', tâm của C') cho phép làm cho các trục trùng nhau. Cuối cùng phép vị tự tâm O', tỷ số $\frac{a'}{a}\left(=\frac{b'}{b}\right)$ cho phép làm trùng các elip.

Vậy C' suy từ C bởi một phép đồng dạng thuận.

Mặt khác, vì $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ và $e' = \sqrt{1-\left(\frac{b'}{a'}\right)^2}$, nên ta có :

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow e = e'.$$

2) Trường hợp hai hypebol cũng chứng minh tương tự.

2.2.68 Chọn một hệ q.c.t.c.t. $(O;\vec{i},\vec{j})$ trong đó :

$$A(a,-b),\ B(a,b),\ C(-a,b),\ D(-a,-b),\ (a,b)\in(\mathbf{R}_+^*)^2.$$

Giả sử $M(x, y) \in \mathcal{E}_2$.

Tâm Ω của đường tròn Γ ngoại tiếp MAB thuộc $x'x$, vậy $\Omega(\lambda, 0)$, trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ta có :

$$\Omega M = \Omega A \Leftrightarrow (x-\lambda)^2 + y^2 = (a-\lambda)^2 + b^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2(x-a)}.$$

Nên ký hiệu R là bán kính của Γ thì :

$$R^2 = \Omega A^2 = (\lambda-a)^2 + b^2 = \left(\frac{(x-a)^2+y^2-b^2}{2(x-a)}\right)^2 + b^2.$$

Ta xác định bán kính R' của đường tròn ngoại tiếp MCD bằng cách thay a bởi $-a$ trong kết quả trên :

$$R'^2 = \left(\frac{(x+a)^2+y^2-b^2}{2(x+a)}\right)^2 + b^2.$$

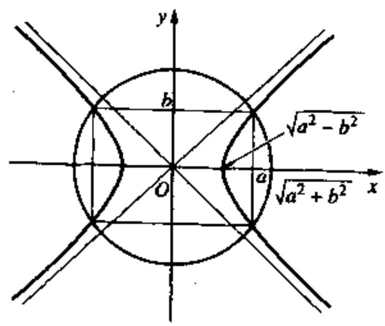
Sau đó :

$$R = R' \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} (x+a)((x-a)^2+y^2-b^2) = (x-a)((x+a)^2+y^2-b^2) & (1) \\ \text{hoặc} & \\ (x+a)((x-a)^2+y^2-b^2) = -(x-a)((x+a)^2+y^2-b^2) & (2). \end{array} \right.$$

Một phép tính đơn giản chứng tỏ rằng :

(1) $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

(2) $\Leftrightarrow (x = 0$ hoặc $x^2 + y^2 = a^2 + b^2)$.



◊ **Trả lời :** Quỹ tích phải tìm là hợp của đường thẳng $x = 0$, đường tròn $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ và hypebol $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (suy biến thành hai đường thẳng nếu $a = b$).

2.2.69 Với các ký hiệu quen thuộc : $M(a\cos t, b\sin t)$.

Tiếp tuyến với C tại M được định phương bởi $(-a\sin t, b\cos t)$.

Tính các tọa độ (X, Y) của H :

$$X = \frac{a(b^2\cos t + ac\sin^2 t)}{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t},\quad Y = \frac{ab(a - c\cos t)\sin t}{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}.$$

Vì :

$$(b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)(X^2+Y^2) = a^2(b^2\cos t + ac\sin^2 t)^2 + a^2b^2(a-c\cos t)^2\sin^2 t$$
$$= a^2(b^2+c^2\sin^2 t)(b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) = a^2(b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^2,$$

nên ta có : $X^2 + Y^2 = a^2$, vậy $H \in C$.

Cũng vậy $H' \in C$ (thay c bởi $-c$).

b) Theo a) áp dụng cho $-t$ thay vì t, tiếp tuyến tại M', đối xứng của M qua O, cắt C tại hai điểm L, L', là các hình chiếu vuông góc của F, F' lên tiếp tuyến ấy. Vì các tiếp tuyến với E tại M và M' song song (do đối xứng qua O), nên các đường thẳng (FH) và (FL) trùng nhau, vậy $L = K$. Cũng vậy $L' = K'$.

Cuối cùng, $HKK'H'$ là một hình chữ nhật, tiếp xúc với E theo (HH') và (KK').

2.2.70 Ký hiệu $f : M(z) \mapsto M'(az+b)$; giải $\left\{\begin{array}{l} a(1+i)+b = 2+i \\ a(2-3i)+b = 7-2i \end{array}\right.$

Ta được $a = 1 + i$, $b = 2 - i$.

◊ **Trả lời :** f có tâm là điểm có tọa vị $1 + 2i$, tỷ số $\sqrt{2}$ và góc quay $\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2.2.71 Vì $|a| = |b| = |c|$, nên tâm của đường tròn ngoại tiếp ABC là O. Mặt khác, tọa vị của trọng tâm G của ABC là $\frac{1}{3}(a+b+c)$. Theo bài tập 2.2.9, ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $G = O$, ở đây có nghĩa là $a + b + c = 0$.

2.2.72 Sử dụng số phức : $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $M(m)$, $N(n)$. Tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}^*$ sao cho $c = \alpha a$ và $d = \alpha b$, từ đó $ad - bc = 0$.

Mặt khác, vì ABO và ADM đồng dạng thuận nên :

$$\frac{m-a}{-a} = \frac{d-a}{b-a}, \text{ suy ra } m = a\frac{b-d}{b-a}.$$

Tương tự, ta có : $n = b\dfrac{c-a}{b-a}$.

Từ đó : $m + n = \dfrac{bc-ad}{b-a} = 0$, vậy O là trung điểm của MN.

2.2.73 Dùng số phức : $A(a)$,..., $C'(c)$, $G(g)$, $G'(g')$, trong đó G, G' là các trọng tâm theo thứ tự của ABC, $A'B'C'$.

Vì ABC', BCA', CAB' đồng dạng thuận, nên tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}^*$ sao cho :

$$\begin{cases} c'-b = \alpha(c'-a) \\ a'-c = \alpha(a'-b) \\ b'-a = \alpha(b'-c) \end{cases},$$

từ đó, sau khi cộng lại : $3g'-3g = \alpha(3g'-3g)$,và ($\alpha \neq 1$, vì nếu không thì $a = b = c$) $g' = g$, $G' = G$.

2.2.74 Dùng số phức $A(a)$, $B(b)$,...

Vì $A'C_2B_1$ (chẳng hạn) là tam giác đều thuận, nên : $A' = \mathrm{Rot}_{C_2, \frac{\pi}{2}}(B_1)$, tức là :

$$a'-c_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(b_1 - c_2) = -j^2(b_1 - c_2).$$

hoặc : $$a' = -j^2 b_1 - jc_2.$$

Vì $b_1 = \dfrac{2b+c}{3}$ và $c_2 = \dfrac{b+2c}{3}$, ta suy ra :

$$3a' = (-j-2j^2)b + (-2j-j^2)c = (2+j)b + (1-j)c.$$

Bằng cách hoán vị, ta có :

$$\begin{cases} 3a' = (2+j)b + (1-j)c \\ 3b' = (2+j)c + (1-j)a \\ 3c' = (2+j)a + (1-j)b \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times j \\ \times j^2 \end{array} \right.$$

từ đó : $$3(a' + jb' + j^2c') = (1 + j + j^2)(a + b + c) = 0,$$

và vì vậy (như ở phần đầu lời giải, hoặc xem Tập 1, bài tập 2.3.3) $A'B'C'$ là tam giác đều thuận.

2.2.75 *a*) Dùng số phức : $A(a)$, $B(b)$,...

Ta có :

$$B = \mathrm{Rot}_{A', \frac{\pi}{2}}(C) \Leftrightarrow b - a' = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a')$$

$$\Leftrightarrow b - a' = i(c - a') \Leftrightarrow a' = \frac{b - ic}{1 - i}.$$

Cũng vậy : $b' = \dfrac{c - ia}{1 - i}$, $c' = \dfrac{a - ib}{1 - i}$.

Điều này chứng tỏ : $\overrightarrow{AA'} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{B'C'})$, và do đó : $(AA') \perp (B'C')$ và $AA' = B'C'$.

b) Theo a), (AA'), (BB'), (CC') là các đường cao của tam giác $A'B'C'$, vậy chúng đồng quy.

2.2.76 *a*) Dùng số phức : $A_1(a_1),..., A_n(a_n), B_1(b_1),..., B_n(b_n)$.

Tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ sao cho :

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta, \quad a_3 = \alpha a_2 + \beta, \quad b_2 = \alpha b_1 + \beta.$$

từ đó : $$a_2 - \alpha a_1 = a_3 - \alpha a_2 = b_2 - \alpha b_1,$$

rồi : $$b_2 - a_3 = (b_1 - a_2)\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2}.$$

Một cách tổng quát : $\forall k \in \{1, ..., n\},\ b_k - a_{k+1} = (b_{k-1} - a_k)\dfrac{a_k - a_{k+1}}{a_{k-1} - a_k}$.

Từ đó, bằng cách giản ước liên tiếp :

$$\forall k \in \{1, ..., n\},\ b_k - a_{k+1} = (b_1 - a_2)\frac{a_k - a_{k+1}}{a_1 - a_2}.$$

Ta suy ra :

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_{k+1}) = \frac{b_1 - a_2}{a_1 - a_2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \frac{b_1 - a_2}{a_1 - a_2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\right) = 0,$$

và vì vậy : $$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Cuối cùng : $$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Vì $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$, nên ta có : $\sum\limits_{k=1}^{n}\overrightarrow{A_k B_k} = \overrightarrow{0}$.

2.2.77 Ta có : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} P(x,y) = \dfrac{1}{2}((x+(\mathrm{i}y)^n + (x - \mathrm{i}y)^n) \\ Q(x,y) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}((x+\mathrm{i}y)^n - (x-\mathrm{i}y)^n). \end{cases}$

Từ đó, với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$:

(1) $$aP(x,y) + bQ(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{a - \mathrm{i}b}{2}(x+\mathrm{i}y)^n + \frac{a+\mathrm{i}b}{2}(x - \mathrm{i}y)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}\right)^n = -\frac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}.$$

Chú ý rằng $\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}$ và $-\dfrac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}$ có môđun 1.

Ký hiệu $\varphi = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}\right)$, ξ là một căn bậc n của $-\dfrac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}$, $\alpha = \mathrm{Arg}(\xi)$. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow n\varphi \equiv \alpha\ [2\pi] \Leftrightarrow \varphi \equiv \frac{\alpha}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right]$$

Ký hiệu $\theta = \mathrm{Arg}(x + \mathrm{i}y)$. Vì $\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} = \dfrac{1}{x^2+y^2}(x+\mathrm{i}y)^2$, và vì $\dfrac{1}{x^2+y^2} \in \mathbf{R}_+^*$, nên ta có :

$\varphi \equiv 2\theta\ [2\pi]$, và vì vậy :

$$(1) \Leftrightarrow 2\theta \equiv \frac{\alpha}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\alpha}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right],$$

từ đó suy ra kết quả mong muốn.

2.3.1 *a*) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

b) $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$,

và tương tự : $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD})$, $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})$,

từ đó sử dụng *a*) :

$$IJ^2+KL^2+MN^2=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2+BA^2+CD^2+CA^2+DB^2).$$

2.3.2 Có nhiều cách tính toán cho phép kết luận, chẳng hạn, rằng

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\wedge(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\\&=-\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}&=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}\wedge(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\&=-\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra kết quả mong muốn.

2.3.3 *a*) Ta có :

$$\left\{\begin{matrix}(\Pi)//(AB)\\(ABC)//(AB)\end{matrix}\right|\Rightarrow(MN)=(\Pi)\cap(ABC)//(AB).$$

Cũng vậy, (PQ) // (AB), và do đó (MN) // (PQ) // (AB).

Tương tự, $(NP)//(MQ)//(CD)$, và cuối cùng, $MNPQ$ là một hình bình hành.

b) Điểm M được xác định trên (AC) bởi $\lambda\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$. Ta có, vì (MN) // (AB),...

$$\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}.$$

Suy ra :

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{CD}\ \text{ và }\ \overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}.$$

Từ đó :

$$MQ=MN\Leftrightarrow|\lambda|\,CD=|1-\lambda|\,AB. \qquad (1)$$

Nếu ký hiệu $k=\frac{CD}{AB}\in\mathbf{R}_+^*$, ta có :

$$(1)\qquad\Leftrightarrow|\lambda|\,k=|1-\lambda|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}\lambda k=1-\lambda\\\text{hoặc}\\\lambda k=-1+\lambda\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}(k+1)\lambda=1\\\text{hoặc}\\(1-k)\lambda=1\end{matrix}\right..$$

◊ **Trả lời :** Với ký hiệu $k=\frac{CD}{AB}$:

- Nếu $k\neq 1$, có hai và chỉ hai điểm M thích hợp, xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$,

$$\lambda\in\left\{\frac{1}{1+k},\frac{1}{1-k}\right\}$$

- Nếu $k=1$, có một và chỉ một điểm M thích hợp và đó là trung điểm của AC.

2.3.4 *a*) $d(A,P)=\dfrac{|2.3+6.(-1)-2-7|}{\sqrt{2^2+6^2+(-1)^2}}$.

◊ **Trả lời :** $d(A,P)=\dfrac{9}{\sqrt{41}}$.

b) Lập một PTD của *P* :

$$M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 3 \\ y-1 & -6 & -1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x+5y+17z-13=0.$$

Sau đó : $d(A,P)=\dfrac{|-4.1+5.2+17.(-3)-13|}{\sqrt{(-4)^2+5^2+17^2}}$.

◊ **Trả lời :** $d(A,P)=\dfrac{58}{\sqrt{330}}$.

2.3.5 a) $\overrightarrow{u}(1,1,1)\perp P$ và $\overrightarrow{u'}(2,1,-1)\perp P'$.

$\angle(P,P')=(\vec{u},\vec{u}')$ và $\cos(\angle\vec{u},\vec{u}'))=\dfrac{\vec{u}.\vec{u}'}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}'\|}$.

◊ **Trả lời :** $\widehat{(P,P')}=\text{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\simeq 1{,}080$.

b) $\overrightarrow{u}(1,3,5)\in\overrightarrow{D}$ và $\overrightarrow{u'}(-4,3,1)\in\overrightarrow{D'}$, $\angle(D,D')=\angle(\vec{u},\vec{u}')$.

◊ **Trả lời :** $\angle(D,D')=\text{Arc}\cos(\dfrac{10}{\sqrt{910}})\simeq 1{,}233$.

c) $\overrightarrow{u}(3,1,-5)\in\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{u'}(1,0,2)\perp P$, và $\angle(D,P)=\dfrac{\pi}{2}-\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'})$.

◊ **Trả lời :** $\angle(D,P)=\text{Arc}\sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{5}\right)\simeq 0558$.

2.3.6 Khi ký hiệu *Q* và *Q'* là các mặt phẳng phân giác của *P* và *P'* :

$$M(x,y,z)\in Q\cup Q' \Leftrightarrow d(M,P)=d(M,P')$$

$$\Leftrightarrow \frac{|7x-4y+4z-8|}{\sqrt{7^2+(-4)^2+4^2}}=\frac{|4x+8y+z-11|}{\sqrt{4^2+8^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-4y+4z-8=4x+8y+z-11 \\ \text{hoặc} \\ 7x-4y+4z-8=-4x-8y-z+11 \end{array}\right.$$

◊ **Trả lời :** $x-4y+z+1=0$, $11x+4y+5z-19=0$.

2.3.7 *a*) Dùng công thức $d(A,D)=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

◊ **Trả lời :** $d(A,D)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

b) Xác định một điểm *B* thuộc *D*, chẳng hạn *B*(-1,1,0), và một vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của *D*, chẳng hạn, $\vec{v}(2,3,1)$, rồi ứng dụng công thức của a).

◊ **Trả lời :** $d(A,D)=\sqrt{\dfrac{195}{14}}$.

2.3.8 *a*) Áp dụng công thức $d(D,D') = \dfrac{|[\overrightarrow{AA'}, \vec{v}, \vec{v}']|}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|}$

◊ **Trả lời :** $d(D,D') = \dfrac{11\sqrt{42}}{21}$.

b) Một điểm thuộc *D'* là *A'*(-3, 1, 0), và một vectơ chỉ phương của *D'* là $\vec{v}'(4,6,1)$.

◊ **Trả lời :** $d(D,D') = \dfrac{106}{\sqrt{1013}}$.

c) $A(6,-4,0)$, $\vec{v}(2,3,1)$, $A'(1,-4,0)$, $\vec{v}'(-3,1,1)$

◊ **Trả lời :** $d(D,D') = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2.3.9 *a*) *L* được định phương bởi $\vec{v} \wedge \vec{v}'$, là một vectơ cộng tuyến với $\vec{w}(2,0,1)$. Cho *P*, *P'* là các mặt phẳng lần lượt chứa *D*, *D'* và song song với $\vec{w}$. Như vậy, *P* đi qua *A* và được định phương bởi $(\vec{v}, \vec{w})$, và *P'* đi qua *A'* và được định phương bởi $(\vec{v}', \vec{w})$.

Lập một PTD của *P* :

$$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 2 \\ y-3 & 6 & 0 \\ z+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x+5y-12z-39=0.$$

Cũng vậy : $P' | x-10y-2z+5=0$.

Cuối cùng : $L = P \cap P'$.

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} 6x+5y-12z-39=0 \\ x-10y-2z+5=0 \end{cases}$.

b) *A'*(0, -1, 3) ∈ *D'* và $\vec{v}'(1,4,2) \in \overrightarrow{D'}$. Cũng lập luận tiếp như ở a). Trong ví dụ này, *D* và *D'* cắt nhau tại một điểm, có tọa độ là (0, -1, 3).

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} 29x+51y+18z-3=0 \\ 68x-y-32z+95=0 \end{cases}$.

c) $A(1,-1,0) \in D$, $\vec{v}(3,2,1) \in \overrightarrow{D}$, $A'(2,0,1) \in D'$, $\vec{v}'(1,1,0) \in \overrightarrow{D'}$. Lập luận tiếp như ở a).

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} x-4y+5z-5=0 \\ x-y+2z-4=0 \end{cases}$.

2.3.10 $\vec{v}(1,3,0) \in \overrightarrow{D}$ và $\vec{v}'(1,2,1) \in \overrightarrow{D'}$, vậy $P \perp \vec{v} \wedge \vec{v}'(3,-1,-1)$, *P* nhận một PTD : $3x-y-z+h=0$, $h \in \mathbf{R}$.

Vì *A*(0, 1, 2) ∈ *D* và *D* // *P*, ta có :

$$d(D,P) = d(A,P) = \frac{|-3+h|}{\sqrt{11}}.$$

Cũng vậy : $$d(D',P) = \frac{|-13+h|}{\sqrt{11}}.$$

Khi đó : $d(D,P) = d(D',P) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -3+h=-13+h \\ \text{hoặc} \\ -3+h=13-h \end{array} \right. \Leftrightarrow h=8.$

◊ **Trả lời :** $P | 3x-y-z+8=0$.

2.3.11 *a*) Một phép tính đơn giản chứng tỏ rằng hệ bốn phương trình ba ẩn tương ứng với $D \cap D'$, có một và chỉ một nghiệm, $A(-1, -2, -1)$, vậy D và D' cắt nhau.

b) Ta có : $\vec{v}(2,1,1) \in \overrightarrow{D}, \vec{v}'(-1,3,1) \in \overrightarrow{D'}$.

Ký hiệu $\vec{b} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \dfrac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$, $\vec{b}' = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} - \dfrac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$.

Các đường phân giác B và B' của D, D' là hai đường thẳng đi qua A và được định phương bởi $\vec{b}$ và $\vec{b}'$. Ta ký hiệu $\varepsilon = \pm 1$, $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \varepsilon\dfrac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$, và $\beta_1 = \dfrac{2}{\sqrt{6}} - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{11}}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{3\varepsilon}{\sqrt{11}}$, $\beta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{11}}$ là các thành phần của $\overrightarrow{\beta}$.

Một biểu diễn tham số của B hoặc B' là :

$$x + 1 = \lambda\beta_1, \quad y + 2 = \lambda\beta_2, \quad z + 1 = \lambda\beta_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra một HTPD của B hoặc B' :

$$x+1 = \frac{\beta_1}{\beta_3}(z+1) = \frac{2\sqrt{11}-\varepsilon\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\varepsilon\sqrt{6}}(z+1) = \frac{28-3\varepsilon\sqrt{66}}{5}(z+1),$$

$$x = \frac{28-3\varepsilon\sqrt{66}}{5}z + \frac{23-3\varepsilon\sqrt{66}}{5}$$

$$y+2 = \frac{\beta_2}{\beta_3}(z+1) = \frac{\sqrt{11}+3\varepsilon\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\varepsilon\sqrt{6}}(z+1) = \frac{-7+2\varepsilon\sqrt{66}}{5}(z+1),$$

$$y = \frac{-7+2\varepsilon\sqrt{66}}{5}z + \frac{-17+2\varepsilon\sqrt{66}}{5}.$$

◊ **Trả lời :** $\begin{cases} x = \dfrac{28-3\sqrt{66}}{5}z + \dfrac{23-3\sqrt{66}}{5} \\ y = \dfrac{-7+2\sqrt{66}}{5}z + \dfrac{-17+2\sqrt{66}}{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \dfrac{28+3\sqrt{66}}{5}z + \dfrac{23+3\sqrt{66}}{5} \\ y = \dfrac{-7-2\sqrt{66}}{5}z + \dfrac{-17-2\sqrt{66}}{5} \end{cases}$

2.3.12 Theo bài tập 1.2.9, (chùm tuyến tính các mặt phẳng), Π chứa D khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho Π có PTD $(x - z - 2) + \lambda(y + z - 1) = 0$, trừ trường hợp Π là mặt phẳng có PTD $y + z - 1 = 0$.

Vậy ta có : $\Pi \mid x + \lambda y - (1 - \lambda)z - (\lambda + 2) = 0$.

Khi ký hiệu : $\overrightarrow{u}(1, \lambda, \lambda - 1)$, $\vec{u}_1(5, 5, -3)$, $\vec{u}_2(2, -1, 1)$, ta có : $\vec{u} \perp \Pi$, $\overrightarrow{u_1} \perp P_1$, $\overrightarrow{u_2} \perp P_2$.

Vậy $\begin{cases} \overrightarrow{\Pi \cap P_1} \ni \vec{u}_1 \wedge \vec{u}(8\lambda - 5, -5\lambda + 2, 5\lambda - 5) \\ \overrightarrow{\Pi \cap P_2} \ni \vec{u}_2 \wedge \vec{u}(-2\lambda + 1, -2\lambda + 3, 2\lambda + 1) \end{cases}$

sau đó : $\Pi \cap P_1 \perp \Pi \cap P_2 \Leftrightarrow (8\lambda - 5)(-2\lambda + 1) + (-5\lambda + 2)(-2\lambda + 3) + (5\lambda - 5)(2\lambda + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ hoặc } \lambda = -\frac{1}{2}).$$

◊ **Trả lời :** Có đúng hai mặt phẳng thích hợp, với phương trình Descartes là :

$$x + 2y + z - 4 = 0, \quad 2x - y - 3z - 3 = 0.$$

2.3.13 $P|(x-3z-2)+\lambda(y+5z-1)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$, suy ra : $P|\ x+\lambda y+(5\lambda-3)z-(\lambda+2)=0$,

rồi $d(A,P)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-\lambda-(\lambda+2)|}{\sqrt{1+\lambda^2+(5\lambda-3)^2}}=1$

$$\Leftrightarrow 22\lambda^2-34\lambda+9=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{17\pm\sqrt{91}}{22}.$$

◊ **Trả lời :** Có đúng hai mặt phẳng thích hợp, với phương trình Descartes là :

$$22x+(17+\varepsilon\sqrt{91})y+(19+5\varepsilon\sqrt{91})z-(61+\varepsilon\sqrt{91})=0,\quad \varepsilon\in\{-1,1\}.$$

2.3.14 Nếu một đường thẳng D cắt D_1 và D_2, thì, do D_1 và D_2 ở trong các mặt phẳng nằm ngang phân biệt ($z=1$, $z=0$), nên D không thể nằm ngang, vậy D nhận một HPTĐ $\left\{\begin{array}{l}x=az+p\\ y=bz+q\end{array}\right|$, $(a,b,p,q)\in\mathbb{R}^4$.

Ta có : $D\cap D_1\neq\varnothing \Leftrightarrow \left(\exists(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ \begin{cases}x=az+p\\ y=bz+q\\ y=x+1\\ z=-1\end{cases}\right) \Leftrightarrow -b+q=-a+p+1.$

Cũng vậy : $D_1\cap D_2\neq\varnothing \Leftrightarrow q=-p+1$

và : $D\cap D_3\neq\varnothing \Leftrightarrow b+q=a+p-1.$

Vậy : $\left\{\begin{array}{c}-b+q=-a+p+1\\ q=-p+1\\ b+q=a+p-1\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{cases}b=a-1\\ p=q=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$

rồi : $D\perp\vec{u} \Leftrightarrow (a,b,1)\perp(1,2,3) \Leftrightarrow a+2b+3=0.$

Cuối cùng : $\begin{cases}b=a-1\\ a+2b+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}.$

◊ **Trả lời :** Tồn tại một và chỉ một đường thẳng D thích hợp :

$$D\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{2}\\ y=-\dfrac{4}{3}z+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2.3.15 Nếu một đường thẳng D cắt D_1 và D_2, thì, vì D_1 và D_2 ở trong các mặt phẳng nằm ngang phân biệt, D không thể nằm ngang, vậy D nhận một HPTĐ $\left\{\begin{array}{l}x=\alpha z+p\\ y=\beta z+q\end{array}\right|$, $(\alpha,\beta,p,q)\in\mathbb{R}^4$.

Ta có : : $D\cap D_1\neq\varnothing \Leftrightarrow \left(\exists(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ \begin{cases}x=\alpha z+p\\ y=\beta z+q\\ y=mx\\ z=a\end{cases}\right) \Leftrightarrow \beta a+q=m(\alpha a+p).$ (1)

Cũng vậy : $D\cap D_2\neq\varnothing \Leftrightarrow -\beta a+q=-m(-\alpha a+p)$ (2).

và rồi : $\begin{cases}(1)\\ (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\alpha a=q\\ mp=\beta a\end{cases}.$

Ta xét các vectơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\vec{v}$ theo thứ tự chỉ phương D_1, D_2, D :

$$\overrightarrow{u_1}(1,m,0),\quad \overrightarrow{u_2}(1,-m,0),\quad \vec{v}(\alpha,\beta,1).$$

Với những độ đo góc thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có :

(3) $\quad \angle(D_1, D_2) = \angle(D_2, D) \Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{u_1},\vec{v}) = \angle(\overrightarrow{u_2},v)$

$$\Leftrightarrow |\cos(\angle(\overrightarrow{u_1},\vec{v}))| = |\cos(\angle(\overrightarrow{u_2},\vec{v}))|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{u_1}.\vec{v}|}{\|\overrightarrow{u_1}\|\|\vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{u_2}.\vec{v}|}{\|\overrightarrow{u_2}\|\|\vec{v}\|}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha + m\beta| = |\alpha - m\beta| \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ hoặc } \beta = 0).$$

Cuối cùng : $\quad \begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\alpha=0\\ q=0\\ p=\dfrac{\beta a}{m}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\beta=0\\ p=0\\ q=m\alpha a\end{cases}\right).$

◊ **Trả lời :** Các đường thẳng thích hợp là các đường thẳng có HPTD :

$$\begin{cases}x=\dfrac{\beta a}{m}\\ y=\beta z\end{cases},\ \beta\in\mathbb{R}, \quad \text{hoặc } \begin{cases}x=\alpha z\\ y=m\alpha a\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

2.3.16 Khi ký hiệu : $A_1(x_1, y_1, z_1)$ và $A * A_1$ là trung điểm AA_1, ta có :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\perp D_1\\ A*A_1\in D_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-x)+m(y_1-y) = 0\\ \dfrac{y_1+y}{2} = m\dfrac{x_1+x}{2}\\ \dfrac{z_1+z}{2} = h\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+my_1 = x+my\\ mx_1-y_1 = y-mx\\ z_1 = 2h-z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = \dfrac{(1-m^2)x+2my}{1+m^2}\\ y_1 = \dfrac{2mx-(1-m^2)y}{1+m^2}\\ z_1 = 2h-z\end{cases}$$

Ta được các tọa độ của A_2, A_3, A_4 bằng cách thay m hoặc h bởi $-m$ hoặc $-h$:

$A_2(x_1, y_1, z_2)$ trong đó $z_2 = -2h - z$.

$A_3(x_3, y_3, z_1)$ trong đó $x_3 = \dfrac{(1-m^2)x-2my}{1+m^2}$, $y_3 = \dfrac{-2mx-(1-m^2)y}{1+m^2}$

$A_4(x_3, y_3, z_2)$.

Từ đó suy ra $\quad \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_3A_4}\left(= -4h\vec{k}\right)$, vậy A_1, A_2, A_3, A_3 đồng phẳng.

Mặt khác : $\quad \overrightarrow{A_1A_3} = -\dfrac{4m}{1+m^2}(y\vec{i}+x\vec{j})$.

Nếu $x = y = 0$, thì $A_1 = A_3$, $A_2 = A_4$, và vì thế cả bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 không xác định một mặt phẳng.

Giả thiết $(x, y) \neq (0, 0)$. Vì $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ độc lập, nên khi ký hiệu P là mặt phẳng $A_1A_2A_3A_4$, ta có, với mọi (X, Y, Z) thuộc $\mathcal{E}_3$:

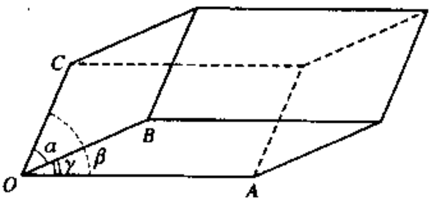
$$M\in P \Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) \text{ phụ thuộc } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X-\dfrac{(1-m^2)x+2my}{1+m^2} & 0 & y\\ Y-\dfrac{2mx-(1-m^2)y}{1+m^2} & 0 & x\\ Z-2h+z & 1 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ x\left(X-\frac{(1-m^2)x+2my}{1+m^2}\right)-y\left(Y-\frac{2mx-(1-m^2)y}{1+m^2}\right)=0.$$

◊ **Trả lời** : $(1+m^2)xX-(1+m^2)yY-(1-m^2)(x^2+y^2)=0$, khi ký hiệu $A(x, y, z)$.

2.3.17 Ký hiệu : O là một trong các đỉnh, A, B, C là các đỉnh liền kề O, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $a=\|\vec{a}\|$, $b=\|\vec{b}\|$ $c=\|\vec{c}\|$, α, β, γ là các góc tại O :

$$\alpha=\widehat{BOC},\ \beta=\widehat{COA},\ \gamma=\widehat{AOB}.$$



S là tổng các độ dài của bốn đường chéo :

$$S=\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|+\|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\|+\|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\|+\|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\|.$$

Với mọi $(\varepsilon, \varepsilon')$ thuộc $\{-1, 1\}^2$, ta có :

$$\|\vec{a}+\varepsilon\vec{b}+\varepsilon'\vec{c}\|^2=a^2+b^2+c^2+2\varepsilon ab\cos\gamma+2\varepsilon' ac\cos\beta+2\varepsilon\varepsilon' bc\cos\alpha.$$

Vì ánh xạ $\sqrt{\cdot}\ :\ \underset{x\mapsto\sqrt{x}}{\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}}$ lõm chặt, nên với mọi (x, y, z, t) thuộc $(\mathbb{R}_+)^4$ ta có :

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}\right)\le\sqrt{\frac{x+y+z+t}{4}},$$

và có đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z=t$.

Áp dụng vào $x=\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2$, $y=\|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\|^2$, ..., ta được

$$\frac{1}{4}S\le\sqrt{\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{4}},$$

các hạng tử $\pm 2ab\cos\gamma$, ..., khử lẫn nhau từng cặp.

Hơn nữa, có đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z=t$, tức là $ab\cos\gamma=ac\cos\beta=bc\cos\alpha=0$, điều kiện này lại quy về $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, hình hộp là hình hộp chữ nhật.

2.3.18 Ký hiệu a, b, c, d là các khoảng cách từ M đến các mặt BCD, ACD, ABD, ABC. Vì M ở bên trong $ABCD$, nên thể tích của $ABCD$ là tổng các thể tích của bốn tứ diện xác định bởi M và ba trong các điểm A, B, C, D. Vì, chẳng hạn, thể tích của $MABC$ là $\frac{1}{3}dS$, ta suy ra $V=\frac{1}{3}(a+b+c+d)S$.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình cộng :

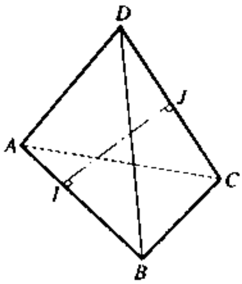
$$\sqrt[4]{abcd}\le\frac{1}{4}(a+b+c+d),$$

ta suy ra :

$$abcd\le\frac{1}{4}(a+b+c+d)^4=\left(\frac{3V}{4S}\right)^4.$$

◊ **Trả lời** : $\left(\frac{3V}{4S}\right)^4$.

2.3.19 Xét $I \in (AB)$, $J \in (CD)$ sao cho (IJ) là đường vuông góc chung của (AB) và (CD).



Ta có : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC})$

$$= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC},$$

suy ra : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}\|^2+\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC}\|^2$, vì $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}$ trực giao với $\overrightarrow{IJ}$ và vì $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC}$ cộng tuyến với $\overrightarrow{IJ}$.

Tương tự : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}\|^2+\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JD}\|^2$. Từ đó:

$$\mathcal{A}(ABC)=\mathcal{A}(ABD)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|\Leftrightarrow\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC}\|=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JD}\|.$$

Ký hiệu $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{CJ}=\alpha\overrightarrow{CD}$, vậy $\overrightarrow{JD}=(1-\alpha)\overrightarrow{CD}$.

Khi đó : $\mathcal{A}(ABC)=\mathcal{A}(ABD)\Leftrightarrow|\alpha|=|1-\alpha|\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$.

Điều này chứng tỏ J là trung điểm của CD ; cũng vậy, I là trung điểm của AB.

Sau đó : $\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}\right)^2=AI^2+IJ^2+JC^2+2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{JC}$,

và $\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}\right)^2=BI^2+IJ^2+JD^2+2\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{JD}$.

Vì $AI=BI\left(=\frac{AB}{2}\right)$, $JC=JD\left(=\frac{CD}{2}\right)$, và vì $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{JD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, nên ta kết luận : $AC=BD$.

Cuối cùng, các cạnh đối của $ABCD$ bằng nhau từng cặp.

Biến thể của phần cuối lời giải : Vì I và J là trung điểm theo thứ tự của AB và CD, và vì (IJ) trực giao với (AB) và (CD), nên một phép lật quanh (IJ) sẽ chuyển A đến B và C đến D, vậy $AC=BD$.

2.3.20 Ta chứng minh rằng tập hợp G các phép đẳng cự afin f của $\mathcal{E}_3$ thỏa mãn $f(X)=X$ là một nhóm con của nhóm afin GAff $(\mathcal{E}_3)$:

- $Id_{\mathcal{E}_3}\in G$, hiển nhiên
- Với mọi (f,g) thuộc G^2, vì $(g\circ f)(X)=g(f(X))=g(X)=X$, nên ta có $g\circ f\in G$.
- Với mọi f thuộc G, f là song ánh và, vì $f(X)=X$, nên ta có : $X=f^{-1}(f(X))=f^{-1}(X)$, vậy $f^{-1}\in G$.

Cũng vậy, tập hợp G^+ của các phép dời hình của $\mathcal{E}_3$ thỏa mãn $f(X)=X$ là một nhóm con của G, vậy nó là một nhóm.

2.3.21 *a)* Giả sử f là một phép dời hình của $\mathcal{E}_3$ thỏa mãn $f(P)=P$. Trước tiên chú ý rằng $\vec{f}\left(\vec{P}\right)=\vec{P}$. Nếu $\vec{f}\neq\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}_3}}$, thì tồn tại một trục $\vec{D}$ và một số thực $\theta\,(\theta\not\equiv 0[2\pi])$ sao cho $\vec{f}=\mathrm{Rot}_{\vec{D},\theta}$.

Nếu $\vec{D}\subset\vec{P}$, suy ra $\theta\equiv\pi\,[2\pi]$. Nếu $\vec{D}\not\subset\vec{P}$, suy ra $\vec{D}\perp\vec{P}$.

1) Nếu f là một phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{u}}$, thì khi lấy một điểm bất kỳ M thuộc P, do $M+\vec{u}\in P$, ta suy ra $\vec{u}\in\vec{P}$.

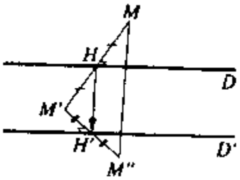
2) Nếu f là một tích $\mathrm{T}_{\vec{u}}\circ\mathrm{Rot}_{D,\theta}$ trong đó $\vec{u}\in\mathcal{E}_3$ và $\theta\not\equiv 0\,[2\pi]$, thì :

- hoặc là $\vec{D}\perp\vec{P}$, rồi $\vec{u}=\vec{0}$
- hoặc là $\vec{D}\subset\vec{P}$ và $\theta\equiv\pi\,[2\pi]$, rồi $D\subset P$ và $\vec{u}\in\vec{P}$.

b) Kiểm chứng rằng các phép dời hình thu được đều thích hợp.

◊ **Trả lời :** $\{\mathrm{T}_{\vec{u}}\,;\vec{u}\in\vec{P}\}\cup\{\mathrm{Rot}_{\vec{D},\theta}\,;\vec{D}\perp P,\theta\in\mathbf{R}\}\cup\{\mathrm{T}_{\vec{u}}\circ\mathrm{Ret}_D\,;\vec{u}\in\vec{P},D\subset P\}$.

2.3.22 *a*) 1) Cho $M \in \mathcal{E}_3$, H là hình chiếu vuông góc của M lên D, $M' = \mathrm{Ret}_D(M)$, H' là hình chiếu vuông góc của M' lên D', $M'' = \mathrm{Ret}_{D'}(M')$.

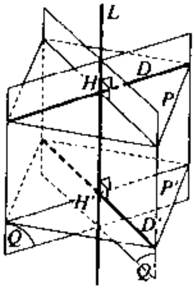


Vì $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ và $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'H'}$, ta suy ra

$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HH'}$, và như vậy :

$$\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D = \mathrm{T}_{2\vec{v}}.$$

2) Ký hiệu P, P', Q, Q' là các mặt phẳng được xác định bởi :



$P \perp L$ và $D \subset P$

$P' \perp L$ và $D' \subset P'$

$L \subset Q$ và $D \subset Q$

$L \subset Q'$ và $D' \subset Q'$.

Vì $P \perp Q$, nên ta có : $\mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Ref}_Q = \mathrm{Ret}_D$.

Cũng vậy : $\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_{Q'} = \mathrm{Ret}_{D'}$.

Từ đó :

$$\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D = \mathrm{Ref}_{P'} \circ \left(\mathrm{Ref}_{Q'} \circ \mathrm{Ref}_P\right) \circ \mathrm{Ref}_Q.$$

Vì $P \perp Q'$ nên $\mathrm{Ret}_P \circ \mathrm{Ret}_{Q'}$ giao hoán, vậy :

$$\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D = \left(\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_P\right) \circ \left(\mathrm{Ref}_{Q'} \circ \mathrm{Ref}_Q\right) = \mathrm{T}_{2\overrightarrow{HH'}} \circ \mathrm{Rot}_{L,2\theta},$$

trong đó $\theta = \angle(D, D')$.

b) Cho f là một phép dời hình của $\mathcal{E}_3$.

• Nếu $f = \mathrm{T}_{\vec{u}}$, $\vec{u} \in \mathcal{E}_3$, thì với mọi đường thẳng D trực giao với $\vec{u}$, khi ký hiệu $D' = \mathrm{T}_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$, ta có : $f = \mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D$.

• Nếu $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{L,\alpha}$, $\vec{u} \in \vec{L}$, thì với mọi đường thẳng D cắt trực giao với L, khi ký hiệu $D' = \mathrm{T}_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{L,\frac{\alpha}{2}}(D)$ (cũng cắt trực giao với L), theo a), ta có :

$$f = \mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_D.$$

2.3.23 Ta có : $\mathrm{Ret}_{D_3} \circ \mathrm{Ret}_{D_2} \circ \mathrm{Ret}_{D_1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3} \Leftrightarrow \mathrm{Ret}_{D_3} \circ \mathrm{Ret}_{D_2} = \mathrm{Ret}_{D_1}$ (1)

Nếu $D_2 \parallel D_3$, thì theo bài tập 2.3.22, tồn tại $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ sao cho $\mathrm{Ret}_{D_3} \circ \mathrm{Ret}_{D_2} = \mathrm{T}_{2\vec{u}}$, và như vậy, (1) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{T}_{2\vec{u}} = \mathrm{Ret}_{D_1}$, không thể xảy ra.

Ta giả thiết $D_2 \nparallel D_3$. Theo bài tập 2.3.22, $\mathrm{Ret}_{D_3} \circ \mathrm{Ret}_{D_2} = \mathrm{T}_{2\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{L,2\theta}$, trong đó L là đường vuông góc chung của D_2, D_3, $\{H_2\} = D_2 \cap L$, $\{H_3\} = D_3 \cap L$, $\vec{u} = \overrightarrow{H_2H_3}$, $\theta = \angle(D_2, D_3)\ [\pi]$.

Vậy : (1) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{T}_{2\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{L,2\theta} = \mathrm{Ret}_{D_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{u} = \vec{0} \\ L = D_1 \\ 2\theta \equiv \pi\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ L = D_1 \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 \perp D_2, D_1 \perp D_3, D_2 \perp D_3 \\ D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \varnothing \end{cases}$$

2.3.24 *1*) Giả thiết $D \,//\, D'$, và ký hiệu $\vec{u}$ là vectơ thỏa mãn $\vec{u} \perp \overrightarrow{D}$ và $D' = \mathrm{T}_{\vec{u}}(D)$.
Theo bài tập 2.3.22, $\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_{D} = \mathrm{T}_{2\vec{u}}$ và $\mathrm{Ret}_{D} \circ \mathrm{Ret}_{D'} = \mathrm{T}_{-2\vec{u}}$, vậy Ret_D và $\mathrm{Ret}_{D'}$ giao hoán khi và chỉ khi $2\vec{u} = -2\vec{u}$, tức là $\vec{u} = \vec{0}$, điều này quy về $D = D'$.
2) Giả thiết $D \not\parallel D'$ và ký hiệu L là đường vuông góc chung của D và D', $\{H\} = L \cap D$, $\{H'\} = L \cap D'$, $\vec{u} = \overrightarrow{HH'}$, $\theta = \angle(D, D')\ [\pi]$.
Dùng bài tập 2.3.22 :

$$\mathrm{Ret}_{D'} \circ \mathrm{Ret}_{D} = \mathrm{Ret}_{D} \circ \mathrm{Ret}_{D'} \Leftrightarrow \mathrm{T}_{2\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{L,2\theta} = \mathrm{T}_{-2\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{L,-2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{u} = -2\vec{u} \\ 2\theta = -2\theta\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \theta \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

(vì $D \not\parallel D'$).
Điều kiện sau cùng quy về điều kiện D và D' cắt nhau theo góc vuông.

2.3.25 *1*) Nếu $P \,//\, P'$, thì khi ký hiệu $\vec{u}$ là vectơ trực giao với P và thỏa mãn $P' = \mathrm{T}_{\vec{u}}(P)$, ta có :

$$\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_{P} = \mathrm{Ref}_{P} \circ \mathrm{Ref}_{P'} \Leftrightarrow T_{2\vec{u}} = T_{-2\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{u} = -2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow P = P'.$$

2) Nếu $P \not\parallel P'$, thì khi ký hiệu $D = P \cap P'$, và định hướng D và ký hiệu $\theta = \angle(P, P')\ [2\pi]$, ta có :

$$\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_{P} = \mathrm{Ref}_{P} \circ \mathrm{Ref}_{P'} \Leftrightarrow \mathrm{Rot}_{\vec{D},2\theta} = \mathrm{Rot}_{\vec{D},-2\theta} \Leftrightarrow 2\theta \equiv -2\theta\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ (vì } P \not\parallel P') \Leftrightarrow P \perp P'.$$

2.3.26 a) Khi ký hiệu $P' = \mathrm{T}_{\frac{\vec{v}}{2}}(P)$ (đặc biệt, $P' \,//\, P$), thì $\mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Ref}_{P} = \mathrm{T}_{\vec{v}}$, vậy $\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Ref}_{P} = \mathrm{Ref}_{P'}$.

◊ **Trả lời :** $\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Ref}_{P} = \mathrm{Ref}_{P'}$, trong đó $P' = \mathrm{T}_{\frac{\vec{v}}{2}}(P)$.

b) Một hướng của phép kéo theo là hiển nhiên.
Đảo lại, giả sử f là một phản dời hình của $\mathcal{E}_3$. Cho $A \in \mathcal{E}_3$. Theo 1.4.2.2), Mệnh đề - Định nghĩa 3, tồn tại $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ và $g : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ là phép co sao cho : $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g$ và $g(A) = A$.
Vì $\vec{g} = \vec{f}$, nên $\vec{g}$ là một phép đẳng cự vectơ nghịch ; vậy tồn tại một trục vectơ $\overrightarrow{D}$ và một số thực θ sao cho $\vec{g} = \mathrm{Ref}_{\vec{P}} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{D},\theta}$, trong đó $\vec{P} = \overrightarrow{D}^{\perp}$. Vì $g(A) = A$, nên khi ký hiệu D (tương ứng : P) là đường thẳng (tương ứng : mặt phẳng) đi qua A và có phương $\overrightarrow{D}$ (tương ứng : $\vec{P}$), ta có $g = \mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$, suy ra $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$.

Ta phân tích $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, trong đó $\vec{v} \in \vec{P}$, $\vec{w} = \vec{P}^{\perp} = \overrightarrow{D}$.
Khi đó $f = \mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \left(\mathrm{T}_{\vec{w}} \circ \mathrm{Ref}_P\right) \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$.

Vì $\vec{w} \in \vec{P}^{\perp}$, nên theo a), $\mathrm{T}_{\vec{w}} \circ \mathrm{Ref}_P = \mathrm{Ref}_{P'}$, trong đó $P' = \mathrm{T}_{\frac{\vec{w}}{2}}(P)$, và vì vậy :

$$f = \mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}.$$

Vì $\vec{v} \in \vec{P} = \vec{P'}$, nên $T_{\vec{v}}$ và $\mathrm{Ref}_{P'}$ giao hoán, từ đó : $f = \mathrm{Ref}_{P'} \circ (\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta})$.

Vì $\vec{v} \in \vec{P} = \overrightarrow{D}^{\perp}$, nên theo 2.3.2, Mệnh đề 5, $\mathrm{T}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta} = \mathrm{Rot}_{D',\theta}$, trong đó D' song song với D, và cuối cùng :

$$f = \mathrm{Ref}_{P'} \circ \mathrm{Rot}_{D',\theta} \text{ và } D' \perp P'.$$

c) Theo b), mọi phép phản dời hình f có dạng $T_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_P$ (trong đó $\vec{u} \in \vec{P}$) hoặc $\mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$ (trong đó $D \perp P$). Vì $T_{\vec{u}}$ và $\mathrm{Rot}_{D,\theta}$ đều có thể được phân tích thành hai phép phản chiếu (xem 2.3.2) nên f có thể phân tích thành nhiều nhất ba phép phản chiếu.

2.3.27 Cách thứ nhất

Ta có : $D' = P \cap P'$, trong đó P' là mặt phẳng chứa D và vuông góc với P.

Một điểm của D là : $A(0, 2, -1)$.

Một vectơ chỉ phương của D là (sau tích vectơ) : $\vec{u}\,(-1, 3, -2)$.

Một vectơ trực giao với P là : $\vec{v}\,(1, 2, 3)$.

Vì P' đi qua A và được định phương bởi $(\vec{u}, \vec{v})$, nên :

$$M(x, y, z) \in P' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y-2 & 3 & 2 \\ z+1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x + (y-2) - 5(z-1) = 0.$$

Cách thứ hai (sử dụng một chùm tuyến tính các mặt phẳng, xem bài tập 1.2.9).

Một vectơ trực giao với $\vec{P}$ (và khác vectơ không) là $\vec{v}\,(1, 2, 3)$, và $D' = P \cap \Pi$, trong đó Π là mặt phẳng chứa D và song song với $\vec{v}$.

Vì $D \subset \Pi$, nên tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho : $\Pi \mid (x + y + z - 1) + \lambda(x - y - 2z) = 0$,

tức là : $\Pi \mid (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 - 2\lambda)z - 1 = 0$.

Và, vì $\vec{v} \perp \vec{P}$, nên : $1 \cdot (1 + \lambda) + 2(1 - \lambda) + 3(1 - 2\lambda) = 0$,

suy ra $\lambda = \dfrac{6}{7}$, sau đó : $\Pi \mid 13x + y - 5z - 7 = 0$.

◊ **Trả lời :** $D' \begin{cases} 13x + y - 5z - 7 = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$.

2.3.28 Ta xác định các "công thức giải tích" cho phép lật quanh D.

Cho $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$. Khi ký hiệu $M * M'$ là trung điểm của MM' và $\vec{u}\,(1, 3, 1)$ định phương D thì :

$$M' = \mathrm{Ret}_D(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp D \\ M * M' \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ M * M' \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x'-x) + 3(y'-y) + (z'-z) = 0 \\ \dfrac{x'+x}{2} = \dfrac{z'+z}{2} - 2 \\ \dfrac{y'+y}{2} = 3\dfrac{z'+z}{2} + 1 \end{cases}$$

Sau các phép tính, ta được : $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{11}(-9x + 6y + 2z - 46) \\ y' = \dfrac{1}{11}(6x + 7y + 6z + 16) \\ z' = \dfrac{1}{11}(2x + 6y - 9z - 2) \end{cases}$.

Vì Ret_D là đối hợp, nên với mọi $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ta có :

$$\begin{aligned} M \in P' &\Leftrightarrow M' \in P \\ &\Leftrightarrow 2(-9x + 6y + 2z - 46) + (6x + 7y + 6z + 16) - (2x + 6y - 9z - 2) - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow -14x + 13y + 19z - 85 = 0. \end{aligned}$$

◊ **Trả lời :** $P' \mid 14x - 13y + 19z + 85 = 0$.

2.3.29 Cho $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$. Khi ký hiệu $M * M'$ là trung điểm của MM' và $\vec{u}$ (1, 1, -3), vectơ trực giao với Π, ta có :

$$M' = \mathrm{Ref}_{\Pi}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MM'} \perp \Pi \\ M * M' \in \Pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{MM'}, \vec{u}) \text{ phụ thuộc} \\ M * M' \in \Pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x' - x = \lambda \\ y' - y = \lambda \\ z' - z = -3\lambda \end{cases} \\ \dfrac{x'+x}{2} + \dfrac{y'+y}{2} - 3\dfrac{z'+z}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z - 3\lambda \\ 11\lambda + (2x + 2y - 6z - 2) = 0 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{11}(9x - 2y + 6z + 2) \\ y' = \dfrac{1}{11}(-2x + 9y + 6z + 2). \\ z' = \dfrac{1}{11}(6x + 6y - 7z - 6) \end{cases}$$

Vì Ref_{Π} đối hợp, nên với mọi $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ta có :

$M \in P' \Leftrightarrow M' \in P$

$\Leftrightarrow (9x - 2y + 6z + 2) + 4(-2x + 9y + 6z + 2) - 2(6x + 6y - 7z - 6) - 33 = 0$

$\Leftrightarrow -11x + 22y + 44z - 11 = 0.$

◊ **Trả lời :** $P' \mid x - 2y - 4z + 1 = 0.$

2.3.30 Tương tự như trong lời giải của bài tập 2.3.28. Ta được :

$$x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z), \quad y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z), \quad z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z).$$

rồi : $M(x, y, z) \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) = 2x + 2y - z + 1 \\ \frac{1}{3}(2x - y + 2z) = -\frac{1}{3}(2x + 2y - z) + 2 \end{cases}$

◊ **Trả lời :** $D' \begin{cases} 7x + 4y - 5z + 3 = 0 \\ 4x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$

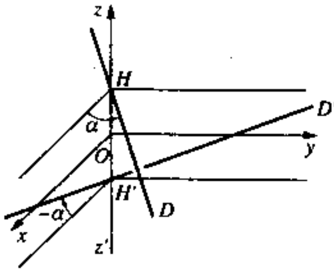
2.3.31 Tương tự như trong lời giải của bài tập 2.3.29. Ta được :

$$x' = \frac{1}{7}(6x + 3y - 2z + 6), \quad y' = \frac{1}{7}(3x - 2y + 6z - 18), \quad z' = \frac{1}{7}(-2x + 6y + 3z + 12).$$

rồi : $M(x, y, z) \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{7}(6x + 3y - 2z + 6) = \frac{2}{7}(-2x + 6y + 3z + 12) - 1 \\ \frac{1}{7}(3x - 2y + 6z - 18) = -\frac{1}{7}(-2x + 6y + 3z + 12) + 4 \end{cases}$

◊ **Trả lời :** $D' \begin{cases} 10x - 9y - 8z - 11 = 0 \\ x + 4y + 9z - 34 = 0 \end{cases}.$

2.3.32 Cách thứ nhất :



Đường vuông góc chung của D và D' là zz' ; các giao điểm của nó với D và D' theo thứ tự là $H(0, 0, h)$ và $H'(0, 0, -h)$. Mặt khác, vì D và D' nằm ngang và vì $\angle(\vec{i}, D) = \alpha$ và $\angle(\vec{i}, D') = -\alpha$, nên ta có : $\angle(\dot{D}, \dot{D'}) = -2\alpha$ (khi hướng $z'z$ "lên phía trên").

Áp dụng kết quả của bài tập 2.3.22 ta có :

$$f = \mathrm{T}_{-4h\vec{k}} \circ \mathrm{Rot}_{z'z,-4\alpha}.$$

Cách thứ hai :

Xác định các công thức cho tọa độ của ảnh $M'(x', y', z')$ từ $M(x, y, z)$ qua phép lật Ret_D, sau đó của ảnh $M''(x'', y'', z'')$ từ $M'(x', y', z')$ qua phép lật $\mathrm{Ret}_{D'}$:

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \\ y' = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha, \\ z' = -z + 2h \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = x'\cos 2\alpha - y'\sin 2\alpha \\ y'' = -x'\sin 2\alpha - y'\cos 2\alpha, \\ z'' = -z' - 2h \end{cases}$$

và vì vậy : $\begin{cases} x'' = x\cos 4\alpha + y\sin 4\alpha \\ y' = -x\sin 4\alpha - y\cos 4\alpha \\ z' = z - 4h \end{cases}$, do đó ta được $f = \mathrm{T}_{-4h\vec{k}} \circ \mathrm{Rot}_{z'z,-4\alpha}$.

◊ **Trả lời :** $f = \mathrm{T}_{-4h\vec{k}} \circ \mathrm{Rot}_{z'z,-4\alpha}$.

2.3.33 *a)* $\Omega = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$ và $\det(\Omega) = 1$, vậy $\Omega \in \mathbf{SO}_3(\mathbf{R})$, f là một phép dời hình, vậy f là một phép quay - trượt, $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$ trong đó $\vec{u} \in \overrightarrow{D}$.

Đường thẳng vectơ $\overrightarrow{D}$ là tập hợp các điểm bất biến của $\vec{f}$. Từ đó ta suy ra (qua tính toán) rằng $\overrightarrow{D}$ được định phương bởi $\vec{v}(1, -2, 1)$.

Vì $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(\Omega) = -1$, nên ta có $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$.

Đường thẳng afin D là tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ sao cho $\overrightarrow{Mf(M)}$ cộng tuyến với $\vec{v}$:

$$M \in D \Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 1) - x = \lambda \\ \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 2) - y = -2\lambda \\ \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1) - z = \lambda \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = z + \frac{1}{3} + 3\lambda \\ y = -2z + \frac{2}{3} \\ \lambda = -\frac{1}{9} \end{cases} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Cuối cùng, theo các phép tính trên, với mọi M thuộc D, $\overrightarrow{Mf(M)} = -\frac{1}{9}\vec{v}$, suy ra : $\vec{u}\left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right)$.

Nhận xét : Trong ví dụ này, vì $\theta \equiv \pi\ [\pi]$, nên ta có $f^2 = \mathrm{T}_{2\vec{u}}$, từ đó có thể suy ra $\vec{u}$.

◊ **Trả lời :** $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ret}_D$ trong đó $\vec{u} = -\frac{1}{9}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, $D \begin{cases} x = z \\ y = -2z + \frac{2}{3}. \end{cases}$

b) $\Omega=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$ và $\det(\Omega)=1$, vậy $\Omega\in \mathbf{SO}_3(\mathbf{R})$, f là một phép dời hình, vậy f là một phép quay - trượt.

Tập hợp các điểm bất biến của f là đường thẳng $D\begin{cases}y=-x+1\\z=-x+2\end{cases}$, vậy f là một phép quay, $f=\mathrm{Rot}_{D,\theta}$.

Ta định hướng D bởi vectơ $\vec{v}(1,-1,-1)$, chẳng hạn.

Vì $1+2\cos\theta=\mathrm{tr}(\Omega)=0$, nên $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$.

Sau đó, $\sin\theta$ có dấu của $[\vec{i},f(\vec{i}),\vec{v}]=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}=1>0$, và do vậy $\theta\equiv\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

◊ **Trả lời :** $f=\mathrm{Rot}_{D,\theta}$ trong đó $D\begin{cases}y=-x+1\\z=-x+2\end{cases}$ được định hướng bởi $\vec{v}(1,-1,-1)$ và $\theta\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

c) $\Omega=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$ và $\det(\Omega)=1$, vậy $\Omega\in \mathbf{SO}_3(\mathbf{R})$, f là một phép dời hình, vậy f là một phép quay - trượt, $f=\mathrm{T}_{\vec{u}}\circ\mathrm{Rot}_{D,\theta}$, trong đó $\vec{u}\in\vec{D}$.

Đường thẳng vectơ $\vec{D}$ là tập hợp các điểm bất biến của f. Từ đó ta suy ra rằng $\vec{D}$ được định phương bởi $\vec{v}(-1,1,1)$.

Vì $1+2\cos\theta=\mathrm{tr}(\Omega)=0$, nên $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

Sau đó, $\sin\theta$ có dấu của $[\vec{i},f(\vec{i}),\vec{v}]=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-1<0$, và do vậy $\theta\equiv-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Đường thẳng afin D là tập hợp các điểm $M(x,y,z)$ sao cho $\overrightarrow{Mf(M)}$ cộng tuyến với $\vec{v}$:

$$M\in D\Leftrightarrow\begin{cases}(-z-2)-x=-((y+1)-z)\\(-x+1)-y=(y+1)-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+2z+1=0\\x+2y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z-\dfrac{2}{3}\\y=z+\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Cuối cùng, $\vec{u}=\overrightarrow{Af(A)}$, trong đó A là một điểm bất kỳ của D, chẳng hạn $A\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},0\right)$; từ đó có $\vec{u}\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

◊ **Trả lời :** $f=\mathrm{T}_{\vec{u}}\circ\mathrm{Rot}_{D,\theta}$, trong đó $\vec{u}=\dfrac{4}{3}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $D=\begin{cases}x=-z-\dfrac{2}{3}\\y=z+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ được định hướng bởi $\vec{u}$, $\theta\equiv-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

d) $\Omega=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{pmatrix}\in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$ và $\det(\Omega)=-1$, vậy $\Omega\in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})-\mathbf{SO}_3(\mathbf{R})$, f là một phản - dời hình.

Tập hợp các điểm bất biến của f (sau các phép tính) là mặt phẳng $P|4x+4y+2z=1$. Xét một điểm A của P ; vì, với mọi M thuộc $\mathcal{E}_3$, $\overrightarrow{Af(M)}=\overrightarrow{f(A)f(M)}=\vec{f}(\overrightarrow{AM})$, và rằng $\vec{f}$ là một phép phản chiếu qua $\vec{P}$, nên f là một phép phản chiếu qua mặt phẳng đi qua A và được định phương bởi $\vec{P}$, tức là qua P.

◊ **Trả lời :** $f = \mathrm{Ref}_P,\ P|4x+4y+2z=1.$

2.3.34 *a*) $\Omega = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ và $\det(\Omega) = -1$, vậy $\Omega \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R}) - \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$, f là một phép phản-dời hình.

Một phép tính đơn giản chứng tỏ f có một và chỉ một điểm bất biến $A(0, 1, 2)$. Theo bài tập 2.3.26 và vì mọi phép đối xứng-trượt không phải là phép phản chiếu đều không có điểm bất động, nên f là một hợp $\mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$, trong đó $P \perp D$ và $P \cap D = \{A\}$.

Ta hãy xác định các phần tử đặc trưng của $\overrightarrow{f} = \mathrm{Ref}_{\vec{P}} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{D},\theta}$.

Đường thẳng vectơ $\overrightarrow{D}$ là tập hợp các phản - bất biến của $\overrightarrow{f}$, vậy $\overrightarrow{D}$ được định phương bởi $\vec{v}(1,-1,1)$; ta định hướng $\overrightarrow{D}$ bởi $\vec{v}$.

Ta có : $1+2\cos\theta = \mathrm{tr}(\Omega) = 0$, vậy $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

Sau đó, $\sin\theta$ có dấu của $[\vec{i}, f(\vec{i}), \vec{v}] = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 > 0$, và vì vậy $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

◊ **Trả lời :** $f = \mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Rot}_{D,\theta}$, trong đó D là trục đi qua $A(0, 1, 2)$ và được định phương và định hướng bởi $\vec{v}(1,-1,1)$, $P \mid x - y + z + 1 = 0$, $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

b) $\Omega = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ và $\det(\Omega) = -1$, vậy $\Omega \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R}) - \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$, f là một phép phản-dời hình.

Một phép tính đơn giản chứng tỏ f không có điểm bất động nào. Theo bài tập 2.2.26, f là một phép đối xứng-trượt, $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_P$, $\vec{u} \in \vec{P} - \{\vec{0}\}$.

Để tính $\vec{u}$, ta chú ý rằng vì $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ và Ref_P giao hoán, nên

$$f^2 = \mathrm{T}_{\vec{v}} \circ (\mathrm{Ref}_P \circ \mathrm{Ref}_P) \circ \mathrm{T}_{\vec{u}} = \mathrm{T}_{2\vec{u}}.$$

Khi ký hiệu $B = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ và đồng nhất $M(x, y, z)$ với X, ta có :

$$f \circ f(X) = \Omega(\Omega X + B) + B = \Omega^2 X + \Omega B + B = X + (\Omega + \mathrm{I}_3)B.$$

Vì $(\Omega + \mathrm{I}_3)B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\ -8\\ -2\end{pmatrix}$, ta suy ra : $\vec{u} = \frac{1}{3}(5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k})$.

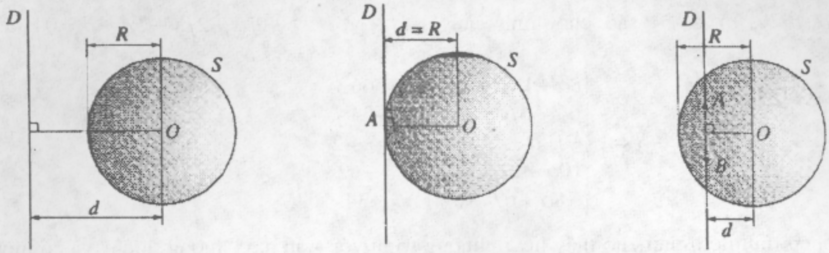
Để xác định P, ta tìm các điểm bất biến của $f \circ \mathrm{T}_{-\vec{u}}$ $(= \mathrm{Ref}_P)$.

Vì $M(x,y,z) \mapsto \mathrm{Ref}_P(M)(X,Y,Z)$ trong đó $\begin{cases} X = x' - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(x-2y-2z+1)\\ Y = y' + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(-2x+y-2z+1)\\ Z = z' + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(-2x-2y+z+1)\end{cases}$,

nên ta suy ra $P|(2x+2y+2z-1=0$.

◊ **Trả lời :** $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{Ref}_P$, trong đó $P| \ x+y+z = \frac{1}{2}$ và $\vec{u} = \frac{1}{3}(5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k})$.

2.3.35 Ký hiệu $S = S(O\ ;R)$, $d = d(O, D)$. Khảo sát dễ dàng.



$d > R$

Đường thẳng nằm ngoài hình cầu $S \cap D = \varnothing$

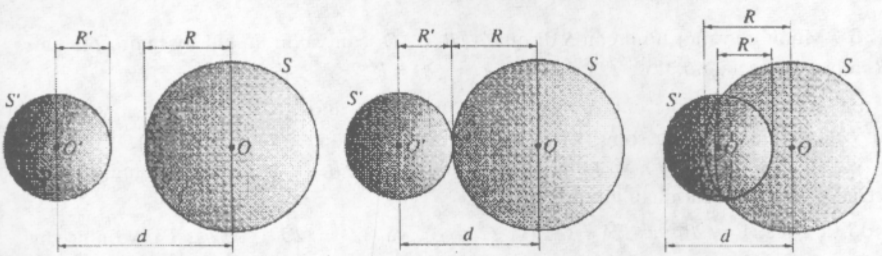
$d = R$

Đường thẳng tiếp xúc hình cầu $S \cap D = \{A\}$

$d < R$

Đường thẳng đi qua hình cầu $S \cap D = \{AB\}$

2.3.36 Ký hiệu $S = S(O\ ;R)$, $S' = S(O'\ ;R')$, $d = d(O', O')$. Khảo sát dễ dàng.



$d > R + R'$

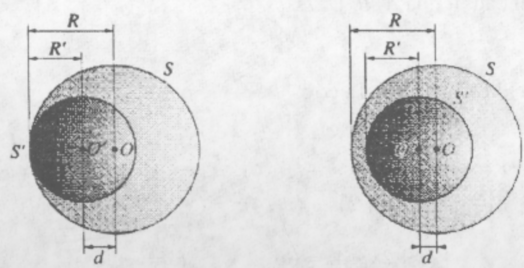
Các hình cầu ngoài nhau

$d = R + R'$

Các hình cầu tiếp xúc ngoài

$|R - R'| < d < R + R'$

Các hình cầu cất nhau theo một đường tròn



$d = |R - R'|$

Các hình cầu tiếp xúc trong

$d < |R - R'|$

Hình cầu này nằm trong hình cầu kia

Nhận xét : Trong trường hợp $O \neq O'$ và $|R - R'| \leq d \leq R + R'$, các hình cầu S và S' cắt nhau theo một đường tròn C (đường tròn - điểm nếu $|R - R'| = d$ hay $d = R + R'$) và C thuộc một mặt phẳng P gọi là *mặt phẳng đẳng phương* của hai hình cầu ; với các ký hiệu hiển nhiên sau đây :

$$S|\, x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$$

$$S'|\, x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + 2\gamma' z + \delta' = 0$$

$$P|\, 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + 2(\gamma - \gamma')z + (\delta - \delta') = 0.$$

Mặt phẳng P trực giao với (OO') (nếu $O \neq O'$).

Ta có : $S \cap S' = S \cap P = S' \cap P$.

2.3.37 Năm điểm đang xét đồng cầu (cùng nằm trên một hình cầu) khi và chỉ khi tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ sao cho hình cầu $S \mid x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma y + \delta = 0$ chứa chúng.

$$\text{Ta có : } A, B, C, D, E \in S \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 14\beta + 2\gamma + \delta = -66 \\ 6\alpha - 6\beta + 12\gamma + \delta = -54 \\ -10\alpha + 2\beta + 8\gamma + \delta = -42 \\ 10\alpha + 12\beta - 2\gamma + \delta = -62 \\ -8\alpha + 6\beta - 6\gamma + \delta = -34. \end{cases}$$

Một phép tính đơn giản cho thấy hệ 5 phương trình với 4 ẩn này "tương thích" và có một và chỉ một nghiệm : $\alpha = \beta = \gamma = -1$, $\delta = -42$.

Điều này chứng tỏ cả năm điểm ấy đồng cầu và chúng nằm trên một và chỉ một mặt cầu S

có PTĐ : $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 42 = 0$

hoặc $\quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 45$.

◊ **Trả lời :** S có tâm (1, 1, 1) và bán kính $3\sqrt{5}$.

2.3.38 Muốn cho một hình cầu S đi qua A, B, C, D, cần và đủ là, khi ký hiệu Ω là tâm và R là bán kính của nó, thì : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = R$.

Các mặt phẳng trung trực của AB và AC cắt nhau theo đường thẳng Δ. Nếu mặt phẳng trung trực P của AD song song với Δ, thì vì $(AD) \perp P$, nên $(AD) \perp \Delta$, vậy (AD) sẽ song song với mặt phẳng (ABC), và như vậy cả bốn điểm A, B, C, D sẽ đồng phẳng, là điều loại trừ. Vậy P và Δ cắt nhau tại một điểm Ω.

Khi đó ta có $\Omega A = \Omega B$ và $\Omega A = \Omega C$ (vì $\Omega \in \Delta$), và $\Omega A = \Omega D$ (vì $\Omega \in P$), và như vậy hình cầu S tâm Ω và bán kính ΩA đi qua A, B, C, D.

Đảo lại, nếu một hình cầu đi qua A, B, C, D, thì tâm của nó phải ở trên mỗi mặt phẳng trung trực của AB, AC, AD, và như vậy đó là Ω và bán kính là ΩA. Điều này chứng tỏ có một và chỉ một hình cầu đi qua A, B, C, D.

Ví dụ :

Ta ký hiệu $\Omega(x, y, z)$ là tâm của S. Ta có :

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \\ x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \\ x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4z = -6 \\ 4x - 2y - 2z = -6 \\ -4x - 10y - 10z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Tiếp đó : $\Omega A^2 = 14$. Vậy : $\quad S \mid (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 14$.

◊ **Trả lời :** $\quad S \mid x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z = 12$.

2.3.39 *a*) Nếu một đường thẳng D gặp D_2 và D_3, thì vì D_2 và D_3 là nằm ngang trong các mặt phẳng nằm ngang phân biệt, nên D không nằm ngang, và như vậy D có một HPTĐ $\left.\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}\right|$, $a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$.

Ta có : • $D \cap D_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow b + q = 0$ $\qquad$ • $D \cap D_3 \neq \varnothing \Leftrightarrow p = 1$

$$\bullet\, D \cap D_1 \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists z \in \mathbb{R} \begin{cases} az + p = 0 \\ bz + q = 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\exists z \in \mathbb{R} \begin{cases} az + 1 = 0 \\ bz + q = 1 \end{cases}\right) \text{ (vì } p = 1).$$

$$\Leftrightarrow (\, a \neq 0 \text{ và } -\frac{b}{a} + q = 1).$$

Như vậy : $\begin{cases} D \cap D_1 \neq \varnothing \\ D \cap D_2 \neq \varnothing \\ D \cap D_3 \neq \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -b \\ p = 1 \\ a \neq 0 \text{ và } -b + aq = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \text{ và } a \neq -1 \\ p = 1,\ b = -\dfrac{a}{1+a},\ q = \dfrac{a}{1+a} \end{cases}$.

◊ **Trả lời :** Các đường thẳng gặp D_1, D_2, D_3 là các đường thẳng $D(a) \begin{cases} x = az + 1 \\ y = \dfrac{a(1-z)}{1+a} \end{cases}$, $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

b) Ký hiệu H_a là hình chiếu vuông góc của O lên $D(a)$. Tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $H_a\left(az+1, \dfrac{a(1-z)}{1+a}, z\right)$ và, vì một vectơ chỉ phương của $D(a)$ là $\vec{u}_a\left(a, -\dfrac{a}{1+a}, 1\right)$, nên ta có :

$$\overrightarrow{OH_a} \cdot \overrightarrow{u_a} = 0 \Leftrightarrow a(az+1) - \frac{a^2(1-z)}{(1+a)^2} + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 + \frac{a^2}{(1+a)^2} + 1\right)z + a - \frac{a^2}{(1+a)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+a+1)^2 z + a(a^2+a+1) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{a}{a^2+a+1}.$$

Từ đó ta suy ra các tọa độ (x, y, z) của H_a :

$$x = \frac{a+1}{a^2+a+1}, \quad y = \frac{a(a+1)}{a^2+a+1}, \quad z = -\frac{a}{a^2+a+1}.$$

1) Ta chú ý rằng : $x + y + z = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Vậy quỹ tích của H_a bao hàm trong đường tròn $\Gamma \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, thiếu các điểm $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ (ứng với $a = -1$, $a = 0$) và điểm $C(0, 1, 0)$.

2) Ngược lại, giả sử $M(x, y, z)$ là một điểm của Γ khác với A, B, C.

Nếu $x = 0$, thì $2yz = (y+z)^2 - (y^2+z^2) = 0$, vậy $y = 0$ hoặc $z = 0$, $M = A$ hoặc $M = C$, bị loại.

Vậy : $x \neq 0$.

Ký hiệu $a = \dfrac{y}{x}$. Khi đó ta có $\begin{cases} (1+a)x + z = 1 \\ (1+a^2)x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, suy ra : $(1+a^2)x^2 + (1-(1+a)x)^2 = 1$,

và do vậy, vì $x \neq 0$: $x = \dfrac{a+1}{a^2+a+1}$, và $y = \dfrac{a(a+1)}{a^2+a+1}$, và cuối cùng $z = 1 - x - y = -\dfrac{a}{a^2+a+1}$.

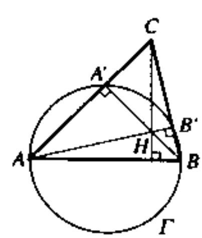
Hơn nữa : $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

◊ **Trả lời : Đường tròn** $\Gamma \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, thiếu ba điểm $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

2.3.40 Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_3$, ta có :

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \text{ và } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \end{cases}$$

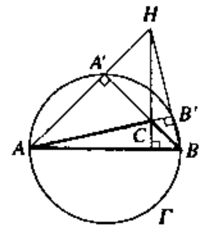
Khi ký hiệu S là hình cầu đường kính AB, H là trực tâm của ABC và D là đường vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H, ta có $E = S \cap D$.



Để xác định $S \cap D$, ta sẽ sử dụng bài tập 2.3.35. Ta ký hiệu Γ là đường tròn đường kính AB, trong mặt phẳng ABC.

• Nếu C ở ngoài Γ, thì các đường cao AA', BB' kẻ từ A và B trong ABC sẽ cắt nhau tại H ở trong Γ, và như vậy $S \cap D$ gồm hai điểm.

• Nếu C ở bên trong Γ thì các đường cao AA' và BB' kẻ từ A và B trong ABC cắt nhau tại H ở ngoài Γ, và như vậy $S \cap D = \varnothing$.



◊ **Trả lời :** $E = S \cap D$, trong đó S là hình cầu đường kính AB và D là đường vuông góc tại H (trực tâm của ABC) với mặt phẳng (ABC). Khi ký hiệu Γ là đường tròn đường kính AB, trong mặt phẳng ABC, ta có :

$S \cap D$ gồm hai điểm phân biệt nếu C ở bên ngoài Γ (tức là nếu $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} > 0$)

$S \cap D$ là đơn tử $\{C\}$ nếu $C \in \Gamma$ (tức là nếu $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$)

$S \cap D$ là tập rỗng nếu C ở bên trong Γ (tức là nếu $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} < 0$).

C 2.1 **I** *1)* $\overline{MA}.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}) = \overline{MA}.\overline{MA'}$

$$= (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A})(\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) = \Omega M^2 - R^2.$$

2) Áp dụng định lý Pythagore : $\Omega M^2 = MT^2 + \Omega T^2$.

3) Vì $\Omega(a,b)$ và $R^2 = a^2 + b^2 - c$, nên ta có :

$$C(M) = \Omega M^2 - R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c.$$

4) a) α) Nếu A, B, C, D đồng chu, thì $\overline{MA}.\overline{MB} = C(M) = \overline{MC}.\overline{MD}$.

β) Ngược lại, giả thiết $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$. Ký hiệu D' là giao điểm của C với (MC), ta có :

$$\overline{MC}.\overline{MD'} = \overline{MA}.\overline{MB} = C(M) = \overline{MC}.\overline{MD},$$ từ đó suy ra $(M \neq C)$: $D' = D$.

b) Cũng lập luận tương tự như ở a).

II

1) Cho K là trung điểm của $\Omega\Omega'$. Với mọi $M \in \mathcal{E}_2$, ta có :

$M \in \Delta_{C,C'} \Leftrightarrow \Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - R'^2$

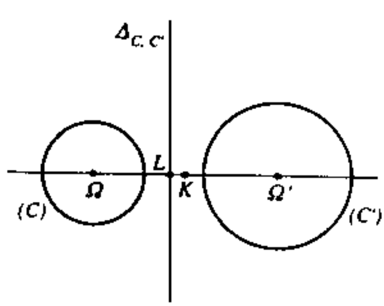
$\Leftrightarrow \Omega M^2 - \Omega' M^2 = R^2 - R'^2$.

Nhưng

$\Omega M^2 - \Omega' M^2 = (\overrightarrow{\Omega K} + \overrightarrow{KM})^2 - (\overrightarrow{\Omega' K} + \overrightarrow{KM})^2$.

$= 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}.\overrightarrow{KM}$ vì $\Omega K = \Omega' K$.

Như vậy : $M \in \Delta_{C,C'} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}.\overrightarrow{KM} = R^2 - R'^2$. Vậy $\Delta_{C,C'}$ là một đường thẳng, vuông góc với $(\Omega\Omega')$ tại một điểm L sao cho $\overline{KL} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{\Omega\Omega'}}$.



2) *a*) Xem 1).

b) $\begin{cases} C(A) = C'(A) = 0 \\ C(B) = C'(B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \Delta_{C,C'} \\ B \in \Delta_{C,C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{C,C'} = (AB).$

c) $A \in \Delta_{C,C'}$ và $\Delta_{C,C'} \perp (\Omega\Omega')$

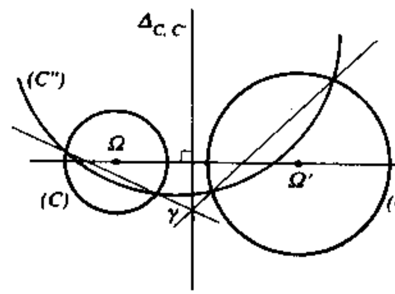
3) $A \quad \in \Delta_{C,C'} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$

$$\Leftrightarrow 2(a' - a)x + 2(b' - b)y + (c - c') = 0.$$

4) *a*) Vì Ω, Ω', Ω'' không thẳng hàng, nên các trục đẳng phương $\Delta_{C,C'}$ và $\Delta_{C,C''}$ đồng quy tại một điểm ký hiệu là γ. Ta có :

$$\left.\begin{matrix} C(\gamma) = C'(\gamma) \\ C(\gamma) = C''(\gamma) \end{matrix}\right\} \Rightarrow C'(\gamma) = C''(\gamma) \Rightarrow \gamma \in \Delta_{C',C''}.$$

b) Tồn tại một đường tròn (C'') cắt (C) và (C'). Tâm đẳng phương γ của (C), (C'), (C'') là giao điểm của các trục đẳng phương $\Delta_{C,C''}$ và $\Delta_{C',C''}$, khi đó trục đẳng phương $\Delta_{C,C'}$ là đường vuông góc kẻ từ γ xuống ($\Omega\Omega'$).

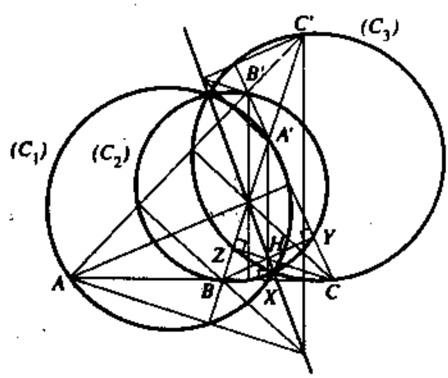


5) Giả sử (C_1), (C_2), (C_3) là các đường tròn đường kính AA', BB', CC', và X, Y, Z là chân các đường cao xuất phát từ A', B, C trong tam giác $A'BC$, H là trực tâm của $A'BC$.

Vì $X \in (C_1)$, $Y \in (C_2)$, $Z \in (C_3)$, nên ta có :

$C_1(H) = \overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{HX}$, $C_2(H) = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HY}$,

$C_3(H) = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HZ}$.



Mặt khác :

$\overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{HX} = \overrightarrow{HA'}.\left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BX}\right) = \overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HY} = \overrightarrow{HB}.\left(\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{A'Y}\right) = \overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HZ} = \overrightarrow{HC}.\left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BZ}\right) = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HB}$

$= \left(\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{A'C}\right)\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{HB}.$

Vậy $C_1(H) = C_2(H) = C_3(H)$.

Tương tự cho ba trực tâm kia.

Điều này chứng tỏ rằng (C_1), (C_2), (C_3) có chung trục đẳng phương, và bốn trực tâm của các tam giác $A'BC$, $AB'C$, ABC', $A'B'C'$ thẳng hàng trên trục ấy.

III

1) Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác $\Omega\Omega'A$, và $C(\Omega') = \Omega\Omega'^2 - R^2$,

$C'(\Omega) = \Omega'\Omega^2 - R'^2$. Chú ý rằng, nếu $R^2 + R'^2 = \Omega\Omega'^2$, thì ($C$) và ($C'$) đúng là cắt nhau.

2) Vì rằng $\Omega(a, b)$, $\Omega'(a', b')$, $R^2 = a^2 + b^2 - c$, $R'^2 = a'^2 + b'^2 - c'$, nên ta có :

$$R^2 + R'^2 - \Omega\Omega'^2 = 2aa' + 2bb' - c - c'.$$

3) $\begin{cases} (C'') \perp (C) \\ (C'') \perp (C') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(\Omega'') = R''^2 \\ C'(\Omega'') = R''^2 \end{cases} \Rightarrow C(\Omega'') = C'(\Omega'') \Rightarrow \Omega'' \in \Delta_{C,C'}$

$$\Rightarrow (\gamma\Omega'') \perp (\Omega\Omega')$$

IV

1) a) α) Cho $(\Gamma) \in \mathfrak{F}_{C,C'}$. Ta có :

$$A \in \Delta_{C,C'} = \Delta_{C,\Gamma} \Rightarrow C(A) = \Gamma(A) \Rightarrow \Gamma(A) = 0 \Rightarrow A \in (\Gamma).$$

Tương tự : $B \in (\Gamma)$

β) Ngược lại, cho (Γ) là một đường tròn của $\mathcal{E}_2$ đi qua A và B. Khi đó $\Delta_{C,\Gamma} = (AB) = \Delta_{C,C'}$

b) Cũng lập luận như ở a).

c) • Cho (Γ) là một đường tròn của $\mathcal{E}_2$ có tâm trên $(\Omega\Omega')$, ω là tâm của nó, ρ là bán kính của nó.

Vì $\Gamma(H) = H\omega^2 - \rho^2$ và $C(H) = H\Omega^2 - R^2 = HI^2$, nên ta có :

$\Gamma(H) = C(H) \Leftrightarrow H\omega^2 = \rho^2 + HI^2 \Leftrightarrow \Gamma \perp (C)$, trong đó (C) là đường tròn đường kính IJ.

• Để một đường tròn - điểm $\{m\}$ thuộc $\mathfrak{F}_{C,C'}$, cần và đủ là nó trực giao với (C) và nó nằm trên $(\Omega\Omega')$, tức là $m = I$ hoặc $m = J$.

2) Cho (Γ) một đường tròn của $\mathcal{E}_2$, với phương trình là $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$

Vì $\begin{cases} \Delta_{C,C'} : 2(a'-a)x + 2(b'-b)y + (c-c') = 0 \\ \Delta_{C,\Gamma} : 2(u-a)x + 2(v-b)y + (c-w) = 0 \end{cases}$, nên để $\Gamma \in \mathfrak{F}_{C,C'}$ cần và đủ là tồn tại $\mu \in \mathbb{R}$ sao cho : $(2(u-a), 2(v-b), c-w) = \mu(2(a'-a), 2(b'-b), c-c')$, tức là :

$$\begin{cases} u = \mu a' + (1-\mu)a \\ v = \mu b' + (1-\mu)b \\ w = \mu c' + (1-\mu)c \end{cases}.$$

3) Ta ký hiệu $\overline{H\Omega} = \alpha, \overline{H\Omega'} = \alpha', \overline{H\omega} = \beta$.

Vì $C(H) = C'(H) = \Gamma(H)$, ta có $\alpha^2 - R^2 = \alpha'^2 - R'^2 = \beta^2 - \rho^2$,

từ đó suy ra : $\rho^2 - R^2 = \beta^2 - \alpha^2, \rho^2 - R'^2 = \beta^2 - \alpha'^2, R^2 - R'^2 = \alpha^2 - \alpha'^2$.

Vậy : $\rho^2\,\overline{\Omega\Omega'} + R^2\,\overline{\Omega'\omega} + R'^2\,\overline{\omega\Omega} = \rho^2(\alpha' - \alpha) + R^2(\beta - \alpha') + R'^2(\alpha - \beta)$

$$= (\rho^2 - R^2)\alpha' + (R^2 - R'^2)\beta + (R'^2 - \rho^2)\alpha$$
$$= (\beta^2 - \alpha^2)\alpha' + (\alpha^2 - \alpha'^2)\beta + (\alpha'^2 - \beta^2)\alpha$$
$$= (\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\alpha - \beta).$$

C 2.2 *1*) Khi ký hiệu $M(x, y)$, $M' = I(M)$ (x', y'), thì tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, và:

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k \Leftrightarrow \lambda x^2 + \lambda y^2 = k \Leftrightarrow \lambda = \frac{k}{x^2 + y^2}.$$

từ đó :
$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}.$$

Nếu $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, thì tọa vị z' của $I(M)$ là :

$$z' = x' + iy' = \frac{kx + iky}{x^2 + y^2} = \frac{k}{x - iy} = \frac{k}{\bar{z}}.$$

2) a) Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2 - \{0\}$, ta có :

$$I(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{kx}{x^2 + y^2} = x \\ \dfrac{ky}{x^2 + y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 - k) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = k$$

b) Cho $D \mid ax + by + c = 0$, $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3, (a,b) \neq (0,0)$

Vì I là đối hợp, nên $I(D)$ có phương trình : $a\dfrac{kx}{x^2+y^2}+b\dfrac{ky}{x^2+y^2}+c=0,$

tức là : $c(x^2+y^2)+akx+bky=0.$

Nếu $c \neq 0$ (tức là nếu $O \notin D$), thì $I(D)$ là đường tròn phương trình $x^2+y^2+\dfrac{ak}{c}x+\dfrac{bk}{c}y=0,$ đường tròn này đi qua điểm O.

Nếu $c=0$ (tức là nếu $O \in D$), thì $I(D)=D$.

2) Cho $C\,|\,x^2+y^2+2ax+2by+c=0,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Khi đó $I(C)$ có phương trình :

$$\left(\frac{kx}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{ky}{x^2+y^2}\right)^2+2a\frac{kx}{x^2+y^2}+2b\frac{ky}{x^2+y^2}+c=0,$$

phương trình này sau khi đơn giản đi sẽ quy về :

$$c(x^2+y^2)+2akx+2bky+k^2=0.$$

Nếu $c=0$ (tức là nếu $O\in C$), thì $I(C)$ là một đường thẳng không đi qua O.

Nếu $c\neq 0$ (tức là nếu $O\notin C$), thì $I(C)$ là một đường tròn không đi qua O.

3) a) Chú ý : $f\circ g\circ f^{-1}=f\circ g\circ f$, vì f là đối hợp.

Ta chọn gốc tại cực của f, sao cho trong mặt phẳng phức (khi đồng nhất điểm và tọa vị) thì : $f: z\mapsto \dfrac{k}{\bar z}$.

Tồn tại $a\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ sao cho $g: z\mapsto a+\dfrac{\lambda}{\bar z-\bar a}$.

Nếu $a=0$, tức là nếu f và g có cùng một cực, thì $f\circ g\circ f^{-1}$ là phép nghịch đảo cực O và tỷ số $\dfrac{k^2}{\lambda}$.

Giả thiết $a\neq 0$. Khi đó, với mọi z thuộc $\mathbb{C}$, ta có :

$$f(z)=\frac{k}{\bar z}\ (\text{nếu } z\neq 0),\quad g\circ f(z)=a+\frac{\lambda}{\left(\dfrac{k}{\bar{\bar z}}\right)-\bar a}=a+\frac{\lambda z}{k-\bar a z}\left(\text{nếu } z\neq\frac{k}{\bar a}\right),$$

$$f\circ g\circ f(z)=\frac{k}{\bar a+\dfrac{\lambda\bar z}{k-a\bar z}}=\frac{k(k-a\bar z)}{\bar a k+(\lambda-|a|^2)\bar z},\quad \left(\text{nếu } z\neq\frac{ak}{|a|^2-\lambda}\right).$$

Nếu $\lambda=|a|^2$, thì $f\circ g\circ f$ là một phép đối xứng qua một đường thẳng, tức là một phép phản chiếu.

Ta giả thiết $\lambda\neq|a|^2$. Khi đó ta có :

$$f\circ g\circ f(z)=\frac{ak}{|a|^2-\lambda}+\frac{\dfrac{\lambda k^2}{(|a|^2-\lambda)^2}}{\bar z-\left(\dfrac{ak}{|a|^2-\lambda}\right)}.$$

Vậy $f\circ g\circ f$ là phép nghịch đảo cực $\dfrac{ak}{|a|^2-\lambda}$, và tỷ số $\dfrac{\lambda k^2}{(|a|^2-\lambda)^2}$.

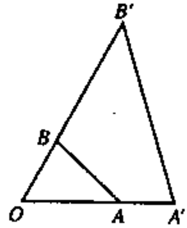
b) Giả thiết $f\circ g\circ f^{-1}$ là một phép nghịch đảo, và ký hiệu C là đường tròn nghịch đảo của g. Với mọi M thuộc $\mathcal{E}_2$, ta có :

$$f\circ g\circ f^{-1}(M)=M \Leftrightarrow g(f^{-1}(M))=f^{-1}(M)\Leftrightarrow f^{-1}(M)\in C\Leftrightarrow M\in f(C).$$

Như vậy, đường tròn nghịch đảo của $f\circ g\circ f^{-1}$ là $f(C)$; và $f(C)$ đúng là một đường tròn vì C là một đường tròn không đi qua O.

4) Vì $OA.OA' = OB.OB' = k$, nên ta có : $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, vậy các tam giác OAB và $OB'A'$ đồng dạng (nghịch), từ đó :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}.$$



Cuối cùng :

$$A'B' = AB.\frac{OA'}{OB} = \frac{AB.(OA.OA')}{OA.OB}$$
$$= \frac{k.AB}{OA.OB}.$$

5) Theo 4) : $B'D' = \frac{BD}{AB.AD}$, $B'C' = \frac{BC}{AB.AC}$, $C'D' = \frac{CD}{AC.AD}$.

• Theo bất đẳng thức tam giác, $B'D' \leq B'C' + C'D'$.

tức là $\frac{BD}{AB.AD} \leq \frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD}$.

suy ra : $AC.BD \leq AD.BC + AB.CD$.

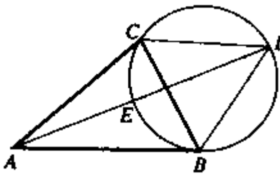
• Có đẳng thức trong bất đẳng thức Ptolémée khi và chỉ khi $B'D' = B'C' + C'D'$, tức là khi B', C', D' là thẳng hàng theo thứ tự đó, điều này tương đương (xem 2) với điều kiện A, B, C, D đồng chu hoặc thẳng hàng theo thứ tự đó.

6) • Nếu $M \neq E$, thì theo bất đẳng thức Ptolémée :

$MD.BC < MB.DC + MC.DB$.

Vậy : $MD < MB + MC$.

và suy ra : $AD \leq MA + MD < MA + MB + MC$.



• Nếu $M = E$, thì theo sự khảo sát về trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Ptolémée, ta có :

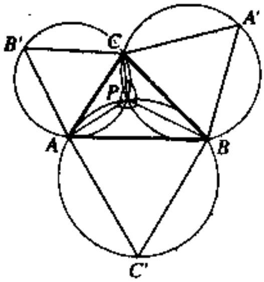
$$ED.BC = EB.DC + EC.DB,$$

vậy : $ED = EB + EC$.

và : $AD = EA + ED = EA + EB + EC$.

7) Theo 6), tồn tại một và chỉ một điểm M làm cực tiểu $MA + MB + MC$, và điểm đó, ký hiệu là P, là giao điểm của Γ_A và (AA'). Cũng với lý do đó, P cũng là giao điểm của Γ_B và (BB'), và cả của Γ_C và (CC').

Như vậy cả ba đường thẳng (AA'), (BB'), (CC') và ba đường tròn Γ_A, Γ_B, Γ_C cùng đi qua P.



Vì $\widehat{APB} = \pi - \widehat{AC'B} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, nên các đường thẳng (AA'), (BB'), (CC') tạo với nhau những góc $\frac{2\pi}{3}$.

C 2.3 I *1*) Do tính đồng dạng của các tam giác :

EMM' và ENN' : $\dfrac{EM}{EN}=\dfrac{MM'}{NN'}$ $\quad$ EMM'' và ENN'' : $\dfrac{EM}{EN}=\dfrac{MM''}{NN''}$

AMM' và CNN'' : $\dfrac{MM'}{NN''}=\dfrac{AM}{CN}$ $\quad$ DMM'' và BNN' : $\dfrac{MM''}{NN'}=\dfrac{MD}{NB}$.

2) $\dfrac{EM^2}{EN^2}=\dfrac{MM'}{NN'}.\dfrac{MM''}{NN''}=\dfrac{MM'}{NN''}.\dfrac{MM''}{NN'}=\dfrac{AM}{CN}.\dfrac{MD}{NB}$.

3) Xem **C 2.1** I 1), phương tích của một điểm đối với đường tròn.

Hoặc là, do tính đồng dạng của các tam giác MPD và MAQ : $\dfrac{MP}{MA}=\dfrac{MD}{MQ}$.

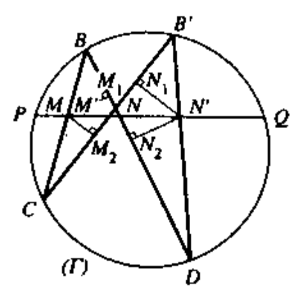
4) Ký hiệu $a=EP=EQ$, $x=EM$, $y=EN$. Ta có :

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{MA.MD}{NC.NB}=\frac{MP.MQ}{NP.NQ}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2},$$

suy ra $x=y$.

II A

1) Ký hiệu M_1, M_2 (tương ứng : N_1, N_2) là các hình chiếu vuông góc của M (tương ứng : N') trên (BD) và $(B'C)$. Do tính đồng dạng của các tam giác :



NM_1M và NN_2N' : $\dfrac{M_1M}{N_2N'}=\dfrac{NM}{NN'}$

$M'M_2M$ và $M'N_1N'$: $\dfrac{MM_2}{N'N_1}=\dfrac{M'M}{M'N'}$

BM_1M và $B'N_1N'$: $\dfrac{MM_1}{N'N_1}=\dfrac{MB}{N'B'}$

CM_2M và DN_2N' : $\dfrac{MM_2}{N'N_2}=\dfrac{MC}{N'D}$.

Từ đó : $\dfrac{y}{z-z'}=\dfrac{NM}{NN'}=\dfrac{MM_1}{N_2N'}$, $\quad \dfrac{x'-x}{y'}=\dfrac{M'M}{M'N'}=\dfrac{MM_2}{N'N_2}$,

và : $\dfrac{y'(x'-x)}{(z-z')y'}=\dfrac{MM_1}{N_2N'}.\dfrac{MM_2}{N'N_1}=\dfrac{MM_1}{N'N_1}.\dfrac{MM_2}{N_2N'}=\dfrac{MB}{N'B'}.\dfrac{MC}{N'D}$.

Mặt khác, $\begin{cases} MB.MC=MP.MQ=x(y+z) \\ N'B'.N'D=N'P.N'Q=(x'+y')z' \end{cases}$

Suy ra : $\dfrac{y(x'-x)}{(z-z')y}=\dfrac{x(y+z)}{(x'+y')z'}$.

2) Nhắc lại rằng, trong $\mathbf{R}_+^*$, nếu $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, thì $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$. Theo 1) :

$$\frac{xy'}{yz'}=\frac{(x'-x)(x'+y')}{(z-z')(y+z)}=\frac{(x'^2+x'y'-xx')-xy'}{(yz+z^2-z'z)-yz'}=\frac{x'^2+x'y'-xx'}{yz+z^2-z'z}=\frac{x'}{z}.\frac{x'+y'-x}{y+z-z'}=1,$$

vì $x'+y'-x=(x'+y'+z')-z'-x=(x+y+z)-z'-x=y+z-z'$.

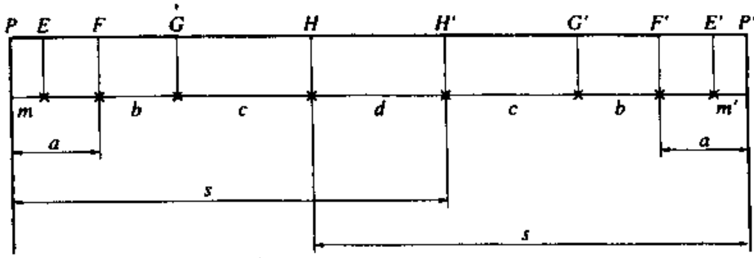
B *1*) Với các ký hiệu ở **A** : $\frac{xz}{y} = \frac{x'z'}{y'}$. Vậy chỉ cần áp dụng các kết quả của A vào các bướm $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

2) Ký hiệu $m = PE$, $a = PF = P'F'$, $b = FG = F'G'$, $c = GH = G'H'$, $d = HH'$, $m' = P'E'$. $s = a+b+c+d$.

Như vậy : $HP' = H'P = s$.

Theo 1) : $\begin{cases} \dfrac{m(b+c+s)}{a-m} = \dfrac{(a+b)s}{c} \\ \dfrac{m'(b+c+s)}{a-m'} = \dfrac{(a+b)s}{c} \end{cases}$

Ta suy ra $\frac{m}{a-m} = \frac{m'}{a-m'}$, rồi $m = m'$.



C 2.4 **I** *1*) $x + y = AB = c$, $y + z = BC = a$, $z + x = CA = b$, từ đó, bằng tổ hợp :

$$x = \frac{1}{2}\big((x+y)-(y+z)+(z+x)\big) = \frac{1}{2}(c-a+b) = s-a.$$

2) Vì $\angle OBO_A = \angle OCO_A = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, nên tứ giác OBO_AC nội tiếp (trong đường tròn đường kính OO_A) và vì vậy $\angle OCB = \angle OO_AB\ [\pi]$ và $\angle O_ABC = \angle O_AO_C\ [\pi]$, suy ra :

$$\frac{CI}{CO} = \frac{O_AB}{O_AO} \quad \text{và} \quad \frac{I_AB}{O_AB} = \frac{OC}{OO_A}.$$

3) • $I_AB = \dfrac{O_AB.OC}{OO_A} = CI$ và $CI = s - c$ (xem 1)

• $KI_C = KB + BI_C = BI + BI_C = (s-b)+(s-c) = a$.

II 1) Do tính đồng dạng của các tam giác :

OQT và $O_QQT_Q : \dfrac{r}{r_Q} = \dfrac{QT}{QT_Q}$

O_1PT_1 và $O_QTT_Q : \dfrac{r_1}{r_Q} = \dfrac{PT_1}{PQ_Q}$.

Suy ra : $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{QT}{QT_Q}.\dfrac{PT_Q}{PT_1}$.

Mặt khác, theo **I** 1) trong các tam giác APQ và ABP ta có : $QT = s - p$, $PT_1 = s_1 - b$.

Và theo **I** 3) trong tam giác APQ, ta có : $QT_Q = s$, từ đó $PT_Q = QT_Q - QP = s - a$.

Vậy : $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{s-p}{s}.\dfrac{s-a}{s_1-b}$.

Bằng cách hoán vị các chữ : $\frac{r}{r_2} = \frac{s-q}{s}.\frac{s-a}{s_2-c}$.

2) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r}{r_2} : \frac{r}{r_1} = \frac{(s-q)(s_1-b)}{(s-p)(s_2-c)}$.

2) Do tính đồng dạng của các tam giác :

OQT và $O'_1QT'_1 : \frac{r'_1}{r} = \frac{QT'_1}{QT}$, OPT và $O'_2PT'_2 : \frac{r'_2}{r} = \frac{PT'_2}{PT}$.

Từ đó : $\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{QT'_1.PT}{QT.PT'_2}$

Mặt khác, theo *I* 1) trong tam giác APQ : $QT = s\text{-}p$ và $PT = s\text{-}q$.

Và, theo *I* 1) trong tam giác ABQ và APC : $QT'_1 = s'_1 - b, PT'_2 = s'_2 - c$.

Vậy : $\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{(s'_1-b)(s-q)}{(s-p)(s'_2-c)}$.

4) $2s'_1 = AB + BQ + QA = (AB + BP + PA) + (AP + PQ + QA) - 2AP = 2s_1 + 2s - 2p$,

suy ra : $s'_1 = s_1 + s - p$, và cũng như vậy : $s'_2 = s_2 + s - q$.

Vậy : $r'_1 = r'_2 \Leftrightarrow (s_1 + s - p - b)(s-q) = (s-p)(s_2 + s - q - c)$

$\Leftrightarrow (s_1 - b)(s-q) = (s-p)(s_2 - c) \Leftrightarrow r_1 = r_2$.

C 2.5 *I 1)* $\angle BIC = \pi - (\angle IBC + \angle ICB) = \pi - \left(\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C}\right) = \pi - \frac{\pi - \hat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$.

2) Chú ý rằng ánh xạ $J \mapsto \angle BJC$ đơn điệu nghiêm ngặt khi J vạch nên đường phân giác trong của ABC xuất phát từ A, theo một hướng.

II A 1) $\angle BPQ' = \pi - \angle Q'PR' = \pi - \left(\beta + \frac{\pi}{3} + \gamma\right) = \alpha$.

Tương tự : $\angle CPR' = \alpha$, $\angle AQP' = \beta$, $\angle P'RA = \gamma$, $\angle BRQ' = \gamma$, $\angle Q'PB = \alpha$.
Suy ra : $\angle BPC = \pi - \alpha$.

2) $\angle BP'C = \pi - 2\alpha$, suy ra $\angle BPC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle BP'C$.

Theo *I*, ta kết luận rằng P là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác $BP'C$.

3) Theo *II* A 2), $\angle RBP = \angle PBC$; tương tự : $\angle PBR = \angle RBA$.

Vậy BP và BQ là các đường tam phân giác của góc $\hat{B}$ của ABC ; tương tự cho $\hat{C}$ và $\hat{A}$.

B. Trong *II* A, ta có :

$\angle QAR = \pi - (\gamma + \alpha + \alpha + \beta) = \frac{\pi}{3} - \alpha$, vậy $\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\hat{A}$.

Tương tự : $\beta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\hat{B}$, $\gamma = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\hat{C}$.

Khi chọn α, β, γ như thế, ta được một tam giác đồng dạng với ABC. Từ ABC, tam giác PQR nhận được như vậy sẽ đồng dạng với tam giác ở **II A**, vậy sẽ là tam giác đều.

C 2.6 *I 1*) Vì Γ_1 và Γ_2 liên thông và vì σ liên tục, nên $\sigma(\Gamma_1)$ và $\sigma(\Gamma_2)$ liên thông. Mặt khác, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ có hai thành phần liên thông, đó là Γ_1 và Γ_2. Cuối cùng :

$$\sigma(\Gamma_1) \cup \sigma(\Gamma_2) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ và } \sigma(\Gamma_1) \cap \sigma(\Gamma_2) = \varnothing.$$

2) *a*) $\sigma(\gamma) = \sigma(\Gamma_1) \cup \{\sigma(x), x\} = \Gamma_1 \cup \{\sigma(x), x\} = \gamma$.

b) Tồn tại $(\alpha_0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ sao cho :

$$x = e^{i\alpha}, \quad \sigma(x) = e^{i\beta}, \quad \alpha_0 < \alpha < \beta < \alpha_0 + 2\pi.$$

Ánh xạ $\varphi : [0; 1] \xrightarrow[t \mapsto e^{i(t\alpha + (1-t)\beta)}]{} \gamma$ là một phép đồng phôi.

c) Ánh xạ $\theta = \varphi^{-1} \circ \widetilde{\sigma} \circ \varphi$ (trong đó $\widetilde{\sigma}$ là thu hẹp của σ vào γ coi như tập nguồn và tập đích) là một phép đồng phôi từ $[0 ; 1]$ lên chính nó.

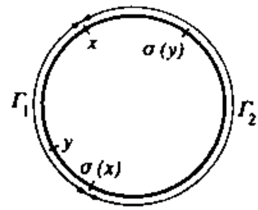
$$\begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \xrightarrow{\varphi} & \gamma \\ \Big\downarrow \theta & & \Big\downarrow \widetilde{\sigma} \\ [0\,;\,1] & \xrightarrow[\varphi]{} & \gamma \end{array}$$

Ánh xạ $\psi : t \mapsto \theta(t) - t$ liên tục trong khoảng $[0 ; 1]$; và $\psi(0) \geq 0$, $\psi(1) \leq 0$; định lý về các giá trị trung gian chứng tỏ rằng tồn tại $t_0 \in [0 ; 1]$ sao cho $\psi(t_0) = 0$. Từ đó suy ra $\psi(t_0)$ là một điểm bất động của σ.

3) Vì σ không có điểm bất động, nên phần *I* 2) c) đưa đến mâu thuẫn, ta suy ra $\sigma(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

4) Cho $(x, y) \in \Gamma^2$.

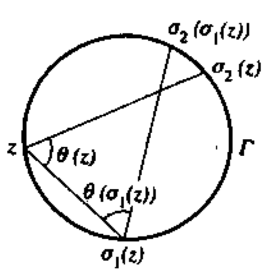
- Nếu $y \in \Gamma_1$, thì $\sigma(y) \in \sigma(\Gamma_1) = \Gamma_2$, vậy
$$]x ; \sigma(x)[\cap]y ; \sigma(y)[\neq \varnothing.$$
- Nếu $y \in \Gamma_2$, thì $\sigma(y) \in \sigma(\Gamma_2) = \Gamma_1$, cũng cùng kết luận như trên.



II A *1*) Vì $\sigma_1(z)$ và $\sigma_2(z)$ cùng ở trong nửa mặt phẳng mở giới hạn bởi tiếp tuyến với Γ tại z, và chứa Γ, nên ta có :

$$\operatorname{Arg}\frac{\sigma_1(z) - z}{\sigma_2(z) - z} \in \,]-\pi;\pi[\,.$$

Và ánh xạ $\mathbb{C} - \mathbb{R}_- \xrightarrow[u \mapsto \operatorname{Arg}(u)]{}]-\pi;\pi[$ liên tục.



2) Khi áp dụng *I* 4) cho $(\sigma_2, z, \sigma_1(z))$ thay vì (σ, x, y): $]z;\sigma_2(z)[\cap]\sigma_1(z);\sigma_2(\sigma_1(z))[\neq \varnothing$, và như vậy $\theta(\sigma_l(z)) < 0$.

3) Tính liên tục của θ, tính liên thông của Γ, và các dấu của $\theta(z)$ và $\theta(\sigma_l(z))$ chứng tỏ rằng tồn tại $z_0 \in \Gamma$ sao cho $\theta(z_0) = 0$, tức là $\sigma_1(z_o) = \sigma_2(z_o)$.

B Áp dụng *II* A cho $\sigma_1 = \sigma$ và $\sigma_2 : \Gamma \xrightarrow[z \mapsto -z]{} \Gamma$.

C 2.7 *I* (i) ⇒ (ii) :

Chú ý rằng $CBA = (T_{\overrightarrow{OC}} \circ S_O(OAB)$, trong đó $T_{\overrightarrow{OC}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OC}$ và S_O là phép đối xứng qua O.

(ii) ⇒ (i) : hiển nhiên.

(ii) ⇔ (iii) :

Chú ý rằng $\mathbb{R}^2$ là hợp của các hình tịnh tiến theo $T_{u\vec{i}+v\vec{j}}$ của hình bình hành $OACB$, trong đó (u, v) chạy khắp $\mathbb{Z}^2$ và $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$.

(iii) ⇒ (iv) :

Tồn tại (u, v), (u', v') thuộc $\mathbb{Z}^2$ sao cho :

$$\begin{cases}(1,0) = u(a_1, a_2) + v(b_1, b_2)\\(0,1) = u'(a_1, a_2) + v'(b_1, b_2)\end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases}ua_1 + vb_1 = 1\\ua_2 + vb_2 = 0\end{cases}, \begin{cases}u'a_1 + v'b_1 = 0\\u'a_2 + v'b_2 = 1\end{cases}$$

Ký hiệu $\delta = a_1b_2 - a_2b_1$, suy ra $\delta \mid a_1$, $\delta \mid a_2$, $\delta \mid b_1$, $\delta \mid b_2$, vậy $\delta^2 \mid \delta$, $\delta \in \{-1, 1\}$.

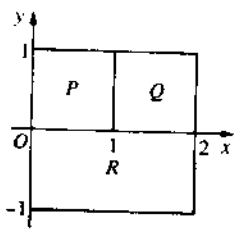
(iv) ⇒ (iii) :

Vì $a_1b_2 - a_2b_1 \in \{-1, 1\}$, nên với mọi $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, tồn tại $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho :

$$(m, n) = u(a_1, a_2) + v(b_1, b_2).$$

(iv) ⇔ (v) : $\mathcal{A}(T) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$.

II 1) • Ta giả thiết *f* cộng tính



Giả sử $\begin{cases}P \text{ là hình vuông } ((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1))\\Q \text{ là hình vuông } ((1, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 1))\\R \text{ là hình chữ nhật } ((0, -1), (2, -1), (2, 0), (0, 0))\end{cases}$

Sử dụng $f(P + Q) = f(P) + f(Q)$, chứng tỏ rằng $2\beta + \gamma = 0$.

Sử dụng $f((P + Q) + R) = f(P + Q) + f(R)$, chứng tỏ rằng $4\beta + \gamma = \alpha$.

• Ngược lại, giả thiết $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ và $\gamma = -\alpha$. Giả sử $P, Q \in \Sigma$ sao cho tồn tại $P + Q$; khi đó $P \cap Q$ là một đoạn S của $\mathbb{R}^2$ không suy biến thành một điểm. Ký hiệu $k = \text{Card}(S \cap \mathbb{Z}^2)$. Các điểm của $\mathbb{Z}^2$ ở bên trong $P + Q$ là : các điểm của $\mathbb{Z}^2$ ở bên trong P, các điểm của $\mathbb{Z}^2$ ở bên trong Q, các điểm của S khác với các mút của S.

Từ đó : $\quad I(P + Q) = I(P) + I(Q) + (k - 2)$.

Các điểm của $\mathbb{Z}^2$ nằm ở bờ của $P + Q$ là : các điểm của $\mathbb{Z}^2$ ở bờ của P trừ các điểm của S, các điểm của $\mathbb{Z}^2$ ở bờ của Q trừ các điểm của S, và các mút của S.

Từ đó : $\quad B(P + Q) = (B(P) - k) + (B(Q) - k) + 2$.

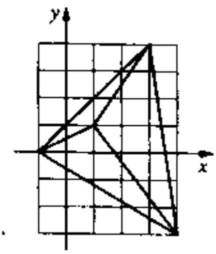
Suy ra $\quad f(P + Q) = f(P) + f(Q)$.

2) *a*) Ở đây : $\mathcal{A}(T)=\frac{1}{2}$, $\quad I(T)=0,\ B(T)=3.$

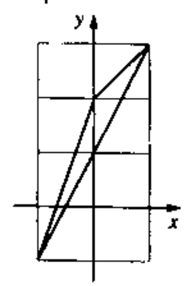
b) Quy nạp theo $I(T) + B(T)$.

Trường hợp $I(T) + B(T) = 3$ đã thấy ở (II 2) a)).

Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq 4$; giả thiết công thức đã đúng cho mọi tam giác T thuộc $\sum$ thỏa mãn $I(T) + B(T) \leq n - 1$, và giả sử T là một tam giác thuộc $\sum$ thỏa mãn $I(T) + B(T) = n$.



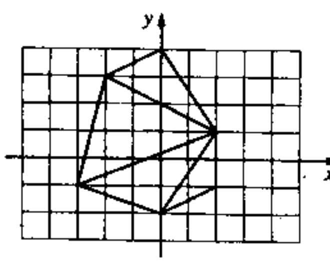
• Nếu $I(T) \geq 1$, ta có thể phân tích T thành ba tam giác T_1, T_2, T_3 nghiệm đúng giả thiết quy nạp, bằng cách sử dụng một điểm trong của T. Vì các ánh xạ $\mathcal{A}$ và $T \mapsto I(T)+\frac{1}{2}B(T)-1$ đều cộng tính, nên ta suy ra kết quả mong muốn đối với T.



• Nếu $I(T) = 0$, thì $B(T) \geq 4$ và ta có thể phân tích T thành hai tam giác nghiệm đúng giả thiết quy nạp, bằng cách sử dụng một điểm thuộc ∂T khác với đỉnh của T. Cũng kết thúc như trường hợp trên.

3) Ta tam giác hóa P bằng cách nối tất cả các đỉnh của P với cùng một đỉnh của P. Vì các ánh xạ $\mathcal{A}$ và $P \mapsto I(T)+\frac{1}{2}B(P)-1$ cộng tính và trùng khớp trên các tam giác thuộc Σ, ta kết luận :

$$\mathcal{A}(P) = I(P)+\frac{1}{2}B(P)-1.$$



4) a) $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) - \mathcal{A}(P_2) = (I(P_1)+\frac{1}{2}B(P_1)-1)-(I(P_2)+\frac{1}{2}B(P_2)-1)$

$$= I(P_1)-I(P_2)+\frac{1}{2}B(P_1)-\frac{1}{2}B(P_2).$$

b) • Các điểm của $\mathbb{Z}^2$ ở bên trong P_1 là : các điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ ở bên trong P, các điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ ở bên trong P_2, và các điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ ở trên biên của P_2, trừ A_r, A_s. Từ đó $I(P_1) = I(P) + I(P_2) + (B(P_2) - j)$.

• Các điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ trên biên của P là các điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ ở trên biên của P_1 trừ A_r, A_s, các điểm thuộc $\mathbb{Z}^2$ trên biên của P_2 trừ A_r, A_s và các điểm A_r và A_s. Từ đó $B(P) = B(P_1) + B(P_2) - 2j + 2$.

c) $I(P)+\frac{1}{2}B(P)-1=(I(P_1)-I(P_2)-B(P_2)+j)+\frac{1}{2}(B(P_1)+B(P_2)-2j+2)-1$

$$= I(P_1)-I(P_2)+\frac{1}{2}B(P_1)-\frac{1}{2}B(P_2) = (P).$$

C 2.8 ***Cách thứ nhất***

A *1*) Giả sử $M \in \mathcal{E}_2$; (x, y) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}$, (X, Y) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}'$; vậy ta có :

$$x = X + x_0, \qquad y = Y + y_0.$$

Vậy : $M \in C \Leftrightarrow A(X+x_0)^2 + 2B(X+x_0)(Y+y_0) + C(Y+y_0)^2 + 2D(X+x_0) + 2E(Y+y_0) + F = 0$

$$\Leftrightarrow AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)X + 2(Bx_0 + Cy_0 + E)Y$$
$$+ (Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F) = 0.$$

Vì $B^2 - AC \neq 0$, nên hệ hai phương trình hai ẩn $\left\{\begin{array}{l} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + E = 0 \end{array}\right|$ có một và chỉ một nghiệm ký hiệu là (x_0, y_0), và, khi ký hiệu Ω là điểm thuộc $\mathcal{E}_2$ có tọa độ (x_0, y_0) trong $\mathcal{R}$, thì phương trình của (C) trong $\mathcal{R}'$ là :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F_1 = 0.$$

trong đó : $\qquad F_1 = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$

2) Giả sử $M \in \mathcal{E}_2$, (X, Y) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}'$; (u, v) là các tọa độ của nó trong R'' ; ta có :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

tức là : $\qquad \left\{\begin{array}{l} X = u\cos\theta - v\sin\theta \\ Y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{array}\right.$.

Vậy : $M \in C \Leftrightarrow A(u\cos\theta - v\sin\theta)^2 + 2B(u\cos\theta - v\sin\theta)(u\sin\theta + v\cos\theta)$

$$+ C(u\sin\theta - v\cos\theta)^2 + F_1 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)u^2 + (-2A\cos\theta\sin\theta + 2B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\cos\theta\sin\theta)uv$
$+ (A\sin^2\theta - 2B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta)v^2 + F_1 = 0.$

Chỉ cần tìm θ làm triệt tiêu hệ tử của uv ; ta có :

$$(C - A)\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lll} \tan 2\theta = \dfrac{2B}{A-C} & \text{nếu } A \neq C \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{4} \; [\pi] & \text{nếu } \left\{\begin{array}{l} A = C \\ B \neq C \end{array}\right. \end{array}\right|,$$

vì trường hợp $(A = C, B = 0)$ là hiển nhiên.

Trong R'', khi đó C có phương trình dạng : $\alpha u^2 + \beta v^2 = \gamma$,

với $\alpha = A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta$, $\qquad \beta = A\sin^2\theta - 2B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta$.

Ta có : $4\alpha\beta = (A(1+\cos 2\theta) + 2B\sin 2\theta + C(1-\cos 2\theta))(A(1-\cos 2\theta)) - 2B\sin 2\theta + C(1+\cos 2\theta))$

$$= ((A + C) + (A - C)\cos 2\theta + 2B\sin 2\theta)((A + C) - (A - C)\cos 2\theta - 2B\sin 2\theta)$$
$$= (A + C)^2 - ((A - C)\cos 2\theta + 2B\sin 2\theta)^2$$
$$= \quad (A + C)^2 - \frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + 4B^2}\left(A - C + 2B\frac{2B}{A-C}\right)^2 \text{ nếu } A \neq C$$
$$= (A + C)^2 - ((A - C)^2 + 4B^2) = 4(AC - B^2), \text{ cũng đúng nếu } A = C.$$

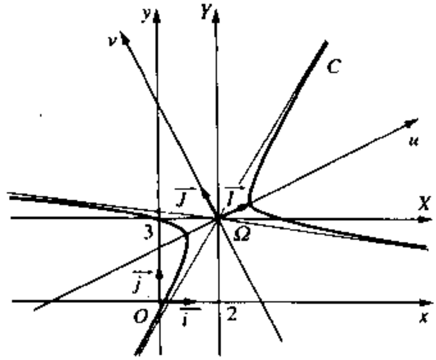
3) *a*) C là một hypebol.

Tâm Ω của nó có tọa độ (2, 3) trong $\mathcal{R}$.

Trong $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ C có phương trình :

$$X^2 + 8XY - 5Y^2 - 4 = 0.$$

Thực hiện phép quay tâm Ω và góc quay θ sao cho $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$. Khi lấy, chẳng hạn, $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{4}{3} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$, phương trình của C trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J})$ (trong đó $\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$), $\vec{J} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$) là :



$3u^2 - 7v^2 - 4 = 0$, tức là $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$, trong đó $a = \frac{2}{\sqrt{3}}, b = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Các đường tiệm cận của hypebol C có phương trình $v = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}\,u$ trong $\mathcal{R}''$, và

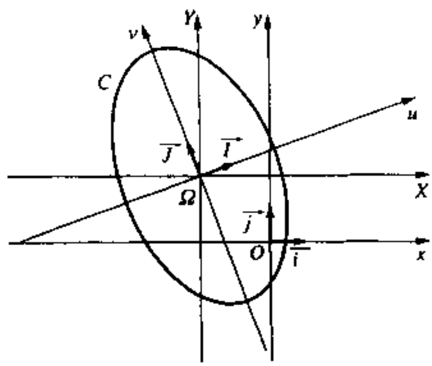
$y - 3 = \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5}(x - 2)$ trong $\mathcal{R}$.

b) C là một elip. Tâm Ω của nó có tọa độ $\left(-\frac{9}{8}, \frac{8}{7}\right)$ trong $\mathcal{R}$.

Trong $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, C có phương trình : $2X^2 + XY + Y^2 - \frac{36}{7} = 0$.

Thực hiện một phép quay tâm Ω và góc quay θ sao cho $\tan 2\theta = 1$.

Khi lấy, chẳng hạn, $\theta = \frac{\pi}{8}$, phương trình của C trong $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J})$ (trong đó $\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, $\vec{J} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$) là :



$$\frac{3+\sqrt{2}}{2}u^2 + \frac{3-\sqrt{2}}{2}v^2 - \frac{36}{7} = 0.$$

Độ dài của các bán trục của elip C là :

$$a = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{7}\sqrt{3+\sqrt{2}}} \simeq 1{,}52 \text{ và } b = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{7}\sqrt{3-\sqrt{2}}} \simeq 2{,}55.$$

c) C thuộc loại hypebol. Tâm Ω của nó có tọa độ (-1, 0) trong $\mathcal{R}$.

Trong $\mathcal{R}' = (O; \vec{i}, \vec{j})$, C có phương trình :

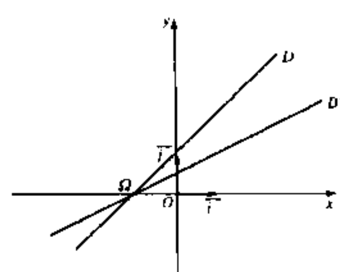
$$X^2 - 3XY + 2Y^2 = 0,$$

tức là : $X = Y$ hoặc $X = 2Y$.

Như vậy C là hợp của hai đường thẳng.

$$D : x + y + 1 = 0, \qquad D' : x - 2y + 1 = 0.$$

Ta chú ý rằng $\Omega \in C$, và phương trình của C trong $\mathcal{R}$ có thể viết thành một tích hai nhân tử.



d) C là một elip. Tâm Ω của nó có tọa độ $(-1, 1)$ trong $\mathcal{R}$.

Trong $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, C có phương trình:

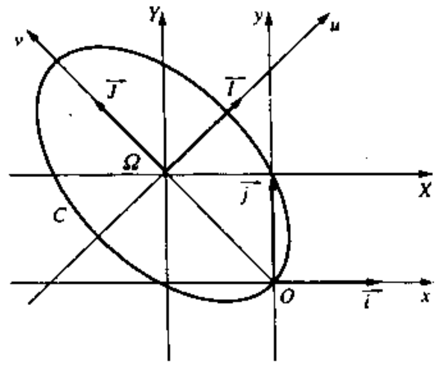
$$X^2 + XY + Y^2 - 1 = 0.$$

Rõ ràng là C đối xứng qua đường phân giác thứ nhất của $\mathcal{R}'$.

Phương trình của C trong $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J})$ (trong đó $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$)

là : $\quad 3u^2 + v^2 - 2 = 0.$

Các độ dài của các bán trục của elip là : $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ và $b = \sqrt{2}$.



B $\quad$ *1*) Vì $B^2 - AC = 0$, nên $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ là một "chính phương", sai khác một hệ tử nhân, do đó tồn tại $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2.$$

2) Với mọi (X, Y) thuộc $\mathbb{R}^2$, ta có :

$$\lambda Y^2 + 2\alpha X + 2\beta Y + \gamma = 0 \Leftrightarrow \left(Y + \frac{\beta}{\lambda}\right)^2 = -\frac{2\alpha}{\lambda}X + \frac{\beta^2}{\lambda^2} - \frac{\gamma}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow (Y - Y_0)^2 = -\frac{2\alpha}{\lambda}(X - X_0).$$

khi ký hiệu $X_0 = \frac{\lambda}{2\alpha}\left(\frac{\beta^2}{\lambda^2} - \frac{\gamma}{\lambda}\right)$ và $Y_0 = -\frac{\beta}{\lambda}$.

Ký hiệu S là điểm có tọa độ (X_0, Y_0) trong $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'' = (S; \vec{I}, \vec{J})$, $p = -\frac{\alpha}{\lambda}$.

Khi đó C có phương trình Descartes trong $\mathcal{R}''$ là : $v^2 = 2pu$.

3) *a*) C là một parabol.

Giả sử $\theta = \text{Arctan}\frac{3}{4}$,

$\vec{I} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$,

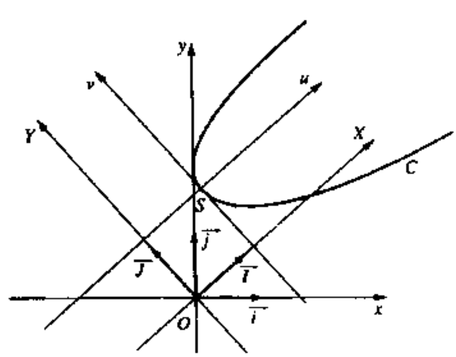
$\vec{J} = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$, $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J})$;

Trong $\mathcal{R}'$ thì C có phương trình :

$$Y^2 - X - 2Y + 2 = 0.$$

Đỉnh S của C có tọa độ $(1, 1)$ trong $\mathcal{R}'$, và $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ trong $\mathcal{R}$.

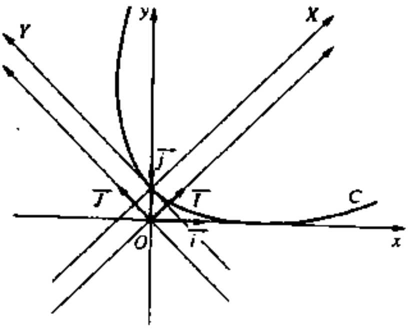
Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}'' = (S; \vec{I}, \vec{J})$, phương trình của C là $v^2 = u$, và tham số của parabol C như vậy là $p = \frac{1}{2}$.



b) C là một parabol. Giả sử $\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$,

$$\mathcal{R}' = (O;\vec{I},\vec{J}),$$

Đỉnh S của C có tọa độ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ trong $\mathcal{R}'$, và $(0, 1)$ trong $\mathcal{R}$. Trục của C có phương trình là $y = x + 1$ trong $\mathcal{R}$. Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}'' = (S;\vec{I},\vec{J})$,, phương trình của C là : $Y^2=4\sqrt{2}X$, và tham số của parabol như vậy là $p=2\sqrt{2}$.



Cách thứ hai

A Giả sử $M \in \mathcal{E}_2$, (X, Y) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}'$, (u, v) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}''$, ta có : $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, suy ra :

$$M\in C \Leftrightarrow AX^2+2BXY+CY^2+F_1=0 \Leftrightarrow (X\ Y)\begin{pmatrix}A & B\\B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+F_1=0$$

$$\Leftrightarrow (u\ v)^t PNP\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+F_1=0 \Leftrightarrow (u\ v)\,D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+F_1=0 \Leftrightarrow \lambda_1u^2+\lambda_2v^2+F_1=0.$$

B Giả sử $M \in \mathcal{E}_2$, (x, y) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}$, (X, Y) là các tọa độ của nó trong $\mathcal{R}'$, ta có :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},$$

suy ra :

$$M \Leftrightarrow C \Leftrightarrow Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

$$\Leftrightarrow (x\ y)N\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2Dx+2Ey+F=0$$

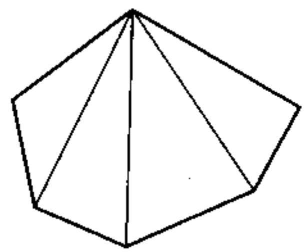
$$\Leftrightarrow (X\ Y)\,D\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+2D(X\cos\theta-Y\sin\theta)+2E(X\sin\theta+Y\cos\theta)+F=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2Y^2+2(D\cos\theta+E\sin\theta)X+2(-D\sin\theta+E\cos\theta)Y+F=0.$$

2) Như ở B 2), *cách thứ nhất*.

C 2.9 *I 1*) $\sum_k n_k$ là số đa giác của hình chiếu của P, trừ P_0, vậy bằng $F - 1$.

◊ **Trả lời :** $\sum_k n_k = F-1$.

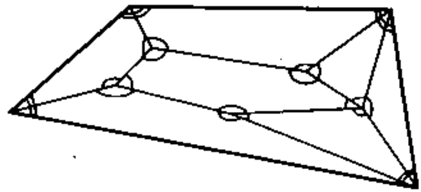


2) *a*) Phân hoạch từ một đỉnh cố định đa giác lồi có k đỉnh thành $(k - 2)$ tam giác. Ta biết rằng tổng các góc của một tam giác bằng π.

b) $\sum_k ((k-2)\pi)n_k$

$= \pi\left(\sum_k kn_k\right) - 2\pi\sum_k n_k$

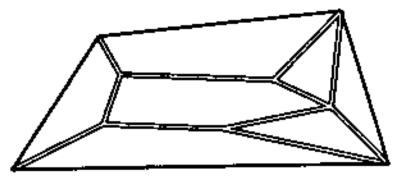
$= \pi\left(\sum_k kn_k\right) - 2\pi(F-1).$



• Mặt khác, tổng các góc của các đa giác chiếu của P, trừ P_0, nằm bên trong P_0 bằng $2\pi(S - S_0)$, và tổng các góc của P_0 bằng $(S_0 - 2)\pi$. Vậy tổng các góc của các đa giác chiếu của P trừ P_0 bằng $2\pi(S - S_0) + (S_0 — 2)\pi = \pi(2S - S_0 - 2)$.

3) $\sum_k kn_k$ biểu diễn số cạnh của đa giác chiếu của P, trừ P_0.

Các cạnh trong của P_0 được tính hai lần, và những cạnh nào chung với P_0 chỉ tính một lần. Vậy $\sum_k kn_k = 2(A - S_0) + S_0 = 2A - S_0$.



4) $\pi(2S - S_0 - 2) = \pi\left(\sum_k kn_k\right) - 2\pi(F-1) = \pi(2A - S_0) - 2\pi(F-1)$, từ đó $S - A + F = 2$.

II 1) α) Giả sử Γ_1 là tập hợp các cặp (α, φ) tạo thành một cạnh α của P và một mặt φ của P sao cho $\alpha \in \varphi$.

• Card $(\Gamma_1) = 2A$, vì mỗi cạnh thuộc đúng hai mặt.

• Card $(\Gamma_1) = Fs$, vì mỗi mặt nhận đúng s cạnh.

β) Giả sử Γ_2 là tập hợp các cặp (α, σ) tạo thành một cạnh α của P và một đỉnh σ của P sao cho $\sigma \in \alpha$.

• Card $(\Gamma_2) = 2A$, vì mỗi cạnh có đúng hai đỉnh.

• Card$(\Gamma_2) = Sf$, vì mỗi đỉnh thuộc đúng f mặt.

2) a) $S - A + F = 2 \Leftrightarrow \frac{2A}{f} - A + \frac{2A}{s} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{f} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$.

b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} - \frac{1}{s} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{A} - \frac{1}{3} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, vậy $f < 6$; tương tự $s < 6$.

3) Chứng minh rằng : $f \geq 4 \Rightarrow s < 4$.

◊ **Trả lời :**

f	s	A	F	S
3	3	6	4	4
3	4	12	6	8
3	5	30	12	20
4	3	12	8	6
5	3	30	20	12

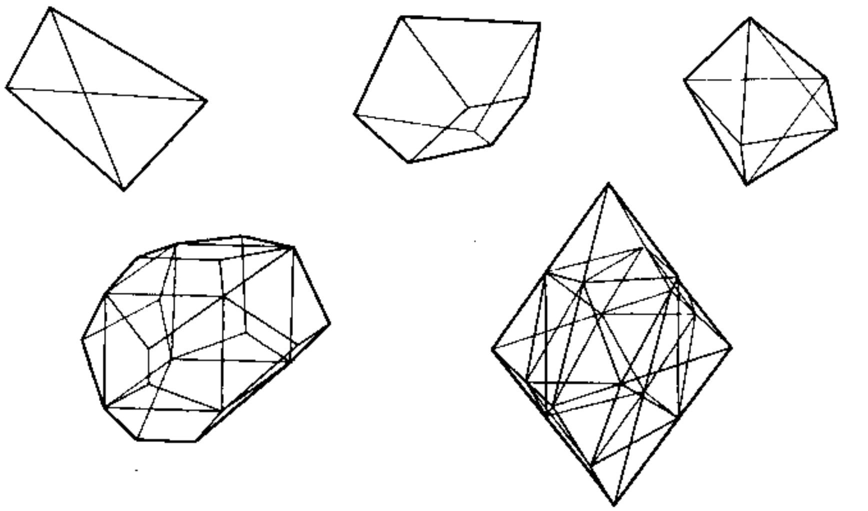
4) 1) (3, 3, 6, 4, 4) được thực hiện trên một tứ diện.

2) (3, 4, 12, 6, 8) được thực hiện trên một lục diện (chẳng hạn là một hình hộp).

3) (4, 3, 12, 8, 6) được thực hiện trên một bát diện, là sự ghép nối hai hình chóp có đáy là hình tứ giác theo đáy chung này.

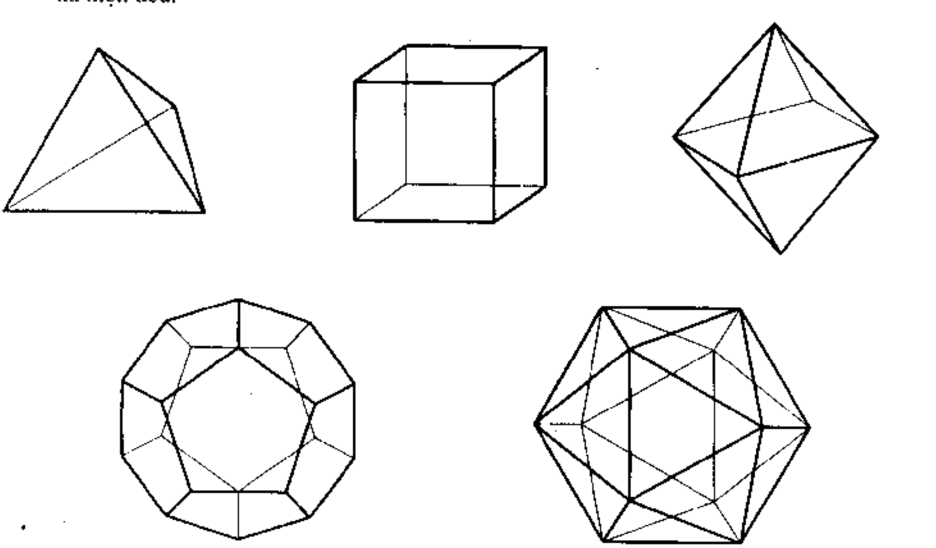
4) (3, 5, 30, 12, 20) được thực hiện trên một thập nhị diện, có được, chẳng hạn, từ một hình lập phương bằng cách cho qua mỗi cạnh của nó một mặt phẳng sao cho mặt phẳng này để hình lập phương về một bên của mặt phẳng (thập nhị diện = hình mười hai mặt).

5) (5, 3, 30, 20, 12) được thực hiện trên một nhị thập diện, có được, chẳng hạn, từ một bát diện bằng cách nối các điểm lấy, từng ba điểm một, trên mỗi mặt của tám mặt của bát diện (nhị thập diện = hình hai mươi mặt).



Nhận xét : • Rõ ràng ba trường hợp đầu có thể thực hiện trên các đa diện đều, với các đa diện này các độ dài của các cạnh bằng nhau, các diện tích của các mặt bằng nhau và các mặt là những đa giác đều.

• Ta cũng có thể chứng minh rằng hai trường hợp sau cũng có thể thực hiện được trên các đa diện đều.



Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 3

3.2.1 1) • Giả thiết $W \,//\, W'$.

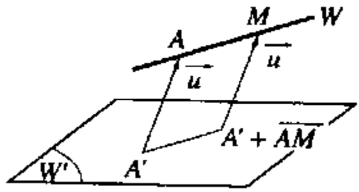
Tồn tại $A \in W, A' \in W'$; ký hiệu $\vec{u} = \overrightarrow{A'A}$.

Với mọi M thuộc W, ta có :

$$M = A' + \overrightarrow{A'M} = (A' + \overrightarrow{AM}) + \vec{u}$$

và $A' + \overrightarrow{AM} \in W'$ vì $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'}$,

vậy $M \in T_{\vec{u}}(W')$.



Điều này chứng tỏ : $W \subset T_{\vec{u}}(W')$.

• Ngược lại, giả thiết $W \subset T_{\vec{u}}(W')$.

Khi đó ta có : $\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{T_{\vec{u}}(W')} = \overrightarrow{W'}$, vậy $W \,//\, W'$.

2) Giả thiết $W \,//\, W'$ và $W \cap W' \neq \varnothing$; vậy tồn tại $A \in W \cap W'$. Với mọi M thuộc W, ta có :

$$M = A + \overrightarrow{AM}, \quad A \in W', \quad \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'}.$$

do đó : $M \in W'$.

Như vậy : $W \subset W'$.

3.2.2 a) Hiển nhiên.

Lập luận tương tự như trong lời giải bài tập 3.2.1.

3.2.3 Giả sử $(W_i)_{i \in I}$ là một họ các k.g.a.c của E thỏa mãn $\bigcap_{i \in I} W_i \neq \varnothing$. Vậy tồn tại $A \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

Khi đó với mọi M thuộc E ta có :

$$M \in \bigcap_{i \in I} W_i \Leftrightarrow (\forall i \in I, M \in W_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I, \ \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W_i}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{W_i}.$$

Vì $\bigcap_{i \in I} \overrightarrow{W_i}$ là một k.g.v.c của E (xem Tập 5, 6.2. Mệnh đề 2), nên từ đó ta kết luận rằng $\bigcap_{i \in I} W_i$ là một k.g.a.c của E và : $\overrightarrow{\bigcap_{i \in I} W_i} = \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{W_i}$.

3.2.4 Theo 3.2.1, Mệnh đề 4, $W \cap W'$ là một k.g.a.c. của E và $\overrightarrow{W \cap W'} = \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$, từ đó suy ra:

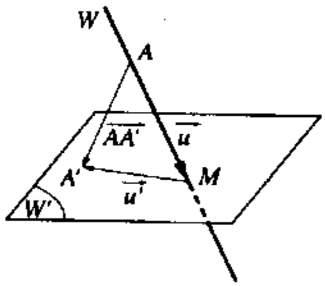
$$\begin{aligned}\dim(W \cap W') &= \dim(\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}) = \dim(\overrightarrow{W'}) + \dim(\overrightarrow{W'}) - \dim(\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}) \\ &\geq \dim(W) + \dim(W') - \dim(E).\end{aligned}$$

3.2.5 1) Ta chứng minh rằng : $W \cap W' \neq \varnothing$.

Tồn tại $A \in W$, $A' \in W'$.

Vì $\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'} = E$ nên tồn tại $\vec{u} \in \overrightarrow{W}$, $\vec{u}' \in \overrightarrow{W'}$ sao cho

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} + \vec{u}'.$$



Xét $M = A + \vec{u}$.

Một mặt, $A \in W$ và $\vec{u} \in \overrightarrow{W}$ vậy $M \in W$.

Mặt khác, $M = A + (\overrightarrow{AA'} - \vec{u}') = A' + (-\vec{u}')$

và $A' \in W'$, $-\vec{u}' \in \overrightarrow{W'}$, vậy $M \in W'$.

Như vậy : $M \in W \cap W'$, suy ra $W \cap W' \neq \varnothing$.

2) Theo 3.2.1. Mệnh đề 4, $W \cap W'$ là một k.g.a.c và $\overrightarrow{W \cap W'} = \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$, từ đó $\overrightarrow{W \cap W'} = \{\vec{0}\}$, vậy $W \cap W'$ là một đơn tử.

3.2.6 a) • Hiển nhiên là $X \subset \langle X \rangle$, và vì $\varnothing \neq X \subset \langle X \rangle$, nên theo bài tập 3.2.3, $\langle X \rangle$ là một k.g.a.c của E.

• Giả sử W là một k.g.a.c của E chứa X. Theo định nghĩa của $\langle X \rangle$, W có mặt trong họ mà giao là $\langle X \rangle$, vậy $\langle X \rangle \subset W$.

Như vậy, $\langle X \rangle$ là k.g.a.c bé nhất của E có chứa X.

b) 1) Nếu $X \subset Y$, vì $\langle X \rangle$ là k.g.a.c bé nhất của E chứa X, và vì $\langle Y \rangle$ là một k.g.a.c của E chứa Y, vậy chứa X, nên ta có : $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$.

2) • Nếu X là một k.g.a.c thì X là k.g.a.c bé nhất của E chứa X, vậy $\langle X \rangle = X$.

• Nếu $\langle X \rangle = X$, thì, vì $\langle X \rangle$ là một k.g.a.c, X là một k.g.a.c của E.

3) Vì $\langle X \rangle$ là một k.g.a.c của E, theo 2), $\langle\langle X \rangle\rangle = \langle X \rangle$.

c) Ta sẽ chứng tỏ rằng $A + \mathrm{Vect}(V)$ là k.g.a.c bé nhất của E chứa X.

• $A + \mathrm{Vect}(V)$ là một k.g.a.c của E.

• Với mọi M thuộc X, $\overrightarrow{AM} \in V$, vậy $M = A + \overrightarrow{AM} \in A + \mathrm{Vect}(V)$, điều này chứng tỏ : $X \subset A + \mathrm{Vect}(V)$.

• Giả sử W là một k.g.a.c của E chứa X. Vậy thì, với mọi M thuộc X, $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W}$ (vì $A \in X \subset W$ và $M \in X \subset W$), điều đó chứng tỏ $V \subset \overrightarrow{W}$. Hơn nữa, vì $A \in W$, nên ta kết luận : $A + \mathrm{Vect}(V) \subset W$. Cuối cùng : $A + \mathrm{Vect}(V) = \langle X \rangle$.

d) 1) Giả sử $A \in W \cap W'$ (và A tồn tại, vì $W \cap W' \neq \varnothing$). Theo c), vì $A \in W \cap W' \subset W \cup W'$ nên :

$$\langle W \cup W' \rangle = A + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM} : M \in W \cup W'\})$$

$$= A + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM} ; M \in W\} \cup \{\overrightarrow{AM'} ; M' \in W'\})$$

$$= A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{W} \cup \overrightarrow{W'}) = A + (\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}).$$

2) Theo 1) : $\overrightarrow{\langle W \cup W' \rangle} = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}$, và vậy thì :

$$\dim(\langle W \cap W' \rangle) = \dim(\overrightarrow{\langle W \cup W' \rangle}) = \dim(\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'})$$

$$= \dim(\overrightarrow{W}) + \dim(\overrightarrow{W'}) - \dim(\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'})$$

$$= \dim(\overrightarrow{W}) + \dim(\overrightarrow{W'}) - \dim(\overrightarrow{W \cap W'}) = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W').$$

1) Cho $A \in W, A' \in W'$ (và A, A' tồn tại, vì $W \neq \varnothing$ và $W' \neq \varnothing$). Theo c) vì $A \in W \subset W \cup W'$:

$$< W \cup W' > = A + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM}\,; M \in W \cup W'\}) = A + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AM}; M \in W\} \cup \{\overrightarrow{AM'}\,; M' \in W'\})$$
$$= A + \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{W} \cup \{\overrightarrow{AA'}+\vec{u}'; \vec{u}' \in \overrightarrow{W'}\}) = A + (\overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{AA'}+\vec{u}'; \vec{u}' \in \overrightarrow{W'}\}))$$
$$= A + (\overrightarrow{W} + (\mathbf{R}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{W'})) = A + (\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'} + \mathbf{R}\overrightarrow{AA'}).$$

2) Theo 1) $\overrightarrow{< W \cup W' >} = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'} + \mathbf{R}\overrightarrow{AA'})$.

Ta chứng minh rằng : $\overrightarrow{AA'} \notin \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}$. Quả vậy, nếu $\overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}$, thì tồn tại $\vec{u} \in \overrightarrow{W}, \vec{u}' \in \overrightarrow{W'}$ sao cho $\overrightarrow{AA'} = \vec{u} + \vec{u}'$, suy ra $A + \vec{u} = A' + (-\vec{u}')$ và $A + \vec{u} \in W$ và $A' + (-\vec{u}') \in W'$ mâu thuẫn với $W \cap W' = \varnothing$.

Từ đó : $\dim(< W \cup W' >) = \dim((\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}) + \mathbf{R}\overrightarrow{AA'}) = \dim(\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}) + 1$

$$= \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') + 1.$$

3.2.7 a) Giả sử $i_0 \in I$ sao cho $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i \in I - \{i_0\}}$ độc lập, và giả sử $i_1 \in I$. Tính chất mong muốn là hiển nhiên nếu $i_1 = i_0$; vậy ta giả thiết rằng $i_1 \neq i_0$. Giả sử $(\lambda_j)_{j \in I - \{i_1\}}$ là một họ các phần tử của K sao cho $\sum_{j \in I - \{i_1\}} \lambda_j \overrightarrow{A_{i_1}A_j} = \vec{0}$ .Khi đó ta có :

$$\vec{0} = \lambda_{i_0}\overrightarrow{A_{i_1}A_{i_0}} + \sum_{j \in I - \{i_0, i_1\}} \lambda_j(\overrightarrow{A_{i_0}A_j} - \overrightarrow{A_{i_0}A_{i_1}}) = \left(\sum_{j \in I - \{i_1\}} \lambda_j\right)\overrightarrow{A_{i_0}A_{j_1}} + \sum_{j \in I - \{i_0, i_1\}} \lambda_j \overrightarrow{A_{i_0}A_j}\,.$$

Vì $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i \in I - \{i_0\}}$ độc lập, ta suy ra : $\left\{\begin{array}{l} \sum_{j \in I - \{i_1\}} \lambda_j = 0 \\ \forall j \in I - \{i_0, i_1\},\ \ \lambda_j = 0 \end{array}\right|$,

từ đó : $\forall j \in I - \{i_0\}, \lambda_j = 0$.

Điều này chứng tỏ rằng $(\overrightarrow{A_{i_1}A_j})_{j \in I - \{i_1\}}$ độc lập.

Nhận xét : Cũng bằng cách tính toán như vậy, ta chứng minh rằng, với mọi họ hữu hạn $(A_i)_{i \in I}$ những điểm của E và mọi (i_0, i_1) thuộc I^2, ta có :

$$\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{A_{i_0}A_i}; i \in I - \{i_0\}\}) = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{A_{i_1}A_j}; j \in I - \{i_1\}\}) = \overrightarrow{<\{A_i; i \in I\}>},$$

xem thêm bài tập 3.2.6, c).

b) Ta giả thiết $(A_i)_{i \in I}$ là độc lập afin, và giả sử $J \subset I$ và $j_0 \in J$. Khi đó $(\overrightarrow{A_{j_0}A_j})_{j \in J - \{j_0\}}$ độc lập như một họ con của họ độc lập $(\overrightarrow{A_{j_0}A_i})_{i \in J - \{j_0\}}$ (xem Tập 5, 6.3.1, Nhận xét), và như thế $(A_j)_{j \in J}$ độc lập afin.

c) Ta giả thiết $(A_i)_{i \in I}$ là độc lập afin, và giả sử σ là một hoán vị của I và $i_o \in I$; ký hiệu $k_0 = \sigma^{-1}(i_0)$. Theo a) $(\overrightarrow{A_{k_0}A_i})_{i \in I - \{k_0\}}$ là độc lập, vậy (xem Tập 5, 6.3.1, Nhận xét) $(\overrightarrow{A_{\sigma(k_0)}A_{\sigma(i)}})_{i \in I - \{i_0\}}$ độc lập, tức là : $(A_{\sigma(i)})_{i \in I}$ là độc lập afin.

Với mọi i_o thuộc I, ta có :

$$\dim(< \{A_i\,;\, i \in I\} >) = \dim(\overrightarrow{< \{A_i; i \in I\} >})$$
$$= \dim(\mathrm{Vect}\,(\{\overrightarrow{A_{i_0}A_i}\ ; i \in I - \{i_0\}\})) = \mathrm{rank}((\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i \in I - \{i_0\}}).$$

Từ đó suy ra các tương đương lôgic

$$((A_i)_{i \in I} \text{ độc lập afin} \Leftrightarrow ((\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i \in I - \{i_0\}} \text{ độc lập})$$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}((\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i \in I - \{i_0\}}) = \mathrm{Card}\,(I - \{i_0\} \Leftrightarrow \dim(< A_i\,;\, i \in I >) = \mathrm{Card}\,(I) - 1.$

3.3.1 Giả thiết $f^{-1}(W') \neq \varnothing$. Tồn tại $A \in f^{-1}(W')$; vậy ta có $f(A) \in W'$, từ đó, với mọi M thuộc E :

$$M \in f^{-1}(W') \Leftrightarrow f(M) \in W' \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(M)} \in \overrightarrow{W'}$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \in \overrightarrow{W'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{W'}) \Leftrightarrow M \in A + \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{W'}).$$

Vì $\overrightarrow{W'}$ là một k.g.v.c của F và vì $\vec{f}$ là ánh xạ tuyến tính từ E vào F, nên $\vec{f}^{-1}(\overrightarrow{W'})$ là một kgvc của E (xem Tập 5, 7.2.1, Mệnh đề 1, *1)*), và vì $f^{-1}(W')$ là một kgac, là kgac đi qua A và định phương bởi $\vec{f}^{-1}(\overrightarrow{W'})$. Đặc biệt :

$$\overrightarrow{f^{-1}(W')} = \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{W'}).$$

3.3.2 a) f đơn ánh $\Leftrightarrow (\forall (M, N) \in E^2, (f(M) = f(N) \Rightarrow M = N))$

$$\Leftrightarrow (\forall (M, N) \in E^2, (\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0}))$$

$$\Leftrightarrow (\forall \vec{V} \in E, (\vec{f}(\vec{V}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \vec{0})) \Leftrightarrow \vec{f} \text{ đơn ánh.}$$

b) Tồn tại $A \in E$, và ta có :

$$f \text{ toàn ánh} \Leftrightarrow (\forall M' \in F, \exists M \in E,\ M' = f(M))$$

$$\Leftrightarrow (\forall M' \in F, \exists M \in E,\ \overrightarrow{f(A)M'} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}))$$

$$\Leftrightarrow (\forall \vec{V'} \in F, \exists \vec{V} \in E,\ \vec{V'} = \vec{f}(\vec{V})) \Leftrightarrow \vec{f} \text{ toàn ánh,}$$

vì $\begin{array}{l} E \to E \\ M \mapsto \overrightarrow{AM} \end{array}$ và $\begin{array}{l} F \to F \\ M' \mapsto \overrightarrow{f(A)M'} \end{array}$ là những song ánh.

Nhận xét : Từ a) và b) ta suy ra : f song ánh $\Leftrightarrow \vec{f}$ song ánh, xem thêm 3.3.1, Mệnh đề 4.

3.3.3 Ta giả thiết $X \neq \varnothing$; tồn tại $A \in E$ sao cho $f(A) = g(A)$, và khi đó với mọi M thuộc A, ta có :

$$M \in X \Leftrightarrow f(M) = g(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{g(A)g(M)}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{f} - \vec{g})(\overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \vec{g}).$$

Điều này chứng tỏ : $X = A + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \vec{g})$, vậy X là một k.g.a.c của E có phương là $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \vec{g})$.

3.3.4 1) Ta giả thiết f là một phép vị tự - tịnh tiến, tức là một phép vị tự hoặc một phép tịnh tiến, và giả sử W là một k.g.a.c của E :

Nếu $f = \mathrm{H}_{A,k}$ (trong đó $A \in E$, $k \in \mathbb{R}^*$), thì $\vec{f}(\vec{W}) = k\vec{W} = \vec{W}$.

Nếu $f = \mathrm{T}_{\vec{u}}$ (trong đó $\vec{u} \in E$), thì $\vec{f}(\vec{W}) = \vec{W}$.

Ta kết luận $f(W)\ ///\ W$.

2) Ngược lại, giả thiết rằng, với mọi k.g.a.c. của E, $f(W)$ song song mạnh với W.

Giả sử $\vec{V} \in E$. Vì $f(\mathbb{R}\vec{V})\ ///\ \mathbb{R}\vec{V}$, ta có $\vec{f}(\mathbf{R}\vec{V}) = \mathbf{R}\vec{V}$, và đặc biệt, $\vec{f}(\vec{V}) \in \mathbf{R}\vec{V}$.

Điều này chứng tỏ : $\forall \vec{V} = E,\ \exists \lambda \in \mathbf{R},\ f(\vec{V}) = \lambda \vec{V}$.

Theo Tập 5, bài tập 7.1.6, tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho : $\vec{f} = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.

Mặt khác, vì $f(E)\ ///\ E$, $\vec{f}(E) = E$, nên $\vec{f}$ là toàn ánh, vậy là song ánh (vì E có số chiều hữu hạn), f là song ánh, và như thế (nếu $E \neq \{0\}$), $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Cuối cùng, tồn tại $(\vec{u}, g) \in E \times \mathrm{Aff}\,(E, E)$ sao cho : $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g$ và $g(A) = A$.

Vì $\vec{g} = \vec{f} = \lambda\, \mathrm{Id}_E$, nên khi đó ta có $g = \mathrm{H}_{A,\lambda}$, vậy $f = \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{H}_{A,\lambda}$ là một phép vị tự - tịnh tiến.

3.3.5 Với mọi A thuộc E ta có : $f(A) = f(S_A(A)) = (f \circ S_A)(A) = (S_A \circ f)(A) = S_A(f(A))$.

Vì A là điểm bất động duy nhất qua f, ta suy ra $f(A) = A$, và cuối cùng $f = \mathrm{Id}_E$.

3.3.6 a) • Rõ ràng là, nếu f là một phép chiếu afin, thì $f \circ f = f$.

• Ngược lại, giả sử $f \in \mathrm{Aff}\,(E, E)$ sao cho $f \circ f = f$.

Tồn tại $A \in E$ (vì $E \neq \varnothing$).

Vì $\vec{f} \circ \vec{f} = \overrightarrow{f \circ f} = \vec{f}$, nên $\vec{f}$ là một phép chiếu của E ; ta ký hiệu $F = \mathrm{Im}\,(\vec{f}), \overrightarrow{W} = \mathrm{Ker}(\vec{f})$ là một phần bù của F trong E. Ta ký hiệu $W = f(A) + F$.

Với mọi M thuộc E, ta có :

$$\begin{cases} f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \in f(A) + F = W \\ \overrightarrow{Mf(M)} \in \vec{W}', \text{ vì } \vec{f}(\overrightarrow{Mf(M)}) = \overrightarrow{f(M)f(f(M)} = \vec{0}. \end{cases}$$

Từ đó kết luận rằng f là một phép chiếu afin lên W song song với $\overrightarrow{W'}$.

b) Tương tự như ở a).

3.5.1 a) **Trường hợp** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

Ta có : $\phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG}.$

b) **Trường hợp** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

Nếu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$, thì $\phi = \vec{0}$, là ánh xạ hằng.

Ta giả thiết $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$; tồn tại $k \in \{1, \ldots ,n\}$ sao cho $\alpha_k \neq 0$. Vì trường hợp $n = 1$ là tầm thường, ta có thể giả thiết $n \geq 2$, và vì $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \alpha_i = -\alpha_k \neq 0$, nên ta xem như $G' = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq n, i \neq k}$.

Sử dụng a) áp dụng vào $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n,\, i \neq k}$, ta có với mọi M thuộc E :

$$\phi(M) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG'} + \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$$

$$= -\alpha_k \overrightarrow{MG'} + \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \alpha_k \overrightarrow{G'A_k}.$$

Vậy ϕ là ánh xạ hằng.

3.5.2 Một chiều của tương đương lôgic đã thấy ở phần Giáo trình (3.5.1, Mệnh đề 4).
Ngược lại, ta giả thiết rằng f bảo toàn khái niệm tâm tỷ cự.

Tồn tại $A \in E$ (vì $E \neq \varnothing$); ta ký hiệu $\varphi : \underset{\vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(A)+f(A+\vec{u})}}{E \to F}$. Để chứng tỏ rằng f là afin, chỉ cần chứng tỏ rằng φ là tuyến tính (và khi đó ta sẽ có thêm, $\vec{f} = \varphi$).

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in E$; ký hiệu $U = A + \vec{u}$, $V = A + \vec{v}$, $M = A + \alpha\vec{u} + \vec{v}$. Khi đó ta có :

$M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A & U & V \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, vậy $f(M) = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} f(A) & f(U) & f(V) \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, tức là $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \alpha\overrightarrow{f(A)f(U)} + \overrightarrow{f(A)f(V)}$,

và vì thế $\varphi(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$, φ tuyến tính.

3.5.3 Cho O là một điểm bất kỳ thuộc E. Với mọi $(M_1,\dots,M_n)$ thuộc E^n, ta có :

$$\left(\forall i \in \{1,\dots,n\},\ A_i = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} M_i & M_{i+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{OM_{i+1}} = \overrightarrow{OA_i}\ )$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ \ \overrightarrow{OM}_{i+1} = \overrightarrow{OA}_i) \\ (1+(-1)^n)\overrightarrow{OM_1} = 2\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\overrightarrow{OA_k}, \end{cases}$$

bằng cách tổ hợp các phương trình có dấu thay phiên.

Biện luận theo tính chẵn lẻ của n.

So sánh với bài tập 9.9.4 Tập 5.

◇ **Trả lời**

Trường hợp thứ nhất : n chẵn, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$

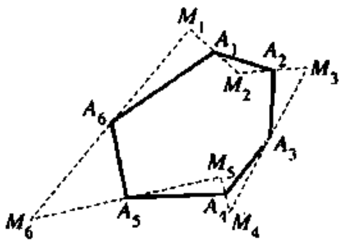
- Nếu $2\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\overrightarrow{OA_k} \neq \vec{0}$ thì tập các nghiệm $\mathcal{S}$ rỗng.
- Nếu $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$, tức là nếu $(A_1, A_3, \dots, A_{2p-1})$ và $(A_2, A_4, \dots A_{2p})$ có cùng tâm

đẳng tỷ cự, thì tập $\mathcal{S}$ được hình thành từ các $(M_1, \dots M_{2p})$ thuộc E^{2p}, trong đó M_1 bất kỳ thuộc E và $M_2, M_3 \dots M_{2p}$ được suy ra từ M_1 (hoặc từ điểm đứng trước).

Ví dụ :

$n = 6$ và $\mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_2 & A_4 & A_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ở đây, M_1 bất kỳ và , $M_2,\dots, M_6$ được suy ra từ đó.



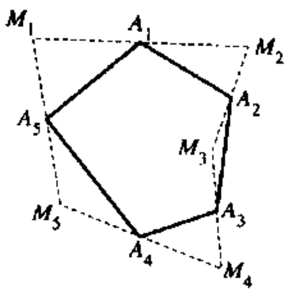
Trường hợp thứ hai : n lẻ, $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}^*$

Tập hợp các nghiệm $\mathcal{S}$ là một đơn tử, trong đó M_1 được xác định bởi $\overrightarrow{OM_1} = \sum\limits_{k=1}^{2p+1}(-1)^k\overrightarrow{OA_k}$,

tức là $M_1 = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}}\begin{bmatrix} A_k \\ (-1)^k \end{bmatrix}_{1\le k\le 2p+1}$ và $M_2,\dots, M_{2p+1}$ được suy ra từ đó.

Ví dụ :

$n = 5$.



3.5.4 1) Ta sẽ chứng tỏ rằng f có ít nhất một điểm bất động.

Tồn tại $O \in E$. Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$ (sẽ chọn sau) và $A = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} O & f(O) \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$.

Vì f là ánh xạ afin : $f(A) = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} f(O) & f^2(O) \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$.

Theo giả thiết, $f^2(0) = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} O & f(O) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, vậy :

$$f(A) = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} f(O) & O & f(O) \\ 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} 0 & f(O) \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}.$$

Chỉ cần tìm λ sao cho : $1-\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$ và $\lambda = 1-\frac{\lambda}{2}; \lambda = \frac{2}{3}$ thích hợp.

Như vậy, điểm A được xác định bởi $A = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} O & f(O) \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ là điểm bất động qua f.

2) Khi đó ta có :

$$\left(\forall M \in E, \quad f^2(M) = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} M & f(M) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall M \in E, \quad \vec{f}^2(\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \vec{f}(\overrightarrow{AM}))\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}^2 - \frac{1}{2}\vec{f} - \frac{1}{2}e = 0 \Leftrightarrow (\vec{f}-e)\left(\vec{f}+\frac{1}{2}e\right) = 0.$$

Ký hiệu $E_1 = \mathrm{Ker}\ (\vec{f}-e), E_2 = \mathrm{Ker}\left(\vec{f}+\frac{1}{2}e\right)$; chứng minh rằng : $E = E_1 \oplus E_2$. (Ta cũng có thể sử dụng các định lý về hạt nhân , Tập 6, 3.2.2, Định lý). Ký hiệu $\vec{p}$ là phép chiếu (tuyến tính) lên E_1 song song với E_2. Chứng minh rằng : $\vec{f} = -\frac{1}{2}e + \frac{3}{2}\vec{p}$.

◇ **Trả lời :** f là một phép co trục là k.g.a.c. đi qua A và định phương bởi $\mathrm{Ker}\,(\vec{f}-e)$, có phương $\mathrm{Ker}\left(\vec{f}+\frac{1}{2}e\right)$, tỷ số $-\frac{1}{2}$.

3.5.5 • Cho $M \in \langle \{ A_i \ ; 1 \le i \le n \} \rangle$. Tồn tại $(x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ sao cho $\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n} x_i \overrightarrow{A_1A_i}$.

Với ký hiệu $\alpha_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n} x_i$, và $\alpha_i = x_i$, với mọi i thuộc $\{2,...,n\}$, ta có :

$$M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le n} \text{ và } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

• Ngược lại , giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, và $M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le n}$.

Ta có :

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i} = \sum_{i=2}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i},$$

vậy $M \in <\{ A_i ; 1 \le i \le n \}>$.

3.5.6 Ký hiệu $H = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$.

Với mọi M thuộc E, tồn tại $(x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n} x_i\overrightarrow{A_1A_i}$, vì $(\overrightarrow{A_1A_i})_{2\le i\le n}$ là một cơ sở của E. Như vậy ta đã xác định một ánh xạ $\varphi : E \to H$.

Xét ánh xạ : $\Psi : H \to E$, cho ứng mỗi phần tử $(x_1, \dots, x_{n+1})$ thuộc H với điểm M thuộc E xác định bởi $\overrightarrow{A_1M} = \sum_{i=2}^{n} x_i\overrightarrow{A_1A_i}$.

Rõ ràng là $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ và $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$, vậy φ và ψ là những song ánh ngược nhau.

3.5.7 a) Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$.

1) • Vì conv(X) là giao của một họ tập lồi, nên conv(X) là lồi (xem 3.5.2, Mệnh đề 1).

• Theo định nghĩa, rõ ràng là conv(X) chứa X.

• Giả sử C là một bộ phận lồi của E có chứa X. Vậy C có mặt trong họ mà giao là conv(X), vậy conv(X) $\subset C$.

Điều này chứng tỏ rằng conv(X) là tập lồi nhỏ nhất chứa X.

2) Vì $<X>$ chứa X và dĩ nhiên lồi, ta suy ra : conv(X) $\subset <X>$.

b) 1) Vì conv(Y) là một tập lồi chứa Y, do vậy chứa X, và vì conv(X) là tập con lồi nhỏ nhất của E chứa X, nên ta có : conv(X) $\subset$ conv(Y).

2) • Nếu X lồi, thì X là tập lồi nhỏ nhất của E chứa X, vậy conv(X) = X.

• Nếu conv(X) = X, thì vì conv(X) lồi , X là lồi.

3) Vì conv(X) lồi, ta có conv(conv(X)) = conv(X).

c) Ta ký hiệu $X_1 = \left\{ \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le p} ; p \in \mathbf{N}^*, (A_1, \dots, A_p) \in X^p (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbf{R}_+)^p \text{ và } \sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 1 \right\}$.

và ta sẽ chứng minh rằng X_1 là tập lồi nhỏ nhất của E chứa X.

1) Giả sử $p \in \mathbf{N}^*, (A_1, \dots, A_p) \in X^p (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ sao cho $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 1$,

$M = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1\le i\le p}, q \in \mathbf{N}^*, (B_1, \dots, B_q) \in X^q (\beta_1, \dots, \beta_q) \in (\mathbf{R}_+)^q$ sao cho $\sum_{j=1}^{q}\beta_j = 1$,

$N = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} B_j \\ \beta_j \end{bmatrix}_{1\le j\le q}, \lambda \in [0;1]$.

Khi đó ta có :

$$\mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} M & N \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} = \mathrm{T_{tc}}\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_p & B_1 & \cdots & B_q \\ \lambda\alpha_1 & \cdots & \lambda\alpha_p & (1-\lambda)\beta_1 & \cdots & (1-\lambda)\beta_q \end{bmatrix}.$$

Ta ký hiệu $C_1 = A_1, \dots, C_p = A_p, C_{p+1} = B_1, \dots, C_{p+q} = B_q$, $\gamma_1 = \lambda\alpha_1, \dots, \gamma_p = \lambda\alpha_p$, $\gamma_{p+1} = (1-\lambda)\beta_1, \dots, \gamma_{p+q} = (1-\lambda)\beta_q$. Vậy ta có :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, ..., p+q\}, C_k \in X \\ \forall k \in \{1, ..., p+q\} \gamma_k \in \mathbb{R}_+ \\ \sum_{i=1}^{p+q} \gamma_k = \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_1 + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{q} \beta_j = \lambda + 1 - \lambda = 1 \end{cases}$$

và như vậy $T_{tc}\begin{bmatrix} M & N \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \in X_1$.

Điều này chứng tỏ : $\forall (M, N) \in (X_1)^2$, $[M, N] \subset X_1$, vậy X_1 lồi.

2) X_1 chứa X, vì mọi phần tử A thuộc X có thể viết là : $A = T_{tc}\begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Giả sử C là một bộ phận lồi của E chứa X. Ta chứng tỏ rằng C chứa X_1. Nhằm mục đích ấy, ta sẽ chứng tỏ, bằng quy nạp theo $p \in \mathbb{N}^*$, rằng với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$, với mọi $(A_1, ... A_p)$ thuộc X^p, với mọi $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ thuộc $(\mathbb{R}_+)^p$ sao cho $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, ta có : $T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p} \in C$.

Tính chất là hiển nhiên với $p = 1$ (vì $X \subset C$) và với $p = 2$ (vì C lồi). Ta giả thiết nó cũng đúng với một p nào đó thuộc $\mathbb{N}^*$, và giả sử $A_1, ..., A_{p+1} \in X$, $(\alpha_1, ... \alpha_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$ sao cho $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1$.

- Nếu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, ta ký hiệu $G = T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p}$.

Khi đó ta có : $T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p+1} = T_{tc}\begin{bmatrix} G & A_{p+1} \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i & \alpha_{p+1} \end{bmatrix}$.

Vì : $G = T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \dfrac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j} \end{bmatrix}_{1 \le i \le p}$ và vì $(\forall i \in \{1, ..., p\}, \dfrac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j} \in \mathbf{R}_+)$ và $\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j} = 1$.

nên theo giả thiết quy nạp $G \in C$.

Và : $$T_{tc}\begin{bmatrix} G & A_{p+1} \\ 1-\alpha_{p+1} & \alpha_{p+1} \end{bmatrix} \in [G, A_{p+1}] \subset C.$$

d) 1) Cho $X \in \mathfrak{P}(E)$.

- Theo 3.5.2, Mệnh đề 2, *I*), $f(\mathrm{conv}(X))$ là một bộ phận lồi của E'. Hơn nữa, $X \subset \mathrm{conv}(X)$, vậy $f(X) \subset f(\mathrm{conv}(X))$. Vì $\mathrm{conv}(f(X))$ là bộ phận lồi bé nhất của E' chứa $f(x)$, nên ta kết luận : $\mathrm{conv}(f(X)) \subset f(\mathrm{conv}(X))$.

- Cho $M' \in f(\mathrm{conv}(X))$; tồn tại $M \in \mathrm{conv}(X)$ sao cho $M' = f(M)$. Theo c) (trường hợp $X = \varnothing$ là hiển nhiên), tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, ... A_p) \in X^p$, $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ mà $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, sao cho $M = T_{tc}\begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p}$. Vì f là afin, vậy bảo toàn khái niệm tâm tỷ cự, ta suy ra, khi lại sử dụng c):

$$f(M) = T_{tc}\begin{bmatrix} f(A_i) \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p} \in \mathrm{conv}(f(X)).$$

Vậy : $$f(\mathrm{conv}(X)) \subset \mathrm{conv}(f(X)).$$

2) • Cho $X' \in \mathfrak{P}(E')$. Theo 3.5.2, Mệnh đề 2, 2), f^{-1} conv $(X'))$ là một bộ phận lồi của E. Hơn nữa, $X' \subset \text{conv}(X'))$, vậy $f^{-1}(X') \subset f^{-1}\text{conv}(X'))$. Vì $\text{conv}(f^{-1}(X'))$ là bộ phận lồi bé nhất của E chứa $f^{-1}(X')$, nên ta kết luận :

$$\text{conv}(f^{-1}(X')) \subset f^{-1}(\text{conv}(X')).$$

• Với $E = F = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (là afin), $X' = \{-1, 1\}$, ta có :
$x \mapsto 0$

$$\begin{cases} f^{-1}(X') = \varnothing, \text{ vậy : } \text{conv}(f^{-1}(X')) = \varnothing \\ \text{conv}(X') = [-1 : 1], \text{ vậy } f^{-1}(\text{conv}((X')) = \mathbf{R}. \end{cases}$$

3.5.8 a) ◇ **Trả lời :** 1) cả hai đầu mút 2) đường tròn, biên của đĩa
3) tập rỗng 4) cả bốn đỉnh của hình vuông

b) Ta ký hiệu X' là tập hợp các điểm cực biên của conv(X).

1) Ta chứng minh rằng : $X' \subset X$,

Giả sử $M \in X'$. Vì $M \in \text{conv}(X)$, nên tồn tại $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 \text{ và } M = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} (A_i) \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p}, \text{ khi ký hiệu } \{A_1, ..., A_n\} = X$$

Giả thiết tồn tại $(i, j) \in \{1, ..., p\}^2$ sao cho $i \neq j$, $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$.

Ký hiệu $A = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A_i & A_j & \begin{pmatrix} A_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}_{k \neq i, k \neq j} \\ \alpha_i & \alpha_j & \end{bmatrix}$, $B = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A_i & A_j & \begin{pmatrix} A_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}_{k \neq i, k \neq j} \\ 0 & \alpha_i + \alpha_j & \end{bmatrix}$.

Khi đó ta có $A \in \text{conv}(X)$, $B \in \text{conv}(X)$, và $M \in [AB]$ vì :

$$M = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A_i & A_j & \begin{pmatrix} A_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}_{k \neq i, k \neq j} \\ \alpha_i & \alpha_j & \end{bmatrix} = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A & B \\ \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j} & \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} \end{bmatrix}.$$

Hơn nữa, $A \neq B$ (vì $A_i \neq A_j$ và $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$), $M \neq A$ (vì $A_i \neq A_j$ và $\alpha_j \neq 0$), $M \neq B$ (vì $A_i \neq A_j$ và $\alpha_i \neq 0$).
Điều này chứng tỏ rằng M không thể là một điểm cực biên của conv(X), mâu thuẫn.
Như vậy, các α_i đều bằng không, trừ một trong chúng, và như vậy $M \in X$

2) Vì $X' \subset X$, ta có $\text{conv}(X') \subset \text{conv}(X)$. (Một cách tổng quát, nếu X không hữu hạn, vì $X' \subset \text{conv}(X)$, nên ta có : $\text{conv}(X') \subset \text{conv}(\text{conv}(X)) = (\text{conv}(X))$.

3) Ta chứng tỏ $\text{conv}(X') = \text{conv}(X)$ bằng phép quy nạp theo bản số p của conv(X).
Tính chất là hiển nhiên nếu $p = 1$ hoặc $p = 2$.

Ta giả thiết rằng, với một p thuộc $\mathbb{N}^*$, với mọi bộ phận hữu hạn X của p phần tử của E, ta có $\text{conv}(X') = \text{conv}(X)$, và giả sử Y là một bộ phận hữu hạn gồm $p + 1$ phần của E, $Y = \{A_1, ..., A_{p+1}\}$.
Nếu tất cả các phần tử của Y là những điểm cực biên của conv(Y), thì $Y' = Y$, vậy $\text{conv}(Y') = \text{conv}(Y)$.

Ta giả thiết $Y' \neq Y$, chẳng hạn (nếu cần hoán vị các phần tử của Y), giả thiết $A_{p+1} \notin Y'$, tức là A_{p+1} không phải là điểm cực biên của conv(Y). Tồn tại $(A, B) \in (\text{conv}(Y))^2$ sao cho $A_{p+1} \in [AB]$, $A_{p+1} \neq A$ và $A_{p+1} \neq B$; tồn tại $\lambda \in]0 ; 1[$ sao cho $A_{p+1} = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A & B \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}$, rồi tồn tại $(\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$, $(\beta_1, ..., \beta_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1, \ A = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p+1}, \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i = 1, \ \ B = \mathrm{T}_{\mathrm{tc}} \begin{bmatrix} B_i \\ \beta_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le p+1}.$$

Khi đó ta có : $A_{p+1} = T_{tc}\begin{bmatrix} (A_i) \\ \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta_i \end{bmatrix}_{1\le i\le p}$.

Vì $A_{p+1} \neq A$ và $A_{p+1} \neq B$, nên các α_i ($1 \le i \le p$) không bằng không tất cả, và các β_i ($1 \le i \le p$) cũng không, vậy các $(\lambda_i\alpha_i + (1 - \lambda)\beta_i)_{1\le i\le p}$ cũng không.

Từ đó suy ra : $A_{p+1} \in \mathrm{conv}(X)$, khi ký hiệu $X = Y - \{A_{p+1}\} = \{A_1,\dots,A_p\}$.

Vì $A_{p+1} \in \mathrm{conv}(X)$, ta dễ dàng suy ra $\mathrm{conv}(Y) = \mathrm{conv}(X)$.

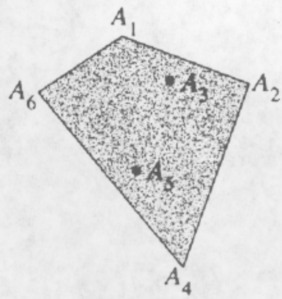
Theo giả thiết quy nạp, $\mathrm{conv}(X') = \mathrm{conv}(X)$.

Nhưng, vì $\mathrm{conv}(Y) = \mathrm{conv}(X)$, nên Y' cũng là tập hợp các điểm cực biên của $\mathrm{conv}(X)$, vậy $Y' = X'$, rồi $\mathrm{conv}(Y') = \mathrm{conv}(X') = \mathrm{conv}(X) = \mathrm{conv}(Y)$.

Ví dụ :

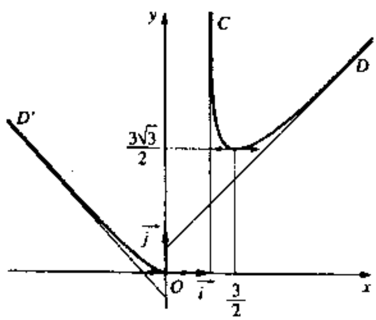
Trong ví dụ này, $X = \{A_1, \dots, A_6\}$, $X' = \{A_1, A_2, A_4, A_6\}$

$\mathrm{conv}(X)$ được tô sẫm.



Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 4

4.1.1 *a*) Def(*f*) =] - ∞; 0] ∪] 1; +∞[, *f* khả vi trên Def(*f*) và :



$\forall\ x \in \mathrm{Def}(f),\ f'(x) = \dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\left(\dfrac{x^3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Tại : $+\infty$, $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, vậy *C* nhận đường thẳng *D* có phương trình $y = x + \dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận, và tại lân cận của $+\infty$, *C* ở trên *D*. Tương tự, *C* nhận đường thẳng *D*': $y = -x - \dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận và tại $-\infty$, *C* ở trên *D*'.

x	$-\infty$		0	1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

b) Def(*f*) = $\mathbb{R}^*$, *f* khả vi trên Def(*f*) và :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$, trong đó

φ: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $\qquad \varepsilon = \mathrm{sgn}(x)$;

$x \mapsto x^2 + \varepsilon - \varepsilon\ln(\varepsilon x)$

φ khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = 2x - \dfrac{\varepsilon}{x^2}$, từ đó suy ra bảng biến thiên của φ.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

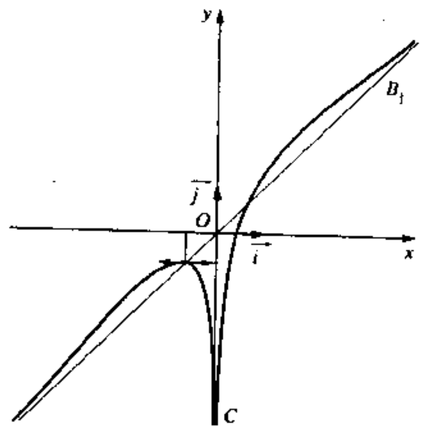
Vì $\varphi(-1) = 0$ và $\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2 > 0$,

nên ta suy ra bảng biến thiên của *f*.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$

C nhận đường thẳng B_1 có phương trình $y = x$ làm đường tiệm cận và tại lân cận $\pm\infty$, C ở phía trên của B_1.

C có hai điểm uốn, với tọa độ $\left(-e^{\frac{3}{2}}, -e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $\left(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$.



c) Việc khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto e^x - 1 - x$ chứng tỏ rằng : Def$(f) = \mathbb{R}^*$; f khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{x}{(e^x - 1 - x)^2} g(x), \text{ trong đó } g(x) = (2 - x)e^x - (2 + x).$$

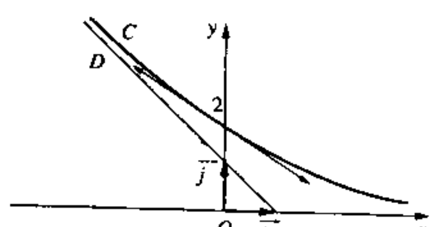
Ánh xạ g thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}$ và $\forall x \in \mathbb{R}$, ($g'(x) = (1 - x)e^x - 1$, $g''(x) = -xe^x$), từ đó có bảng biến thiên của g, suy ra bảng biến thiên của f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$ ↗	0	↘ $-$	
$g(x)$		$+$ ↘	0	↘ $-$	
$f'(x)$		$-$	$-\frac{2}{3}$ ‖ $-\frac{2}{3}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2 ‖ 2	↘	0

Vì $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (khi x tiến đến 0), nên ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng cách đặt $f(0) = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{3}$.

Ta có thể, một cách tổng quát hơn, chứng minh rằng f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}$, vì f thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^*$ và nhận một khai triển thành chuỗi nguyên tại 0.

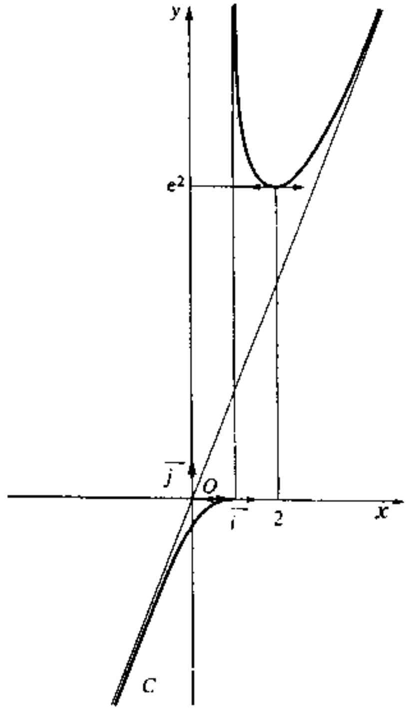


Tại $-\infty$, $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, vậy C nhận đường thẳng D: $y = -x + 1$ làm tiệm cận, và tại lân cận $-\infty$, C ở trên D.

d) Def(f) = $\mathbb{R}$ - {1}, f khả vi trên Def(f) và :

$$\forall x \in \mathrm{Def}(f),\ f'(x) = \frac{x-2}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$$

x	$-\infty$		1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	‖ $+\infty \searrow$	e^2	$\nearrow +\infty$



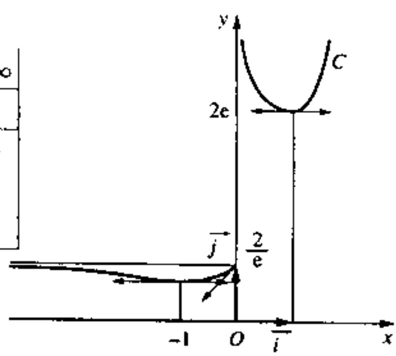
Ta có thể thác triển liên tục f tại 1^- bằng cách đặt $f(1) = 0$; hơn nữa $f'(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

Tại $\pm\infty$, $f(x) = \mathrm{e}x + \frac{\mathrm{e}}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, vậy C nhận đường thẳng D: $y = \mathrm{e}x$ làm tiệm cận và, tại lân cận của $+\infty$ (tương ứng : $-\infty$) C nằm trên (tương ứng : dưới) D.

e) Def(f) = $\mathbb{R}^*$, f khả vi trên $\mathbb{R}^*$ và : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, trong đó :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - x} \text{ ; và } g'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - x}.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow 1$	‖	$-\infty \nearrow 1$



Ta thấy rằng g triệt tiêu tại -1 và 1.

x	$-\infty$	-1		0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1 ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$1 \searrow$	$2/\mathrm{e}$	$\nearrow 1$	‖ $+\infty \searrow$	$2\mathrm{e}$	$\nearrow +\infty$

Ta có thể thác triển liên tục f tại 0^- bằng cách đặt $f(0) = 1$; hơn nữa $f'(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1$.

f) *f* là π - tuần hoàn

và : $\forall x \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$.

Ta có : $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$, $f(x)=e^{g(\tan x)}$,

trong đó: $g:]0;1[\to \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \frac{2t}{1-t^2}\ln t$$

Vậy: $f'(x) = f(x)g'(\tan x)(1+\tan^2 x)$.

Và : $g'(t)=\dfrac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}h(t)$,

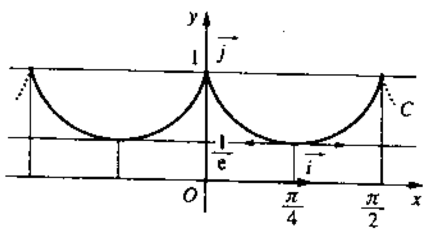
t	0		1
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	0	$\searrow$	-1
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/e$

$t = \tan x$

trong đó : $h(t) = \ln t + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad h'(t) = \dfrac{(1-t^2)^2}{t(1+t^2)^2}$.

Khảo sát tại 0^+: Ta có thể thác triển liên tục *f* tại 0^+ bằng đặt $g(0) = 0$ và *f* cũng vậy tại 0^+ bằng đặt $f(0) = 1$.

Hơn nữa: $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.



Khảo sát tại 1^-**:** Ta có thể thác triển liên tục *f* tại 1^- bằng đặt $g(1) = -1$, và *f* cũng vậy tại $\left(\frac{\pi}{4}\right)^-$ bằng đặt $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{e}$.

Hơn nữa: $f'(x) \underset{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}{\longrightarrow} 0$

g) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}^*$, *f* thuộc lớp C^2 trên $\mathbb{R}^*$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(f'(x)=\ln\left|e^x-1\right|+\frac{xe^x}{e^x-1};\quad f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}g(x)\right).$$

trong đó $\quad g(x) = 2(e^x - 1) - x$, $\quad g'(x) = 2e^x - 1$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy, *g* triệt tiêu tại đúng hai số thực, x_0 (sao cho $x_0 < -\ln 2$) và 0.

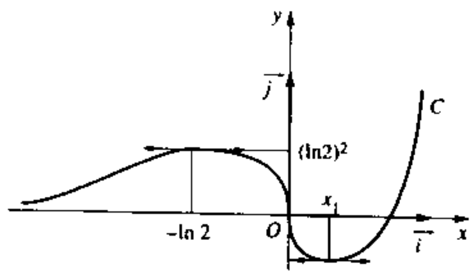
x	$-\infty$		x_0		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f' có đúng hai không điểm, $-\ln 2$ và x_1 (sao cho $0 < x_1$); $x_1 \simeq 0{,}267$, $f(x_1) \simeq -0{,}316$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$(\ln 2)^2$	↘	0 ‖ 0	↘		↗	$+\infty$

Ta có thể thác triển liên tục f tại 0 bằng đặt $f(0) = 0$, hơn nữa $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

Tại $+\infty$: $f(x) = x^2 + o(1)$.



h) Việc khảo sát sự biến thiên của $x \mapsto x - 1 + 2e^{-x}$ chứng tỏ : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 + 2e^{-x} \geq \ln 2 > 0$.

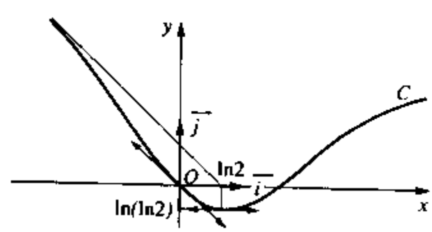
Vậy Def(f) = $\mathbb{R}$; f khả vi trên $\mathbb{R}$ và : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1 - 2e^{-x}}{x - 1 + 2e^{-x}}$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln(\ln 2)$	↗	$+\infty$

Tại $-\infty$: $f(x) = -x + \ln 2 + \dfrac{xe^x}{2} + o(xe^x)$.

Vậy C có tiệm cận là D: $y = -x + \ln 2$, và tại lân cận $-\infty$, C ở phía dưới D.

Tại $+\infty$: $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$, vậy có một nhánh vô tận parabôlic với phương tiệm cận $x'x$. Có hai điểm uốn, có các tọa độ gần đúng là : (-0,768; 0,933), (1,678; 0,050).



i) Def(f) = $\mathbb{R}$ - {-1}, f khả vi trên $\mathbb{R}$ - {-1; 1} và:

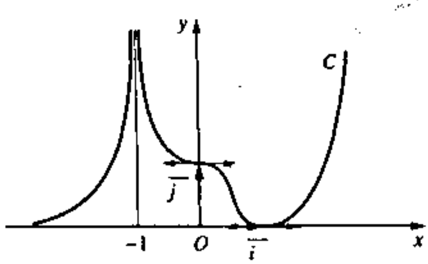
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad f'(x) = 2f(x)g(x^2),$$

trong đó : $\forall t \in [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[,\ g(t) = \ln|t - 1| + \dfrac{2t}{t-1}$, $g'(t) = \dfrac{t-3}{(t-1)^2}$.

t	0		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3 + \ln 2$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	0	↗	$+\infty$

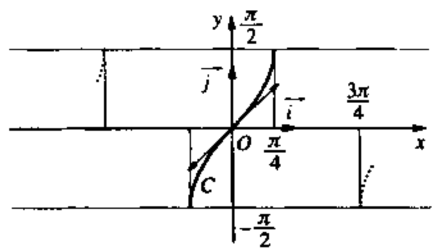
Hơn nữa, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ và $f'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.



j) $\mathrm{Def}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+n\pi; \frac{\pi}{4}+n\pi\right[$, f lẻ, π tuần hoàn, khả vi trên Def(f), và :

$$\forall x \in \mathrm{Def}(f), \quad f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}.$$

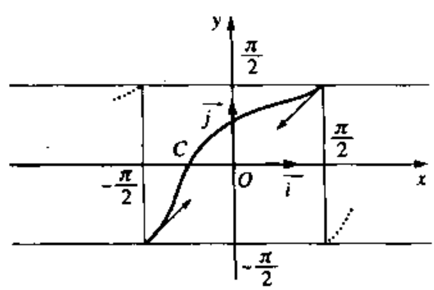
x	0		$\pi/4$
$f'(x)$	1	$+$	$+\infty$ ‖
$f(x)$	0	↗	$\pi/2$



k) $\mathrm{Def}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, f là π- tuần hoàn, khả vi trên Def(f), và:

$$\forall x \in \mathrm{Def}(f), \quad f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{1+(1+\tan x)^2}.$$

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$f'(x)$	‖ 1	$+$	1 ‖
$f(x)$	‖ $-\pi/2$	↗	$\pi/2$ ‖



Vì $\forall (x, y) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[^2$, ($y = f(x) \Leftrightarrow -x = f(-y)$), nên C nhận đường phân giác thứ hai làm trục đối xứng.

Điểm uốn, với trị gần đúng : (0,554 ; 1,017).

4.1.2 Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có:

$$\ln(a\,\text{ch}x + b\,\text{sh}x) = \ln\left(\frac{a+b}{2}e^{x} + \frac{a-b}{2}e^{-x}\right) = \ln\frac{a+b}{2} + x + \ln\left(1 + \frac{a-b}{a+b}e^{-2x}\right).$$

Khi ký hiệu $t = x - \frac{1}{2}\ln\frac{a-b}{a+b}$, ta được:

$$\begin{aligned}\ln(a\,\text{ch}x + b\,\text{sh}x) &= \ln\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{a-b}{a+b} + t + \ln\left(1+e^{-2t}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(a^2-b^2) - \ln 2 + t + \ln(1+e^{-2t})\\ &= \frac{1}{2}\ln(a^2-b^2) + \ln\text{ch}t\\ &= \frac{1}{2}\ln(a^2-b^2) + \ln\text{ch}\left(x - \frac{1}{2}\ln\frac{a-b}{a+b}\right).\end{aligned}$$

◊ **Trả lời :** $C_{a,b}$ suy từ C qua phép tịnh tiến theo vectơ

$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a-b}{a+b}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}\ln(a^2-b^2)\right)\vec{j}.$$

4.1.3 *a)* • $x\left(\frac{1}{t}\right) = -y(t)$, $y\left(\frac{1}{t}\right) = -x(t)$, vậy C đối xứng qua đường phân giác thứ hai.

• $x'(t) = -\dfrac{t^2+2t-1}{t^2(t-1)^2}$; $y'(t) = \dfrac{t^2-2t-1}{(t-1)^2}$.

t	-1		$1-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}-1$		1
x'		+		+	‖	+	0	−	
x	0	↗	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$
y	0	↗	$3-2\sqrt{2}$	↘	0	↘	-1	↘	$-\infty$
y'		+	0	−		−		−	

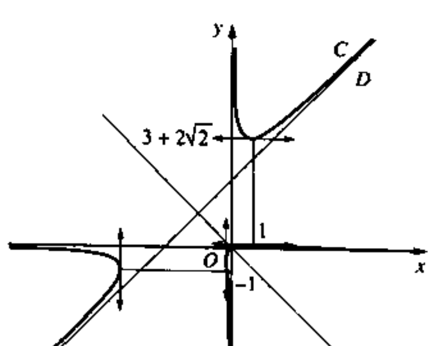
Khảo sát tại 1: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t^2 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1$,

$$y(t) - x(t) = \frac{(t+1)^2}{t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 4$$

vậy C nhận D: $y = x + 4$ làm tiệm cận.

Hơn nữa, $y(t) - x(t) - 4 = \dfrac{(t-1)^2}{t} \underset{t\to 1^-}{\sim} (t-1)^2$,

vậy C ở phía trên D khi $t \to 1^-$.



b) • $x'(t)=\dfrac{(t-1)(t+1)}{2t^2}$, $y'(t)=-\dfrac{2(t-1)}{t^3}$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
y	0	↘	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	0
y'			$-$		‖	$+$	0	$-$	

• **Khảo sát tại 0** : $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{2(2t-1)}{t(t^2+1)}\underset{t\to 0^{\pm}}{\longrightarrow}\mp\infty$, vậy C có một nhánh parabolic với phương tiệm cận $y'y$.

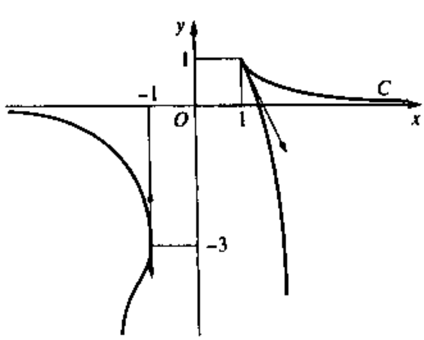
• **Khảo sát tại 1**: Bằng phép đổi biến $u = t - 1$.

$$x(t)=\frac{2+2u+u^2}{2(1+u)}=1+\frac{u^2}{2(1+u)}=1+\frac{1}{2}u^2(1-u+o(u))=1+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u^3+o(u^3),$$

$$y(t)=\frac{1+2u}{1+2u+u^2}=1-\frac{u^2}{1+2u+u^2}=1-u^2(1-2u+o(u))=1-u^2+2u^3+o(u^3).$$

Vậy ta có: $\overrightarrow{V_1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_2}=2!\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_3}=3!\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}$.

Vì $\left(\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}\right)$ độc lập, nên đây là một điểm lùi loại một, với tiếp tuyến được định phương bởi $\overrightarrow{V_2}$.



c) • $x(-t) = x(t)$ và $y(-t) = -y(t)$; vậy ta cho t biến thiên trong $[0; +\infty[-\{1\}$, sau đó sẽ thực hiện phép đối xứng qua $x'x$.

• $x'(t) = -\dfrac{4t^3}{(t^4-1)^2}$, $\quad y'(t) = \dfrac{-t^2(t^4+3)}{(t^4-1)^2}$.

t	0		1		$+\infty$
x'	0	$-$	‖	$-$	
x	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0
y	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0
y'	0	$-$	‖	$-$	

• **Khảo sát tại 1**: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t^3 \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$, rồi $y(t) - x(t) = \dfrac{t^3-1}{t^4-1} = \dfrac{t^2+t+1}{t^3+t^2+t+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \dfrac{3}{4}$,

vậy C nhận D : $y = x + \dfrac{3}{4}$ làm tiệm cận.

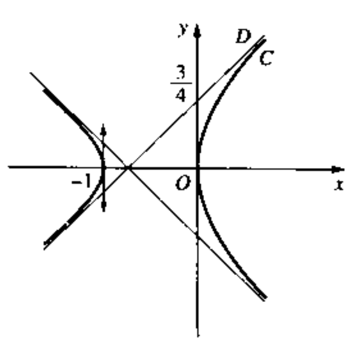
Hơn nữa : $y(t) - x(t) - \dfrac{3}{4} = \dfrac{t^3-1}{t^4-1} - \dfrac{3}{4}$

$$= \frac{-3t^4+4t^3-1}{4(t^4-1)} = \frac{-(t-1)^2(3t^2+2t+1)}{4(t^4-1)}$$

$$= -(t-1)\frac{3t^2+2t+1}{4(t^3+t^2+t+1)} \underset{t\to 1^{\pm}}{\longrightarrow} 0^{\mp}.$$

Vậy C sẽ ở dưới (tương ứng : ở trên) D khi $t \to 1^+$ (tương ứng : 1^-)

• **Khảo sát tại** $+\infty$: $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{t^4+3}{4t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, vậy tiếp tuyến với C tại O là $y'y$.



d) • $x'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}$, $y'(t)=-\dfrac{t^2-4t+1}{(t-2)^2}$

t	$-\infty$		-2		-1		0		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0				$+$				
x	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗		↗	$\frac{7}{3}$	↗		↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↘		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$
y'					$-$				0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

• Các đường thẳng có phương trình $x=\dfrac{7}{3}$ và $y=0$ là tiệm cận với C.

• **Khảo sát tại** $\pm\infty$: $x(t)\underset{t\to\pm\infty}{\sim} t$ và $y(t)\underset{t\to\pm\infty}{\sim} -t$, từ đó $\dfrac{y(t)}{x(t)}\underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow}-1$, rồi :

$$y(t)+x(t)=-\frac{2t^2+1}{(t+1)(t-2)}=-2\frac{1+\frac{1}{2t^2}}{1-\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}=-2\left(1+\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)=-2-\frac{2}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Vậy C nhận đường thẳng có phương trình $y=-x-2$ làm tiệm cận và, khi $t\to+\infty$ (tương ứng : $-\infty$) C sẽ ở dưới (tương ứng : trên) D.

• **Điểm kép :**

Với $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $u\neq v$, ta có:

$$\begin{cases}x(u)=x(v)\\y(u)=y(v)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u^2+u+1)(v+1)=(v^2+v+1)(u+1)\\(u^2-1)(2-v)=(v^2-1)(2-u)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2v-uv^2+u^2-v^2=0\\uv^2-u^2v+2(u^2-v^2)+v-u=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P+S=0\\-P+2S-1=0\end{cases},\ \text{khi ký hiệu}\ \begin{cases}S=u+v\\P=uv\end{cases}.$$

Cuối cùng : $\begin{cases}P+S=0\\-P+2S-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=\dfrac{1}{3}\\P=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Như vậy, u, v là các nghiệm thực của phương trình $3t^2-t-1=0$, ẩn $t\in\mathbb{R}$; ta có :

$$u=\frac{1-\sqrt{13}}{6},\quad v=\frac{1+\sqrt{13}}{6},\ \text{sai khác về thứ tự.}$$

Sau đó:

$2x = x(u) + x(v)$

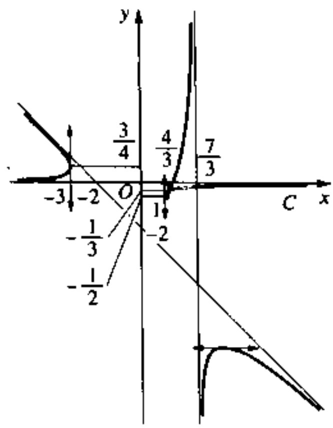
$= \dfrac{(u^2+u+1)(v+1)+(v^2+v+1)(u+1)}{(u+1)(v+1)}$

$= \dfrac{SP+(S^2-2P)+2P+2S+2}{P+S+1} = \dfrac{8}{3}$,

$2y = y(u) + y(v)$

$= \dfrac{(u^2-1)(v-2)+(v^2-1)(u-2)}{(u-2)(v-2)}$

$= \dfrac{SP-2(S^2-2P)-S+4}{P-2S+4} = -\dfrac{2}{3}$.



Hoặc bằng cách sử dụng: $3u^2 = u+1$:

$x(u) = \dfrac{(u^2+u+1)}{u+1} = \dfrac{u^2}{u+1} + 1 = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$,

$y(u) = \dfrac{u^2-1}{2-u} = \dfrac{1}{3}\dfrac{u-2}{2-u} = -\dfrac{1}{3}$.

Như vậy, C có một điểm kép, có tọa độ $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

e) Thực hiện một phép đổi hệ quy chiếu, trong đó $\mathcal{R}' = (O;\vec{I},\vec{J})$ có được từ $\mathcal{R}$ bằng phép quay tâm O và góc quay $\dfrac{\pi}{4}$. Các tọa độ (X, Y) trong $\mathcal{R}'$ của một điểm M, với các tọa độ (x, y) trong $\mathcal{R}$, được cho bởi: $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$, từ đó một BĐTS của C trong $\mathcal{R}'$: $X = \sqrt{2}\,t^4$, $Y = \sqrt{2}\left(t^3+t^2\right)$. Như vậy, $C = C_1 \cup C_2$, trong đó C_1, C_2 là các đường cong biểu thị các hàm số Y_1, Y_2 xác định bởi:

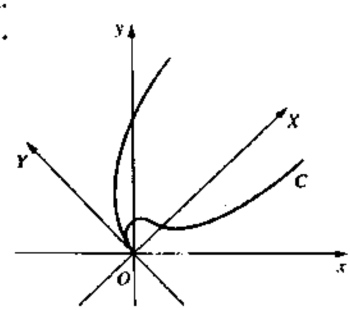
$$Y_1(X) = \sqrt{2}\left(2^{-\frac{3}{8}}X^{\frac{3}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}\right),\ Y_2(X) = \sqrt{2}\left(-2^{-\frac{3}{8}}X^{\frac{3}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}\right).$$

- $Y_1'(X) > 0$, $Y_2'(X)$ triệt tiêu và đổi dấu với $X = \alpha$, trong đó $\alpha = 3^{-4}.2^{\frac{9}{2}} \simeq 0{,}279$, và $Y_2(\alpha) \simeq 0{,}212$.

X	0		$+\infty$
Y_1'	‖ $+\infty$	$+$	
Y_1	0	↗	$+\infty$

X	0		α		$+\infty$
Y_2'	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	
Y_2	0	↗		↘	$-\infty$

C nhận hai nhánh parabôlic, có phương tiệm cận $X'X$.
O là một điểm lùi loại hai.



f) • $x'(t)=\dfrac{2(1-t^2)}{(1-t^2)^2}$, $y'(t)=\dfrac{8(t-1)(3t+1)}{(1-t^2)^3}$

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{3}{5}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$\frac{27}{5}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y'			$+$		0	$-$	0	$+$	

Khảo sát tại 1: Bằng phép đổi biến $u = t - 1$, ta có:

$$x(t)=\frac{2+2u}{2+2u+u^2}=1-\frac{u^2}{2+2u+u^2}=1-\frac{u^2}{2}(1-u+o(u))=1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}+o(u^3),$$

$$y(t)=-\frac{4(1+2u)}{(2+2u+u^2)^2}=-\frac{1+2u}{1+2u+2u^2+u^3+o(u^3)}=-1+\frac{2u^2+u^3+o(u^3)}{1+2u+2u^2+u^3+o(u^3)}$$

$$=-1+2u^2\,\frac{1+\dfrac{u}{2}+o(u)}{1+2u+o(u)}=-1+2u^2\left(1+\frac{u}{2}+o(u)\right)(1-2u+o(u))$$

$$=-1+2u^2-3u^3+o(u^3).$$

do đó : $\overrightarrow{V_2}=2!\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_3}=3!\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -18\end{pmatrix}$.

Ở đây, $p = 2$, $q = 3$, vậy đó là điểm lùi loại một, và tiếp tuyến được định phương bởi $\overrightarrow{V_2}$.

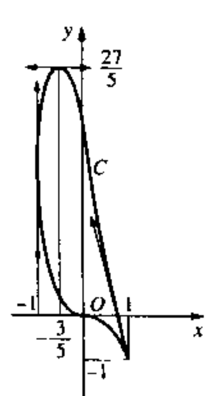
Khảo sát tại $\pm\infty$: Ta bổ sung x, y bằng cách đặt :

$$x(\pm\infty)=0,\ y(\pm\infty)=0.$$

Ta có: $x'(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} -\dfrac{2}{t^2}$ và $y'(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{24}{t^4}$,

vậy $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} -\dfrac{12}{t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Như vậy, tiếp tuyến với C tại O là $x'x$; đây là một điểm uốn.



g) • $x'(t) = 3t^2 + 4t^3 = t^2(3 + 4t)$, $y'(t) = 5t^4 + 6t^5 = t^4(5 + 6t)$.

t	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$-\frac{3}{4}$		0		$+\infty$
x'		$-$			0	$+$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$+$	

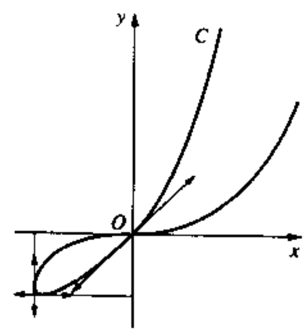
$x\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5^3}{6^4} \simeq -0{,}096$,

$x\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3^3}{4^4} \simeq -0{,}105$,

$y\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5^5}{6^6} \simeq -0{,}067$,

$y\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3^5}{4^6} \simeq -0{,}059$.

Khảo sát tại $\pm\infty$: $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} t^2 \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, vậy C nhận một nhánh parabôlic có phương tiệm cận $y'y$.



Khảo sát tại 0 : Ta có ngay các khai triển hữu hạn tại 0 của x và y, và từ đó :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^6.$$

Như vậy, $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2} = \vec{0}$, $\overrightarrow{V_3} = 3!\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_4}$ cộng tuyến với $\overrightarrow{V_3}$, $(\overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_5})$ độc lập, suy ra $p = 3$, $q = 5$; vậy đây là một điểm uốn, với tiếp tuyến được định phương bởi $\overrightarrow{V_3}$.

Gốc là một điểm kép của C, ứng với $t = -1$, $t = 0$.

h) • x lẻ và y chẵn; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0 ; +\infty[$, rồi thực hiện một phép đối xứng qua $y'y$.

• $x'(t) = 1 - 3t^2$, $y'(t) = 2t(1 - 2t^2)$.

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
x'		$+$	0		$-$		
x	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$
y'			$+$		0	$-$	

$x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \simeq 0{,}385$, $x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \simeq 0{,}354$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$.

• **Khảo sát tại** $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, vậy C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$.

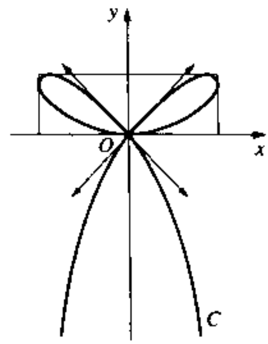
• O là điểm bội của C, ứng với $t = -1, 0, 1$.

• **Phương trình Descartes** : Ta khử t, chú ý rằng $y = t(x)$, và được (nếu $x \neq 0$):

$$x = t - t^3 = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3},$$

từ đó suy ra một phương trình Descartes của C:

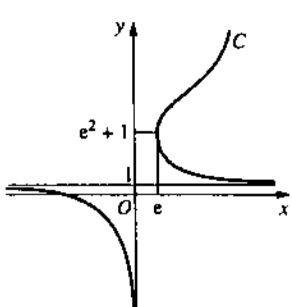
$$x^4 - x^2y + y^3 = 0.$$



$i)$ • $x'(t) = \dfrac{\ln t - 1}{(\ln t)^2}$, $\quad y'(t) = 2t + \dfrac{1}{t}$.

t	0		1		e		$+\infty$
x'	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖ 0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$
y	‖ $-\infty$	↗	1	↗	e^2+1	↗	$+\infty$
y'	‖	$+$		$+$		$+$	

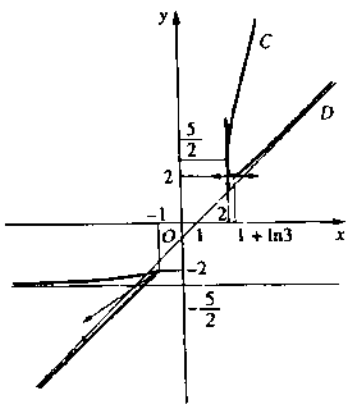
• **Khảo sát tại** $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} t \ln t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, vậy C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$.



j) • $x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{2+t} = \dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)}$, $\qquad y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$.

t	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$1+\ln 3$	↘	$\frac{1}{2}+2\ln 2$	↗	$+\infty$
y	$-5/2$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$5/2$	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	

• **Khảo sát tại 0** : $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, $\qquad y(t) - x(t) = t - \ln(2+t) = -\ln 2 + \dfrac{t}{2} + o(t)$; vậy C nhận D: $y = x - \ln 2$ làm tiệm cận và, khi $t \to 0^+$ (tương ứng : 0^-) C nằm trên (tương ứng : dưới) D.



• **Khảo sát tại** $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ vậy C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$.

• **Điểm dừng** : với $t = -1$.

Phép đổi tham số $h = t + 1$ cho ta:

$x(t) = -1 - \dfrac{3}{2}h^2 - \dfrac{2}{3}h^3 + o(h^3)$

$y(t) = -2 - h^2 - h^3 + o(h^3)$.

Đây là một điểm lùi loại một, và tiếp tuyến được định phương bởi (3,2).

• **Điểm uốn:** Cho $x'y'' - y'x''$ bằng 0 ta được $t = 4$.

k) • $x'(t) = \left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)e^{t+\frac{1}{t}}$, $\quad y'(t) = \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)e^{t-\frac{1}{t}}$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	0	↗	e^{-2}	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	e^2	↗	$+\infty$
y	0	↗	1	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	1	↗	$+\infty$
y'			$+$		‖		$+$		

• **Khảo sát tại** -∞: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = e^{\frac{-2}{t}} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 1$, vậy khi thác triển C tại O,tiếp tuyến là đường phân giác thứ nhất. Hơn nữa :

$$y(t) - x(t) = \left(\frac{y(t)}{x(t)} - 1\right)x(t) = (e^{-\frac{2}{t}} - 1)x(t),$$

do đó, khi t tiến đến -∞, $y(t) > x(t)$, và C nằm trên tiếp tuyến của nó.

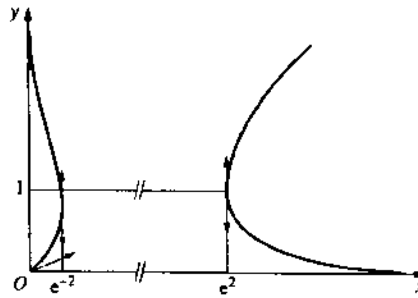
• **Khảo sát tại** +∞ : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = e^{-\frac{2}{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, rồi :

$$y(t)\text{-}x(t) = e^t(e^{-\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{t}})$$

$$= -2e^t \operatorname{sh}\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{2e^t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

vậy C có một nhánh parabôlic có phương tiệm cận là đường phân giác thứ nhất.

Trên hình vẽ, hệ quy chiếu không trực chuẩn hóa.



l) • $x'(t) = \dfrac{te^t + 1}{(e^t - 1)^2} < 0$, $y'(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2}$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'			$-$		‖		$-$		
x	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{e-1}$	↘	0
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• **Khảo sát tại** -∞:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2+1}{t}\,\frac{e^t-1}{t+1} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -1, \quad \text{rồi} \quad y(t) + x(t) = \frac{(t^2+1)e^t + t - 1}{t(e^t - 1)} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -1,$$

và $y(t) + x(t) + 1 = \dfrac{(t^2+t+1)e^t - 1}{t(e^t - 1)} \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{t} < 0$,

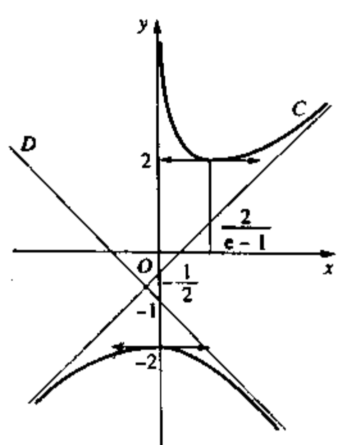
vậy C nhận đường thẳng D có phương trình $y = -x-1$ làm tiệm cận và khi t tiến đến -∞, C nằm dưới D.

• **Khảo sát tại** 0 : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2+1}{t}\,\dfrac{e^t-1}{t+1} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 1$, do đó sau khi tính một khai triển hữu hạn, ta có:

$$y(t) - x(t) = \frac{(t^2+1)(e^t-1) - (t+1)t}{t(e^t-1)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{17}{12}t + o(t);$$

vậy C nhận đường thẳng D' có phương trình $y = x - \dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận và, khi t tiến đến 0^+ (tương ứng : 0^-), C nằm trên (tương ứng : dưới) D'.



m) • $x'(t)=\dfrac{te^t}{(t+1)^2}$, $y'(t)=\dfrac{(t^2+t+1)e^t}{(t+1)^2}$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y'		$+$	‖		$+$		

• **Khảo sát tại** -1: $\dfrac{y(t)}{x(t)}=t\underset{t\to -1}{\to}-1$, rồi $y(t)+x(t)=e^t\underset{t\to -1}{\to}e^{-1}$, và

$$y(t)+x(t)-e^{-1}=e^t-e^{-1}=e^{-1}(e^{t+1}-1)\underset{t\to -1}{\sim}e^{-1}(t+1);$$

vậy C nhận đường thẳng D có phương trình $y=-x+e^{-1}$ làm tiệm cận và khi t tiến đến -1^+ (tương ứng : -1^-) , C ở trên (tương ứng : dưới) D.

• **Khảo sát tại** $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)}=t\underset{t\to +\infty}{\to}+\infty$, vậy C nhận một nhánh parabôlic có phương tiệm cận $y'y$.

• **Khảo sát tại** $-\infty$: Ta thác triển C tại 0. Hơn nữa $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{t^2+t+1}{t}\underset{t\to -\infty}{\to}-\infty$, vậy C nhận một tiếp tuyến song song với $y'y$ tại 0, và đó chính là $y'y$.

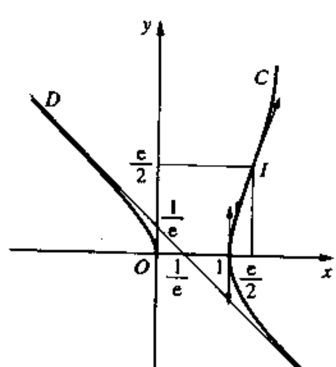
• **Điểm uốn** : Giải phương trình.
$x'y''-x''y'=0$, ẩn t. Ta có:

$$x''(t)=\frac{(t^2+1)e^t}{(t+1)^3},\quad y''(t)=\frac{(t^3+2t^2+3t)e^t}{(t+1)^3}.$$

Từ đó: $x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)=\dfrac{P(t)e^{2t}}{(t+1)^5}$

trong đó: $P(t)=t^3+t^2-t-1=(t+1)^2(t-1)$.

Như vậy, C có một điểm uốn I, ứng với $t=1$, và có tọa độ $I\left(\dfrac{e}{2},\dfrac{e}{2}\right)$.



Tiếp tuyến tại I có hệ số góc là : $\dfrac{y'(1)}{x'(1)}=3$.

n) • x lẻ và y chẵn, ta sẽ cho t biến thiên trong $]0; +\infty[$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• $x'(t) = \dfrac{t\,\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t}{t^2}$, $y'(t) = \dfrac{t\,\mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t}{t^2}$.

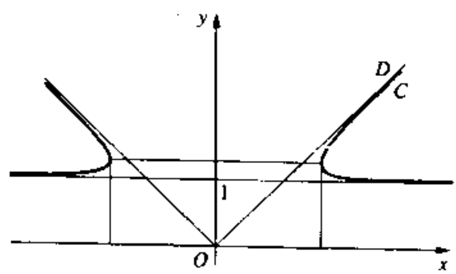
Việc khảo sát sự biến thiên của $u : t \mapsto t\,\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t$, $v: \mapsto t\,\mathrm{ch}t - \mathrm{sh}t$ là dễ dàng ; $u'(t) = t\,\mathrm{ch}t > 0$, $v'(t) = t\,\mathrm{ch}t > 0$.

t	0		α		$+\infty$
u'			$+$		
u	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

t	0		$+\infty$
v'		$+$	
v	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha \simeq 1{,}200$,
$x(\alpha) \simeq 1{,}509$,
$y(\alpha) \simeq 1{,}258$

t	0		α		$+\infty$
x'	||	$-$	0	$+$	
x	|| $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y	|| 1	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y'	||		$+$		



• **Khảo sát tại** $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \mathrm{th}t \underset{t \to +\infty}{\to} 1$, rồi $y(t) - x(t) = -\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0^-$: vậy C nhận đường thẳng D có phương trình $y = x$ làm tiệm cận, và khi t tiến đến $+\infty$, C ở dưới D.

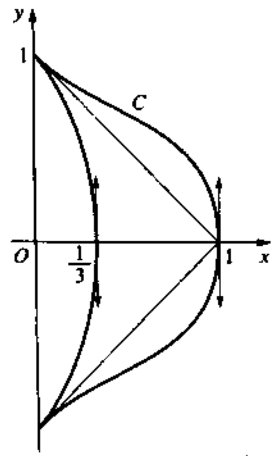
o) • x và y có chu kỳ là 2π ; vậy ta sẽ được cả đường cong bằng cách cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π.

• $x(\pi - t) = x(t)$ và $y(\pi - t) = -y(t)$; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $x'x$.

• $x'(t) = \dfrac{\sin t \cos t(4 + \sin t)}{(2 + \sin t)^2}$, $y'(t) = -\sin t$

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$-$	0	$+$	0
x	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y'	1	$+$	0	$-$	-1

• **Khảo sát tại** 0 : Bằng cách tính các khai triển hữu hạn, ta có :



$$x(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{4}+o(t^3),\qquad y(t)=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3),$$

Từ đó : $\overrightarrow{V_2}=2!\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{V_3}=3!\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix},$$

vậy $p = 2$, $q = 3$; đây là một điểm lùi loại một, với tiếp tuyến định phương bởi $\overrightarrow{V_2}$.

p) • x và y đều 2π - tuần hoàn; ta sẽ được toàn bộ đường cong C bằng cách cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π.

• $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, ta sẽ cho t biến thiên trong $[0\ ;\ \pi]$, sau đó thực hiện phép đối xứng qua O.

• $x(\pi - t) = -x(t)$, $y(\pi - t) = y(t)$, ta sẽ cho t biến thiên trong $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, sau đó thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• $x'(t)=-\dfrac{2\cos 2t}{\sin^2 2t}$, $\quad y'(t)=-\dfrac{3\cos 3t}{\sin^2 3t}$.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	‖		$-$		0		$+$		‖
x	‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	1	↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$ ‖
y	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1
y'	‖	$-$	0		$+$		‖	$+$	

• **Khảo sát tại** 0: $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{\sin 2t}{\sin 3t}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\dfrac{2}{3}$,

rồi $$y(t)-\frac{2}{3}x(t)=\frac{1}{\sin 3t}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin 2t}=\frac{3\sin 2t-2\sin 3t}{3\sin 2t\sin 3t}=\frac{3\left(2t-\frac{4}{3}t^3\right)-2\left(3t-\frac{9}{2}t^3\right)+o(t^3)}{18t^2+o(t^3)}$$

$$=\frac{5}{18}t+o(t);$$

vậy C nhận đường thẳng D có phương trình $y=\frac{2}{3}x$ làm tiệm cận, và khi t tiến đến 0^+, C nằm trên D.

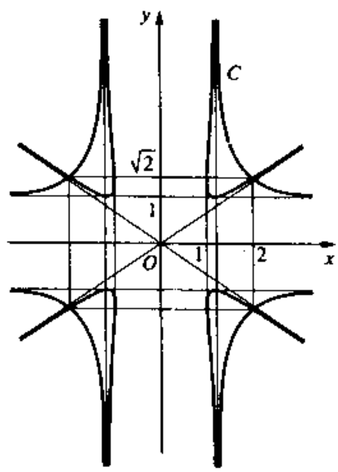
• Điểm kép :

Trên một bản vẽ phác, ta thấy xuất hiện một điểm kép trong góc phần tư thứ nhất, ứng với $0 < t < \frac{\pi}{6}$ và $-\frac{2\pi}{3} < u < -\frac{\pi}{2}$. Trong điều kiện đó, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin 2t} = \dfrac{1}{\sin 2u} \\ \dfrac{1}{\sin 3t} = \dfrac{1}{\sin 3u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2t = \sin 2u \\ \sin 3t = \sin 3u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2t \equiv 2u \quad [2\pi] \\ \text{hoặc} \\ 2t \equiv \pi - 2u \,[2\pi] \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3t \equiv 3u \quad [2\pi] \\ \text{hoặc} \\ 3t \equiv \pi - 3u \,[2\pi] \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \equiv u \quad [\pi] \\ \text{hoặc} \\ t \equiv \frac{\pi}{2} - u \,[\pi] \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t \equiv u \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ \text{hoặc} \\ t \equiv \frac{\pi}{3} - u \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{\pi}{2} - u \\ t = u + \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{\pi}{12} \\ u = -\dfrac{7\pi}{12} \end{cases}.$$



Như vậy, C có một điểm kép, với tọa độ là $(2, \sqrt{2})$, cùng với các điểm đối xứng của nó qua $y'y$, O, $x'x$.

q) • x và y có chu kỳ là 2π ; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài là 2π để có toàn đường cong C.

• $x(-t) = -x(t)$ và $y(-t) = y(t)$; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0; \pi]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• $x'(t) = \dfrac{1 + \cos^3 t}{\cos^2 t}$, $y'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
x'	2	$+$	‖	$+$	0
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1
y'	0	$+$	‖	$+$	0

• **Khảo sát tại** $\frac{\pi}{2}$: $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\sin t(1+\cos t)} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$, rồi với phép đổi biến $u = \frac{\pi}{2} - t$:

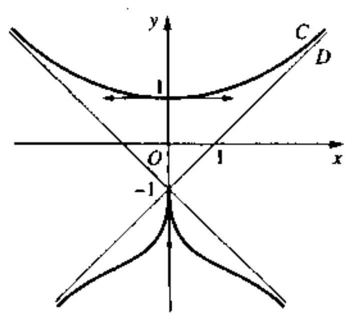
$$y(t) - x(t) = \frac{1 - \sin t - \sin t\cos t}{\cos t} = \frac{1 - \cos u - \cos u\sin u}{\sin u}$$
$$= \frac{-u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}{u + o(u^2)} = -1 + \frac{u}{2} + o(u)\,;$$

vậy C nhận đường thẳng D có phương trình $y = x - 1$ làm tiệm cận và khi t tiến đến $\frac{\pi^-}{2}$ (tương ứng : $\frac{\pi^+}{2}$), C ở phía trên (tương ứng : dưới) D.

• **Khảo sát tại** π: Vì

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1+\cos^3 t} = \frac{\sin t}{1+\cos t}\cdot\frac{1}{1-\cos t+\cos^2 t}$$
$$= \tan\frac{t}{2}\,\frac{1}{1-\cos t+\cos^2 t} \underset{t\to\pi^-}{\longrightarrow} +\infty,$$

nên C có một điểm tại đó tiếp tuyến song song với $y'y$; sau khi thực hiện phép đối xứng, điểm này sẽ cho ta một điểm lùi loại một.

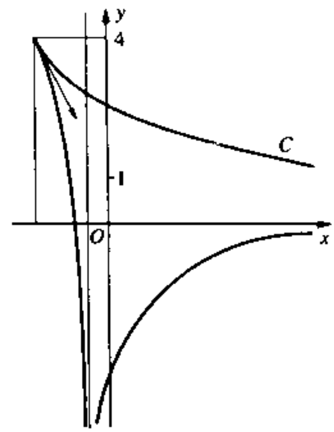


$r)$ • $x'(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$, $y'(t) = -2\frac{2t+1}{(t+1)^3}$.

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
x'			$-$		0	$+$	
x	$+\infty$	↘	$\ln 2 - \frac{\pi}{4}$	↘	$\ln\frac{5}{4} - \text{Arctan}\,\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	0
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$\ln 2 - \frac{\pi}{4} \simeq -0{,}092$, $\ln\frac{5}{4} - \text{Arc}\tan\frac{1}{2} \simeq -0{,}241$.

• **Khảo sát tại** $-\frac{1}{2}$: Bằng phép đổi biến $u=t+\frac{1}{2}$, ta được:



$$x'(t)=\frac{2u}{1+\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{8u}{5}\left(1-\frac{4}{5}u+o(u)\right)^{-1}$$
$$=\frac{8u}{5}\left(1+\frac{4}{5}u+o(u)\right)=\frac{8}{5}u+\frac{32}{25}u^2+o(u^2),$$
$$y'(t)=-2\frac{2u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{32u}{1+6u+o(u)}$$
$$=-32u+192u^2+o(u^2),$$

từ đó, bằng cách lấy tích phân:

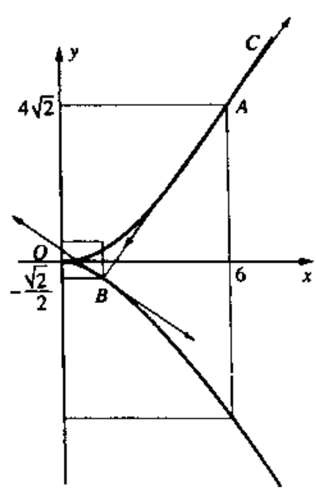
$$x(t)=x\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{5}u^2+\frac{32}{75}u^3+o(u^3),$$

$$y(t)=y\left(-\frac{1}{2}\right)-16u^2+64u^3+o(u^3)$$

và: $\overrightarrow{V_2}=2!\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-32\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_3}=3!\begin{pmatrix}\frac{32}{75}\\64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{64}{25}\\384\end{pmatrix}$.

Ở đây $p=2$, $q=3$, vậy đó là một điểm lùi loại 1, với tiếp tuyến được định phương bởi $\overrightarrow{V_2}$.

Trên hình vẽ sơ lược, hệ quy chiếu không trực chuẩn.



4.1.4 Phương trình Descartes của tiếp tuyến với C tại $A(t)$ là: $tx - y - t^3 = 0$; phương trình Descartes của pháp tuyến tại $B(u)$: $x + uy - (3u^2 + 2u^4) = 0$.

Hai đường thẳng này trùng nhau khi và chỉ khi :

$t \neq 0$, $u \neq 0$, $\frac{1}{t}=-u=\frac{3u^2+2u^4}{t^3}$.

◊ **Trả lời** : Có hai và chỉ hai đường thẳng thích hợp và chúng đối xứng nhau qua $x'x$. Một trong chúng nối $A(6,4\sqrt{2})$ ứng với tham số $t=\sqrt{2}$ và $B\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ứng với tham số $u=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

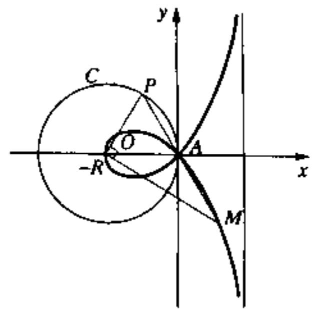
4.1.5 Ta chọn hệ quy chiếu trực chuẩn $(A;\vec{i},\vec{j})$ sao cho khi ký hiệu R (> 0) là bán kính của C, thì O sẽ có tọa độ $(-R,O)$. Ký hiệu t là hệ số góc của (AP) và (X, Y) là tọa độ của P.

Ta có : $\begin{cases} Y = tX \\ X^2 + Y^2 + 2RX = 0 \end{cases}$ suy ra : $\begin{cases} X = -\dfrac{2R}{1+t^2} \\ Y = -\dfrac{2Rt}{1+t^2} \end{cases}$

Vậy : $\overrightarrow{OP}\left(-R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, -\dfrac{2Rt}{1+t^2}\right) // (1-t^2, 2t)$ và một PTĐ của đường vuông góc tại O với (OP) : $(1-t^2)(x+R) + 2ty = 0$.

Ta có tọa độ (x, y) của M bằng cách giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = tx \\ (1-t^2)(x+R) + 2ty = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -R\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = -Rt\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}.$$



◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm là đường strôphôít thẳng (xem 4.1.7, 2)) có BDTS là :

$$x = -R\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = -Rt\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

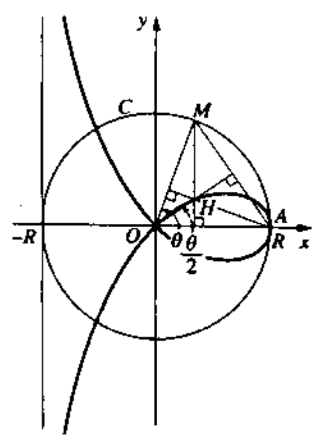
4.1.6 Ta chọn một hệ quy chiếu trực chuẩn $(O;\vec{i},\vec{j})$ sao cho $A(R, 0)$ trong đó $R > 0$ là bán kính của C.

Tọa độ của M là : $(R\cos\theta, R\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Chú ý rằng (OH) là đường phân giác của $\widehat{AOM}$ và $(MH) // y'y$, ta suy ra tọa độ của H:

$$(R\cos\theta, R\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}).$$

Khi ký hiệu $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, ta có BDTS của quỹ tích phải tìm.



◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm là strôphôít thẳng (xem 4.1.7,2) có BDTS là:

$$x = R\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = Rt\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

4.1.7 Ta chọn (sai khác một hệ tử nhân > 0 cố định) một hệ quy chiếu trực chuẩn $(O;\vec{i},\vec{j})$ sao cho H có PTĐ : $xy = 1$.

Tọa độ của $M \in H$ là $\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$.

Ký hiệu $\Omega(x, y)$ là một điểm trên mặt phẳng ; Ω là tâm của đường tròn đi qua O và tiếp xúc với H tại M khi và chỉ khi $(M\Omega)$ vuông góc với tiếp tuyến với H tại M và $\Omega O = \Omega M$. Ta thu được hệ phương trình :

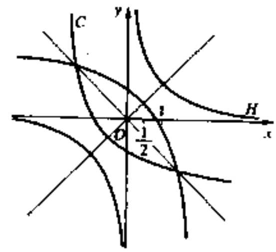
$$\begin{cases} x - t - \dfrac{1}{t^2}\left(y - \dfrac{1}{t}\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = (x-t)^2 + \left(y - \dfrac{1}{t}\right)^2 \end{cases}$$

Suy ra một BDTS của quỹ tích phải tìm: $x = \dfrac{3t^4 - 1}{4t^3}, \quad y = \dfrac{3 - t^4}{4t}$.

- x và y lẻ :
- $x\left(\frac{1}{t}\right)=y(t),\ y\left(\frac{1}{t}\right)=x(t)$
- $x'(t)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{3}{t^4}\right),\quad y'(t)=-\frac{3(t^4+1)}{4t^2}$.

◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm có BDTS:

$$x=\frac{3t^4-1}{4t^3},\quad y=\frac{3-t^4}{4t},\ t\in\mathbb{R}^*.$$



4.1.8 Giả sử $M\left(\frac{t^2}{2p},t\right)$ là điểm chạy của C. Tiếp tuyến với C tại M được định phương bởi $\left(\frac{t}{p},1\right)$, suy ra PTD của pháp tuyến với C tại M: $\frac{t}{p}\left(x-\frac{t^2}{2p}\right)+(y-t)=0$.

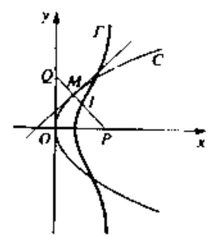
Vậy $P\left(\frac{t^2}{2p}+p,0\right)$ và $Q\left(0,\frac{t^3}{2p^2}+t\right)$,

và tọa độ trung điểm I của PQ là :

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2p}+p\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{2p^2}+t\right).$$

Ta có PTD của quỹ tích phải tìm bằng cách khử t:

$$py^2 = 4x^3 - 2px^2.$$



◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm có BDTS: $x=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2p}+p\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{2p^2}+t\right)$.

4.1.9 Ta chọn một hệ quy chiếu trực chuẩn $(O;\vec{i},\vec{j})$, trong đó khi ký hiệu $a=\|\overrightarrow{OB}\|$ thì O là trung điểm của AB và $\vec{i}=\frac{1}{a}\overrightarrow{OB}$. Khi đó: $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $M(a\cos t, a\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$; do tính đối xứng và cũng để đơn giản hoá việc khảo sát, ta có thể giả thiết: $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta lập một PTD của (BM) :

$$\begin{vmatrix} x-a\cos t & a-a\cos t\\ y-a\sin t & -a\sin t\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x\sin t+(1-\cos t)y-a\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow x\cos\frac{t}{2}+y\sin\frac{t}{2}-a\cos\frac{t}{2}=0.$$

Ta cũng có một PTD tương tự cho (AM): $x\sin\frac{t}{2}-y\cos\frac{t}{2}+a\sin\frac{t}{2}=0$.

Điểm I là tâm của đường tròn nội tiếp (ABM) khi và chỉ khi:

$$-\left(x\cos\frac{t}{2}+y\sin\frac{t}{2}-a\cos\frac{t}{2}\right)=x\sin\frac{t}{2}-y\cos\frac{t}{2}+a\sin\frac{t}{2}=y.$$

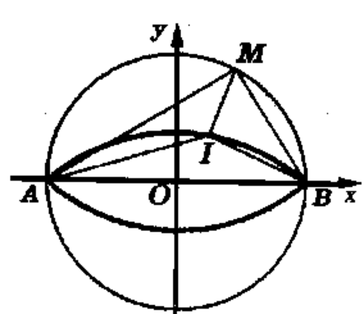
Giải hệ hai phương trình hai ẩn x, y ta có:

$$x=a\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right),\quad y=\frac{2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{1+\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}}.$$

Ký hiệu : $u=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, ta có :

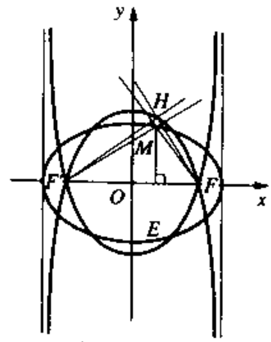
$$x=a\sqrt{2}\sin u,\quad y=\frac{a\cos 2u}{1+\sqrt{2}\cos u}.$$

Khử u ta có : $y=\frac{a^2-x^2}{a+\sqrt{2a^2-x^2}}$.



◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm có PTĐ $y = \pm \dfrac{a^2 - x^2}{a + \sqrt{2a^2 - x^2}}$.

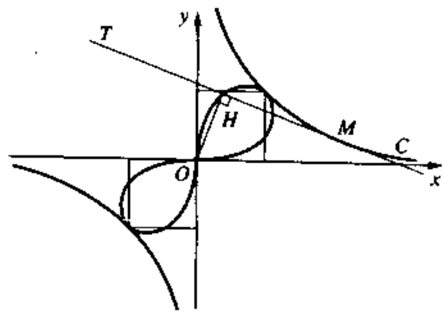
4.1.10 Trong một hệ quy chiếu trực chuẩn được chọn một cách thích hợp $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, M có tọa độ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Tọa độ của các tiêu điểm F, F' là : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, trong đó $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Từ đó suy ra các tọa độ của trực tâm H của tam giác MFF'.



◊ **Trả lời** : Quỹ tích của H là đường cong được biểu diễn tham số bởi:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = \dfrac{a^2\sin^2\theta - b^2}{b\sin\theta} \end{cases}.$$

4.1.11 Ký hiệu $M\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ là điểm chạy của C, một vectơ chỉ phương của tiếp tuyến T tại M với C là $(t^2, -1)$. Ký hiệu $H(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của O lên T, ta có:



$$\begin{cases} (OH) \perp T \\ H \in T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 x - y = 0 \\ \begin{vmatrix} x - t & t^2 \\ y - \dfrac{1}{t} & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{2t^3}{1+t^4} \end{cases}.$$

◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm, gọi là đường *thùy túc* của O đối với H, là đường lemniscat (xem 4.1.7) có BDTS :

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t^3}{1+t^4}.$$

4.1.12 *a*) • Trước tiên ta chú ý rằng $C_{-\lambda}$ suy từ C_λ một cách dễ dàng. Với mọi t thuộc $\mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{cases} x_{-\lambda}(t) = t + \lambda\sin t = t - \lambda\sin(t+\pi) = x_\lambda(t+\pi) - \pi \\ y_{-\lambda}(t) = 1 + \lambda\cos t = 1 - \lambda\cos(t+\pi) = y_\lambda(t+\pi) \end{cases}.$$

Vậy ta chuyển từ C_λ sang $C_{-\lambda}$ bằng phép tịnh tiến theo vectơ $-\pi\vec{i}$.

Bây giờ ta giả thiết $\lambda > 0$.

• Ta có: $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ và $y(t + 2\pi) = y(t)$.

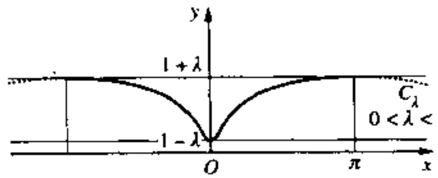
Vậy ta chuyển từ $M(t)$ sang $M(t + 2\pi)$ bằng phép tịnh tiến theo vectơ $2\pi\vec{i}$. Ta cho t biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π, rồi thực hiện các phép tịnh tiến theo các vectơ $2\pi n\vec{i}$, $n \in \mathbb{Z}$.

• Ta có : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = -x(t)$ và $y(-t) = y(t)$; vậy ta sẽ cho t biến thiên trong $[0; \pi]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• $x'(t) = 1 - \lambda\cos t$, $y'(t) = \lambda\sin t$; ta biện luận theo vị trí của λ đối với 1.

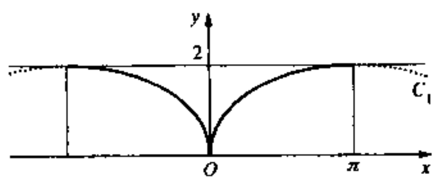
1) $0 < \lambda < 1$

t	0		π
x'	$1-\lambda$	$+$	$1+\lambda$
x	0	$\nearrow$	π
y	$1-\lambda$	$\nearrow$	$1+\lambda$
y'	0	$+$	0



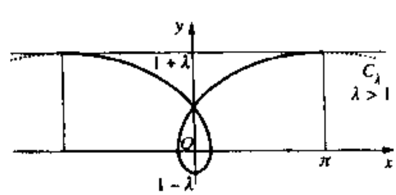
2) $\lambda = 1$: đường cyclôit

t	0		π
x'	0	$+$	2
x	0	$\nearrow$	π
y	0	$\nearrow$	2
y'	0	$+$	0



3) $\lambda > 1$

t	0		$\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\lambda})$		π
x'		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$		$\nearrow$	π
y	$1-\lambda$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\lambda$ 0
y'	0		$+$		0

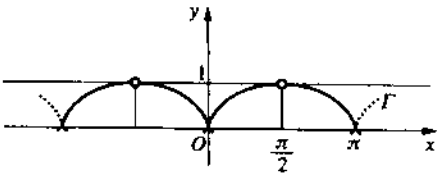


b) Ta tính : $x'y'' - x''y' = \lambda(\cos t - \lambda)$, biểu thức này triệt tiêu và đổi dấu với trị t sao cho $\cos t = \lambda$, nếu $0 < \lambda < 1$. Vậy có điểm uốn khi và chỉ khi $0 < \lambda < 1$, và các điểm đó ứng với các trị của t sao cho $\cos t = \lambda$. Suy ra một BDTS của quỹ tích Γ của các điểm uốn của C_λ:

$$\Gamma \begin{cases} x = t - \cos t \sin t \\ y = 1 - \cos^2 t \end{cases}$$

Ta chú ý rằng khi ký hiệu $u = 2t$, ta có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u - \sin u) \\ y = \dfrac{1}{2}(1 - \cos u). \end{cases}$$



◊ **Trả lời** : Γ là đường *cyclôit*, vị tự của C_1 trong phép vị tự tâm O và tỷ số $\dfrac{1}{2}$ (thiếu các điểm lùi và các đỉnh của nó).

4.1.13 (M_i $(1 \le i \le 4)$ đồng chu) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1^4 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^4 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^4 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_4^4 & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1^4 - y_4^4 & y_1^2 - y_4^2 & y_1 - y_4 \\ y_2^4 - y_4^4 & y_2^2 - y_4^2 & y_2 - y_4 \\ y_3^4 - y_4^4 & y_3^2 - y_4^2 & y_3 - y_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1^3 + y_1^2 y_4 + y_1 y_4^2 + y_4^3 & y_1 + y_4 & 1 \\ y_2^3 + y_2^2 y_4 + y_2 y_4^2 + y_3^3 & y_2 + y_4 & 1 \\ y_3^3 + y_3^2 y_4 + y_3 y_4^2 + y_4^3 & y_3 + y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1^3 - y_3^3 + (y_1^2 - y_3^2) y_4 + (y_1 - y_3) y_4^2 & y_1 - y_3 \\ y_2^3 - y_3^3 + (y_2^2 - y_3^2) y_4 + (y_2 - y_3) y_4^2 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

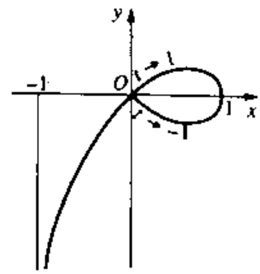
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1^2 + y_1 y_3 + y_3^2 + (y_1 + y_3) y_4 + y_4^2 & 1 \\ y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2 + (y_2 + y_3) y_4 + y_4^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2) y_3 + (y_1 - y_2) y_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

4.1.14 *a)* $F(I)$ là một đoạn của đường strôphôit thẳng (xem 4.1.7).

b) • Theo định nghĩa, $F : I \to F(I)$ là toàn ánh.



• Nếu $(t, u) \in I^2$ sao cho $F(t) = F(u)$, thì $t^2 = u^2$, rồi $t = u$, vậy F là đơn ánh.

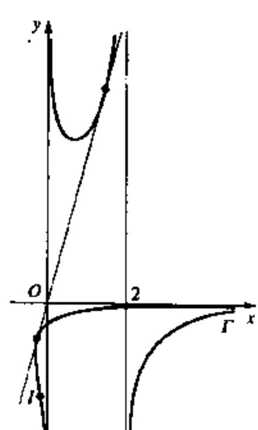
• F liên tục vì $t \mapsto \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ và $t \mapsto t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ đều liên tục.

• F^{-1} không liên tục, vì khi $(x, y) \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\longrightarrow} (0,0)$ trên $F(I)$, ta có $t \to -1$, và khi $(x, y) \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\longrightarrow} (0,0)$ trên $F(I)$, ta có $t \to 1$.

Vậy, F^{-1} không liên tục tại (0, 0).

4.1.15 *a)* • $x'(t) = 1 + 2t$, $y'(t) = -\dfrac{1-2t}{t^2(1-t)^2}$.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x'		$-$	0				$+$				
x	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	$\frac{3}{4}$	↗	2	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\frac{4}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0
y'			$-$		‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	



b) α) Xét một đường thẳng D: $ax + by + c = 0$.

Phương trình theo t của các điểm thuộc $D \cap C$ là:

$$ax(t) + by(t) + c = 0 \Leftrightarrow -at^4 + (a - c)t^2 + ct + b = 0,$$

bậc 4 đối với t.

Muốn cho $M_i(t_i)$, $1 \le i \le 4$ là bốn điểm thuộc $D \cap C$, điều kiện cần và đủ là:

$$\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = -\frac{a-c}{a},\ \sigma_3 = \frac{c}{a},\ \sigma_4 = -\frac{b}{a}\ .$$

Khử (a, b, c) ta sẽ có ĐKCĐ phải tìm.

◊ **Trả lời** : $\sigma_1 = 0$ và $\sigma_3 = \sigma_2 + 1$.

β) Một đường thẳng tiếp xúc kép với C khi và chỉ khi nó cắt C tại bốn điểm $M_i(t_i)$, $1 \le i \le 4$ sao cho $t_1 = t_2$ và $t_3 = t_4$. Ký hiệu $S = t_1 + t_3$, $P = t_1t_2$, ta có :

$$\sigma_1 = 2S, \qquad \sigma_2 = S^2 + 2P, \qquad \sigma_3 = 2SP, \qquad \sigma_4 = P^2.$$

Từ đó : $$\begin{cases}\sigma_1 = 0\\ \sigma_3 = \sigma_2 + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0\\ P = -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ . \\ t_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \text{(sai khác về thứ tự)}$$

◊ **Trả lời** : C có một và chỉ một tiếp tuyến kép, nối các điểm ứng với tham số $\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, tức là có tọa độ $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}, 2(\sqrt{2}+1)\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}, -2(\sqrt{2}-1)\right)$.

c) α) $(M_i(t_i), 1 \le i \le 3$ thẳng hàng$) \Leftrightarrow (\exists t_4, M_i(t_i), 1 \le i \le 4$ thẳng hàng$)$

$$\Leftrightarrow \left(\exists t_4, \begin{cases}\sigma_1 = 0\\ \sigma_3 = \sigma_2 + 1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\exists t_4, \begin{cases}\tau_1 + t_4 = 0\\ \tau_3 + \tau_2 t_4 = \tau_2 + \tau_1 t_4 + 1\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tau_3 - \tau_2\tau_1 = \tau_2 - \tau_1^2 + 1$$

◊ **Trả lời** : $\tau_3 - \tau_1\tau_2 + \tau_1^2 - \tau_2 - 1 = 0$.

β) Các điểm uốn ứng với t sao cho các điểm $M_i(t_i)$, $t_1 = t_2 = t_3 = t$ thẳng hàng ; khi đó ta có: $\tau_1 = 3t$, $\tau_2 = 3t^2$, $\tau_3 = t^3$, rồi:

$$\tau_3 - \tau_1\tau_2 + \tau_1^2 - \tau_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -8t^3 + 6t^2 - 1 = 0.$$

Bằng cách khảo sát sự biến thiên của hàm, ta thấy rằng $P: t \mapsto 8t^3 - 6t^2 + 1$ có một và chỉ một không điểm thực $\alpha \approx -0{,}3388$.

◊ **Trả lời :** C có một và chỉ một điểm uốn I, ứng với $t \cong -0.3388$, và có tọa độ $x \simeq -0{,}224$, $y \simeq -2{,}205$.

4.1.16 *a*) Xem 4.1.7, Ví dụ 3).

b) Các điểm $M_i(t_i)$ $(1 \le i \le 4)$ đồng chu hoặc thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại (A, B, C, D) thuộc $(\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ sao cho t_1, t_2, t_3, t_4 là nghiệm của phương trình :

$$A\left(\left(\frac{t}{1+t^4}\right)^2 + \left(\frac{t^3}{1+t^4}\right)^2\right) + 2B\frac{t}{1+t^4} + 2C\frac{t^3}{1+t^4} + D = 0.$$

◊ **Trả lời :** $\sigma_4 = 1$.

c) α) Các điểm $M_i(t_i)$ $(1 \le i \le 4)$ thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại $(A, B, C) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $\times\ \mathbb{R}$ sao cho t_1, t_2, t_3, t_4 là nghiệm của phương trình : $A\frac{t}{1+t^4} + B\frac{t^3}{1+t^4} + C = 0$.

◊ **Trả lời** : $\sigma_2 = 0$ và $\sigma_4 = 1$.

β) Ba điểm $M_i(t_i)$ $(1 \le i \le 3)$ thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại $t_4 \in \mathbb{R}$ sao cho bốn điểm $M_i(t_i)$ $(1 \le i \le 4)$ thẳng hàng. Khử t_4 trong $(\sigma_2 = 0, \sigma_4 = 1)$ bằng cách sử dụng các hàm đối xứng sơ cấp τ_1, τ_2, τ_3 của t_1, t_2, t_3.

◊ **Trả lời** : $\tau_1 + \tau_2\tau_3 = 0$.

d) Tâm Ω của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OM_1(t_1)M_2(t_2)$ được đặc trưng bởi $\Omega O = \Omega M_1(t_1) = \Omega M_2(t_2)$, điều kiện này dẫn đến : $\forall i \in \{1,2\}$, $2x + 2t_i^2 y - t_i = 0$,

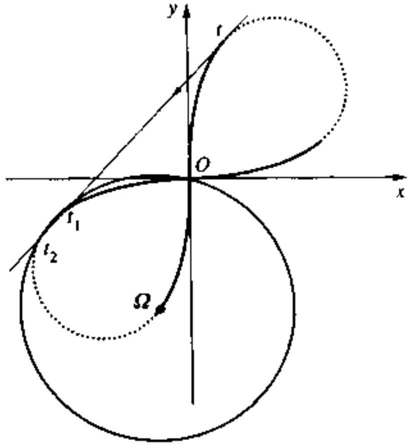
khi ký hiệu (x, y) là tọa độ của Ω.

Chứng minh rằng hệ phương trình đó quy về:

$$\begin{cases} 4x + 2(S^2 - 2P)y - S = 0 \\ 2Sy - 1 = 0 \end{cases}$$

trong đó $S = t_1 + t_2$, $P = t_1t_2$.

Mặt khác, bằng cách áp dụng *c) β)* cho bộ ba (t, t, t_1) và (t, t, t_2), chứng minh rằng t_1 và t_2 là nghiệm của phương trình $2t^3u^2 + (1 + t^4)u + 2t = 0$, với ẩn u, từ đó $S = -\dfrac{1+t^4}{2t^3}$, $P = \dfrac{1}{t^2}$.



◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm là bộ phận của C ứng với $|t| \in \left[0; \sqrt{2-\sqrt{3}}\right] \cup \left[\sqrt{2+\sqrt{3}}; +\infty\right[$.

Cụ thể hơn, tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OM_1(t_1)M_2(t_2)$ là điểm đối xứng với $M(t)$ qua O.

e) Tiếp tuyến với C tại $M(t)$ đi qua $M_1(t_1)$ khi và chỉ khi tồn tại $u_1 \in \mathbb{R}$ sao cho (t, t, t_1, u_1) thoả mãn điều kiện *c) α)*.

◊ **Trả lời :** Phương trình bậc 4 có nghiệm là các tham số t ứng với các điểm $M(t)$ của C sao cho tiếp tuyến với C tại $M_1(t)$ đi qua $M_1(t_1)$ là: $t_1t^4 + 2t_1^2t^3 + 2t + t_1 = 0$.

Chứng minh rằng các hàm đối xứng sơ cấp của bốn nghiệm của phương trình này thỏa mãn điều kiện c) α). Không thể hiện được trên lược đồ vì hai trong các nghiệm là số phức (không thực).

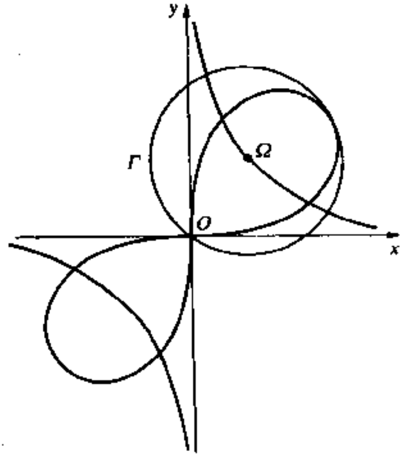
f) **Cách thứ nhất** :

Ký hiệu (α, β) là toạ độ của Ω, phương trình của đường tròn tâm Ω đi qua O là :

$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. Phương trình theo t của các điểm thuộc $\Gamma \cap C$ là : $2\beta t^2 - t + 2\alpha = 0$. Phương trình này cho một nghiệm kép khi và chỉ khi $1 - 16\alpha\beta = 0$.

Cách thứ hai :

Bằng phép nghịch đảo cực O và tỷ số 1, muốn cho đường tròn tâm $\Omega(\alpha\beta)$ và đi qua O tiếp xúc với C, cần và đủ là đường thẳng có phương trình $1 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$ tiếp xúc với hypebol có phương trình $xy = 1$.



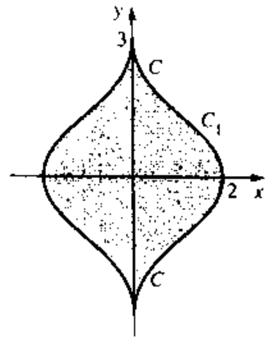
◊ **Trả lời** : Quỹ tích của Ω là hypebol có phương trình $xy = \dfrac{1}{16}$.

4.1.17 *a*) Vẽ C.

Vì lý do đối xứng, diện tích cần tính A là:

$$\mathcal{A} = -4\int_{C_1} y\mathrm{d}x\,,$$

trong đó C_1 ứng với t từ 0 đến $\dfrac{\pi}{2}$.



Vậy :

$$\mathcal{A} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(2+\sin^2 t)6\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\left(2+\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 15\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t - \left[\frac{1}{2}\sin^3 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15\pi}{4}.$$

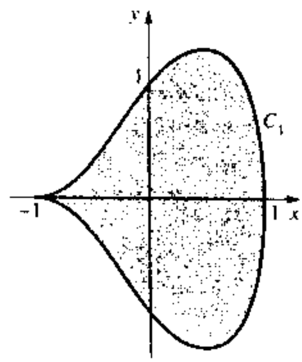
◊ **Trả lời** : $\dfrac{15\pi}{4} \simeq 11{,}781$.

b) Vẽ C.

Vì lý do đối xứng, diện tích cần tính $\mathcal{A}$ là:

$$\mathcal{A} = -2\int_{C_1} y\mathrm{d}x$$

trong đó C_1 ứng với t chạy từ 0 đến π. Vậy:



$$\mathcal{A} = 2\int_0^{\pi} (1-\cos t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\pi} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\pi}$$
$$= \pi.$$

◊ **Trả lời** : π.

c) Ánh xạ $x \mapsto \dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}$ liên tục trên $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ và diện tích cần tính $\mathcal{A}$ là:

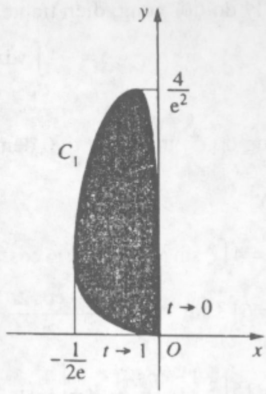
$$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x \underset{t=x-\frac{\pi}{4}}{=} \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{\cos x\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{1-\sin 2t}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{[tính\ chẵn\ lẻ]}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - t^2} \underset{u=\frac{4t}{\pi}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{\pi}.$$

◊ **Trả lời** : $\dfrac{\ln 2}{\pi} \simeq 0{,}221$.

d) Vẽ C.

Vòng khuyên ứng với t biến thiên từ 0 đến 1. Ta thừa nhận rằng phép tính diện tích $\mathcal{A}$ vẫn còn hợp lệ khi có mặt một tích phân trên một khoảng bất kỳ của một hàm khả tích.



$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_{C_1} y\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 t(\ln t)^2(2t\ln t + t)\mathrm{d}t\\ &= -2\int_0^1 t^2(\ln t)^3\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2(\ln t)^2\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Xét với $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$: $I_{n,p} = \int_0^1 t^n(\ln t)^p\,\mathrm{d}t$.

Với $p \geq 1$ một phép tích phân từng phần, ở đây là hợp lệ, sẽ cho ta:

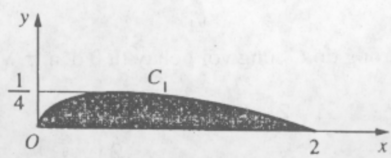
$$I_{n.p} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^p\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}p(\ln t)^{p-1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\frac{p}{n+1}I_{n.p-1}\,.$$

Từ đó, bằng một phép quy nạp đơn giản: $I_{n,p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$.

Nói riêng $I_{2,3} = -\dfrac{2}{27}$ *và* $I_{2,2} = \dfrac{2}{27}$, từ đó $\mathcal{A} = \dfrac{2}{27}$.

◊ **Trả lời :** $\dfrac{2}{27} \simeq 0{,}074$.

e) Vẽ C.



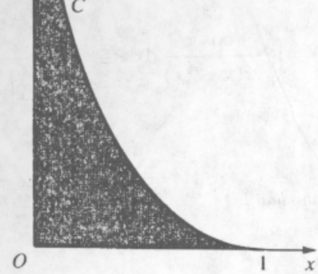
Vòng khuyên ứng với t chạy từ 1 đến $+\infty$.

Diện tích $\mathcal{A}$ cần tính là:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{C_1} x\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^3}\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^6}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1}{3}t^{-3} - \frac{1}{4}t^{-4} - \frac{2}{5}t^{-5}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{19}{60}\,.\end{aligned}$$

◊ **Trả lời :** $\dfrac{19}{60} \simeq 0{,}317$.

f) Vẽ C.



Diện tích $\mathcal{A}$ cần tính là:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{C_1} x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1 + \cos 2t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

◊ **Trả lời** : $\dfrac{\pi}{4}$.

4.2.1 *a)* • ρ có chu kỳ là 2π và lẻ ; vậy ta khảo sát trên $[0, \pi]$, rồi lấy đối xứng qua $y'y$.

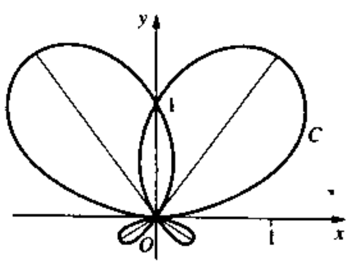
• $\rho'(\theta) = 2\cos 2\theta + \cos\theta = 4\cos^2\theta + \cos\theta - 2$, triệt tiêu và đổi dấu tại những số thực

$\alpha = \operatorname{Arccos}\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8} \simeq 0{,}936$ và $\beta = \operatorname{Arccos}\dfrac{-1-\sqrt{33}}{8} \simeq 2{,}574$.

• $\rho(\theta) = \sin\theta(2\cos\theta + 1)$ triệt tiêu tại $0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi$.

θ	0		α		$\frac{2\pi}{3}$		β		π
ρ'		$+$	0		$-$		0	$+$	
ρ	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

$\rho(\alpha) \simeq 1{,}760$, $\rho(\beta) \simeq -0{,}369$.



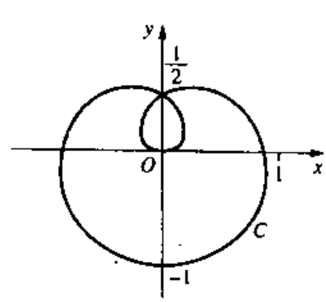
b) • ρ là 6π - tuần hoàn; ta sẽ cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 6π để thu được cả đường cong.

• ρ lẻ ; ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0 ; 3\pi]$ rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• $\rho(3\pi - \theta) = \rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ để có được đường cong (trước khi lấy đối xứng).

• $\rho'(\theta) = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}$.

θ	0		$\frac{3\pi}{2}$
ρ'		$+$	0
ρ	0	$\nearrow$	1



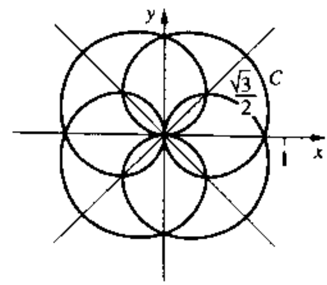
c) • ρ có chu kỳ là 3π; vậy ta sẽ cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 3π, rồi thực hiện đối xứng qua O.

• ρ lẻ; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ rồi thực hiện phép đối xứng qua $y'y$.

• $\rho\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = \rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[0; \dfrac{3\pi}{4}\right]$ rồi lấy đối xứng qua đường phân giác thứ hai.

- $\rho'(\theta) = \dfrac{2}{3}\cos\dfrac{2\theta}{3}$.
- C có các điểm kép, nằm trên trục đối xứng của nó.

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$
ρ'		$+$	0
ρ	0	$\nearrow$	1



d) • ρ là 2π - tuần hoàn và $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ rồi lấy đối xứng qua $x'x$.

- $\rho'(\theta) = \dfrac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta(1-\sin\theta)^2}$

$$= \frac{1+\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta(1-\sin\theta)} > 0.$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	‖		$+$		‖
ρ	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	‖

- **Khảo sát tại** $-\dfrac{\pi}{2}$: Bằng phép đổi biến $\varphi = \theta + \dfrac{\pi}{2}$, ta có :

$$Y = \rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\sin\varphi = -\frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = -\frac{1-\frac{\varphi^2}{2}+o(\varphi^2)}{2-\frac{\varphi^2}{2}+o(\varphi^2)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+o(\varphi^2)\right)\left(1+\frac{\varphi^2}{4}+o(\varphi^2)\right) = -\frac{1}{2}+\frac{\varphi^2}{8}+o(\varphi^2).$$

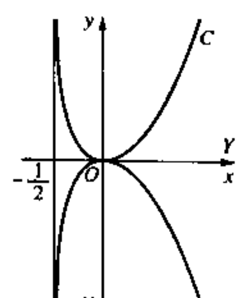
Vậy C sẽ nhận đường thẳng D có phương trình $Y = -\dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận, trong hệ quy chiếu $(O\,;\overrightarrow{OX}\,;\overrightarrow{OY})$ xác định bởi $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, và trong lân cận của $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^+$, C nằm trên D trong hệ quy chiếu ấy.

- **Khảo sát tại** $\dfrac{\pi}{2}$: Bằng phép đổi biến $\psi = \theta - \dfrac{\pi}{2}$,

ta có : $\rho(\theta) = \dfrac{\tan\theta}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{-\cot\text{an}\,\psi}{1-\cos\psi} \underset{\psi\to 0^-}{\sim} -\frac{1}{\psi}\cdot\frac{1}{\frac{\psi^2}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\psi^3} \underset{\psi\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$



Sau đó :

$$Y = \rho(\theta)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cot\text{an}\,\psi}{1-\cos\psi}\sin\psi \underset{\psi\to 0^-}{\sim} -\frac{2}{\psi^2} \underset{\psi\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty.$$

Vậy C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$.

e) • ρ là 2π - tuần hoàn; ta sẽ cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π để có được toàn bộ đường cong.

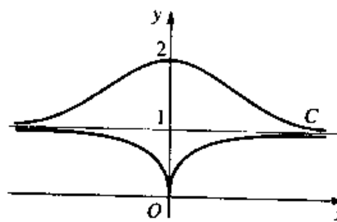
• $\rho(\pi-\theta)=\rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, sau đó lấy đối xứng qua $y'y$.

• $\rho'(\theta)=-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'		$-$	‖	$-$	
ρ	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

• **Khảo sát tại 0:**

$y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta=1+\sin\theta \underset{\theta\to 0^{\pm}}{\longrightarrow} 1^{\pm}$; vậy C nhận đường thẳng D có phương trình $y=1$ làm tiệm cận, và khi $\theta\to 0^{+}$ (tương ứng : 0^{-}), C nằm trên (tương ứng : dưới) đường D.



f) • ρ là π - tuần hoàn; ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0;\pi]$, sau đó lấy đối xứng qua O.

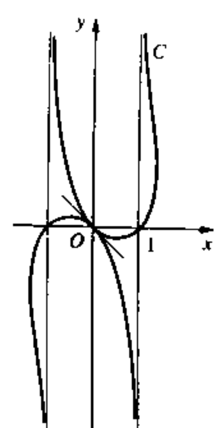
• $\rho'(\theta)=1+\tan^2\theta>0$

• $\rho(\theta)=0\Leftrightarrow\theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
ρ'		$+$	‖		$+$		
ρ	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

• **Khảo sát tại** $\dfrac{\pi}{2}$: Bằng phép đổi biến $\varphi=\theta-\dfrac{\pi}{2}$, ta có:

$$Y(\theta)=\rho(\theta)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\rho\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi$$
$$=(1-\cot\mathrm{an}\varphi)\sin\varphi$$
$$=-\cos\varphi+\sin\varphi$$
$$=-1+\varphi+\underset{\varphi\to 0}{o}(\varphi).$$



Vậy C nhận làm tiệm cận đường thẳng D có phương trình $Y=-1$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O;\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})$ thỏa mãn $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, và khi $\theta\to\dfrac{\pi^{-}}{2}$ (tương ứng : $\dfrac{\pi^{+}}{2}$) C nằm ở dưới (tương ứng : trên) đường thẳng D.

g) • ρ là 4π - tuần hoàn; ta sẽ có toàn bộ đường cong khi cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 4π.

• $\rho(\theta + 2\pi) = -\rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π, sau đó lấy đối xứng qua O.

• $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0\,;\,\pi]$, sau lấy đối xứng qua $y'y$.

• $\rho(\theta)=0 \Leftrightarrow \sin\dfrac{\theta}{2}=0 \Leftrightarrow \theta=0$ (với $0\le\theta\le\pi$).

• $1-2\cos\theta=0 \Leftrightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$ (với $0\le\theta\le\pi$).

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
ρ	0	$-$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$+$	$\frac{1}{3}$

• **Khảo sát tại** $\dfrac{\pi}{3}$: Bằng phép đổi biến $\varphi = \theta - \dfrac{\pi}{3}$ và tính khai triển hữu hạn:

$$Y(\theta)=\rho(\theta)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi}{1-2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi}{1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\varphi+o(\varphi)\right)(\varphi+o(\varphi^2))}{\sqrt{3}\varphi+\frac{1}{2}\varphi^2+o(\varphi^2)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\varphi+o(\varphi).$$

Vậy, C nhận đường thẳng D có phương trình $Y=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ làm tiệm cận trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $\left(O;\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right)$ sao cho $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX})\equiv\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$, và khi θ tiến đến $\dfrac{\pi^-}{3}$ (tương ứng : $\dfrac{\pi^+}{3}$), C nằm dưới (tương ứng: trên) đường thẳng D.

• **Điểm kép** : Với $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$; ta có:

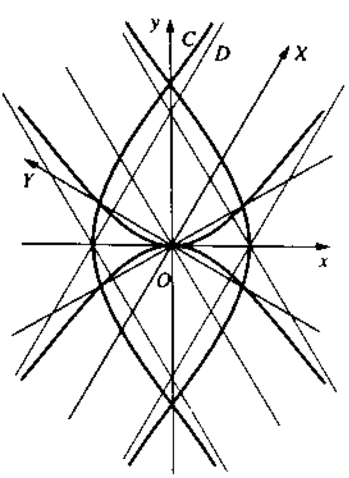
$\rho(\theta+\pi)=-\rho(\theta)$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}+2\cos\theta\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2+2\cos\theta\left(\sin^2\dfrac{\theta}{2}-\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 1+\sin\theta-2\cos^2\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}.$



Vậy C có bốn điểm kép, trong số đó điểm thuộc góc phần tư thứ ba ứng với $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

h) • ρ là 2π - tuần hoàn; ta sẽ có toàn bộ đường cong bằng cách cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π, chẳng hạn $[-\pi;\ \pi]$.

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
ρ	$1+\sqrt{2}$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	$1+\sqrt{2}$

• **Khảo sát tại** $\frac{\pi}{6}$: Bằng phép đổi biến $\varphi = \theta - \frac{\pi}{6}$, sau khi tính toán ta được:

$$Y_1(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6} - \frac{2+\sqrt{6}}{12}\varphi + o(\varphi).$$

Vậy C nhận làm tiệm cận đường thẳng D_1 có phương trình $Y_1 = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6}$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O;\overrightarrow{OX}_1;\overrightarrow{OY}_1)$ sao cho $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX}_1) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, và khi θ tiến đến $\frac{\pi^-}{6}$ (tương ứng : $\frac{\pi^+}{6}$), C nằm trên (tương ứng: dưới) đường D_1.

• **Khảo sát tại** $\frac{5\pi}{6}$: Bằng phép đổi biến $\psi = \theta - \frac{5\pi}{6}$, sau khi tính toán ta được:

$$Y_2(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6} - 2}{12}\psi + o(\psi).$$

Vậy C nhận làm tiệm cận đường thẳng D_2 có phương trình $Y_2 = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O;\overrightarrow{OX}_2;\overrightarrow{OY}_2)$ sao cho $\angle(Ox,\overrightarrow{OX}_2) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$, và khi θ tiến đến $\frac{5\pi^-}{6}$ (tương ứng: $\frac{5\pi^+}{6}$), C nằm dưới (tương ứng: trên) đường D_2.

• **Điểm kép**

Với $\theta \in [0;\ \pi]$ ta có:

$\rho(\theta - \pi) = -\rho(\theta)$

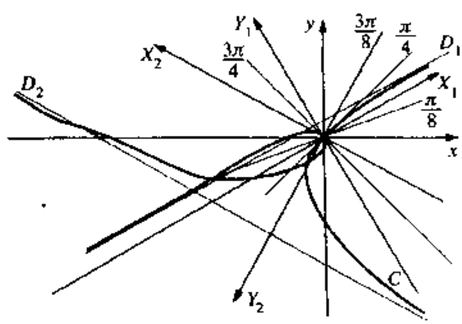
$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$ hoặc $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

Vậy C có hai điểm kép, ứng với

$\theta = \frac{\pi}{8}\left(\text{và } -\frac{7\pi}{8}\right)$ và $\theta = \frac{3\pi}{8}\left(\text{và } -\frac{5\pi}{8}\right)$.

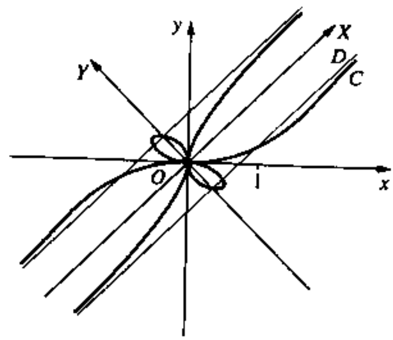


i) • ρ là π - tuần hoàn ; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ chẳng hạn, sau đó lấy đối xứng qua O.

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	‖ 0	$-$	0	$+$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$-$	0 ‖

• **Khảo sát tại $\frac{\pi}{4}$** : Bằng phép đổi biến :

$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}$, ta được :



$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)}\sin\varphi$$
$$= \frac{(1-\tan\varphi)\cos 2\varphi\sin\varphi}{-2\tan\varphi}$$
$$= -\frac{1}{2}(1-\tan\varphi)\cos 2\varphi\cos\varphi$$
$$= -\frac{1}{2}(1-\varphi+o(\varphi))$$
$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi+o(\varphi).$$

Vậy C nhận làm tiệm cận đường thẳng D có phương trình $Y = -\frac{1}{2}$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn $(O;\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})$ sao cho $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ và khi θ tiến đến $\frac{\pi^-}{4}$ (tương ứng : $\frac{\pi^+}{4}$), C nằm ở dưới (tương ứng: trên) đường thẳng D.

j) • ρ là 4π - tuần hoàn; ta có cả đường cong C bằng cách cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài là 4π.

• ρ chẵn: ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0; 2\pi]$; rồi lấy đối xứng qua $x'x$.

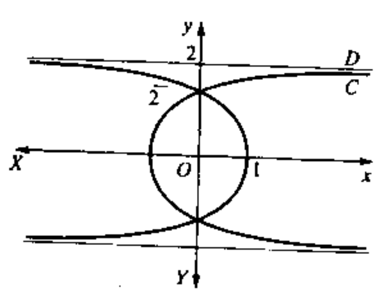
• $\rho(2\pi - \theta) = -\rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0; \pi]$ rồi lấy đối xứng qua $y'y$.

• $\rho'(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$.

θ	0	π
ρ	1 ↗	$+\infty$ ‖

• **Khảo sát tại π** : Ký hiệu $\varphi = \theta - \pi$, ta có :

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \pi)$$
$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)}$$
$$= -2\cos\frac{\varphi}{2} = -2 + \frac{\varphi^2}{4} + o(\varphi^2)$$



Vậy C có một tiệm cận D, với phương trình $Y = -2$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O;\overrightarrow{OX};\overrightarrow{OY})$ được xác định bởi $\angle(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX}) = \pi\,[2\pi]$, và khi θ tiến đến π^-, C sẽ nằm trên đường D.

k) • ρ là 4π- tuần hoàn ; ta sẽ được cả đường cong C bằng cách cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 4π.

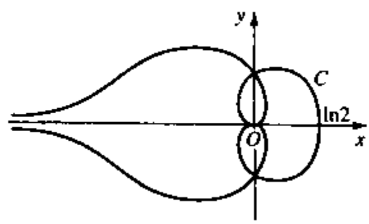
• ρ chẵn ; ta sẽ cho θ biến thiên trong $[0;2\pi]$, rồi lấy đối xứng qua $x'x$.

• $\rho'(\theta) = -\dfrac{\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}} = -\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\theta}{4}$.

θ	0		π		2π
ρ'	0		$-$		‖
ρ	$\ln 2$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖

• **Khảo sát tại** $2\pi^-$: Ký hiệu $\varphi = \theta - 2\pi$, ta có:

$$\begin{aligned}
Y(\theta) &= \rho(\theta)\sin(\theta - 2\pi)\\
&= \ln\left(1+\cos\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)\right)\sin\varphi\\
&= \ln\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi\\
&= \left(\ln\left(\frac{\varphi^2}{8}+o(\varphi^2)\right)\right)(\varphi+o(\varphi))\\
&\underset{\varphi\to 0^-}{\sim} 2\varphi\ln|\varphi| \underset{\varphi\to 0^-}{\longrightarrow} 0^+.
\end{aligned}$$



Vậy C nhận $x'x$ làm tiệm cận, và khi θ tiến đến $2\pi^-$, C nằm ở trên $x'x$.

l) • ρ là 2π - tuần hoàn ; ta được cả đường cong C bằng cách cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 2π.

• $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$; ta sẽ cho θ biến thiên trong $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, rồi lấy đối xứng qua $y'y$.

• $\rho'(\theta) = -\rho(\theta)\dfrac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}$.

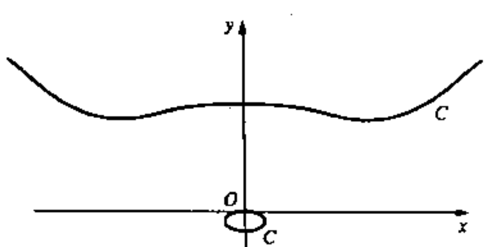
θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	0	$-$	‖	$-$	0
ρ	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$e^{\frac{1}{2}}$

• Ta thác triển liên tục ρ tại 0^- bằng cách đặt $\rho(0) = 0$.

• **Khảo sát tại** 0^+: Ta có:

$$\begin{aligned}
y(\theta) &= \rho(\theta)\sin\theta\\
&= \sin\theta\, e^{\frac{1}{2\sin\theta}} \underset{\theta\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}$$

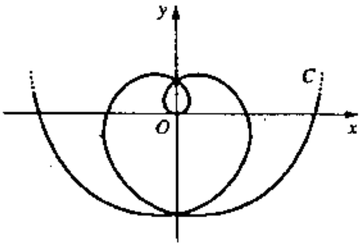
Vậy C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $x'x$.



m) • ρ lẻ ; ta cho θ biến thiên trong $[0; +\infty[$, rồi lấy đối xứng qua $y'y$.

•

θ	0		$+\infty$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$

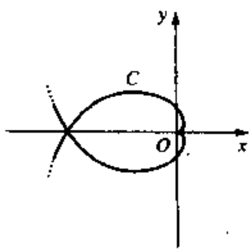


• C có một nhánh xoáy ốc.

Đường cong C được gọi là đường **xoáy ốc Archimède.**

n) • ρ chẵn ; ta cho θ biến thiên trong $[0; +\infty[$, rồi lấy đối xứng qua $x'x$.

θ	0		$+\infty$
ρ'	0	$+$	
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$

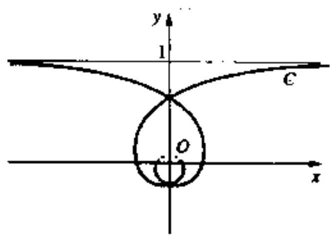


• C có một nhánh xoáy ốc.

o) • ρ lẻ; ta cho θ biến thiên trong $]0; +\infty[$, rồi lấy đối xứng qua $y'y$.

•

θ		0		$+\infty$
ρ'		‖	$-$	
ρ		‖	$+\infty$ $\searrow$	0



• **Khảo sát tại** 0^+: ta có: $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1 - \dfrac{\theta^2}{6} + o(\theta^2)$.

Vậy C nhận đường thẳng có phương trình $y = 1$ làm tiệm cận, và khi θ tiến đến 0^+, C nằm ở phía dưới D.

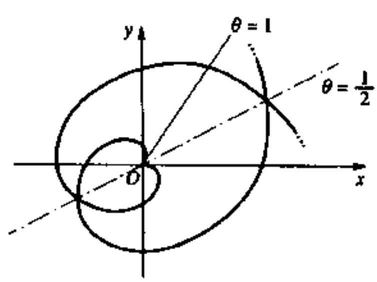
• **Khảo sát tại** $+\infty$: C nhận 0 làm điểm - tiệm cận.

p) • $\mathrm{Def}(\rho) =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$.

• $\rho(1 - \theta) = \rho(\theta)$: ta sẽ cho θ biến thiên trong $[1; +\infty[$, rồi lấy đối xứng qua đường thẳng có góc cực $\dfrac{1}{2}$.

• $\rho'(\theta) = \dfrac{2\theta - 1}{2\sqrt{\theta(\theta - 1)}} > 0$

θ	1		$+\infty$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$



• **Khảo sát tại** $+\infty$: C nhận một nhánh xoáy ốc.

$q)$ • $\mathrm{Def}(\rho)=\mathbf{R}^*;\ \rho'(\theta)=-\dfrac{e^{\theta}}{(e^{\theta}-1)^2}<0$

θ	$-\infty$		0		$+\infty$
ρ	-1	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	0

• **Khảo sát tại** 0: Ta có:

$$y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta=\frac{\sin\theta}{e^{\theta}-1}=\frac{\theta+o(\theta^2)}{\theta+\frac{\theta^2}{2}+o(\theta^2)}=1-\frac{\theta}{2}+o(\theta).$$

Vậy C nhận đường thẳng có phương trình $y=1$ làm tiệm cận, và khi $\theta\to 0^-$ (tương ứng : 0^+), C nằm ở trên (tương ứng : dưới) D.

• **Khảo sát tại** $-\infty$: C nhận một đường tròn tiệm cận, đó là đường tròn tâm O bán kính 1.

• **Khảo sát tại** $+\infty$: C nhận O làm điểm - tiệm cận.

• **Điểm kép**: Với mọi k thuộc $\mathbb{Z}^*$, ta có:

1) $\rho(\theta+2k\pi)=\rho(\theta)\Leftrightarrow e^{\theta+2k\pi}=e^{\theta}$

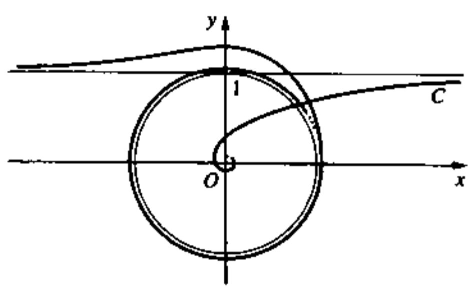
$\Leftrightarrow k=0$, bị loại

2) $\rho(\theta+\pi+2k\pi)=-\rho(\theta)$

$\Leftrightarrow e^{\theta}(e^{\pi+2k\pi}+1)=2$

$\Leftrightarrow \theta=\ln\dfrac{e^{\pi+2k\pi}+1}{2}.$

Vậy, C có vô số điểm kép.

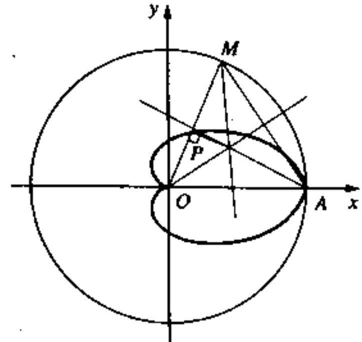


4.2.2 Trong một hệ quy chiếu trực chuẩn tương thích: $O(0,0)$, $A(a,0)$, $a>0$, $P(a\cos\theta, a\sin\theta)$, trong đó θ là góc cực của P, do đó cũng là của M.

Ký hiệu U, V là các hình chiếu trực giao của tâm đường tròn nội tiếp theo thứ tự lên (OA) và (AP), ta có:

$$OM+MP=a,\ PV+VA=2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|,\ OU+UA=a,\ OU=OM.\ AV=AU.\ PM=PV,$$

suy ra : $OM=a\left(1-\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|\right).$



◊ **Trả lời :** Quỹ tích của M có phương trình cực :

$$\rho=a\left(1-\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right).$$

trong đó $-\pi\le\theta\le\pi$.

4.2.3 • Với mọi điểm P thuộc C với góc cực θ, tiếp tuyến T_P với C tại P tạo nên với (OM) một góc không đổi (modulo π), vì $\tan V(\theta) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Ký hiệu $\gamma = \text{Arctan}\dfrac{1}{\lambda}$; ta có: $V(\theta) \equiv \gamma[\pi]$, và $\alpha(\theta) = \angle(x'x, T_p) \equiv \theta + \gamma[\pi]$

• Cho P_1, P_2 là hai điểm của C, có góc cực là θ_1, θ_2. Ta có :

$$T_{p_1} \perp T_{p_2} \Leftrightarrow (x'x, T_{p_2}) \equiv (x'x, T_{p_1}) + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta_2 + \gamma \equiv \theta_1 + \gamma + \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \theta_2 \equiv \theta_1 + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Mặt khác, một phương trình Descartes của T_{P_1} là: $y - ae^{\lambda\theta_1}\sin\theta_1 = \tan(\theta_1 + \gamma)(x - ae^{\lambda\theta_1}\cos\theta_1)$,

hoặc $\quad \sin(\theta_1 + \gamma)x - \cos(\theta_1 + \gamma)y = ae^{\lambda\theta_1}\sin\gamma$,

và một phương trình Descastes của T_{p_2} là : $\cos(\theta_1 + \gamma)x + \sin(\theta_1 + \gamma)y = ae^{\lambda\theta_1}e^{\lambda\frac{\pi}{2}}\sin\gamma$.

• Cho $M(x, y)$ là một điểm của mặt phẳng. Ta có :

$$(\exists(P_1, P_2) \in C^2,\ (M \in T_{P_1}, M \in T_{P_2},\ T_{P_1} \perp T_{P_2}))$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists \theta_1 \in \mathbf{R}, \begin{cases} \sin(\theta_1 + \gamma)x - \cos(\theta_1 + \gamma)y = ae^{\lambda\theta_1}\sin\gamma \\ \cos(\theta_1 + \gamma)x + \sin(\theta_1 + \gamma)y = ae^{\lambda\theta_1}e^{\lambda\frac{\pi}{2}}\sin\gamma \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists \theta_1 \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = ae^{\lambda\theta_1}\sin\gamma\left(\sin(\theta_1 + \gamma) + e^{\frac{\lambda\pi}{2}}\cos(\theta_1 + \gamma)\right) \\ y = ae^{\lambda\theta_1}\sin\gamma\left(-\cos(\theta_1 + \gamma) + e^{\frac{\lambda\pi}{2}}\sin(\theta_1 + \gamma)\right) \end{cases}\right).$$

Ký hiệu $\beta = \text{Arctan}\left(e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}\right)$. Khi đó, M thích hợp khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x = ae^{\lambda\theta_1}\sin\gamma\dfrac{\cos(\theta_1 + \gamma - \beta)}{\sin\beta} \\ y = ae^{\lambda\theta_1}\sin\gamma\dfrac{\sin(\theta_1 + \gamma - \beta)}{\sin\beta} \end{cases}.$$

Ký hiệu $\theta = \theta_1 + \gamma - \beta$, θ là góc cực của M (nếu $\lambda > 0$), ta được một phương trình cực của quỹ tích của M:

$$\rho = ae^{\lambda(\theta - \gamma + \beta)}\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

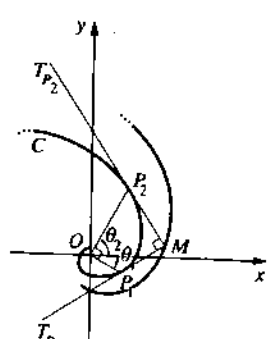
◊ **Trả lời** : Quỹ tích của M là đường xoáy ốc lôga có phương trình cực :

$$\rho = ae^{\lambda(\beta - \gamma)}\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}e^{\lambda\theta},$$

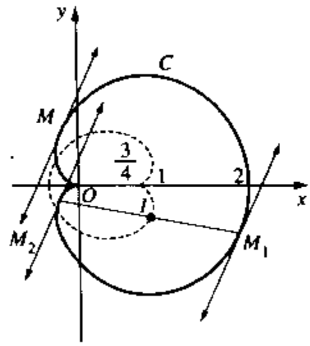
đó là hình vị tự của C trong phép vị tự tâm O và tỷ số :

$e^{\lambda(\beta-\gamma)}\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ trong đó $\beta = \text{Arctan}\left(e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}\right)$

và $\gamma = \text{Arctan}\dfrac{1}{\lambda}$.



4.2.4 a) Xem 4.2.12, Ví dụ 1).



b) α) $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -\cot\text{an}\frac{\theta}{2}$,

suy ra : $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, rồi vì $\varphi = \theta + V$:

$$\theta = \frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

β) Tọa độ Descartes của một điểm M với góc cực θ của C là : $\left(\frac{1}{2} + \cos\theta + \frac{1}{2} + \cos 2\theta, \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$.

Từ đó suy ra tọa độ của tâm đẳng tỷ cự G của $M_1M_2M_3$.

◊ **Trả lời :** $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

γ) Ký hiệu (x_i, y_i) là tọa độ Descartes của M_i (i = 1, 2, 3) và $\mathcal{A}$ là diện tích của $M_1M_2M_3$; chứng minh rằng $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\sum(x_1y_2 - x_2y_1)\right|$; hơn nữa:

$$x_1y_2 - x_2y_1 = (1 + \cos\theta_1)(1 + \cos\theta_2)\sin(\theta_2 - \theta_1).$$

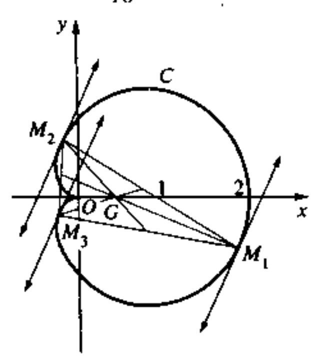
suy ra:
$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left|3 + 2\sum\cos\theta_1 + \sum\cos\theta_1\cos\theta_2\right|.$$

◊ **Trả lời :** Diện tích của tam giác $M_1M_2M_3$ không đổi và bằng $\frac{9\sqrt{3}}{16}$.

c) Các điểm M_1M_2 ứng với $\theta_1 = \theta - \frac{2\pi}{3}$,

$\theta_2 = \theta + \frac{2\pi}{3}$, trong đó θ là góc cực của M.

Từ đó suy ra tọa độ Descartes của I.



◊ **Trả lời :** $x_I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta$,

$y_I = -\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$; chú ý rằng

$x_I - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\cos\theta(1 + \cos\theta), y_I = -\frac{1}{2}\sin\theta(1 + \cos\theta)$,

và như vậy I sẽ vạch nên một đường hình tim, suy từ C qua phép đối xứng đối với $y'y$, phép vị tự tâm O và tỷ số $\frac{1}{2}$, và phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{3}{4}\vec{i}$.

d) **Cách thứ nhất**

Giả sử $M(\theta) \in C$, N là đối xứng của M qua tiếp tuyến T_M với C tại M, I là trung điểm của ON. Biểu thị các quan hệ $(ON) \perp T_M$ và $(MI) // TM$.

Từ đó suy ra tọa độ Descartes của N theo θ.

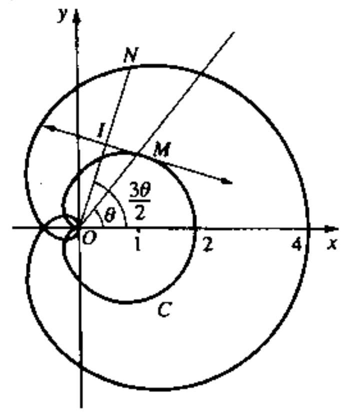
Cách thứ hai

$\varphi = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, vậy tiếp tuyến T_θ với C tại $M(\theta)$ có phương trình :

$y - (1+\cos\theta)\sin\theta = \tan\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)(x - (1+\cos\theta)\cos\theta)$,

hoặc

$$x\cos\frac{3\theta}{2} + y\sin\frac{3\theta}{2} = (1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}.$$



Ký hiệu $\varphi_1 = \frac{3\theta}{2}$, ta có phương trình dạng chuẩn của (T_θ) :

$$x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = \frac{1}{2}\left(3\cos\frac{\theta_1}{3} + \cos\theta_1\right).$$

Quỹ tích của N có phương trình cực là: $\rho = 3\cos\frac{\theta}{3} + \cos\theta$.

◊ **Trả lời :** N vạch nên cung có biểu diễn tham số là:

$$\begin{cases} x = (\cos 2\theta + \cos\theta)(1+\cos\theta) = \left(\cos\frac{3\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2} \\ y = (\sin 2\theta + \sin\theta)(1+\cos\theta) = \left(\cos\frac{3\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{3\theta}{2}, \end{cases}$$

hoặc đường cong có phương trình cực là: $\rho = 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta$

(θ không có nghĩa như nhau trong hai trường hợp trên đây).

e) Ký hiệu θ là góc cực (modulo π) của D, thì các góc cực của P và Q là θ và $\theta + \pi$.

α) Từ đó suy ra tọa độ Descartes của P và Q.

◊ **Trả lời** : Tâm đẳng tỷ cự của APQ vạch nên đường tròn tâm $(1, 0)$, bán kính $\frac{1}{3}$.

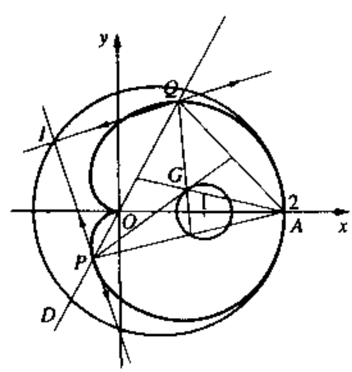
β) Một phương trình Descartes của tiếp tuyến với C tại P là:

$$\begin{vmatrix} x - (1+\cos\theta)\cos\theta & -\sin\frac{3\theta}{2} \\ y - (1+\cos\theta)\sin\theta & \cos\frac{3\theta}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Từ đó suy ra tọa độ Descartes của I :

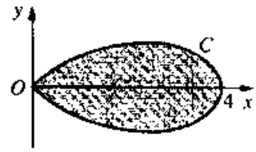
$$x_I = \frac{1}{2}(1 + 3\cos 2\theta), \quad y_I = \frac{3}{2}\sin 2\theta.$$

◊ **Trả lời** : I vạch nên đường tròn tâm $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, bán kính $\frac{3}{2}$.



4.2.5 *a*) Vẽ C.

Vòng khuyên lớn ứng với t chạy từ $-\frac{\pi}{4}$ đến $\frac{\pi}{4}$. Ta có

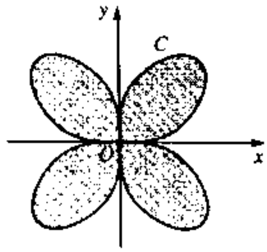


$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_C \rho^2 \mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos\theta\cos 2\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4(1+\cos 2\theta)(1+\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4+4\cos 2\theta+4\cos 4\theta+2(\cos 6\theta+\cos 2\theta))\mathrm{d}\theta$$
$$=\pi+\left[3\sin 2\theta+\sin 4\theta+\frac{1}{3}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

◊ **Trả lời :** $\pi+\frac{8}{3}\simeq 5{,}808$.

b) Vẽ C.

Vì lý do đối xứng:



$$\mathcal{A}=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

◊ **Trả lời :** $\frac{\pi}{2}$.

4.3.1 *a*) Ta có thể biểu diễn x theo y. Khảo sát sự biến thiên của $\Delta : y \mapsto -8y^3+8y+1$; Δ triệt tiêu tại $y_1 \simeq -0{,}931$, $y_2 \simeq -0{,}127$, $y_3 \simeq 1{,}058$.

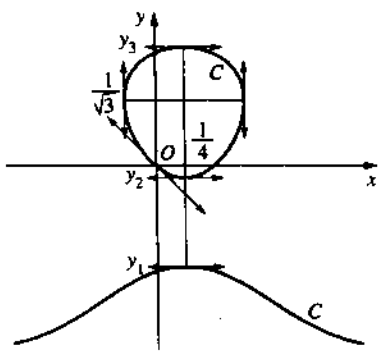
Đường cong C đối xứng qua đường thẳng có phương trình $x=\frac{1}{4}$; vấn đề quy về:

$$x=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{-8y^3+8y+1}\right).$$

y	$-\infty$		y_1	y_2		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		y_3	
x'		$-$	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖	
x	$+\infty$ ↘		$1/4$	$1/4$ ↗			↘	$1/4$	

• **Khảo sát tại** $-\infty$: $x \underset{y\to-\infty}{\sim} \sqrt{2}(-y)\sqrt{-y}$,

vậy C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $x'x$. Đường cong C đi qua O và tiếp tuyến tại đó là đường phân giác thứ hai.

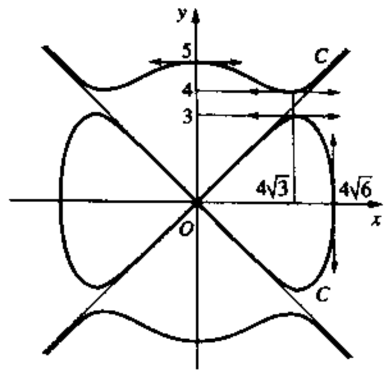


b) • **Tính đối xứng**: C đối xứng đối với $x'x$, $y'y$, O, vậy là có thể quy về: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

• **Các điểm ở vô tận**: ta được các phương tiệm cận bằng cách cho triệt tiêu phần thuần nhất có bậc cao nhất, từ đó $y = \pm x$. Lập phương trình theo x của các giao điểm giữa C và D_λ với phương trình $y = x + \lambda$:

$$-4\lambda x^3 + (4 - 6\lambda^2)x^2 + (200\lambda - 4\lambda^3)x + 100\lambda^2 - \lambda^4 = 0.$$

Từ đó suy ra rằng C nhận đường phân giác thứ nhất làm tiệm cận.

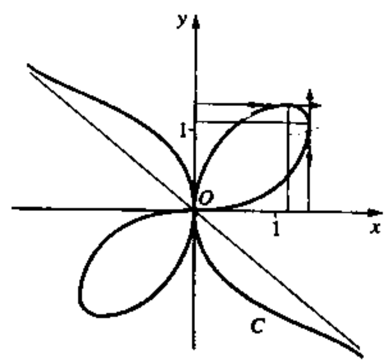


• **Các điểm tại đó tiếp tuyến song song với $x'x$ hoặc $y'y$** : Cho triệt tiêu $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ hoặc $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, trong đó $F(x, y) = x^4 - y^4 - 96x^2 + 100y^2$; ta được $(0, 10)$, $(4\sqrt{3}, 6)$, $(4\sqrt{3}, 8)$ tại đó tiếp tuyến song song $x'x$, và $(4\sqrt{6}, 0)$ tại đó tiếp tuyến song song $y'y$.

c) • C đối xứng qua O, ta có thể quy về: $x \geq 0$.

• $O \in C$ và các tiếp tuyến tại O với C là các trục $x'x$, $y'y$.

• Ta được các phương tiệm cận bằng cách cho triệt tiêu phần thuần nhất có bậc cao nhất: $y = -2^{-1/5}x$. Cắt tiếp C bởi các đường thẳng $y = -2^{-1/5}x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$; từ đó suy ra rằng C nhận làm tiệm cận đường thẳng có phương trình $y = -2^{-1/5}x$.



• **Các điểm tại đó tiếp tuyến song song với $x'x$**: giải

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}, \text{ trong đó } F(x, y) = x^5 + 2y^5 - 5xy^2;$$

ta được $(0,0), \left(2^{1/5}, 2^{2/5}\right)$.

• **Các điểm tại đó tiếp tuyến song song với $y'y$** : $(0,0)$ và $\left(3^{3/10}, 3^{1/10}\right)$.

d) • $O \in C$ và tiếp tuyến tại đó là $x'x$.

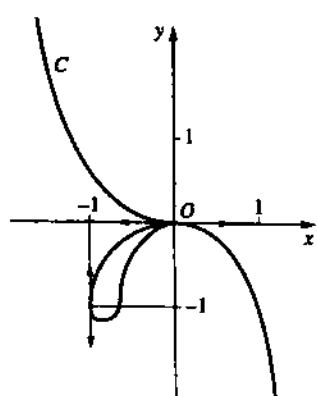
• Ký hiệu $F(x, y) = x^7 + 3x^2y^2 + 2y^3$, khảo sát, với x cố định, ánh xạ $F(x, \bullet)$: $y \mapsto F(x, y)$; từ đó suy ra số điểm của C trên mỗi đường song song với $y'y$.

• Có thể tham số hoá C một cách hợp lý, bằng cách cắt nó bởi một parabol di động có phương trình $y = tx^2$, $t \in \mathbb{R}$; ta được:

$$x = -t^2(3 + 2t), \; y = t^5(3 + 2t)^2.$$

Đặc biệt, khi t tiến đến $+\infty$, thì :

$$x \sim -2t^3, \; y \sim 4t^9, \text{ vậy } y \sim -\frac{x^3}{2};$$

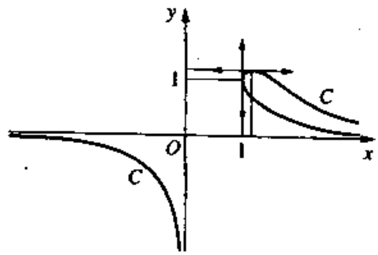


như vậy, C có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$.

e) • Chứng tỏ rằng C nhận $x'x$ và $y'y$ làm tiệm cận.

• Điểm tại đó tiếp tuyến song song với $x'x$, với giá trị gần đúng: (1,16 ; 1,22).

• Điểm tại đó tiếp tuyến song song với $y'y$: (1; 1).



4.3.2 *a*) Cho (x, y) là một điểm của C; ký hiệu $m = \text{Max}(|x|, |y|)$. Ta có:

$$m^4 \le x^4 + y^4 = 2y^2 + 3x^3 - 2x^2 \le 2y^2 + 3|x|^3 + 2x^2 \le 3m^3 + 4m^2,$$

từ đó $\quad m^2(m^2 - 3m - 4) \le 0$, và như vậy $m \le 4$.

Điều này chứng tỏ C bị chặn.

b) Phương pháp tương tự.

Ký hiệu $P = a_nX^n + ... + a_o$, $Q = b_nX^n + ... + b_o$, $a_n > 0$, $b_n < 0$, $\alpha = \text{Min}(a_n, -b_n) > 0$, (x, y) thỏa mãn $P(x) = Q(y)$, $m = \text{Max}(|x|, |y|)$, $M = \text{Max}(m, 1)$. Khi đó ta có:

$$\alpha m^n \le a_n|x|^n + (-b_n)|y|^n = \left|-\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k y^k\right| \le AM^{n-1}.$$

Khi ký hiệu $A = \sum_{k=0}^{n-1}(|a_k| + |b_k|)$. Suy ra $m \le \text{Max}\left(1, \frac{A}{\alpha}\right)$, điều này chứng tỏ rằng đường cong C bị chặn.

4.3.3 Phương pháp tương tự như trong 4.3.2, Ví dụ 3).

Ánh xạ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $g(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ lẻ, thuộc lớp C^1, và, với mọi u thuộc $\mathbb{R}$: $\; g'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^4+1}} > 0$.

Vì $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ liên tục ≥ 0, và

vì $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$,

nên $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ khả tích trên $[0; +\infty[$.

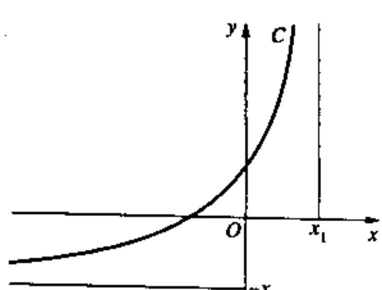
u	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(u)$	$-l$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	l

Ký hiệu $l = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \simeq 1{,}844$.

Với ký hiệu $g^{-1} :]-l; l[\to \mathbb{R}$ là ánh xạ ngược của g, và $\varphi : x \mapsto g^{-1}(g(x) + 1)$, thì đường cong C là đường cong biểu diễn φ.

Ta có $\text{Def}(\varphi) =]-\infty ; x_1[$, trong đó x_1 được xác định bởi $x_1 = g^{-1}(l - 1)$, tức là

$$\int_{x_1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} = 1 \text{ ; } x_1 \simeq 0{,}8.$$



C nhận đường phân giác thứ hai làm trục đối xứng.

C nhận các đường thẳng có phương trình $x = x_1$, $y = -x_1$ làm tiệm cận.

4.3.4 Với mọi (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$, ta có :

$$F(x, y) = \int_y^x f = -\int_x^y f = -F(x, y).$$

Vậy C đối xứng qua đường phân giác thứ nhất, và ta có thể giới hạn việc khảo sát vào miền $y \le x$. Ta tính $F(x, y)$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $y \le x$:

Nếu $y \le x \le 0$, thì $\quad F(x, y) = \int_x^y \mathrm{d}t = y - x.$

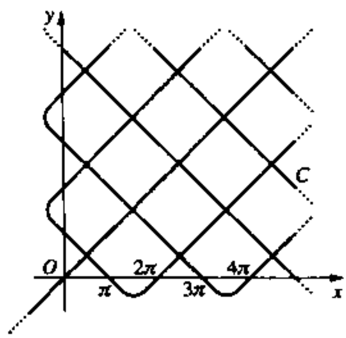
Nếu $y \le 0 \le x$, thì $\quad F(x, y) = -\int_y^0 \mathrm{d}t - \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = y - \sin x.$

Nếu $0 \le y \le x$, thì $\quad F(x, y) = \int_x^y \cos t \,\mathrm{d}t = \sin y - \sin x.$

Suy ra :

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y \le x \le 0 \text{ và } y = x \\ y \le 0 \le x \text{ và } y = \sin x \\ 0 \le y \le x \text{ và } \sin y = \sin x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \le 0 \text{ và } y = x \\ y \le 0 \le x \text{ và } y = \sin x \\ 0 \le y \le x \text{ và } y = x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 \le y \le x \text{ và } y = \pi - x + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$



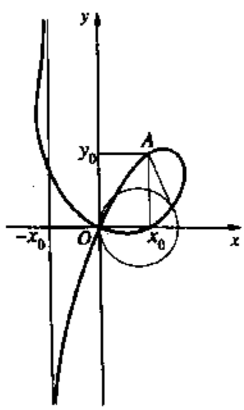
4.3.5 Một điểm $M(x, y)$ thuộc quỹ tích phải tìm khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0 \\ x_o x + y_o y - \lambda(x_0 + x) = 0 \end{cases}$$

tức là : $\quad 2x(x_0 x + y_0 y) - (x^2 + y^2)(x_0 + x) = 0.$

◊ **Trả lời :** Quỹ tích phải tìm là đường strophôit có phương trình Descartes :

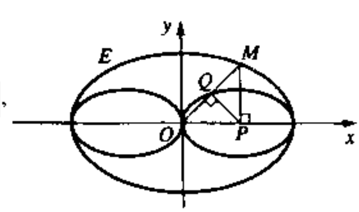
$$x(x^2 + y^2) + x_0(y^2 - x^2) - 2y_0 xy = 0.$$



4.3.6 Trong một hệ quy chiếu trực chuẩn thích hợp $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\ )$, E nhận phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó $a > b > 0$; tọa độ của M là $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra tọa độ của Q.

◊ **Trả lời :** Đường cong có biểu diễn tham số

$$\left(x = \frac{a^3\cos^3\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}, y = \frac{a^2 b\cos^2\theta\sin\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \right),$$



và có phương trình Descartes :

$$(a^2y^2 + b^2x^2)(x^2 + y^2)^2 - a^2b^2x^4 = 0.$$

4.4.1 *a*) Một biểu diễn tham số của hình bao là :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} .$$

Kí hiệu $\theta = \text{Arctan}t$, hãy nhận biết đường cong đó.

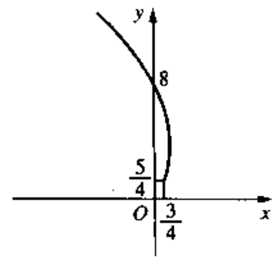
◊ **Trả lời :** Đường tròn tâm O và bán kính 1.

b) Đơn giản phương trình của D_t bằng phép đổi biến $u = \text{ch}2t$. Một biểu diễn tham số của hình bao là :

$$x = 2u - u^2,\ y = 2u + u^2,\ u \in [1\ ;+\infty[.$$

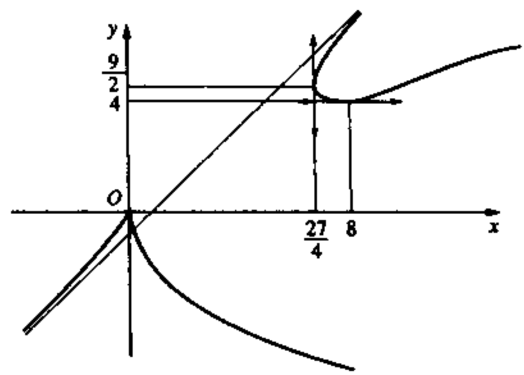
◊ **Trả lời :** Một khúc của parabol xác định bởi :

$$(x+y)^2 + 8(x-y) = 0 \text{ và } x + y - 2 \geq 0.$$



c) ◊ **Trả lời :** Một biểu diễn tham số của hình bao là :

$$x = \frac{t^3}{t-1},\ y = \frac{t^2}{t-1},\ t \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

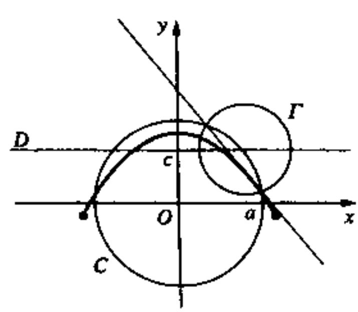


4.4.2 Chọn một hệ quy chiếu trực chuẩn trong đó $D : y = b$, $C : x^2 + y^2 = a^2$,

$(a, b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$.

Khi đó $\Gamma : (x-\lambda)^2 + (y-c)^2 = R^2$, với $c \in \mathbb{R}$ cố định, và $\lambda \in \mathbb{R}$. Lập một phương trình của dây cung chung, khảo sát sự tồn tại của nó :

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2cy - (\lambda^2 + c^2 + a^2 - R^2) = 0 \\ R^2 - 2aR \leq \lambda^2 \leq R^2 + 2aR \end{cases}$$



◊ **Trả lời :**

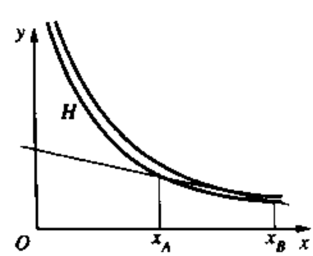
Một khúc của parabol $x^2 + 2cy - c^2 - a^2 + R^2 = 0$ giới hạn bởi hệ thức $R^2 - 2aR \leq x^2 \leq R^2 + 2aR$.

4.4.3 Khi ký hiệu $A\left(\lambda, \frac{1}{\lambda}\right)$, $B\left(2\lambda, \frac{1}{2\lambda}\right)$, thì phương trình của (AB) là :

$$-x + 3\lambda - 2\lambda^2 y = 0.$$

◊ **Trả lời :** Đường hypebol có phương trình :

$$xy = \frac{9}{8}.$$



4.4.4 Khi ký hiệu $P(\lambda, 0)$ và $Q(0, \mu)$ ta có :

$$(AP) \perp (BQ) \Leftrightarrow a(\lambda - a) + b(\mu - b) = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{a^2 + b^2 - a\lambda}{b}$$

Một PTD của (PQ) là : $\mu x + \lambda y - \lambda\mu = 0$,

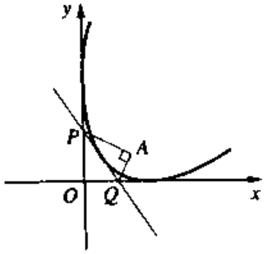
tức là : $(a^2 + b^2 - a\lambda)x + b\lambda y - \lambda(a^2 + b^2 - a\lambda) = 0$.

Ta có được một PTD của hình bao bằng cách khử λ trong :

$$\begin{cases} D_\lambda : (a^2 + b^2 - a\lambda)x + b\lambda y - \lambda(a^2 + b^2 - a\lambda) = 0 \\ D'_\lambda : -ax + by - (a^2 + b^2 - 2a\lambda) = 0 \end{cases}$$

◊ **Trả lời :** Hình bao của (PQ) là đường parabol có phương trình Descartes :

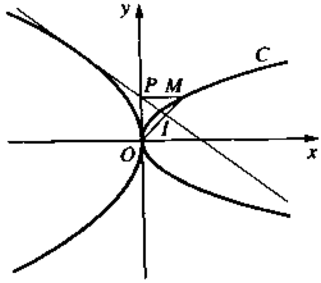
$$(by - ax)^2 - 2(a^2 + b^2)(by + ax) + (a^2 + b^2)^2 = 0.$$



4.4.5 Khi ký hiệu $M\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$, một phương trình của (IP) là :

$$2px + ty - t^2 = 0.$$

◊ **Trả lời :** Đường parabol có phương trình : $y^2 = -8px$.

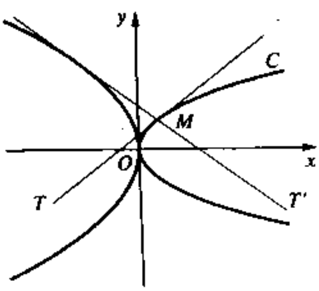


4.4.6 Khi ký hiệu $M\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$, một phương trình của T' là :

$$px + ty - \frac{3t^2}{2} = 0.$$

◊ **Trả lời :** Đường parabol có phương trình :

$$y^2 = -6px.$$



4.4.7 Lập một phương trình Descartes của đường trung trực D_t của (PQ) :

$$M(x, y) \in D_t \Leftrightarrow (x - \cos t)^2 + y^2 = x^2 + (y - \sin t)^2$$

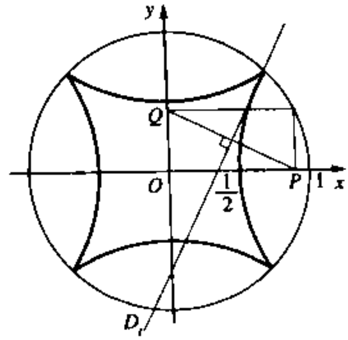
$$\Leftrightarrow 2x\cos t - 2y\sin t = \cos 2t.$$

Ta nhận được một BDTS của hình bao của D_t bằng cách giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} D_t : \ x\cos t - y\sin t = \frac{1}{2}\cos 2t \\ D'_t : \ x\sin t + y\cos t = \sin 2t \end{cases}$$

◊ **Trả lời :** Hình bao là cung có biểu diễn tham số :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(3\cos t - \cos 3t) \\ y = \frac{1}{4}(3\sin t + \sin 3t) \end{cases}$$

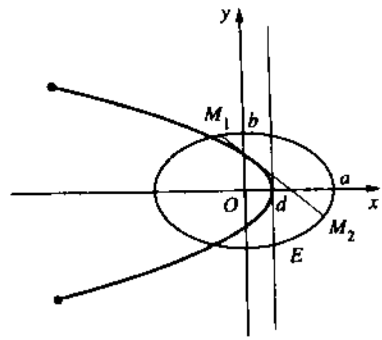


Phép đổi tham số $u = t - \frac{\pi}{4}$ và phép đổi hệ quy chiếu trực chuẩn thuận xác định bởi $\angle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ cho phép nhận ra đường hình sao có BDTS :

$$X = \cos^3 u,\ Y = \sin^3 u.$$

4.4.8 Lập phương trình theo x của các giao điểm của một đường thẳng D, có phương trình $y = mx + p$, với E :

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mpx + a^2(p^2 - b^2) = 0.$$



Đây sẽ là hai điểm thực, với trung điểm có hoành độ d, khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{a^2mp}{b^2 + a^2m^2} = -d \\ (a^2mp)^2 - a^2(b^2 + a^2m^2)(p^2 - b^2) \geq 0. \end{cases}$$

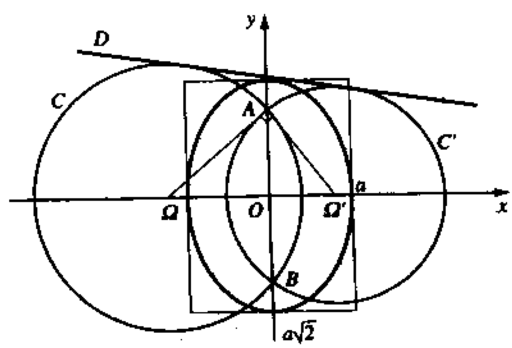
Vậy một phương trình của dây cung là :

$$a^2(x - d)m^2 - a^2ym - b^2d = 0.$$

◊ **Trả lời :** Một khúc của parabol có phương trình $a^2y^2 + 4b^2d(x - d) = 0$, bị giới hạn bởi điều kiện $|y| \leq \frac{2bd|x-d|}{a\sqrt{a^2 - d^2}}$ (nếu $|d| \geq a$, hình bao rỗng).

4.4.9 Trong một hệ quy chiếu trực chuẩn thích hợp hai điểm cố định là $A(0, a)$, $B(0, -a)$, và hai đường tròn C, C' có các tâm $\Omega(\lambda a, 0)$, $\Omega'\left(-\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ trong đó $\lambda \in \mathbb{R}^*$, và các bán kính R, R' xác định bởi :

$$R^2 = a^2(1 + \lambda^2),\ R'^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right).$$



Một đường thẳng D phương trình $ux + vy + h = 0$, tiếp xúc với C khi và chỉ khi $d(\Omega, D) = R$. Từ đó suy ra rằng D tiếp xúc với C và C' khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} (u\lambda a + h)^2 = a^2(1 + \lambda^2)(u^2 + v^2) \\ \left(-\frac{ua}{\lambda} + h\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)(u^2 + v^2) \end{cases}$$

Khử λ sẽ có $a^2(u^2 + 2v^2) = h^2$ (gọi là *phương trình tiếp tuyến* của hình bao). Việc biểu diễn tham số với $u = \frac{h}{a}\cos\theta$, $v = \frac{h}{a\sqrt{2}}\sin\theta$ sẽ cho phương trình của D là : $x\cos\theta + \frac{y}{\sqrt{2}}\sin\theta + a = 0$.

◊ **Trả lời :** Đường elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2a^2} = 1$.

4.4.10 *a*) α) Cho D là đường thẳng có phương trình $ux + vy + h = 0$. Phương trình theo t của các điểm thuộc $D \cap C_\lambda$ là :

$$ut^3 + 3vt^2 - (3u + h)t + (h\lambda - v) = 0.$$

Phương trình này có một nghiệm bội ba khi và chỉ khi tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} ut^3 + 3vt^3 - (3u+h)t + (h\lambda - v) = 0 \\ 3ut^2 + 6vt - (3u+h) = 0 \\ ut + v = 0. \end{cases}$$

Việc khử t cho ta $\left\{\begin{matrix} 2v^3 + (3u+h)uv + (h\lambda - v)u^2 = 0 \\ 3v^2 + (3u+h)u = 0 \end{matrix}\right|$, hệ này quy về $\left\{\begin{matrix} v = -3u\lambda \\ h = -3u(1+9\lambda^2) \end{matrix}\right|$, chứng tỏ rằng $u \neq 0$, $h \neq 0$.

Như vậy, đường thẳng giá của hai nửa tiếp tuyến tại điểm uốn có phương trình :

$$x - 3\lambda y - 3(1 + 9\lambda^2) = 0.$$

β) ◊ **Trả lời** : Đường parabol có phương trình $y^2 = -12(x - 3)$.

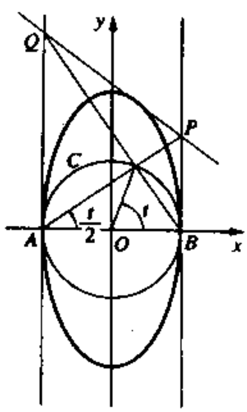
b) *α*) Trước tiên chứng tỏ $\dfrac{y}{x} \underset{t \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{3}{t} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$.

Rồi suy ra $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1-3t^2}{3t - t^3} \underset{t \to \lambda}{\to} \dfrac{1-3\lambda^2}{3\lambda - \lambda^3}$, và chứng tỏ rằng $y - \dfrac{1-3\lambda^2}{3\lambda-\lambda^3}x \underset{t \to \lambda}{\to} -\dfrac{3(1+\lambda^2)^2}{3\lambda - \lambda^3}$.

◊ **Trả lời** : $\Delta_\lambda \mid y = \dfrac{1-3\lambda^2}{3\lambda - \lambda^3}x - \dfrac{3(1+\lambda^2)^2}{3\lambda - \lambda^3}$.

β) ◊ **Trả lời** : Hình bao có biểu diễn tham số :

$$x = \frac{3 - 6\lambda^2 - \lambda^4}{1+\lambda^2},\ y = \frac{-8\lambda}{1+\lambda^2}.$$



4.4.11 Trong một hệ quy chiếu trực chuẩn thích hợp :

$A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $M(a \cos t, a \sin t)$

Vì $\angle\ (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{t}{2}[\pi]$, nên ta có tọa độ của P :

$$P(a, 2a\tan\frac{t}{2}).$$

Tương tự : $Q(-a, 2a \cot an\dfrac{t}{2})$.

Ta lập một PTD của (PQ) :

$$\begin{vmatrix} x - a & -1 \\ y - 2a\tan\frac{t}{2} & \cot an\frac{t}{2} - \tan\frac{t}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

hoặc khi ký hiệu $u = \tan\dfrac{t}{2}$:

$$(1 - u)^2(x - a) + uy - 2au^2 = 0.$$

Ta được một PTD của hình bao phải tìm bằng cách khử u trong :

$$\begin{cases} (1-u^2)(x-a) + uy - 2au^2 = 0 \\ -2u(x-a) + y - 4au = 0 \end{cases}$$

hoặc bằng cách cho triệt tiêu biệt thức của tam thức đối với u tạo nên bởi phương trình của (PQ).

◊ **Trả lời** : Hình bao của đường thẳng (PQ) là elip có phương trình : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$.

4.4.12 a) Lập các phương trình của (AM') : $(\lambda - a)(x - a) + ay = 0$, và của $(A'M')$:

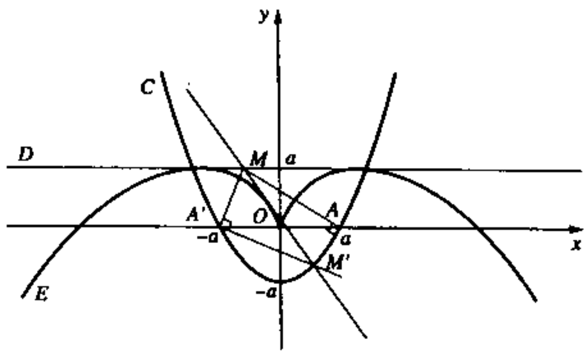
$(\lambda + a)(x + a) + ay = 0$, từ đó : $M'\left(-\lambda, \dfrac{\lambda^2 - a^2}{a}\right)$.

◊ **Trả lời :** Đường parabol có phương trình $x^2 = a(y + a)$.

b) Một phương trình của (MM') là : $(\lambda^2 - 2a^2)(x - \lambda) + 2a\lambda(y - a) = 0$.

◊ **Trả lời :** Hình bao có biểu diễn tham số :

$$x = \frac{2\lambda^3}{\lambda^2 + 2a^2}, \quad y = -\frac{\lambda^2(\lambda^2 - 6a^2)}{2a(\lambda^2 + 2a^2)}.$$



4.4.13 a) • ρ là $\dfrac{2\pi}{3}$ - tuần hoàn ; ta cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài $\dfrac{2\pi}{3}$, rồi thực hiện hai lần phép quay tâm O và góc quay $\dfrac{2\pi}{3}$.

• ρ chẵn ; ta cho θ biến thiên trong $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, rồi thực hiện đối xứng qua $x'x$.

• $\rho\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) = -\rho(\theta)$; ta cho θ biến thiên trong $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, rồi thực hiện đối xứng qua đường thẳng có góc cực $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$
ρ	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

• **Khảo sát tại** $\dfrac{\pi}{6}$ **:** Bằng phép đổi biến $\varphi = \theta - \dfrac{\pi}{6}$, ta có :

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi} = -\frac{1}{3 - 4\sin^2\varphi} \underset{\varphi \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}^{-}.$$

Vậy C có tiệm cận là đường thẳng có phương trình $Y = -\dfrac{1}{3}$ trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ xác định bởi $\angle\,(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$, và khi θ tiến đến $\dfrac{\pi}{6}^{-}$, C nằm phía dưới D.

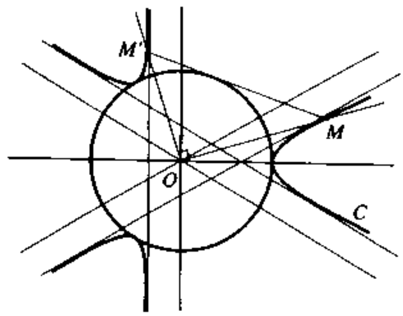
b) Cho $\theta \in \mathbb{R}$, M là điểm thuộc C có góc cực θ, M' là điểm thuộc C có góc cực $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Vậy ta có :

$$M\left(\frac{\cos\theta}{\cos 3\theta}, \frac{\sin\theta}{\cos 3\theta}\right), M'\left(-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}, \frac{\cos\theta}{\sin 3\theta}\right).$$

Từ đó suy ra một PTD của (MM') : $x\cos 4\theta + y\sin 4\theta = 1$.

◊ **Trả lời :** Hình bao của các dây cung của C được nhìn thấy từ O dưới một góc vuông là đường tròn tâm O bán kính 1 (thiếu ba điểm).

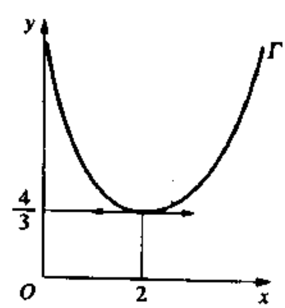


Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 5

5.1.1 a) Ánh xạ $f: \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{2}{x}+\frac{x^3}{24} \end{array}$ thuộc lớp C^1 và : $f'(x) = -\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{8}$, suy ra bảng biến thiên của f.

Đường cong Γ nhận một nhánh parabolic theo phương tiệm cận $y'y$, vì $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$



b) Ta có : $s'^2 = 1 + f'^2(x) = 1 + \left(\frac{x^4-16}{8x^2}\right)^2 = \left(\frac{x^4+16}{8x^2}\right)^2$,

suy ra : $s' = \frac{x^4+16}{8x^2}$.

Rồi : $s(x) = \int_2^x \left(\frac{2}{t^2}+\frac{t^2}{8}\right)dt$.

◇ **Trả lời** : $s(x) = -\frac{2}{x}+\frac{2}{3}+\frac{x^3}{24}$.

5.1.2 Do đối xứng, độ dài toàn phần L của đường deltôit $L = 6L_1$, trong đó L_1 là độ dài của phần Γ ứng với khoảng biến thiên thiên của t từ 0 đến $\frac{\pi}{3}$.

Ta có : $\begin{cases} x' = -2\sin t(1+2\cos t) \\ y' = 2(1-\cos t)^2(1+2\cos t) \end{cases}$,

suy ra : $s'^2 = 2^2(1+2\cos t)^2(\sin^2 t + (1-\cos t)^2) = 4^2(1+2\cos t)^2\sin^2\frac{t}{2}$,

và như vậy : $s' = 4(1+2\cos t)\sin\frac{t}{2}$.

Vì thế : $L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} s'(t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{t}{2}+2\cos t\sin\frac{t}{2}\right)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{3t}{2}dt$.

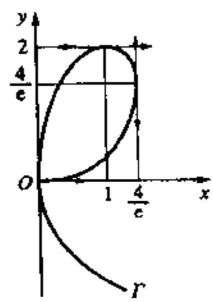
◇ **Trả lời** : $L = 16$.

5.1.3 a) Ta có : $x' = -(1-t^2)e^t$, $y' = -2t\,e^t$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		+	0		-		0	+	
x	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y'			+		0		-		

Tại $-\infty$: $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{2}{1-t^2} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$, vậy Γ nhận $x'x$ làm tiếp tuyến.

Tại $+\infty$: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{1-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, vậy Γ một nhánh parabolic với phương tiệm cận $x'x$.



b) $\begin{cases} x' = -(1-t^2)e^t \\ y' = -2te^t \end{cases}$, $s'^2 = x'^2 + y'^2 = ((1-t^2)^2 + 4t^2)e^{2t} = (1+t^2)^2e^{2t}$, $s' = (1+t^2)e^t$.

Ta tìm một nguyên hàm của $t \mapsto (1+t^2)e^t$ dưới dạng $t \mapsto (at^2+bt+c)e^t$, và, khi lấy đạo hàm và đồng nhất các hệ số, ta có : $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. Suy ra :

$$s(t) = \int_1^t (1+u^2)e^u du = [(u^2-2u+3)e^u]_1^t .$$

◇ **Trả lời :** $s = (t^2-2t+3)e^t - 2e$.

c) Vòng khuyên ứng với t biến thiên từ $-\infty$ đến 1 : $L = [s(t)]_{-\infty}^{1} = 2e$.

◇ **Trả lời** : 2e.

5.1.4 a) • ρ là 6π - tuần hoàn ; ta được toàn bộ đường cong Γ bằng cách cho θ biến thiên trong một khoảng có độ dài 6π.

• ρ chẵn : ta cho θ biến thiên trong $[0\,;3\pi]$, rồi lấy đối xứng qua $x'x$.

• $\rho(3\pi-\theta) = -\rho(\theta)$; ta cho θ biến thiên trong $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, rồi lấy đối xứng qua $x'x$, việc này đã nói trên đây.

• $\rho'(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{3}}$

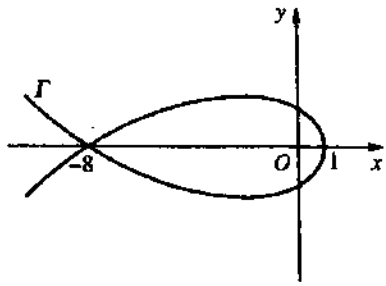
θ	0		$\frac{3\pi}{2}$
ρ'		+	‖
ρ	1	↗ $+\infty$	‖

Khảo sát tại $\frac{3\pi}{2}$: Ta ký hiệu $\alpha = \theta - \frac{3\pi}{2}$;

$$Y = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{a\sin\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{3}} \underset{\varphi\to 0}{\sim} -\frac{27}{\varphi^2}$$

$$\xrightarrow[\varphi\to 0]{} -\infty .$$



Vậy Γ có một nhánh parabôlic với phương tiệm cận $y'y$.

b) $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = \cos^{-6}\frac{\theta}{3} + \tan^2\frac{\theta}{3}\cos^{-6}\frac{\theta}{3} = \cos^{-8}\frac{\theta}{3}$, từ đó $s' = \cos^{-4}\frac{\theta}{3}$, rồi :

$$s = \int_0^{\theta}\cos^{-4}\frac{t}{3}\,dt \underset{\left[u=\frac{t}{3}\right]}{=} \int_0^{\frac{\theta}{3}}\frac{3}{\cos^4 u}\,du \underset{[t=\tan u]}{=} 3\int_0^{\tan\frac{\theta}{3}}(1+t^2)\,dt = [3t+t^3]_0^{\tan\frac{\theta}{3}} .$$

◇ **Trả lời** : $s = 3\tan\frac{\theta}{3} + \tan^3\frac{\theta}{3}$.

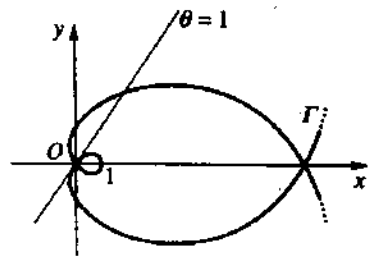
c) Vòng khuyên ứng với θ biến thiên từ $-\pi$ đến π, suy ra :

$$L = 2s(\pi) = 6\tan\frac{\pi}{3} + 2\tan^3\frac{\pi}{3} = 12\sqrt{3} .$$

◇ **Trả lời** : $L = 12\sqrt{3} \simeq 20{,}785$.

5.1.5 a) • ρ chẵn ; $\rho' = -2\theta$.

θ	0	1	$+\infty$
ρ	1 ↘	0 ↘	$-\infty$



• Γ có một nhánh xoắn ốc.

b) Ta có : $\rho = 1 - \theta^2$, $\rho' = -2\theta$, $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = (1-\theta^2)^2 + 4\theta^2 = (1+\theta^2)^2$,

suy ra : $s' = 1 + \theta^2$, rồi : $s(\theta) = \int_0^{\theta}(1+t^2)\,dt = \theta + \frac{\theta^3}{3}$

◇ **Trả lời** : $s = \theta + \frac{\theta^3}{3}$.

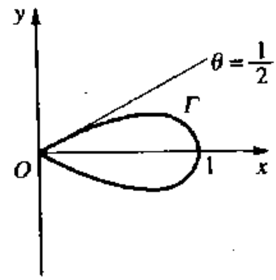
c) $L_n = s((n+1)\pi) - s(n\pi) = \pi + \frac{1}{3}((n+1)\pi - n\pi)^3 = \pi + \frac{\pi^3}{3}(3n^2 + 3n + 1) \underset{n\infty}{\sim} \pi^3 n^2$.

◇ **Trả lời** : $L_n = \pi^3 n^2 + \pi^3 n + \pi - \frac{\pi^3}{3} \underset{n\infty}{\sim} \pi^3 n^2$.

5.1.6 a) • $\mathrm{Def}(\rho) = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, ρ chẵn, vậy ta cho θ biến thiên trong $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, rồi lấy đối xứng qua $x'x$.

• $\rho' = -\dfrac{4\theta}{\sqrt{1-4\theta^2}}$

θ	0	$\frac{1}{2}$
ρ	1 ↘	0



b) Ta có : $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = 1 - 4\theta^2 + \dfrac{16\theta^2}{1-4\theta^2} = \dfrac{(1+4\theta^2)^2}{1-4\theta^2}$,

suy ra : $\quad s' = \dfrac{1+4\theta^2}{\sqrt{1-4\theta^2}}$.

Do đối xứng : $L = 2\int_0^{\frac{1}{2}} s'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1+4\theta^2}{\sqrt{1-4\theta^2}} \underset{[\varphi = \mathrm{Arcsin}\,2\theta]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

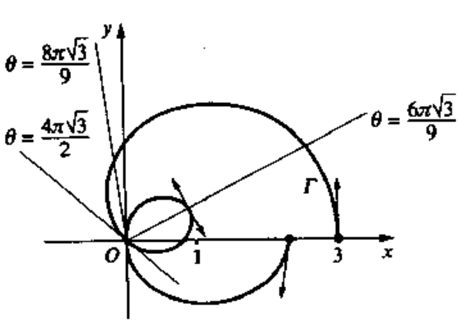
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{3\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

◇ **Trả lời** : $L = \dfrac{3\pi}{2} \simeq 2{,}356$.

5.1.7 a) • Với $\theta \in [0\,;2\pi]$: $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\dfrac{\theta\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\theta = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9} \text{ hoặc } \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{3}\right)$.

• $\rho'(\theta) = -\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta\sqrt{3}}{2}$ và : $\quad \rho'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \left(\theta = 0 \text{ hoặc } \theta = \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

θ	0	$\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$	$\frac{6\pi\sqrt{3}}{9}$	$\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$	2π
ρ'	0	$-$	0	$+$	
ρ	3 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	$1+2\cos(\pi\sqrt{3})$



b) Ta có : $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = \left(1 + 2\cos\frac{\theta\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\sin^2\frac{\theta\sqrt{3}}{2} = 4 + 4\cos\frac{\theta\sqrt{3}}{2} + \cos^2\frac{\theta\sqrt{3}}{2}$.

$$= \left(2 + \cos\frac{\theta\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

suy ra : $s' = 2 + \cos\frac{\theta\sqrt{3}}{2}$,

rồi : $L = \int_0^{2\pi} s'(\theta)\,d\theta = \left[2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta\sqrt{3}}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\pi\sqrt{3})$.

◇ **Trả lời** : $L = 4\pi + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\pi\sqrt{3}) \simeq 11{,}705$.

5.2.1 Vì $\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$ và vì $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$, ta suy ra : $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}$.

Vậy ta thác triển liên tục f tại 1 bằng cách đặt $f(1) = \frac{1}{2}$.

Ta thực hiện phép đổi biến $X = x - 1$, từ đó : $f(x) = \frac{\ln(1+X)}{X(2+X)}$, ký hiệu là $g(X)$.

Sử dụng một khai triển thành chuỗi nguyên tại 0 :

$$\forall X \in]-1\,;1[,\quad \frac{\ln(1+X)}{X} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}X^n,$$

ta chứng tỏ rằng g thuộc lớp C^∞ (vậy C^2) tại lân cận của 0. Hơn nữa, một phép tính khai triển hữu hạn cho ta :

$$g(X) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+X)}{X}\left(1 + \frac{X}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} + o(X^2)\right)\left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} + o(X^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X + \frac{5}{12}X^2 + o(X^2).$$

Định lý Taylor - Young và tính duy nhất của $KHHH_0(0)$ cho phép suy ra :

$$f(0) = \frac{1}{2},\quad f'(0) = -\frac{1}{2},\quad f''(0) = \frac{5}{6}.$$

Sau đó : $R = \frac{(1 + f'^2(0))^{3/2}}{f''(0)}$.

◇ **Trả lời :** $R = \frac{3\sqrt{5}}{4} \simeq 1{,}677$.

5.2.2 Ta có : $\begin{cases} x' = -6\sin 2t(1+\cos t) \\ y' = 6\cos 2t(1+\cos t) \end{cases}$, suy ra : $s'^2 = x'^2 + y'^2 = 36(1 + \cos t)^2$,

và vì vậy : $s' = 6(1 + \cos t)$.

Sau đó: $\tan\varphi = \frac{y'}{x'} = -\cot\text{an}2t = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)$,

suy ra : $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} + 2t\ [\pi]$, và do vậy : $d\varphi = 2dt$.

Cuối cùng : $R = \dfrac{ds}{d\varphi} = 3(1 + \cos t)$.

◇ **Trả lời** : $R = 3(1 + \cos t)$.

5.2.3 Trước hết ta biến đổi phương trình đã cho :

$$2e^{x+y} = (1 + e^x)(1 + e^y) \Leftrightarrow e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = -\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}.$$

Như vậy Γ là đường cong biểu diễn hàm : f : $]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$, được xác định bởi : $f(x) = -\ln \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$.

Ta có : $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}x}$, và : $f''(x) = \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}$,

suy ra : $R = \dfrac{(1+f'^2(x))^{3/2}}{f''(x)} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}x}$.

◇ **Trả lời** : $R = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}x}$.

5.2.4 Ta có : $\rho(\theta) = \cos\theta + \cos\dfrac{\theta}{2}$, $\rho'(\theta) = -\sin\theta - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\rho''(\theta) = -\cos\theta - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\theta}{2}$,

suy ra : $\rho(0) = 2$, $\rho'(0) = 0$, $\rho''(0) = -\dfrac{5}{4}$.

và : $R_0 = \dfrac{(\rho^2(0)+\rho'^2(0))^{\frac{3}{2}}}{\rho^2(0)+2\rho'^2(0)-\rho(0)\rho''(0)} = \dfrac{16}{13}$.

◇ **Trả lời** : $R_0 = \dfrac{16}{13}$.

5.2.5 Trước tiên ta tìm xem trị nào của tham số t ứng với điểm O của Γ:

$$x(t) = y(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Ta có : $\begin{cases} x' = 4t+1 \\ y' = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{t+1}{t^2}\right) \end{cases}$, vậy $\begin{cases} x''(-1) = -3 \\ y''(-1) = e^{-1} \end{cases}$

và $\begin{cases} x'' = 4 \\ y'' = e^{\frac{1}{t}}\left(\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t^3} - \dfrac{1}{t^2}\left(1 - \dfrac{t+1}{t^2}\right)\right) \end{cases}$, vậy $\begin{cases} x''(-1) = 4 \\ y''(-1) = -2e^{-1} \end{cases}$.

Cuối cùng : $R = \dfrac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'} = \dfrac{e}{2}(9+e^{-2})^{\frac{3}{2}}$.

◇ **Trả lời** : $R = \dfrac{e}{2}(9+e^{-2})^{\frac{3}{2}} \cong 37{,}528$.

5.2.6 Ta có : $\rho = (\cos n\theta)^{\frac{1}{n}}$, $\rho' = -(\cos n\theta)^{\frac{1}{n}-1}\sin n\theta$,

suy ra : $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = (\cos n\theta)^{\frac{2}{n}} + (\cos\theta)^{\frac{2}{n}-2}\sin^2 n\theta = (\cos\theta)^{\frac{2}{n}-2}$,

và vì vậy : $s' = (\cos n\theta)^{\frac{1}{n}-1}$.

Sau đó : $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -\dfrac{\cos n\theta}{\sin n\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\theta\right)$, từ đó : $V \equiv \frac{\pi}{2} + n\theta\ [\pi]$, $\varphi = \theta + V \equiv \frac{\pi}{2} + (n+1)\theta\ [\pi]$, $d\varphi = (n+1)d\theta$,

và cuối cùng : $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{n+1}(\cos n\theta)^{\frac{1}{n}-1}$,

◇ **Trả lời :** $R = \frac{1}{n+1}(\cos n\theta)^{\frac{1}{n}-1}$.

5.2.7 Khi lấy hệ q.c.t.c.t. mới là $(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\ )$, thì Γ nhận PTD : $F(XY) = 0$, trong đó $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi : $F(X, Y) = X^2(Y+1)^2 + X + Y$.

Ánh xạ F thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$, $F(0, 0) = 0$, và $F'_Y(X, Y) = 2X^2(Y+1) + 1$, $F'_Y(0, 0) = 1 \neq 0$. Theo định lý hàm ẩn, trong lân cận của A, Γ có một phương trình Descartes dạng $Y = \varphi(X)$, trong đó φ thuộc lớp C^1 trong lân cận của 0.

Hơn nữa, vì F thuộc lớp C^∞, nên φ cũng vậy, do đó φ có một KTHH$_2$(0), đó là (định lý Taylor-Young):

$$\varphi(X) = \varphi(0) + X\varphi'(0) + \frac{X^2}{2}\varphi''(0) + o(X^2).$$

Ở đây, $\varphi(0) = 0$, và $\varphi'(0) = -\frac{F'_X(0,0)}{f'_Y(0,0)} = -1$.

Ký hiệu $\alpha = \frac{\varphi''(0)}{2}$, ta có : $\varphi(X) = -X + \alpha X^2 + o(X^2)$.

Thế vào phương trình Descartes của Γ:

$$\alpha X^2 + o(X^2) = X + \varphi(X) = -X^2(\varphi(X)+1)^2 \underset{X\to 0}{\sim} -X^2,$$

suy ra $\alpha = -1$, và vì vậy $\varphi''(0) = -2$.

Vì $R = \frac{1}{\varphi''(0)}$, nên ta kết luận $R = -\frac{1}{2}$.

◇ **Trả lời** : $R = -\frac{1}{2}$.

5.2.8 Điểm A thuộc Γ ứng với $\theta = 0$.

Ta có : $\rho'(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$, vậy $\rho'(0) = 0$.

Như vậy, tiếp tuyến tại A với Γ song song với $y'y$.

Vậy ta có : $R_A = \lim\limits_{\theta\to 0}\left(-\frac{y^2}{2(x-1)}\right)$.

Và : $-\dfrac{y^2}{2(x-1)} = -\dfrac{\rho^2\sin^2\theta}{2(\rho\cos\theta - 1)} = -\dfrac{2\sin^2\theta}{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(2\cos\theta - 1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)}$

$$= -\frac{2\theta^2 + o(\theta^2)}{\left(2 - \frac{\theta^2}{8} + o(\theta^2)\right)\left(-\frac{7}{8}\theta^2 + o(\theta^2)\right)} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \frac{8}{7}.$$

Như vậy, $R = \frac{8}{7}$, và $\overrightarrow{AC} = R\overrightarrow{N}$; do $\overrightarrow{N} = -\vec{i}$, ta suy ra : $\overrightarrow{AC} = -\frac{8}{7}\vec{i}$.

◇ **Trả lời :** $C\left(-\frac{1}{7}, 0\right)$.

5.2.9 Điểm O là điểm bội của Γ, ứng với $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ (và, do đối xứng đối với $y'y$, với $\theta = -\pi, -\frac{\pi}{2}$) ; các tiếp tuyến tương ứng là $x'x$, $y'y$, $x'x$. Vậy ta có :

$$R_0 = \lim_{\theta\to 0}\frac{x^2}{2y},\ R_{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{y^2}{2x},\ R_\pi = \lim_{\theta\to\pi}\frac{x^2}{2y}.$$

1) **Trong lân cận của $\theta = 0$:**

$$\rho = \frac{\sin 2\theta}{2\cos\theta - 1} \underset{\theta\to 0}{\sim} 2\theta \text{, và : } \frac{x^2}{2y} = \frac{\rho\cos^2\theta}{2\sin\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1.$$

Vậy ta có $R_o = 1$, và $C_o(0, 1)$.

2) **Trong lân cận của $\theta = \frac{\pi}{2}$:**

Ký hiệu $u = \theta - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}]{} 0$, do đó $\theta = \frac{\pi}{2} + u$; suy ra $\rho = \frac{\sin 2u}{2\sin u + 1} \underset{u\to 0}{\sim} 2u$,

và : $$-\frac{y^2}{2x} = -\frac{\rho\sin^2\theta}{2\cos\theta} = \frac{\rho\cos^2 u}{2\sin u} \underset{u\to 0}{\to} 1.$$

Vậy ta có : $R_{\frac{\pi}{2}} = 1$, và $C_{\frac{\pi}{2}}(-1, 0)$.

3) **Tại lân cận của $\theta = \pi$:**

Ký hiệu $v = \theta - \pi$, từ đó $\rho = -\frac{\sin 2v}{2\cos v + 1} \underset{v\to 0}{\sim} -\frac{2v}{3}$, và : $\frac{x^2}{2y} = \frac{\rho\cos^2\theta}{2\sin\theta} = -\frac{\rho\cos^2 v}{2\sin v} \underset{v\to 0}{\to} \frac{1}{3}$.

Vậy ta có : $R_\pi = \frac{1}{3}$ và $C_\pi\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

◇ **Trả lời :** $\begin{cases} R_0 = 1, & C_0(0,1) \\ R_{\frac{\pi}{2}} = 1, & C_{\frac{\pi}{2}}(-1,0) \\ R_\pi = \frac{1}{3}, & C_\pi\left(0, \frac{1}{3}\right). \end{cases}$

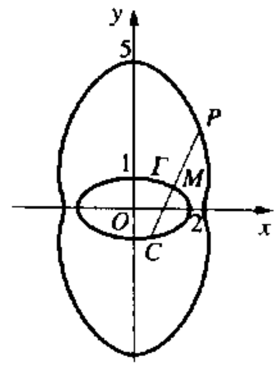
5.2.10 Điểm chạy M của Γ có biểu diễn tham số : $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Ta đã tính tọa độ của tâm chính khúc C tại M với Γ trong ví dụ 5.2.3 : $\begin{cases} x_C = \frac{3}{2}\cos^3 t \\ y_C = -3\sin^3 t \end{cases}$

Từ đó suy ra tọa độ của P : $\begin{cases} x = 2x_M - x_C = 4\cos t - \frac{3}{2}\cos^3 t \\ y = 2y_M - y_C = 2\sin t + 3\sin^3 t \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} x' = -4\sin t + \frac{9}{2}\cos^2 t\sin t = -\sin t\left(4 - \frac{9}{2}\cos^2 t\right) \\ y' = 2\cos t + 9\sin^2 t\cos t = \cos t(2 + 9\sin^2 t). \end{cases}$

Ta có thể giới hạn việc khảo sát với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ký hiệu $t_0 = \text{Arccos}\,\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

t	0		t_0		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$+$	0	$-$	
x	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	0
y	0		$\nearrow$		5
y'			$+$		0



5.2.11 Thực hiện một phép đổi hệ q.c.t.c.t. bằng phép quay với góc quay $\theta = -\text{Arctan}\lambda$; công thức đổi hệ quy chiếu là : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,

từ đó suy ra phương trình của Γ_λ trong hệ quy chiếu mới là :

$$\cos\theta(-2\lambda X + (1-\lambda^2)Y)^2 - (1+\lambda^2)Y = 0.$$

Vì $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, ta được :

$$\Gamma_\lambda : (-2\lambda X + (1-\lambda^2)Y)^2 - (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}\, Y = 0.$$

Vì Γ_λ tiếp xúc với $X'X$ tại O, nên ta có $Y = \underset{X\to 0}{o}(X)$, từ đó :

$$(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}} Y = (-2\lambda X + (1-\lambda^2)Y)^2 \underset{X\to 0}{\sim} 4\lambda^2 X^2,$$

và như vậy :
$$R = \lim_{X\to 0} \frac{X^2}{2Y} = \frac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}.$$

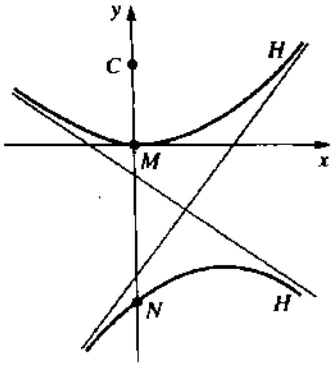
Tâm chính khúc C_λ tại O với Γ_λ có tọa độ trong $(O\,;X, Y)$ là : $X = 0$, $Y = \dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}$, và do vậy các tọa độ trong hệ quy chiếu ban đầu là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}\cdot\dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \dfrac{1+\lambda^2}{8\lambda} \\ y = \dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \dfrac{1+\lambda^2}{8\lambda^2} \end{cases}$$

tạo nên một BDTS của quỹ tích phải tìm.

Ta được một PTD bằng cách khử λ.

◇ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm có **PTD** : $8x^2y - (x^2+y^2) = 0, \quad x > 0.$



5.2.12 Chọn một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận có gốc M và trục $x'x$ tiếp xúc tại M với H.

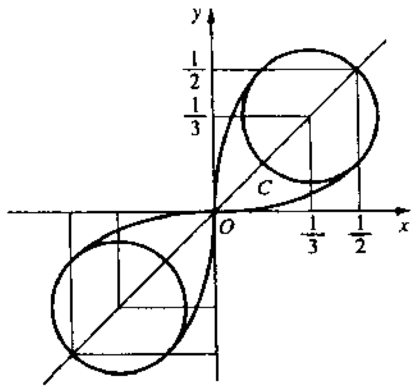
Phương trình của H sẽ có dạng :

$$a(x^2 - y^2) + 2bxy + cy = 0$$

trong đó $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Từ đó suy ra $N\left(0, \frac{c}{a}\right)$. Mặt khác, $\overline{MC} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2y}$ và

$\frac{x^2}{2y} = \frac{y}{2} - \frac{b}{a}x - \frac{c}{2a}$, suy ra : $\overline{MC} = -\frac{c}{2a}$.



5.2.13 a) Cho Γ là một đường tròn, có phương trình :

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Lập phương trình cho các trị của t ứng với các giao điểm của C và Γ:

$$Dt^4 + 2Ct^3 + At^2 + 2Bt + D = 0.$$

Các điểm $M(t_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ đồng chu hoặc thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại (A, B, C, D) thuộc $\mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ sao cho :

$$D\sigma_1 = -2C,\ D\sigma_2 = A,\ D\sigma_3 = -2B,\ D\sigma_4 = D,$$

trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ là các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4.

◇ **Trả lời** : $\sigma_4 = 1$.

b) Xét $t_1 = t_2 = t_3 = t_0$ trong lời giải câu a). Khi đó $t_4 = \frac{1}{t_0^3}$; viết phương trình của Γ trong trường hợp ấy.

◇ **Trả lời** : $3t_0(t_0^4 + 1)(x^2 + y^2) - t_0^2(t_0^4 + 3)x - (3t_0^4 + 1)y + t_0^3 = 0.$

c) Đường tròn vừa nói siêu mật tiếp với C khi và chỉ khi $t_4 = t_0$, tức là $t_0 \in \{-1, 1\}$.

◇ **Trả lời :** C có hai và chỉ hai đường tròn siêu mật tiếp, với các phương trình là :

$x^2 + y^2 - \frac{2\varepsilon}{3}x - \frac{2\varepsilon}{3}y + \frac{1}{6} = 0$, các tâm là $\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, bán kính $\frac{\sqrt{2}}{6}$, trong đó $\varepsilon = \{-1, 1\}$.

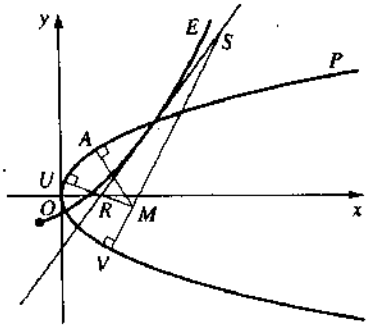
Các đường tròn này siêu mật tiếp với C tại các điểm $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

5.2.14 • Chứng minh rằng tại mọi điểm $A\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$ thuộc P, tâm chính khúc của P là $C\left(\frac{3\lambda^2}{2p} + p, -\frac{\lambda^3}{p^2}\right)$.

• Khi ký hiệu $U\left(\frac{u^2}{2p}, u\right)$, $V\left(\frac{v^2}{2p}, v\right)$, ta có $R\left(\frac{3u^2}{2p} + p, -\frac{u^3}{p^2}\right)$, và $S\left(\frac{3u^2}{2p} + p, -\frac{v^3}{p^2}\right)$.

Lập một phương trình của (RS) : $2p(u^2 + uv + v^2)(x - p) + 3p^2(u + v)y - 3u^2v^2 = 0.$

• Lập một phương trình của pháp tuyến tại mọi điểm $A\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$ thuộc P : $\lambda x + py - \frac{\lambda^3}{2p} - p\lambda = 0.$



• Khi ký hiệu $\left(\dfrac{a^2}{2p}, a\right)$ là các tọa độ của A, một ĐKCĐ để các pháp tuyến tại A, U, V với P đồng quy là tồn tại $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho a, u, v là các nghiệm của phương trình :

$$\lambda x + py - \frac{\lambda^3}{2p} - p\lambda = 0$$

với ẩn $\lambda \in \mathbb{R}$.

Khi ký hiệu $\sigma = u + v$, $\pi = uv$, ta sẽ quy về :

$$\sigma = -a \text{ và } \sigma^2 - 4\pi \geq 0.$$

Vậy một phương trình của (RS) là : $2p(a^2 - \pi)(x - p) - 3p^2ay - 3\pi^2 = 0$.

◇ **Trả lời** : Khúc parabol $9a\left(y + \dfrac{a^3}{p^2}\right) = \left(x - p + \dfrac{3a^2}{p}\right)^2$, giới hạn bởi điều kiện $x \geq p - \dfrac{3a^2}{4p}$.

5.2.15 Một BDTS của P là : $t \mapsto M\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$.

Ta sẽ tính, tại mọi điểm $M\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$ thuộc P, bán kính chính khúc $R = -\dfrac{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$ và tâm chính khúc $C\left(\dfrac{3t^2}{2p} + p, -\dfrac{t^3}{p^2}\right)$ (xem thêm 5.2.3, Ví dụ). Đường tròn γ mật tiếp với P tại M có PTD :

$$\left(x - \left(\frac{3t^2}{2p} + p\right)\right)^2 \left(y + \frac{t^3}{p^2}\right)^2 = \frac{(t^2+p^2)^3}{p^4}.$$

Ta có phương trình theo y của các giao điểm của γ với P bằng cách thay x bởi $\dfrac{y^2}{2p}$ trong phương trình trên :

$$\left(\frac{y^2}{2p} - \left(\frac{3t^2}{2p} + p\right)\right)^2 + \left(y + \frac{t^3}{p^2}\right)^2 - \frac{(t^2+p^2)^3}{p^4} = 0.$$

Phương trình bậc 4 này nhận t làm không điểm bội ba, vì γ_t mật tiếp với P tại M, và không điểm thứ 4, ký hiệu là t', nghiệm đúng $3t + t' = 0$, vì hệ tử của y^3 bằng không.

Từ đó ta suy ra các tọa độ của M' : $\left(\dfrac{9t^2}{2p}, -3t\right)$.

Lập một PTD cho (MM'), ký hiệu là D_t :

$$D_t : \quad px + ty - \frac{3t^2}{2} = 0.$$

Khử t trong $\left\{\begin{array}{ll} D_t : & px + ty - \dfrac{3t^2}{2} = 0 \\ D_t : & y - 3t = 0 \end{array}\right|$ sẽ cho ta một PTD của quỹ tích phải tìm.

◇ **Trả lời** : Hình bao của (MM') là parabol có phương trình $y^2 = -6px$.

5.2.16 Một biểu diễn tham số của E là : $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, hoặc : $x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b\dfrac{2t}{1+t^2}$, $t \in \overline{\mathbf{R}}$ khi ký hiệu $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

Giả sử C là một đường tròn, có phương trình $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$.

Lập phương trình đối với t của các điểm thuộc $C \cap E$:

$$(a^2 - 2Aa + C)t^4 + 4Bbt^3 + (-2a^2 + 4b^2 + 2C)t^2 + 4Bbt + (a^2 + 2Aa + C) = 0.$$

Vậy ĐKCĐ để bốn điểm $M_i(t_i)$ của E là đồng chu (hoặc thẳng hàng) là $\sigma_1 = \sigma_3$ (trong đó σ_1,... là các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4).

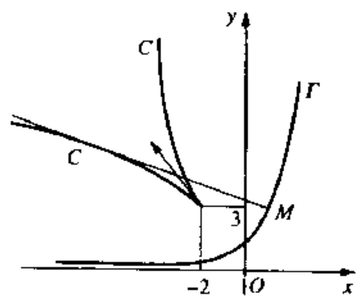
Hơn nữa : $\sigma_1 = \sigma_3 \Leftrightarrow \sum \tan\dfrac{\theta}{2} = \sum \tan\dfrac{\theta_1}{2}\tan\dfrac{\theta_2}{2}\tan\dfrac{\theta_3}{2}$.

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4}\theta_i \equiv 0\ [2\pi].$$

Đường tròn mật tiếp với E tại $\dot{M}(t)$ cắt lại E tại một điểm thứ tư $M'(t')$ sao cho $\theta = -3\theta\ [2\pi]$.

Cuối cùng : $$\sum_{i=1}^{4}\theta_i = 0\ [2\pi] \Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\theta'_i \equiv 0\ [2\pi].$$

5.2.17 a) $s'(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$.



$\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(i + e^x\vec{j}\right)$.

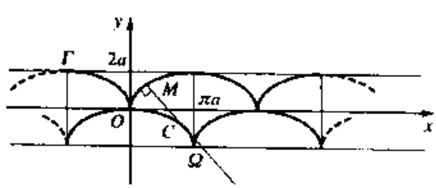
$\vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(-e^x\vec{i} + \vec{j}\right)$, $\tan\varphi = e^x$,

$\varphi'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, $R = (1+e^{2x})^{3/2}e^{-x}$.

◇ **Trả lời** : C có một biểu diễn tham số là :

$$\begin{cases} X = x - 1 - e^{2x} \\ Y = 2e^x + e^{-x} \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$$

b) $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$.



$s'(t) = 2a\left|\sin\dfrac{1}{2}\right|$;

$\vec{T} = \varepsilon(t)\left(\sin\dfrac{t}{2}\vec{i} + \cos\dfrac{t}{2}\vec{j}\right)$,

$\vec{N} = \varepsilon(t)\left(-\cos\dfrac{t}{2}\vec{i} + \sin\dfrac{t}{2}\vec{j}\right)$,

trong đó $\varepsilon(t) = \mathrm{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)$; $\tan\varphi = \mathrm{cotan}\dfrac{t}{2}$, $d\varphi = -\dfrac{1}{2}dt$, $R = -4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$.

Ta suy ra các tọa độ của C :

$$\begin{cases} X = a(t - \sin t) + 4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|\varepsilon(t)\ \cos\dfrac{t}{2} = -a(t + \sin t). \\ Y = a(1 - \cos t) - 4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|\varepsilon(t)\ \sin\dfrac{t}{2} = -a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Lấy $\Omega(\pi a, -2a)$ làm gốc tọa độ mới, và $u = \pi - t$ làm tham số mới.

◇ **Trả lời** : C là đường cycloit tịnh tiến từ Γ theo $\pi a\vec{i} - 2a\vec{j}$.

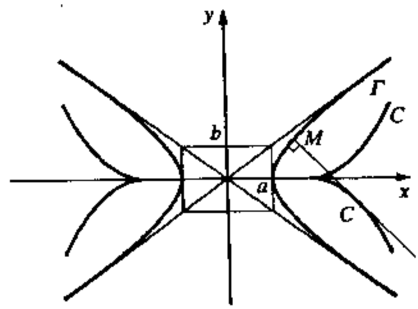
c) $M(\varepsilon\, a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; $s'(t) = \sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}$,

$\tan\varphi = \varepsilon\dfrac{b}{a}\coth t$, $\varphi'(t) = \dfrac{-\varepsilon ab}{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}$,

$$R = \frac{(a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}{\varepsilon ab}\,.$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}}(\varepsilon a\operatorname{sh} t\,\vec{i} + b\operatorname{ch} t\,\vec{j}),$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}}(-b\operatorname{ch} t\,\vec{i} + \varepsilon a\operatorname{sh} t\,\vec{j})\,.$$



◇ **Trả lời :** Một biểu diễn tham số của C là :

$$X = \varepsilon\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t, \quad Y = -\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t,$$

$\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

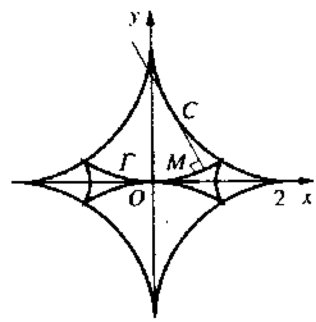
d) $s'(t) = |3\cos^2 t - 1|$, $R = |3\cos^2 t - 1|$.

$\vec{T} = \varepsilon(t)(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})$,

trong đó $\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}(3\cos^2 t - 1)$.

◇ **Trả lời** : Đường túc bế C của Γ là đường hình sao biểu diễn tham số bởi :

$$x = 2\sin^3 t, \quad y = 2\cos^3 t.$$

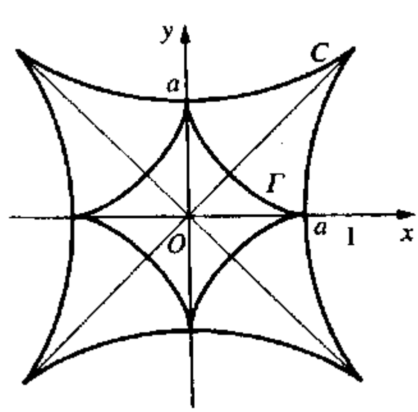


e) • $x' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$, $s' = 3a\sin t\cos t$, (với $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$)

- $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'} = -\tan t$, $\varphi \equiv -t\ [\pi]$, $d\varphi = -dt$
- $R = \dfrac{ds}{d\varphi} = -3a\cos t\sin t$
- $\vec{T} = -\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, \vec{N} = -\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$
- $\begin{cases} X = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t \\ Y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t\sin t. \end{cases}$

Khi lấy $(O; \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j}))$ làm hệ quy chiếu mới, thu được qua phép quay với góc $\dfrac{\pi}{4}$, C có BDTS với $u = t - \dfrac{\pi}{4}$:

$$X = 2a\cos^3 u, \quad Y = 2a\sin^3 u.$$



◇ **Trả lời :** C là đường hình sao có được từ Γ qua phép đồng dạng tâm O, tỷ số 2, góc quay $\dfrac{\pi}{4}$.

f) • $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, $\rho' = -\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, $s'^2 = \rho + \rho'^2 = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$, $s' = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

• $$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d}{d\theta}(\rho(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}) = \sqrt{\cos 2\theta}\,(\rho'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + \rho(\theta)\overrightarrow{v(\theta)})$$
$$= \sqrt{\cos 2\theta}\left(-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\overrightarrow{u(\theta)} + \sqrt{\cos 2\theta}\ \overrightarrow{v(\theta)}\right) = -\sin 2\theta\,\overrightarrow{u(\theta)} + \cos 2\theta\ \overrightarrow{v(\theta)} = \overrightarrow{u\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$\varphi \equiv 3\theta + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\vec{N} = \overrightarrow{u(3\theta + \pi)} = -\overrightarrow{u(3\theta)}$

• $d\varphi = 3d\theta$. $R = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\varphi} = \dfrac{1}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$

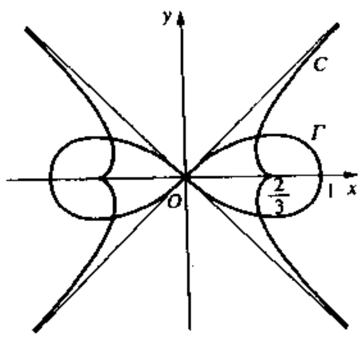
• $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{RN} = \sqrt{\cos 2\theta}\ \overrightarrow{u(\theta)} - \dfrac{1}{3\sqrt{\cos 2\theta}}\overrightarrow{u(3\theta)}$,

từ đó suy ra các tọa độ (X, Y) của C trong $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

$$X = \sqrt{\cos 2\theta}\cos 2\theta - \frac{\cos 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{3\cos 2\theta\cos\theta - \cos 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{2\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$$
$$Y = \sqrt{\cos 2\theta}\sin 2\theta - \frac{\sin 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{3\cos 2\theta\sin\theta - \sin 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = -\frac{2\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

◇ **Trả lời :** Đường túc bế C của Γ có BDTS :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} \\ y = -\dfrac{2\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} \end{cases}.$$



g) Chuyển sang số phức : $z = x + iy = pe^{i\frac{t}{p}} - qe^{i\frac{t}{q}}$, từ đó :

$$\frac{dz}{dt} = i\left(e^{i\frac{t}{p}} - e^{i\frac{t}{q}}\right) = \left(-2\sin\left((\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\frac{t}{2}\right)\right)e^{i(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{t}{2}}.$$

Điều này chứng tỏ : $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right)$ và $\dfrac{ds}{dt} = -2\varepsilon\sin\left((\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q})\dfrac{t}{2}\right)$,

trong đó $\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(-2\sin\left((\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q})\dfrac{t}{2}\right)\right)$.

Các véctơ $\vec{T}$ và $\vec{N}$ có tọa vị tương ứng là :

$$\varepsilon e^{i(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{t}{2}},\quad i\varepsilon e^{i(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{t}{2}}$$

Cuối cùng : $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = -\dfrac{4\varepsilon pq}{p+q}\sin\left((\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q})\dfrac{t}{2}\right)$. Từ đó suy ra tọa vị ζ của tâm chính khúc :

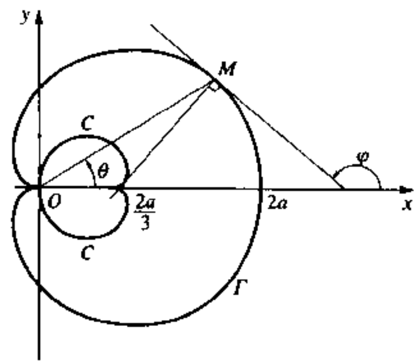
$\zeta = z + R\varepsilon \mathrm{i} e^{\mathrm{i}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{t}{2}}$ và cuối cùng $\zeta = \dfrac{p-q}{p+q}(pe^{\mathrm{i}\frac{t}{p}} - qe^{\mathrm{i}\frac{t}{q}})$.

◇ **Trả lời :** Một biểu diễn tham số của C là :

$$x = \frac{p-q}{p+q}\left(p\cos\frac{t}{p} + q\cos\frac{t}{q}\right), \quad y = \frac{p-q}{p+q}\left(p\sin\frac{t}{p} + q\sin\frac{t}{q}\right).$$

h) $(s'(\theta))^2 = (\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2 = 4a^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$,

từ đó $s'(\theta) = 2\varepsilon a\cos\dfrac{\theta}{2}$, với $\varepsilon = \mathrm{sgn}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$.



Khi ký hiệu $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

và $\vec{v} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{u})$, ta có :

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v}$, từ đó

$\overrightarrow{T} = \varepsilon\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{u} + \cos\dfrac{\theta}{2}\vec{v}\right)$,

$\overrightarrow{N} = -\varepsilon\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\vec{u} + \sin\dfrac{\theta}{2}\vec{v}\right)$,

Mặt khác, $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -\mathrm{cotan}\dfrac{\theta}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\theta}{2}[\pi]$, vậy $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}\theta$, $R = \dfrac{4a}{3}\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$.

Ta suy ra :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \frac{a}{3}(1+\cos\theta)\vec{u} - \frac{2a}{3}\sin\theta\,\vec{v}$$

$$= \frac{2a}{3}\vec{i} + \frac{a}{3}\cos\theta(1-\cos\theta)\vec{i} + \frac{a}{3}\sin\theta(1-\cos\theta)\vec{j}.$$

◇ **Trả lời :** Đường túc bế của đường hình tim Γ với phương trình cực $\rho = a(1+\cos\theta)$, là đường hình tim C có phương trình cực $\rho = \dfrac{a}{3}(1-\cos\theta)$ trong hệ quy chiếu $(A;\ \vec{i},\vec{j})$, trong đó A có các tọa độ $(\dfrac{2a}{3}, O)$ trong hệ quy chiếu $(O;\ \vec{i},\vec{j})$. Như vậy $C = t\circ h\,(\Gamma)$, trong đó h là phép vị tự tâm O, tỷ số $-\dfrac{1}{3}$, và t là phép tịnh tiến theo vectơ $\dfrac{2a}{3}\vec{i}$.

i) Ký hiệu $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

và $\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$, ta được :

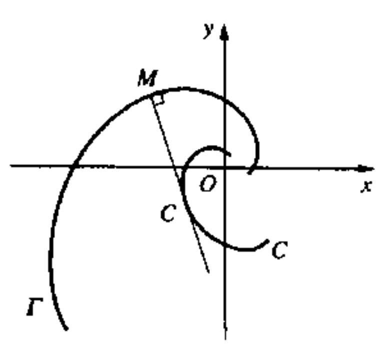
$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-\vec{u} + \lambda\vec{v}), \tan V = \frac{1}{\lambda},$$

từ đó $\mathrm{d}\varphi = d\theta$, $R = a\sqrt{1+\lambda^2}\,e^{\lambda\theta}$.

Như vậy :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = a\lambda e^{\lambda\theta}\vec{v}$$

$$= \lambda e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$



◇ **Trả lời** : Đường túc bế của đường xoắn ốc lôga Γ với phương trình cực $\rho = ae^{\lambda\theta}$, là đường xoắn ốc lôga C suy từ Γ qua phép đồng dạng thuận tâm O, góc quay $\frac{\pi}{2}$, tỷ số $\lambda e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}$, hoặc qua phép vị tự tâm O là tỷ số λ.

5.2.18 • Đường túc bế C_1 của C_0 :

$s'(t) = 2\text{ch}t$, $\vec{T} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, \vec{N} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$, $d\varphi = dt$, $R = 2\text{ch}\,t$: tâm chính khúc C_1 của C_0 tại M có các tọa độ $X_1 = \cos t \text{ sh } t - \sin t \text{ ch } t$, $Y_1 = \sin t \text{ sh } t + \cos t \text{ ch } t$.

• Đường túc bế C_2 của C_1 :

$s'(t) = 2\varepsilon \text{ sh } t$ trong đó $\varepsilon = \text{sgn}(t)$, $\vec{N} = -\varepsilon(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j})$, $d\varphi = dt$, $R = 2\varepsilon \text{ sh t}$; tâm chính khúc C_2 của M tại C_1 có các tọa độ $X_2 = (\sin t \text{ ch } t + \cos t \text{ ch } t)$, $Y_2 = -\sin t \text{ sh } t + \cos t \text{ ch } t$.

◇ **Trả lời** : Khi ký hiệu $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy các đường túc bế kế tiếp của C_0, ta có, với mọi $p \in \mathbb{N}$:

$$C_{4p} = C_0 : \begin{cases} x = \sin t \,\text{ch}t + \cos t \,\text{sh}\, t \\ y = \sin t \,\text{sh}t - \cos t \,\text{ch}\, t \end{cases}$$

$$C_{4p+1} = C_1 : \begin{cases} x = \cos t \,\text{sh}t - \sin t \,\text{ch}t \\ y = \sin t \,\text{sh}t - \cos t \,\text{ch}t \end{cases}.$$

C_{4p+2} là đối xứng của C_{4p} qua $y'y$

C_{4p+3} là đối xứng của C_{4p+1} qua $y'y$.

Nhận xét : Ta có thể chuyển sang số phức.

5.2.19 Ta chọn một hệ quy chiếu trực chuẩn thuận trong đó phương cố định là phương của $x'x$. Đường cong Γ là hình bao của họ các đường thẳng (D_θ) : $x\cos\theta + y \sin\theta = p(\theta)$, từ đó suy ra các tọa độ của M :

$$x_M = p(\theta) \cos\theta - p'(\theta) \sin\theta, \quad y_M = p(\theta) \sin\theta + p'(\theta) \cos\theta.$$

Đường túc bế C của Γ là hình bao của họ các đường thẳng (D'_θ) : $- x \sin\theta + y\cos\theta = p'(\theta)$, và điểm C_2 là điểm đặc trưng của hình bao của họ đường thẳng

$$(D''_\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta = - p''(\theta),$$

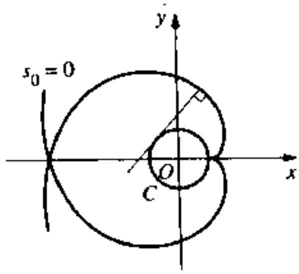
từ đó suy ra các tọa độ của C_2 :

$$x_{C_2} = -p''(\theta) \cos\theta - p^{(3)}(\theta)\sin\theta, \quad y_{C_2} = -p''(\theta) \sin\theta - p^{(3)}(\theta)\cos\theta.$$

Điều kiện $y_M = y_{C_2}$ được biểu thị bởi phương trình vi phân $q(\theta) \sin\theta + q'(\theta) \cos\theta = 0$, trong đó $q = p + p''$. Nghiệm tổng quát (trong một khoảng mà cos không triệt tiêu) là $q : \theta \mapsto 2\lambda\cos\theta$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ; từ đó suy ra p : $p(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta + \lambda\theta\sin\theta$.

Cuối cùng tính x_M và y_M : $A - \frac{\lambda}{2}(1 - \cos 2\theta)$, $y_M = B + \frac{\lambda}{2}(2\theta + \sin 2\theta)$.

◇ **Trả lời :** Γ là một đường *cyclôit*.



5.2.20 Khi tham số hóa C bởi :

$$x = R \cos t, y = R \sin t,$$

ta được : $s'(t) = R$, $\vec{T} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$, từ đó suy ra một biểu diễn tham số của các đường thân khai của C.

◇ **Trả lời :** $\begin{cases} X = R\cos t - (s_0 - Rt)\sin t \\ Y = R\sin t + (s_0 - Rt)\cos t \end{cases}$, $s_0 \in \mathbb{R}$ cố định.

5.2.21 a) • Ta có : $\begin{cases} x't = 6\,\text{sh}\,t\,\text{ch}\,t \\ y'(t) = 6\text{sh}^2 t\,\text{ch}\,t \end{cases}$, từ đó $s'(t) = 6\ \text{sh}\ t\ \text{ch}^2 t$, rồi khi lấy tích phân (và $s(0) = 2$ chẳng hạn) : $s(t) = 2\text{ch}^3 t$.

• Các đường thân khai của C có BDTS : $\begin{cases} X = x + (\lambda - s)\dfrac{x'}{s'} \dfrac{\lambda}{\text{ch}t} + \text{ch}^2 t - 3 \\ Y = y + (\lambda - s)\dfrac{y'}{s'} = \lambda\text{th}t - 2\text{sh}t \end{cases}$

◇ **Trả lời :** Các đường thân khai của C là các đường cong $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sao cho :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{\text{ch}\,t} + \text{ch}^2 t - 3 \\ y = \lambda\,\text{th}\,t - 2\,\text{sh}\,t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Γ_λ đi qua $A(-2,0)$ khi và chỉ khi tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{\text{ch}t} + \text{ch}^2 t - 1 = 0 \\ \lambda\text{th}t - 2\text{sh}t = 0 \end{cases}$$

Nếu $t \neq 0$, ta suy ra $\lambda = 2\ \text{ch}t$, rồi $1 + \text{ch}^2 t = 0$, mâu thuẫn. Với $t = 0$, ta có $\lambda = 0$.

Như vậy, đường cong phải tìm là $\Gamma_0 : \begin{cases} x = \text{ch}^2 t - 3 \\ y = -2\text{sh}t \end{cases}$.

Việc khử sh$t$ (vốn vạch nên $\mathbb{R}$) cho phép nhận được một PTD của Γ_0 : $y^2 = 4(x + 2)$.

Như vậy ta lại tìm thấy kết quả của 5.2.3, Ví dụ.

◇ **Trả lời :** Tồn tại một và chỉ một đường thân khai của C đi qua $A(-2, 0)$; đó là đường parabol có phương trình Descartes : $y^2 = 4(x + 2)$.

Chỉ dẫn và trả lời
các bài tập chương 6

6.1.1 Vì $\mathbb{R}_2[X]$ là một $\mathbb{R}$ - kgv có số chiều 3, nên họ $(P, Q, R, 1 + X^2)$ có 4 phần tử, phụ thuộc. Vậy tồn tại $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$ sao cho :

$$aP + bQ + cR + d(1 + X^2) = 0.$$

Hơn nữa $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ vì $1 + X \neq 0$.

Vậy với mọi t thuộc $\mathbb{R}$, ta có :

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0,$$

điều này chứng tỏ rằng Γ là một đường cong phẳng, thuộc mặt phẳng có PTD :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

6.1.2 Ký hiệu $\vec{c} = \operatorname{ch} a\,\vec{i} + \operatorname{ch} b\,\vec{j} + \operatorname{ch} c\,\vec{k}, \vec{s} = \operatorname{sh} a\,\vec{i} + \operatorname{sh} b\,\vec{j} + \operatorname{sh} c\,\vec{k}$. Với mọi điểm $M(t)$ thuộc Γ ta có : $\overrightarrow{OM(t)} = \operatorname{ch} t\,\vec{c} + \operatorname{sh} t\,\vec{s}$, vậy Γ phẳng, thuộc mặt phẳng (hay đường thẳng) xác định bởi $(O;\vec{c},\vec{s})$. Rõ ràng là $(\vec{c},\vec{s})$ phụ thuộc khi và chỉ khi $a = b = c$.

- Nếu $a = b = c$, thì với mọi t thuộc $\mathbb{R}$: $\overrightarrow{OM(t)} = \operatorname{ch}(t + a)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

- Nếu không, $(\vec{c},\vec{s})$ độc lập và Γ có một BDTS, trong mặt phẳng $(O;\vec{c},\vec{s})$ là :

$$X = \operatorname{ch} t,\ Y = \operatorname{sh} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

◊ **Trả lời :**

- Nếu $a = b = c$ thì Γ là nửa đường thẳng có gốc (1, 1, 1), định phương và định hướng bởi $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

- Nếu không, Γ là một nửa hypebol.

6.1.3 Trừ hai phương trình cho nhau, rồi nhân tử hóa.

◊ **Trả lời :** Γ là hợp của hai elip :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - \dfrac{y}{4} = 0 \\ y = z \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + \dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{16} = 0 \\ y + z + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

6.1.4 Một đường thẳng song song với yOz chỉ cắt Γ tại một điểm ; vậy ta có thể giả thiết là Δ có hệ phương trình: $\begin{cases} y = ax + p \\ z = bx + q \end{cases}$, $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$.

- $\Delta \cap D \neq \varnothing$ biểu thị bởi $(1 - b)p = (1 - a)q$.

- Δ cắt Γ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi các đa thức $X^2 - aX - p$ và $X^3 - bX - q$ có chung hai không điểm thực.

Sử dụng một phép chia Euclide, ta được :

$$a^2 + p - b = 0, \qquad ap - b = 0, \qquad a^2 + 4p > 0.$$

- Khử (a, b, p, q) trong:

$$(1 - b)p = (1 - a)q,\ (p, q) \neq (0, 0), \qquad a^2 + p - b = 0,\ ap - b = 0,\ a^2 + 4p > 0.$$

◊ **Trả lời :** $x^2 + y^2 - xy - xz - y + z = 0.$

6.1.5 a) Cho P là một mặt phẳng có phương trình là $Ax + By + Cz + D = 0$.

Phương trình theo t của $P \cap C$ là : $At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = 0$.

Khử $(A\ B, C, D)$ trong $A\sigma_1 = -B$, $A\sigma_2 = C$, $A\sigma_3 = -B$, $A\sigma_4 = D$.

◊ **Trả lời :** $\sigma_1 = \sigma_3$.

b) α) và β) Với $t_1 = t_2$ ký hiệu là u và $t_3 = t_4$ ký hiệu là v, điều kiện trên có thể biểu đạt bởi : $S = 0$ hoặc $P = 1$.

• Với $S = 0$ (tức là $v = -u$), mặt phẳng song tiếp có phương trình: $x - 2u^2z + u^4 = 0$; nó song song với $y'y$.

• Với $P = 1$ (và $S^2 \geq 4$) mặt phẳng song tiếp có phương trình: $x - 2Sy + (S^2 + 2)z + 1 = 0$; nó đi qua điểm cố định có tọa độ $(-1, 0, 0)$.

γ) • Với $S = 0$, dây cung nối các điểm $M(u)$ và $M(-u)$ có phương trình $\begin{cases} x = u^4 \\ z = u^2 \end{cases}$.

• Với $P = 1$, dây cung nối các điểm $M(u)$ và $M(1/u)$ có trung điểm là điểm :

$$\left(\frac{1}{2}(S^4 - 4S^2 + 2), \frac{1}{2}(S^3 - 2S), \frac{1}{2}(S^2 - 2)\right)$$

và được định phương bởi vectơ $(S^3 - 2S)\ \vec{i} + S^2\vec{j} + S\vec{k}$. Vậy dây cung có phương trình là :

$$\frac{x - \dfrac{S^3 - 4S^2 + 2}{2}}{S^3 - 2S} = \frac{y - \dfrac{S^3 - 2S}{2}}{S^2} = \frac{z - \dfrac{S^2 - 2}{2}}{S}$$

Khử S.

◊ **Trả lời** : Mặt cong được hỏi là hợp của nửa mặt trụ ($x = z^2$, $z \geq 0$) và mặt bậc hai $(x + 2z + 1)z - y^2 = 0$.

6.1.6 ◊ **Trả lời :** $e^{-t}x - e^t y - \sqrt{2}\, z + 2t = 0$.

6.1.7 Ký hiệu $\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$, $\vec{v} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$.

Như vậy : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u} + z\vec{k}$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v} + z'\vec{k}$, $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2} = (\rho'' - \rho)\vec{u} + 2\rho'\vec{v} + z''\vec{k}$.

Mặt khác, với mọi điểm $P(X,Y,Z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ta có :

$\overrightarrow{OP} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = (X\cos\theta + Y\sin\theta)\vec{u} + (-X\sin\theta + Y\cos\theta)\vec{v} + Z\vec{k}$.

Tính $\det_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})}\left(\overrightarrow{MP}, \dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}, \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}\right)$.

◊ **Trả lời :** $(-m^2\cos\theta + m\sin\theta)x - (m^2\sin\theta + m\cos\theta)y + (m^2 + 1)z - e^{m\theta} = 0$.

6.1.8 Lập một phương trình của mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$:

$$h\sin t\ x - h\cos t\ y + az - aht = 0.$$

Mặt phẳng này đi qua M_0 khi và chỉ khi : $h\sin t\ x_0 - h\cos t\ y_0 + az_0 - aht = 0$. Với ký hiệu (x, y, z) là các tọa độ của $M(t)$, ta có :

$$-hy_0x + hx_0y + a^2z - a^2z_0 = 0.$$

6.1.9 Ta ký hiệu $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ là hệ phương trình đã cho của Γ; chứng minh rằng định lý hàm ẩn áp dụng được tại A. Từ đó suy ra rằng tồn tại hai hàm φ, Ψ thuộc lớp C^∞, sao cho trong lân cận A, Γ có một biểu diễn tham số : $\begin{cases} x=\varphi(z) \\ y=\psi(z) \end{cases}$.

Ký hiệu $x = \alpha z + \beta z^2 + o(z^2)$, $y = \gamma z + \delta z^2 + o(z^2)$ là các khai triển hữu hạn tới cấp 2 của φ và Ψ tại 0 (thực hiện một phép đổi biến nếu $A \notin xOy$) và tính $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bằng cách thay x và y vào các phương tình ban đầu của Γ. Vì $\varphi'(0)=\alpha, \varphi''(0)=\dfrac{\beta}{2},\dots,$ nên có thể suy ra một phương trình của mặt phẳng mật tiếp tại A.

◊ **Trả lời :** a) $-x + y + z = 0$ b) $4x - y + z - 9 = 0$ c) $3x - y - 3 = 0$.

6.1.10 Với mọi t thuộc $\mathbb{R}$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = (6t^2,-4t,-3)$, $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = (12t,-4,0)$, nên $\left(\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}\right)$ độc lập, và như vậy $M(t)$ là song chính quy.

Mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ đi qua $A(1, 1, 1)$ khi và chỉ khi :

$$\begin{vmatrix} 1-2t^3 & 6t^2 & 12t \\ 1+2t^2 & -4t & -4 \\ 1+3t & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

sau khi khai triển điều này tương đương với : $(t-1)(2t^2+4t+1) = 0$.

◊ **Trả lời :** Có đúng ba điểm của Γ là thích hợp, ứng với $t = 1$, $t = -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $t = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, và có các tọa độ :

$$(2,-2,-3),\ \left(-5+\frac{7}{2}\sqrt{2},-3+2\sqrt{2},3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right),\ \left(-5-\frac{7}{2}\sqrt{2},-3-2\sqrt{2},3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

6.1.11 • $A(1, 1, 1) \in \Gamma \Leftrightarrow f(1) = 1$.

• Tiếp tuyến với Γ tại $M(t)$ được định phương bởi $(1, 2t, f'(t))$; vậy tiếp tuyến với Γ tại A song song với $\vec{u}(1,2,3)$ khi và chỉ khi : $f'(1) = 3$.

• Mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ đi qua $m(0, t^2, 0)$ khi và chỉ khi :

$$\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 2 \\ -f(t) & f'(t) & f''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

tức là : $$t^2 f''(t) - tf'(t) + f(t) = 0.$$

Để giải phương trình vi phân Euler này, ta sử dụng phép đổi biến $u = \ln t$ (xem Tập 2, bài tập 11.2.6). Ký hiệu $g(u) = f(t)$, ta quy về : $g'' - 2g' + g = 0$.

Nghiệm tổng quát (theo (g)) là : $u \mapsto g(u) = (\alpha u + \beta)e^u$, từ đó nghiệm tổng quát (theo f) là :

$$t \mapsto f(t) = t(\alpha \ln t + \beta).$$

Cuối cùng : $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases}$.

◊ **Trả lời :** $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$
$t \mapsto t(2\ln t + 1)$

6.1.12 a) ◊ **Trả lời** : $t^2x - ty + z - t^3 = 0$.

b) Với $P(a, b, c) \in \mathcal{E}_3$ đã cho, phương trình $at^2 - bt + c - t^3 = 0$ có ba nghiệm (thực hay phức) ký hiệu là t_1, t_2, t_3.

Trong định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3t_1 & 3t_2 & 3t_3 & a \\ 3t_1^2 & 3t_2^2 & 3t_3^2 & b \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & c \end{vmatrix}$, theo hàng ta có: $L_4 = \dfrac{a}{3}L_3 - \dfrac{b}{3}L_2 + cL_1$,

từ đó suy ra định thức bằng không, và như vậy, M_1, M_2, M_3, P đồng phẳng.

6.1.13 Một phương trình của mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ là :

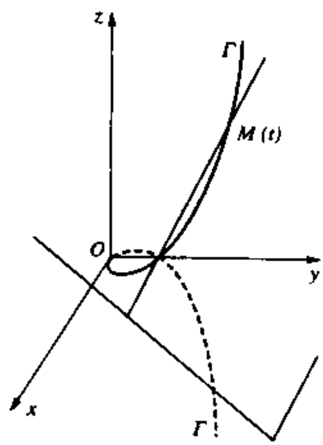
$$t^2x - 2ty + z - \frac{t^3}{3} = 0.$$

Vết của nó trên xOy có phương trình :

$(z = 0$ và$)$ $tx - 2y - \dfrac{t^2}{3} = 0$, nếu $t \neq 0$.

◊ **Trả lời :** Đường parabol :

$$y = \frac{3}{8}x^2, z = 0$$



6.1.14 Γ có một biểu diễn tham số là :

$$x = t,\quad y = t^2,\quad z = t^3.$$

a) Mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M(t)$ có phương trình :

$$3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0.$$

Các mặt phẳng mật tiếp của Γ tại $M_1(t_1)$ và $M_2(t_2)$ trực giao khi và chỉ khi : $9t_1^2t_2^2 + 9t_1t_2 + 1 = 0$, tức là $t_1t_2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{6}$.

b) Lập một hệ phương trình Descartes của (M_1M_2) :

$$\begin{cases} Sx - y - P = 0 \\ (S^2 - P)x - z - SP = 0 \end{cases}, \text{ trong đó } S = t_1 + t_2, P = t_1t_2.$$

Khử S.

◊ **Trả lời** : $-Px^2 + y^2 - xy + Py = 0$, trong đó $P \in \left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{6}, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{6}\right\}$; đó là hợp của hai mặt bậc hai.

5.1.15 Mạt phẳng mật tiếp $\Pi(t)$ với Γ tại $M(t)$ có phương trình :

$$3bct^2x - 3acty + abz - abct^3 = 0.$$

Với $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}_3$ đã cho, nói chung tồn tại ba mặt phẳng đi qua M_0 và mật tiếp với Γ, chúng ứng với ba không điểm t_1, t_2, t_3 của phương trình (ẩn t):

$$-abct^3 + 3bcx_0t^2 - 3acy_0t + abz_0 = 0.$$

Những vết trên xOy của $\Pi(t_1)$ và $\Pi(t_2)$ trực giao khi và chỉ khi $P(b^2P + a^2) = 0$, trong đó $P = t_1t_2$. Ký hiệu $S = t_1 + t_2$; khử S, P, t_3 trong

$$S + t_3 = \frac{3x_0}{a}, St_3 + P = \frac{3y_0}{b}, Pt_3 = -\frac{z_0}{c} \quad \left(P = 0 \text{ hoặc } P = -\frac{a^2}{b^2}\right), \ (S^2 - 4P \geq 0).$$

◊ **Trả lời** : Quỹ tích phải tìm là hợp của mặt bậc hai có phương trình $b^4(3acx - b^2z)z - a^6c^2 - 3a^4bc^2y = 0$ và phần trong của parabol xác định bởi ($z = 0$ và $3bx^2 - 4a^2y \geq 0$).

6.1.16 Mặt phẳng $\Pi(t)$ mật tiếp với Γ tại $M(t)$ có phương trình :

$$\left(t\varphi''(t) - \varphi'(t)\right)\left(x - t\right) - \varphi''(t)\left(y - \frac{t^2}{2}\right) + z - \varphi(t) = 0.$$

Mặt phẳng $\Pi(t)$ này chứa đường vuông góc hạ từ M xuống $z'z$ khi và chỉ khi vectơ có tọa độ $(t, \frac{t^2}{2}, 0)$ thuộc phương của $\Pi(t)$, điều kiện này quy về $t(\frac{t}{2}\varphi''(t) - \varphi'(t)) = 0$. Giải phương trình vi phân trên $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$, rồi trên $\mathbb{R}$.

◊ **Trả lời** : $\left\{\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \atop t \mapsto \begin{cases} \lambda_1 t^3 + \mu & \text{nếu } t \geq 0 \\ \lambda_2 t^3 - \mu & \text{nếu } t \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbf{R}^3 \right\}$

6.1.17 • Giả sử P là một mặt phẳng, $Ax + By + Cz + D = 0$ là phương trình của nó.

Lập phương trình theo t của $P \cap C$:

(1) $\quad At^4 + Bt^3 + (3B + C)t^2 + 4Ct + D = 0.$

Ký hiệu $M_i(t_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ là bốn điểm thuộc Γ, bốn điểm này đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại $(A, B, C, D) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ sao cho t_1, t_2, t_3, t_4 là nghiệm của (1). Khi ký hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ là các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4, ta suy ra rằng các $M_i(t_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ đồng phẳng khi và chỉ khi

$$12\sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

• Ta được mặt phẳng mật tiếp $\Pi(t)$ với Γ tại $M(t)$ khi áp dụng kết quả trên cho $t_1 = t_2 = t_3 = t$, $t_4 = t'$ (trong đó $M'(t')$ là điểm tại đó $\Pi(t)$ lại cắt Γ). Các trị của tham số ứng với các điểm $M(t)$ của Γ tại đó mặt phẳng mật tiếp đi qua $M_0(t_0)$ là nghiệm của phương trình :

(2) $\quad t^3 + (12 + 3t_0)t^2 + (36 + 12t_0)t + 12t_0 = 0.$

• Ký hiệu t_1, t_2, t_3 là các không điểm của phương trình (2). Để $M_i(t_i)$) $(1 \leq i \leq 4)$ thẳng hàng, cần và đủ là, với mọi điểm $M_4(t_4)$ thuộc Γ, các điểm $M_i(t_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ đồng phẳng. Ký hiệu τ_1, τ_2, τ_3 là các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, ta có :

$$\tau_1 = (12 + 3t_0), \quad \tau_2 = 36 + 12t_0, \quad \tau_3 = -12t_0.$$

Mặt khác: $\sigma_1 = \tau_1 + t'$, $\quad \sigma_2 = \tau_2 + \tau_1 t'$, $\quad \sigma_3 = \tau_3 + \tau_2 t'$.

Chứng minh rằng : $\quad 12\sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3 = 0.$

6.1.18 a) Giả sử P là một mặt phẳng, $Ax + By + Cz + D = 0$ là phương trình của nó. Lập phương trình theo t của $P \cap \Gamma$:

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + (-A + D)t + (-B + C) = 0.$$

Ký hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ là các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4; khử A, B, C, D trong :

$$A\sigma_1 = -B, \ A\sigma_2 = C, \ A\sigma_3 = -A + D, \ A\sigma_4 = -B + C.$$

◊ **Trả lời** : $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3$.

b) Ta được mặt phẳng mật tiếp $\Pi(t)$ tại $M(t)$ khi cho $t_1 = t_2 = t_3 = t$ trong lời giải của a). Ta được

$$t_4 = \frac{3t^2 + 3t}{t^3 - 3t - 1} \qquad (\text{nếu } t^3 - 3t - 1 \neq 0).$$

Tính σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 theo t ; chẳng hạn: $\sigma_1 = 3t + t_4 = \dfrac{3t^4 - 6t^2}{t^3 - 3t - 1}$.

Từ đó suy ra phương trình của $\Pi(t)$.

◊ **Trả lời:** $(t^3 - 3t - 1)x - (3t^4 - 6t^2)y + (3t^5 + 6t^2)z - (t^6 + 6t^4 + 7t^3 + 3t + 1) = 0$.

c) Một điểm M thuộc Γ là điểm kép khi và chỉ khi tồn tại $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ sao cho: $t_1 \neq t_2$, $M(t_1) = M(t_2)$. Điều kiện này biểu thị bởi : Với mọi điểm $M_3(t_3)$ và $M_4(t_4)$ thuộc Γ, các điểm $M_i(t_i)$ $(1 \le i \le 4)$ đồng phẳng. Ký hiệu $S = t_1 + t_2$, $P = t_1t_2$, $S' = t_3 + t_4$, $P' = t_3t_4$, thì điều kiện này dẫn đến (với điều kiện bổ sung $S'^2 - 4P' \ge 0$):

$$\forall (S', P') \in \mathbb{R}^2, (S + S') + (P + SS' + P') = PP'.$$

hoặc : $S = -1$, $P = 1$.

Nhưng các trị tương ứng của t đều không thực (j và j^2).

◊ **Trả lời** : Γ không có điểm kép (thực).

6.1.19 a) Cho P là một mặt phẳng, $Ax + By + Cz + D = 0$ là phương trình của nó. Lập phương trình theo t của $P \cap \Gamma$:

$$Ct^4 + Bt^3 + At^2 + D = 0.$$

Ký hiệu σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 là các hàm đối xứng sơ cấp của t_1, t_2, t_3, t_4 ; khử A, B, C, D trong :

$$C\sigma_1 = -B\ ,\ C\sigma_2 = A\ ,\ C\sigma_3 = 0\ ,\ C\sigma_4 = D.$$

◊ **Trả lời** : $\sigma_3 = 0$.

b) Ta thu được mặt phẳng mật tiếp $\Pi(t)$ tại $M(t)$ khi cho $t_1 = t_2 = t_3 = t$, $t_4 = t'$ ($\Pi(t)$ cắt lại Γ tại $M'(t')$ trong lời giải của a)). Ta có $t' = -\dfrac{t}{3}$ (nếu $t \neq 0$).

Tính σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 theo t; chẳng hạn: $\sigma_2 = 3t^2 + 3tt' = 2t^2$.

Từ đó suy ra phương trình của $\Pi(t)$.

◊ **Trả lời :** $6t^2x - 8ty + 3z - t^4 = 0$.

c) $\sigma'_3 = \sum t'_1t'_2t'_3 = -\dfrac{1}{27}\sum t_1t_2t_3 = -\dfrac{1}{27}\sigma_3 = 0.$

6.1.20 a) Mặt phẳng $\Pi(t)$ mật tiếp với Γ tại $M(t)$ có phương trình : $2t^2x - 2ty + z - 2t^3 = 0$.

◊ **Trả lời :** Các mặt phẳng mật tiếp với Γ và đi qua A là các mặt phẳng có phương trình

$$2t_i^2x - 2t_iy + z - 2t_i^3 = 0,$$

trong đó t_i $(1 \le i \le 3)$ là các nghiệm của phương trình $2t^3 - 2x_0t^2 + 2y_0t - z_0 = 0$, ẩn $t \in \mathbb{R}$ (phương trình này có một, hai hoặc ba nghiệm thực).

b) Vết của $\Gamma(t)$ trên xOy có phương trình : $z = 0$ và $tx - y - t^2 = 0$.

Như vậy, các vết của $\Pi(t_1)$ và $\Pi(t_2)$ trên xOy trực giao khi và chỉ khi: $t_1t_2 = -1$.

Ký hiệu $S = t_1 + t_2$, $P = t_1t_2$; khử S, P, t_3 trong :

$$S + t_3 = -x_0\ ,\ P + St_3 = y_0\ ,\quad Pt_3 = \frac{z_0}{2}, P = -1, S^2 - 4P \ge 0.$$

◊ **Trả lời** : $z(2x + z) + 4(y + 1) = 0$.

6.1.21 • $x' = -\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}(a \sin at\,\mathrm{ch}\, t + \cos at\,\mathrm{sh}\, t)$, $y' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}(a \cos at\,\mathrm{ch}\, t - \sin at\,\mathrm{sh}\, t)$,

$z' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$, từ đó $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \dfrac{a^2 + 1}{\mathrm{ch}^2 t}$, $s' = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\mathrm{ch} t}$.

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}s'(t)dt=\sqrt{a^2+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\text{ch}t}=2\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\text{ch}t}\underset{[u=\text{sh}t]}{=}2\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\pi\sqrt{a^2+1}$$

◊**Trả lời :** $L=\sqrt{a^2+1}$.

6.1.22 Γ được tham số hoá bởi $(x=x(t), y=y(t), z=z(t))$, trong đó $x, y, z: I\to\mathbb{R}$ đều thuộc lớp C^1 trên khoảng (đóng bị chặn) I. Như vậy :

$$L=\int_I\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\ \text{ và }\ l_1+l_2+l_3=\int_I\sqrt{y'^2+z'^2}+\int_I\sqrt{x'^2+z'^2}+\int_I\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

• Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz trong $\mathbb{R}^3$ thông thường cho $\left(\sqrt{y'^2+z'^2},\sqrt{x'^2+z'^2},\sqrt{x'^2+y'^2}\right)$ và (1, 1, 1), ta được :

$$\sqrt{y'^2+z'^2}+\sqrt{x'^2+z'^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}\le\sqrt{6}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

suy ra : $\quad l_1+l_2+l_3\le\sqrt{6}\,L$.

• Với mọi $(a, b, c)\in(\mathbb{R}_+)^3$ chứng minh :

$$2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}.$$

Nhằm mục đích đó ta có thể chú ý rằng :

$$\|(a,b,0)\|+\|(a,0,c)\|+\|(0,b,c)\|\ge\|2(a,b,c)\|.$$

Từ đó suy ra (với $a=|x'|,...$) : $2L\le l_1+l_2+l_3$.

6.1.23 $\quad\begin{cases}x^2+y^2-z=0\\ x+y+z-\frac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x^2+y^2+x+y-\frac{1}{2}=0.\end{cases}$

Như vậy ta có thể tham số hóa Γ:

$$x=-\frac{1}{2}+\cos t,\ \ y=-\frac{1}{2}+\sin t,\quad z=\frac{3}{2}-\sin t-\cos t,\quad t\in\mathbf{R}.$$

Từ đó suy ra: $s'(t)=\sqrt{2}(1-\sin t\cos t)^{1/2}$. Rồi thì :

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{2}(1-\sin t\cos t)^{1/2}}\left(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+(\sin t-\cos t)\vec{k}\right);$$

từ đó rút ra R_A, *với* $t=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

◊ **Trả lời :** $R_A=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.1.24 • Ta có: $x^2+y^2+z^2=\frac{\cos^2 t}{\text{ch}^2 t}+\frac{\sin^2 t}{\text{ch}^2 t}+\frac{\text{sh}^2 t}{\text{ch}^2 t}=1$, vậy Γ **được** vẽ trên mặt cầu S tâm O và bán kính 1.

• Giả sử $z_0\in\,]-1;1[$. Tồn tại $t_0\in\mathbb{R}$ duy nhất sao cho $z_0=\text{th}\,t_0$. Một vectơ tiếp xúc tại $M(t_0)$ với Γ có các tọa độ là :

$$\left(-\frac{1}{\text{ch}^2 t_0}(\sin t_0\text{ch}\,t_0+\cos t_0\text{sh}\,t_0),\frac{1}{\text{ch}^2 t_0}(\cos t_0\text{ch}\,t_0-\sin t_0\text{sh}\,t_0),\frac{1}{\text{ch}^2 t_0}\right).$$

Xét vĩ tuyến của S có vĩ độ z_0, tức là đường tròn C_0 có phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=\text{th}\,t_0\end{cases}$

Một BDTS của C_0 là: $x = \dfrac{\cos u}{\mathrm{ch}\, t_0}$, $y = \dfrac{\sin u}{\mathrm{ch}\, t_0}$, $z = th\, t_0$, $u \in \mathbf{R}$.

Một vectơ tiếp xúc với C_0 tại $M(t_0)$ có tọa độ là : $\left(-\dfrac{\sin t_0}{\mathrm{ch} t_0}, \dfrac{\cos t_0}{\mathrm{ch} t_0}, 0\right)$.

Khi ký hiệu $\vec{V} = -(\sin t_0 \mathrm{ch}\, t_0 + \cos t_0 \mathrm{sh}\, t_0)\vec{i} + (\cos t_0 \mathrm{ch}\, t_0 - \sin t_0 \mathrm{sh}\, t_0)\vec{j} + \vec{k}$

và $\vec{W} = -\sin t_0\, \vec{i} + \cos t_0\, \vec{j}$, ta có: $\dfrac{\vec{V}.\vec{W}}{\|\vec{V}\|\|\vec{W}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, vậy : $\widehat{(\vec{V}, \vec{W})} = \dfrac{\pi}{4}$.

Như vậy, Γ cắt các vĩ tuyến của S dưới một góc không đổi bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

6.1.25 • $\overrightarrow{f'(t)} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s} = s'\vec{T}$ • $\overrightarrow{f''(t)} = s''\vec{T} + s'^2 \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}T}}{\mathrm{d}s} = s''\vec{T} + \dfrac{s'^2}{R}\vec{N}$

• $\overrightarrow{f'''(t)} = s'''\vec{T} + \dfrac{3s''s'}{R}\vec{N} - \dfrac{s'^2 R'}{R^2}\vec{N} + \dfrac{s'^3}{R}\left(-\dfrac{\vec{T}}{R} + \dfrac{\vec{B}}{T}\right)$

$$= \left(s''' - \frac{s'^3}{R^2}\right)\vec{T} + \left(\frac{3s''s'}{R} - \frac{s'^2 R'}{R^2}\right)\vec{N} + \frac{s'^3}{RT}\vec{B}.$$

Từ đó: $\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)} = \dfrac{s'^3}{R}\vec{T} \wedge \vec{N} = \dfrac{s'^3}{RT}\vec{B}$,

và như vậy, vì $R > 0$: $R = \dfrac{s'^3}{\left\|\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|^3}{\left\|\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}\right\|}$.

Và : $\left[\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}, \overrightarrow{f'''(t)}\right] = \dfrac{s'^6}{R^2 T}$, từ đó suy ra : $T = \dfrac{\left\|\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}\right\|^2}{\left[\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}, \overrightarrow{f'''(t)}\right]}$.

6.1.26 • $f(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^3 - 3t \\ t^3 + 3t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f'(t)} = 3\begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f''(t)} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f'''(t)} = 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\| = 3\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)$

• $\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)} = 18\begin{pmatrix} -2t \\ 1 - t^2 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}\right\| = 18\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right)$

• $\left[\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}, \overrightarrow{f'''(t)}\right] = 216$.

◊ **Trả lời** : $R = 3(t^2 + 1)^2$, $T = 3(t^2 + 1)^2$.

6.1.27 ◊ **Trả lời** : a) $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\left(t^2 + t + 1\right)}\left(t^2\vec{i} + (t+1)^2\vec{j} + \vec{k}\right)$, $R = 3\sqrt{2}\left(t^2 + t + 1\right)^2$.

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+t+1)}\left(\left(t^2+2t\right)\vec{i} - \left(t^2-1\right)\vec{j} - (2t+1)\vec{k}\right),$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{t^2+t+1}\left((t+1)\vec{i} - t\vec{j} + (t+1)\vec{k}\right), \qquad T = -3\left(t^2+t+1\right)^2.$$

b) Ký hiệu $c = \sqrt{a^2+b^2}$ và ε là dấu của $\cos\frac{t}{2}$, ta có :

$$\vec{T} = \frac{1}{\varepsilon c}\left(-a\sin\frac{3t}{2}\vec{i} + a\cos\frac{3t}{2}\vec{j} + b\vec{k}\right), \quad R = \frac{4\varepsilon c^2}{3b}\cos\frac{t}{2}.$$

$$\vec{N} = -\varepsilon\left(\cos\frac{3t}{2}\vec{i} + \sin\frac{3t}{2}\vec{j}\right).$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left(b\sin\frac{3t}{2}\vec{i} - b\cos\frac{3t}{2}\vec{j} + a\vec{k}\right), \qquad T = \frac{4c^2}{3b}\cos\frac{t}{2}.$$

c) Đổi tham số : $\quad u = \operatorname{Arcsin} t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\sin u\,\vec{i} + \cos u\,\vec{j} + 3\vec{k}\right), \qquad R = 10\cos u$$

$$\vec{N} = \cos u\,\vec{i} - \sin u\,\vec{j}, \quad \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3\sin u\,\vec{i} + 3\cos u\,\vec{j} - \vec{k}\right), \qquad T = -\frac{10}{3}\cos u.$$

d) $$\vec{T} = \frac{1}{t^2+1}\left(t^2\vec{i} - \vec{j} + t\sqrt{2}\,\vec{k}\right), R = \frac{(t^2+1)^2}{t^2\sqrt{2}},$$

$$\vec{N} = \frac{1}{t^2+1}\left(t\sqrt{2}\,\vec{i} + t\sqrt{2}\,\vec{j} + (1-t^2)\,\vec{k}\right),$$

$$\vec{B} = \frac{1}{t^2+1}\left(-\vec{i} + t^2\vec{j} + t\sqrt{2}\,\vec{k}\right) \qquad T = -\frac{(t^2+1)^2}{t^2\sqrt{2}},$$

e) Ký hiệu ε là dấu của t :

$$\vec{T} = -\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}t}\left(\left(\sin t\operatorname{sh}t + \cos t\operatorname{ch}t\right)\vec{i} + \left(\sin t\operatorname{ch}t + \cos t\operatorname{sh}t\right)\vec{j} + \vec{k}\right), \quad R = \varepsilon\sqrt{2}\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^3 t},$$

$$\vec{N} = .\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\operatorname{ch}t}\left(\left(\sin t\operatorname{sh}t - \cos t\operatorname{ch}t\right)\vec{i} - \left(\cos t\operatorname{sh}t + \sin t\operatorname{ch}t\right)\vec{j} + \vec{k}\right),$$

$$\vec{B} = -.\frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}t}\left(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} - \operatorname{sh}t\,\vec{k}\right) \quad T = -\frac{\operatorname{ch}t}{\sqrt{2}}.$$

f) $$\vec{T} = \frac{1}{2\sqrt{3}\operatorname{ch}t}\left(\left(\sqrt{2} + \operatorname{sh}t + \sqrt{2}\operatorname{ch}t\right)\vec{i} + \left(-\sqrt{2} + \operatorname{sh}t + \sqrt{2}\operatorname{ch}t\right)\vec{j} + \left(2\operatorname{ch}t - \sqrt{2}\operatorname{sh}t\right)\vec{k}\right)$$

$$R = 6\operatorname{ch}^2 t, \quad \vec{N} = \frac{1}{2\operatorname{ch}t}\left(\left(1 - \sqrt{2}\operatorname{sh}t\right)\vec{i} + \left(1 + \sqrt{2}\operatorname{sh}t\right)\vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{2\sqrt{3}\operatorname{ch}t}\left(\left(\operatorname{ch}t - 2 - \sqrt{2}\operatorname{sh}t\right)\vec{i} + \left(\operatorname{ch}t + 2 - \sqrt{2}\operatorname{sh}t\right)\vec{j} + \left(\sqrt{2}\operatorname{ch}t + 2\operatorname{sh}t\right)\vec{k}\right)$$

$$T = 3\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t.$$

g) $$\vec{T} = \frac{1}{\operatorname{ch}t}\left(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \operatorname{sh}t\,\vec{k}\right), \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}^2 t.$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}t}\left(\left(\sin t\operatorname{sh}t - \cos t\operatorname{ch}t\right)\vec{i} - \left(\sin t\operatorname{ch}t + \cos t\operatorname{sh}t\right)\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}t}\left(\left(\cos t\operatorname{ch}t + \sin t\operatorname{sh}t\right)\vec{i} + \left(\sin t\operatorname{ch}t - \cos t\operatorname{sh}t\right)\vec{j} + \vec{k}\right), \quad T = \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}t}.$$

6.1.28 Ta tham số hóa Γ theo hoành độ cong s, s chạy khắp một khoảng I.

a) Để tồn tại một mặt cầu trên đó Γ được vẽ, cần và đủ là tồn tại $\Omega \in \mathcal{E}_3$ sao cho :

$$\forall s \in I,\quad \overrightarrow{\Omega M}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Điều kiện này quy về sự tồn tại hai ánh xạ u, v: $I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{∞} sao cho :

$$\exists \Omega \in \mathcal{E}_3,\quad \forall s \in I.\quad \overrightarrow{\Omega M} = u(s)\vec{N}(s) + v(s)\vec{B}(s).$$

hoặc khi đạo hàm : $\quad \vec{T} = u'\vec{N} + u\left(-\dfrac{\vec{T}}{R} + \dfrac{\vec{B}}{T}\right) + v'\vec{B} + v\left(-\dfrac{\vec{N}}{T}\right).$

Khi khử u, v trong : $\quad 1 = -\dfrac{u}{R},\ u' - \dfrac{v}{T} = 0,\ \dfrac{u}{T} + v' = 0$, ta được hệ thức cần thiết.

b) α) Với các ký hiệu trên đây: $\overrightarrow{\Omega M} = -R\vec{N} + T\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\vec{B}.$

Từ đó : $a^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = R^2 + T^2\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2.$

β) Phần đảo không đúng, chẳng hạn như trong ví dụ về đường đinh ốc tròn có bước cố định.

6.2.1 ◊ **Trả lời** : $x = 8\cos^3\theta\cos^3\varphi$, $\quad y = 8\sin^3\theta\cos^3\varphi$, $\quad z = 8\sin^3\varphi$,

$$(\theta, \varphi) \in [-\pi;\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

6.2.2 Dùng các hàm đối xứng sơ cấp σ_1, σ_2, σ_3 của u, v, w và

$S_k = u^k + v^k + w^k$ $(1 \le k \le 3)$; ta có : $x = \sigma_1$, $y = S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $z = S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

◊ **Trả lời** : $x^3 - 3xy + 2z - 6 = 0$.

6.2.3 Chứng minh rằng một đường thẳng Δ song song với xOy không thể gặp D_1 và D_2.

Ký hiệu Δ : $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} \Delta \cap D_1 \neq \varnothing \\ \Delta \cap D_2 \neq \varnothing \\ \Delta \cap D_3 \neq \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + q = -1 \\ -a + p = 1 \\ a(q-1) = b(p+1) \end{cases}$

Chứng tỏ rằng $a \neq -1$, rồi khử a, b, p, q .

◊ **Trả lời**: $xy + xz + yz + 1 = 0$ (hypebôlôit một tầng, tròn xoay).

6.2.4 Cách giải tương tự như ở bài tập 6.2.3.

◊ **Trả lời** : $a^2(z + h)(z - h) + h^2xy = 0$

(thiếu hai đường thẳng $(z = -h,\ y = 0)$, $(z = h,\ x = 0)$)

6.2.5 Cho $M\left(\dfrac{t^2}{2}, t, 0\right)$ (tương ứng: $M'\left(\dfrac{u^2}{2}, 0, u\right)$) dạo hàm P (tương ứng : P').

Chứng minh rằng : $(MM') \,//\, \pi \Leftrightarrow u = -t$; rồi lập các phương trình của (MM'), và khử t.

◊ **Trả lời** : $6x - 3y^2 + 5yz - 2z^2 = 0$ hoặc $y = z$.

6.2.6 Giả sử $M_1(at_1, bt_1^3, c(t_1^2 + 1))$, $M_2(at_2, bt_2^3, c(t_2^2 + 1))$ là hai điểm thuộc Γ, phân biệt.
Chứng minh : $\quad (M_1M_2) \,//\, xOy \Leftrightarrow t_2 = -t_1$.
Lập một biểu diễn tham số của (M_1M_2) : $x = at_1 + \lambda at_1$, $y = bt_1^3 + \lambda bt_1^3$, $z = c(t_1^2 + 1)$.
Khử (λ, t_1).
◊ **Trả lời** : $-bxz + bcx + acy = 0$.

6.2.7 Cho D là một đường thẳng trong không gian. Nếu $D // yOz$, thì D chỉ cắt Γ tại không quá hai điểm. Vậy ta có thể giả thiết $D \not\parallel yOz$. Như vậy, D có một HPTD là

$$\begin{cases} y = ax + p \\ z = bx + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Một điểm $M(t)$ thuộc Γ nằm trên D khi và chỉ khi $\begin{cases} t^3 - t = at^2 + p \\ t^4 - t = bt^2 + q \end{cases}$

Ta tính dư R trong phép chia Euclide : $X^4 + bX^2 - X - q$ cho $X^3 - aX^2 - X - p$:

$R = (a^2 - b + 1)X^2 + (a + p - 1)X + ap - q$.

Đường thẳng D gặp Γ tại ba điểm khi và chỉ khi $R = 0$, tức là :

$$\begin{cases} a^2 - b + 1 = 1 \\ a + p - 1 = 0 \\ ap - q = 0 \end{cases}, \text{ điều này quy về } \begin{cases} b = a^2 + 1 \\ p = -a + 1 \\ p = -a^2 + a \end{cases}$$

Ta được một PTD của S khi khử a trong : $\begin{cases} y = ax - a + 1 \\ z = (a^2 + 1)x - a^2 + a \end{cases}$

◊ **Trả lời** : $x^2 + y^2 - xz - x - y + z = 0$.

6.2.8 $\begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

và đảo lại cũng theo cách như vậy.

6.2.9 Trong một hệ phương trình Descartes của một đường thẳng thuộc $\mathcal{E}_3$, biểu diễn, theo cách thích hợp chẳng hạn, hai trong ba tọa độ theo tọa độ thứ ba. Như vậy, một đường thẳng của $\mathcal{E}_3$, không song song với mặt phẳng xOy, có một hệ phương trình Descartes $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$, $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$.

Thế vào phương trình của S và đồng nhất các hệ số tương ứng.

◊ **Trả lời** :

a) Sáu đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases}$, $\begin{cases} y = -1 \\ x = -z \end{cases}$, $\begin{cases} z = -1 \\ x = -y \end{cases}$.

b) Hai đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

c) Họ các đường thẳng có phương trình $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{b^2}{3} \\ z = bx \end{cases}$, $b \in \mathbb{R}$, và đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

d) Hai đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

6.2.10 Lập một phương trình của mặt phẳng mặt tiếp $\Pi(t_0)$ với Γ tại $M_0(t_0)$:

$$3t_0^2x - 3t_0y + z - t_0^3 = 0.$$

Phương trình theo (t, u) của $\Pi(t_0) \cap S$ là : $(t - t_0)(3u + t^2 - 2t_0 t + t_0^2) = 0.$

◊ **Trả lời** : Thiết diện của S bởi mặt phẳng mật tiếp với Γ tại $M_0(t_0)$ là hợp của đường thẳng có biểu diễn tham số $(x = t_0,\ y = t_0^2 + u,\ z = t_0^3 + 3t_0 u,\ u \in \mathbb{R})$ và của đường parabol có biểu diễn tham số $\left(x = t,\ y = t^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^2,\ z = 2t_0 t^2 - t_0^2 t,\ t \in \mathbf{R}\right)$.

6.2.11 a) ◊ **Trả lời** : • $M(u, v)$ là chính quy khi và chỉ khi $u \neq v$.

• $3(u^2 + uv + v^2)(X - (u + v)) - 3(u + v)(Y - uv) - (Z - (u^3 + v^3)) = 0,$

hoặc là : $3(u^2 + uv + v^2)X - 3(u + v)Y - Z - (2u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + 2v^3) = 0.$

b) ◊ **Trả lời** :

• Có đúng bốn điểm không chính quy, ứng với $(u, v) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1).$

$$\bullet\, u(1 - v^2)(u^2 - v^2)\left(X - \left(u + \frac{1}{u}\right)\right) - v(1 - u^2)(u^2 - v^2)\left(Y - \left(v + \frac{1}{v}\right)\right)$$

$$+ uv(1 - u^2)(1 - v^2)\left(Z - \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right)\right) = 0.$$

6.1.12 Để đơn giản việc tính toán, ta có thể chú ý rằng S có BDTS :

$$\Phi : \mathbb{R} \times]0; +\infty[\to \mathcal{E}_3$$
$$(t, \theta) \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, t^2)$$

Với mọi (t, θ) ta có: $\dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial t}(t,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2t)$, $\dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial \theta}(t,\theta) = (-t\sin\theta, t\cos\theta, 0)$,

và họ $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial t}(t,\theta), \dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial \theta}(t,\theta)\right)$ độc lập, vậy mọi điểm thuộc S đều chính quy.

Mặt phẳng tiếp xúc với S tại $M(t,\theta)$ song song với $\vec{u}$ (1,1,1)khi và chỉ khi

$\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial t}(t,\theta), \dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial \theta}(t,\theta), \vec{u}\right)$ phụ thuộc, tức là : $\begin{vmatrix} \cos\theta & -t\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & t\cos\theta & 1 \\ 2t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

hoặc là : $1 - 2t(\cos\theta + \sin\theta) = 0$.

◊ **Trả lời** : Đường cong giao của S với mặt phẳng có phương trình $x + y = \frac{1}{2}$.

6.2.13 Một phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với S tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là : $x_0 x + y_0 y + 2z_0 z - 1 = 0$. Mặt phẳng này trực giao với D khi và chỉ khi : $x_0 = \frac{y_0}{3} = -z_0$.

Ta có: $x_0^2 = \frac{1}{12}$.

◊ **Trả lời** : Hai mặt phẳng có phương trình : $x + 3y - 2z - 2\varepsilon\sqrt{3} = 0$, $\varepsilon \in \{-1; 1\}$

6.2.14 Một phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với S tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là :

$$y_0 x + x_0 y - 3z_0^2 x + x_0 y_0 = 0.$$

Mặt phẳng này chứa D khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}^*$ sao cho $\frac{y_0}{\lambda} = x_0 = z_0^2 = -\frac{x_0 y_0}{2\lambda + 3}$.

Từ đó suy ra : $z_0 = -1$ hoặc $z_0 = -2$.

◊ **Trả lời** : Hai mặt phẳng có phương trình $x - y + 3z - 1 = 0$, $x - 2y + 6z + 4 = 0$.

6.2.15 a) Một mặt phẳng P, song song với xOy, có phương trình $z = z_0(z_0 \in [1; +\infty[)$ cắt Γ tại hai điểm ứng với các trị của tham số $t_1 = \sqrt{z_0 - 1}, t_2 = -t_1$; tính một biểu diễn tham số của đường thẳng $(M(t_1)M(t_2))$.

◊ **Trả lời** : Một biểu diễn tham số của S là: $x = tu,\ y = t^3u,\ z = t^2 + 1,\ (t, u) \in \mathbb{R}^2$, một phương trình Descartes của S là : $xz = x + y,\quad z \geq 1.$

b) Một phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với S tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc S là :

$$(z_0 - 1)(x - x_0) - (y - y_0) + x_0(z - z_0) = 0.$$

Mặt phẳng này đi qua O khi và chỉ khi $x_0 + y_0 - 2x_0z_0 = 0$.

◊ **Trả lời** : Tập hợp các điểm thuộc S tại đó mặt phẳng tiếp xúc chứa O là nửa đường thẳng có phương trình : $x = 0,\ y = 0,\ z \geq 1$.

6.2.16 Với mọi điểm $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ta có :

$$M \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left(x^2+z^2\right)=b^2x^2+a^2z^2 \\ \dfrac{x^2}{c^2-a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}+\dfrac{z^2}{c^2-b^2}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{b^2x^2+a^2z^2}{x^2+z^2} \\ c^2\left(1-\dfrac{x^2}{c^2-a^2}-\dfrac{z^2}{c^2-b^2}\right)\left(x^2+z^2\right)=b^2x^2+a^2z^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Và : $$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{c^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-b^2}\right)\left((c^2-a^2)(c^2-b^2)-c^2(x^2+z^2)\right)=0.$$

Vì $0 < a < c < b$, nên nhân tử thứ hai không thể triệt tiêu. Suy ra :

$$M \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2-a^2}=\dfrac{z^2}{b^2-c^2} \\ \dfrac{y^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ $S_1 \cap S_2$ được tạo nên bởi bốn đường thẳng.

• Ký hiệu $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ là các ánh xạ xác định bởi : $F_1(x, y, z) = y^2(x^2 + y^2) - (b^2x^2 + a^2z^2)$, $F_2\left(x,y,z\right)=\dfrac{x^2}{c^2-a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}+\dfrac{z^2}{c^2-b^2}-1$, với mọi (x, y, z) thuộc $\mathbb{R}^3$. Các ánh xạ này thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^3$ và, mọi (x, y, z) thuộc $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ F_2\left(x,y,z\right)=2\left(x\left(y^2-b^2\right),y\left(x^2+z^2\right),z\left(y^2-a^2\right)\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ F_2\left(x,y,z\right)=2\left(\frac{x}{c^2-a^2},\frac{y}{c^2},\frac{z}{c^2-b^2}\right)$$

Cho $M(z, y, z)$ là một điểm thuộc $S_1 \cap S_2$.

Nếu $M \neq (0, \pm c, 0)$, thì $\overrightarrow{\text{grad}}F_1(M) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{\text{grad}}F_2(M) \neq \vec{0}$, vậy M là một điểm chính quy của S_1 và S_2. Ta có :

$$\overrightarrow{\text{grad}}F_1(M).\overrightarrow{\text{grad}}F_2(M)=\frac{x^2(y^2-b^2)}{c^2-a^2}+\frac{y^2(x^2+z^2)}{c^2}+\frac{(y^2-a^2)z^2}{c^2-b^2}$$

$$=\frac{x^2(c^2-b^2)}{c^2-a^2}+(x^2+z^2)+\frac{(c^2-a^2)z^2}{c^2-b^2}$$

$$= (2c^2 - a^2 - b^2)\left(\frac{x^2}{c^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2}\right) = 0,$$

vậy các tiếp diện tại M với S_1 và S_2 trực giao với nhau.

6.2.17 Lập một phương trình Descartes của tiếp diện với S tại điểm $M(x, y, z)$:

$$3x^2y^2X + 2(x^3 - 1)yY - Z - (4x^3 - 1)y^2 = 0.$$

Một mặt phẳng P có phương trình $aX + bY + cZ + d = 0$ song tiếp xúc với S khi và chỉ khi tồn tại $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, phân biệt và $\lambda \in \mathbb{R}^*$, sao cho :

$$\begin{cases} \lambda a = 3x_1^2 y_1^2 = 3x_2^2 y_2^2 \\ \lambda b = 2(x_1^3 - 1)y_1 = 2(x_2^3 - 1)y_2 \\ \lambda c = -1 \\ \lambda d = -(4x_1^3 - 1)y_1^2 = -(4x_2^3 - 1)y_2^2 \end{cases}$$

Khảo sát trường hợp ($y_1 = 0$ hoặc $y_2 = 0$). Ta giả thiết $y_1 \neq 0$ và $y_2 \neq 0$ và ký hiệu : $t = \dfrac{y_2}{y_1}$.

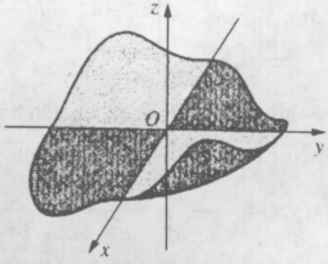
Khi đó : $\begin{cases} \varepsilon t^3 x_2^3 - 1 = (x_2^3 - 1)t \\ 4\varepsilon t^3 x_2^3 - 1 = (4x_2^3 - 1)t^2 \end{cases}$

Suy ra : $t^2 - 4t + 1 = 0.$

◊ **Trả lời** : Các mặt phẳng song tiếp xúc với S là các mặt phẳng có phương trình :

$$3(2+\varepsilon\sqrt{3})u^2x - 3(3+\varepsilon\sqrt{3})uy - 2z + 6(2+\varepsilon\sqrt{3})u = 0 \quad (\varepsilon, u) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$$

6.2.18 O là một điểm chính quy của S và tiếp diện tại O với S là xOy. Trong lân cận của $(0,0)$, $(x, y) \mapsto y \tan x$ là > 0 hoặc < 0, tùy theo $xy > 0$ hoặc $xy < 0$. Vậy S xuyên qua tiếp diện tại O ; điểm O là một điểm - yên ngựa của S.



6.2.19 a) Một biểu diễn tham số của S là :

$x = a\cos t + \lambda$, $y = a\sin t$,

$z = a\sin t \cos t + \lambda$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Khử (t, λ).

◊ **Trả lời** :

$a^2(x - z)^2 + (a - y)^2y^2 - a^2(a - y)^2 = 0.$

b) Cách giải tương tự như ở a).

◊ **Trả lời** : $4x^2 + (y - z)^2 + 4y - 4z - 1 = 0.$

6.2.20 Vì Γ là đường cong phẳng, thuộc mặt phẳng $x + y + z = a$, nên các đường sinh của S đều song song với : $\vec{u}(1,1,1)$

Để có được một PTD của S, ta khử (λ, x_0, y_0, z_0) trong:

$$x = x_0 + \lambda, \quad y = y_0 + \lambda, \quad z = z_0 + \lambda, \quad x_0y_0z_0 = a^3, \quad x_0 + y_0 + z_0 = a.$$

◊ **Trả lời** : $(2x - y - z + a)(-x + 2y - z + a)(-x - y + 2z + a) = 27a^3$.

6.2.21 a) Ký hiệu $P = x - y$ và $Q = y - z$ thì S có phương trình : $\dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{Q} - \dfrac{1}{P+Q} = 0$ vậy S là một mặt trụ.

Nhưng phương trình đó lại quy về $P^2 + PQ + Q^2 = 0$, tức là $P = Q = 0$.

◊ **Trả lời** : $S = \varnothing$.

b) Khi ký hiệu : $P = x - y$ và $Q = y - z$ thì S có phương trình : $\dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{Q} - \dfrac{1}{P+Q} = 1$

vậy S là một mặt trụ, và các đường sinh của S đều song song với đường thẳng :

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}, \text{ tức là định phương bởi : } \vec{u}(1,1,1).$$

Ta được một thiết diện thẳng của S bằng cách cắt S bởi một mặt phẳng trực giao với $\vec{u}$. Nhằm mục đích ấy, ta thực hiện một phép đổi hệ q.c.t.c.t. trong đó $\vec{u}$ định phương trục tọa độ thứ ba.

Với ký hiệu : $\vec{K} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $\vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$, $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$

Hệ quy chiếu $\mathcal{R}'(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ trực chuẩn thuận. Các công thức đổi hệ quy chiếu với một điểm M có tọa độ (x, y, z) trong $\mathcal{R}$ và (X, Y, Z) trong $\mathcal{R}'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Từ đó ta suy ra một PTD của S trong $\mathcal{R}'$, sau khi tính toán :

$$X(X^2 - 3Y^2)\sqrt{2} + 3(X^2 + Y^2) = 0 .$$

Đường cong Γ, giao của S với mặt phẳng $Z = 0$ là một đường cubic (đường đại số bậc ba) ; khi cắt Γ bởi các đường thẳng có phương trình $Y = tX$, $t \in \mathbb{R}$, ta được một BDTS của Γ :

$$X = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1 + t^2}{3t^2 - 1}, \qquad Y = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{t(1 + t^2)}{3t^2 - 1}, \qquad Z = 0$$

◊ **Trả lời** :

- S là một mặt trụ với các đường sinh song song với $\vec{u}(1,1,1)$
- Một thiết diện thẳng của S là đường cong có phương trình :

$$X(X^2 - 3Y^2)\sqrt{2} + 3(X^2 + Y^2) = 0, \ Z = 0 .$$

trong hệ q.c.t.c.t. xác định như trên.

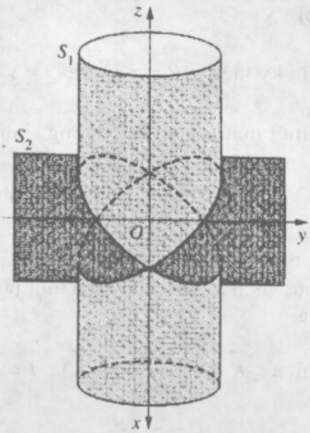
c) Khi ký hiệu $P = x - y$ và $Q = y - z$ thì S có phương trình : $2^P + 2^Q - 2^{-P-Q} - 1 = 0$. vậy S là một mặt trụ và các đường sinh của S được định phương bởi $\vec{u}(1,1,1)$.

Ta được đường chuẩn Γ của S (không cần thiết phải thuộc một thiết diện thẳng) bằng cách cắt S bởi một mặt phẳng không song song với $\vec{u}$, chẳng hạn mặt phẳng xOy.

◊ **Trả lời** : S là một mặt trụ, với đường sinh song song với $\vec{u}(1,1,1)$ và đường chuẩn là :

$$\Gamma \begin{cases} 2^{x-y} + 2^{y} - 2^{-x} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

6.2.22 a) ◊ **Trả lời** : S_1 và S_2 là các mặt trụ eliptic có phương tương ứng $z'z$, $y'y$.



$$b)\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}\end{cases}$$

◊ **Trả lời** : $S_1 \cap S_2$ là tập hợp của hai elip có PTĐ :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=\varepsilon\dfrac{c}{b}y\end{cases} \qquad \varepsilon\in\{-1,1\}$$

c) Do lý do đối xứng, các trục của hai elip vừa nói có PTĐ : $x = 0$ và $y = 0$,

$$z=\varepsilon\frac{c}{b}y,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{tức là} \begin{cases}x=0\\ y=\pm b\\ z=\pm\varepsilon c\end{cases},\ \begin{cases}x=\pm a\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

Từ đó ta suy ra độ dài của bán trục là: $\sqrt{b^2+c^2}$ và a.

◊ **Trả lời** : $a^2 = b^2 + c^2$.

6.2.23 a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow (\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \ \exists m\in\Gamma,\ \ \overrightarrow{\Omega M}=\lambda\overrightarrow{\Omega M})$
$\Leftrightarrow (\exists(\lambda,t)\in\mathbb{R}^2,\ x=\lambda t, y=\lambda t^2, z=\lambda t^3)$.

◊ **Trả lời** : $y^2 - xy = 0$ (thiếu $(x'x-\{O\}) \cup (z'z - \{O\})$).

b) $M(X,Y,Z)\in S \Leftrightarrow (\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in\Gamma.\overrightarrow{\Omega M}=\lambda\overrightarrow{\Omega M}$
$\Leftrightarrow (\exists(\lambda,x,y,z)\in\mathbb{R}^4,(X-1=\lambda(x-1), Y+1=\lambda(y+1), Z=\lambda z, y+z=1, x^2+y^2=z))$.

◊ **Trả lời** : $2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz - yz - 2x - 3z + 1 = 0$.

6.2.24 Khi ký hiệu $F_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi :

$F_\lambda(x, y, z) = x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda$, thì ta có :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,F_\lambda(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial F_\lambda}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial F_\lambda}{\partial z}(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}.$$

Khảo sát tiếp nếu điểm $\Omega_\lambda\left(\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\lambda}{2}\right)$ thuộc S_λ.

◊ **Trả lời** : S_λ là một mặt nón khi và chỉ khi $\lambda \in \{0, \frac{4}{3}\}$.

- S_0 là mặt nón đỉnh O và có đường chuẩn là hypebol có phương trình : $\begin{cases}z=1\\ xy+x+y=0\end{cases}$
- $S_{\frac{4}{3}}$ được tịnh tiến từ S_0 qua $T_{\frac{2}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})}$.

◊ **Trả lời** : Với các ký hiệu trên đây, quỹ tích phải tìm là mặt cong có phương trình :

$$(z_0y - y_0z)^2 + 2p(z - z_0)(z_0x - x_0z) = 0 .$$

Nói chung, đó là một mặt nón có đỉnh $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

6.2.25 Ta ký hiệu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $\rho\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$ là điểm và parabol đã cho và $A(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{E}_3$.

Lập một phương trình Descartes của mặt nón S đỉnh A và đường chuẩn là :

$$\Gamma : 2p(z - \gamma)(\gamma x - \alpha z) + (\beta z - \gamma y)^2 = 0 .$$

Biểu thị quan hệ $M_0 \in S$.

6.2.26

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + 3y \\ 8y^2 + 12xy + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

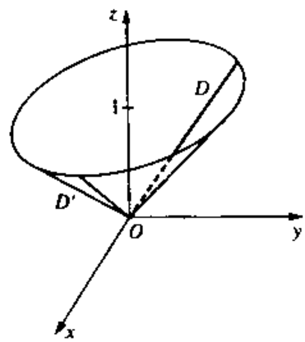
Vậy $P \cap S = D \cup D'$, trong đó D và D' là các đường thẳng đi qua O định phương bởi:

$\vec{V}(4, -3 - \sqrt{3}, -1 - 3\sqrt{3})$

$\vec{V'}(4, -3 + \sqrt{3}, -1 + 3\sqrt{3})$.

Tính $\angle(\vec{V}, \vec{V'})$ bằng $\cos(\vec{V}, \vec{V'}) =$

$$= \frac{\vec{V}.\vec{V'}}{\|\vec{V}\|.\|\vec{V'}\|}.$$



◊ **Trả lời** : $\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{13}) \approx 1{,}648$.

6.2.27 Nếu một đường thẳng nằm ngang (ở đây là // xOy) là thích hợp, thì do đối xứng một đường thẳng song song với yOz và một đường thẳng song song với xOz cũng sẽ thích hợp. Hai đường thẳng sau không thể cùng nằm ngang.

Vậy ta có thể giả thiết có một đường thẳng D tiếp xúc với cả ba mặt nón và không nằm ngang ; D có một HPTĐ $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$ $(a, b, p, q) \in \mathbf{R}^4$.

Vì D tiếp xúc với S_1, nên phương trình $(az + p)^2 + (bz + q)^2 - z^2 = 0$ có một nghiệm kép (tại z), từ đó qua một biệt thức :

$$(ap + bq)^2 - (a^2 + b^2 - 1)(p^2 + q^2) = 0 \qquad (1)$$

Tương tự ta được :

$$(bq - ap)^2 - (b^2 + 1 - a^2)(-p^2 + q^2) = 0 \qquad (2)$$

và $\quad (ap - bq)^2 - (1 + a^2 - b^2)(p^2 - q^2) = 0 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) ta suy ra $p^2 - q^2 = 0$.

Nếu $p = q = 0$, thì D đi qua O, loại.

Nếu tồn tại $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ sao cho $q = \varepsilon p \neq 0$, thì $b = a\varepsilon$, rồi khi thế vào (1), $p^2 = 0$, cũng loại.

6.2.28 $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \left(\exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 = \cos^6 t + \sin^6 t \\ z = \cos^2 t \end{cases} \right)$

◊ **Trả lời** : $4(x^2 + y^2) - 3z^2 - 1 = 0$ và $-1 \le z \le 1$, đó là một khúc hypebôlôit một tầng.

6.2.29 a) $M \in S \Leftrightarrow d(M, D) = R$.

Một điểm của D là $A(2,1,0)$ và một vectơ chỉ phương của D là $\vec{v}\ (1,1,1)$.

◊ **Trả lời** : $(y - z - 1)^2 + (x - z - 2)^2 + (x - y - 1)^2 - 3R^2 = 0$.

b) **Cách thứ nhất :** Diễn tả sự tồn tại một nghiệm kép trong phương trình theo z cho các điểm thuộc $S \cap z'z$:

$$(z + 1)^2 + (z + 2)^2 + 1 - 3R^2 = 0,$$

Cách thứ hai . $R = d(D, z'z)$

◊ **Trả lời** : $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.2.30 S nhận đường tròn có phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ làm đường chuẩn.

◊ **Đáp số** : $xy + xz + yz = 0$.

6.2.31 Chú ý rằng phương trình trong đề bài đối xứng đối với x, y, z. Ký hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các hàm đối xứng sơ cấp của x, y, z với $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = x^k + y^k + z^k$. Chứng minh rằng phương trình của S có dạng $F(\sigma_1, S_2) = 0$.

Chứng minh : $S_4 = S_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2$; từ đó suy ra phương trình của S có dạng :

$$S_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - S_2)^2 - 1 = 0 .$$

◊ **Trả lời** : S là một mặt tròn xoay, trục $O + \mathbf{R}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

6.2.32 a) Đường cong Γ thuộc mặt phẳng P có PTĐ : $2x - y - 5z = 0$. Một phép đổi hệ q.c.t.c.t. bằng cách lấy P làm mặt phẳng tọa độ thứ nhất, sẽ chứng tỏ rằng Γ là một parabol

Một BDTS của Γ là : $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^2 - t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, tức là $\overrightarrow{OM} = t\vec{u} + t^2\vec{v}$, trong đó: $\vec{u}(2,-1,1)$ và $\vec{v}(1,2,0)$. Với mọi t thuộc $\mathbb{R}^*$, ta có : $\dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{t}\vec{u} + \vec{v}$,

vậy phương của (OM) dần tới phương của $\vec{v}$ khi t dần đến $\pm\infty$. Từ đó kết luận rằng trục của Γ được định phương bởi $\vec{v}$.

Đỉnh của Γ là điểm của Γ mà tại đó tiếp tuyến với Γ trực giao với trục. Tiếp tuyến với Γ tại một điểm bất kỳ $M(t)$ được định phương bởi : $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$, tức là $\vec{u} + 2t\vec{v}$.

Ta có : $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u} + 2t\vec{v}).\vec{v} = 0 \Leftrightarrow t = 0$

vì $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Như vậy, đỉnh của Γ là O.

◊ **Trả lời** : Γ là một parabol đỉnh O và trục là đường thẳng đi qua O và được định phương bởi $\vec{i} + 2\vec{j}$.

b) Phương trình Descartes tổng quát của một đường tròn $C_{\lambda\mu}$ với trục là trục của Γ, là :

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ta có : $C_{\lambda,\mu} \cap \Gamma \neq \varnothing \Leftrightarrow \left(\exists z \in \mathbf{R}, \begin{cases} 5z^2 = \lambda \\ (z^2+2z)^2 + (2z^2-z)^2 + z^2 = \mu^2 \end{cases} \right)$

$$\Leftrightarrow \left(\exists z \in \mathbf{R}, \begin{cases} 5z^2 = \lambda \\ 5z^4 + 6z^2 = \mu^2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 5\mu = 0$$

Sau đó, với mọi điểm $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ta có :

$$M \in S \quad \Leftrightarrow \left(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, M \in C_{\lambda,\mu} \right) \Leftrightarrow \left(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 \\ \lambda^2 + 6\lambda - 5\mu = 0 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)^2 + 6(x+2y) - 5(x^2+y^2+z^2) = 0$$

◊ **Trả lời** : $4x^2 + 4xy + y^2 + 5z^2 - 6x - 12y = 0$.

6.2.33 Ký hiệu V là thể tích cần tính, ta có do đối xứng, $V = 2^4 V_1$, trong đó :

$V_1 = \iiint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ và

$$D_1 = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbf{R}_+)^3 ; x^2 + y^2 \le R^2, x^2 + z^2 \le R^2, y^2 + z^2 \le R^2, y \le x \right\}.$$

Chuyển sang tọa độ trụ, ta có : $V_1 = \iiint_{\Delta_1} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$ trong đó :

$$\Delta_1 = \left\{ (\rho, \theta, z) \in [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \mathbf{R}_+ ;\ 0 \le z \le \sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2\theta} \right\}$$

Từ đó :

$$V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2\cos^2\theta}} \mathrm{d}z \right) \rho \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2\theta}\, \rho \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{3\cos^2\theta} \left[\left(R^2 - \rho^2 \cos^2\theta \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R \mathrm{d}\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3\theta}{\cos^2\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$\underset{(u = \cos\theta)}{=} \frac{R^3}{3} \left([\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1 - u^2}{u^2} du \right)$$

$$= \frac{R^3}{3} \left(1 + \left[\frac{1}{u} + u \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} R^3$$

◊ **Trả lời** : $V = 8(2 - \sqrt{2})R^3 \simeq 4.686R^3$.

6.2.34 Ký hiệu Q là ma trận của dạng toàn phương được xác định bởi phần thuần nhất bậc hai của phương trình trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và χ_Q là đa thức đặc trưng của Q.

a) Vì $\chi_Q(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$, suy ra S là một mặt bậc hai có tâm. Ta được tâm Ω bằng cách giải hệ phương trình :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=0,$$

trong đó $F(x, y, z)$ là vế thứ nhất của phương trình Descartes đã cho của S.

Ta tìm được $\Omega(\frac{1}{2}, 1, -1)$.

Một phương trình của S trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $\mathcal{R}_1 = (\Omega;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ là :

$$X^2+Y^2+Z^2-2XY+2XZ+\frac{3}{4}=0.$$

Ma trận $Q=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ được chéo hóa thành $Q=PDP^{-1}$ trong đó :

$$D=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}&0&0\\0&1+\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ và } P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Một phương trình của S trong hệ quy chiếu trực chuẩn mới là :

$$(1-\sqrt{2})\xi^2+(1+\sqrt{2})\zeta^2+\eta^2+\frac{3}{4}=0.$$

◊ **Trả lời** : Trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(\Omega;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ xác định bởi :

$$\overrightarrow{O\Omega}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\quad \vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k},\quad \vec{J}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k},\quad \vec{K}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

mặt bậc hai S có phương trình thu gọn :

$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\zeta^2}{b^2}-\frac{\eta^2}{c^2}=1$, trong đó : $a=\frac{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$; S là một hypebôlôit hai tầng.

b) Ta có $\chi_Q(\lambda) = -\lambda(\lambda+9)(\lambda-18)$; Q được chéo hóa thành $Q = PDP^{-1}$ trong đó :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-9&0\\0&0&18\end{pmatrix},\quad P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

Khi ký hiệu $\vec{I}=\frac{1}{3}(-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{J}=\frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})$, $\vec{K}=\frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$, thì một phương trình của S trong hệ q.c.t.c.t. : $\mathcal{R}_1=(O;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ là : $-Y^2+2Z^2+4X+12Y-8Z+4=0$, hoặc là : $(Y-6)^2-2(Z-2)^2-4(X+8)=0$.

Khi ký hiệu Ω là điểm có tọa độ (-8, 6, 2) đối với $\mathcal{R}_1$, một phương trình của S trong hệ q.c.t.c.t. : $\mathcal{R}_2=(\Omega;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ là : $\zeta^2-2\eta^2-4\xi=0$; S là một parabôlôit hypebôlic.

◊ **Trả lời** : Trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(\Omega;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ xác định bởi $\Omega(\frac{26}{2},-\frac{2}{3},-\frac{16}{3})$, $\vec{I}=\frac{1}{3}(-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{J}=\frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})$, $\vec{K}=\frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$, mặt bậc hai S có phương trình thu gọn : $\zeta^2-2\eta^2-4\xi=0$; S là một parabôlôit hypebôlic.

c) Chú ý rằng $x^2+y^2+z^2+2xy-1=(x+y)^2+z^2-1$.

◊ **Trả lời :** Trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận $(O;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ xác định bởi $\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$, $\vec{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{K}=\vec{k}$, mặt bậc hai S có phương trình thu gọn $2Y^2+Z^2=1$; S là một mặt trụ eliptic.

d) Một phương trình của S trong $\mathcal{R}$ là : $(x-2)^2+5\left(-\frac{3}{5}y+\frac{4}{5z}\right)-2=0$

Bằng phép đổi biến : $X=x-2$, $Y=-\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}z$, $Z=-\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}z$ phương trình S trở thành

$X^2+5Y-2=0$, hoặc là $X^2=5Y'$, trong đó $Y'=Y-\frac{2}{5}$.

◊ **Trả lời** : Trong hệ quy chiếu trực chuẩn thuận : $(S;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ được xác định bởi $\overrightarrow{OS}=2\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}$, $\vec{I}=\vec{i}$, $\vec{J}=\frac{1}{5}(-3\vec{j}+4\vec{k})$, $\vec{K}=-\frac{1}{5}(4\vec{j}+3\vec{k})$, mặt bậc hai S có phương trình thu gọn $X^2=5Y$; S là một mặt trụ parabôlic.

6.2.35 Chú ý rằng, với mọi $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-2abxy-2bcyz-2cazx=$$
$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

và $\quad a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)=0$

◊ **Trả lời** : S là một mặt trụ eliptic.

6.2.36 Mặt bậc hai S là mặt tròn xoay khi và chỉ khi tồn tại một hệ q.c.t.c.t $\mathcal{R}'$ của $\mathcal{E}_3$ sao cho trong $\mathcal{R}'$ mặt S có PTD có dạng :

$$\lambda(X^2+Y^2)+\mu Z^2+2IZ+J=0$$

trong đó $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\mu, I, J\in\mathbb{R}$, tức là khi và chỉ khi tồn tại $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ sao cho Q đồng dạng với diag (λ,λ,μ).

6.2.37 Ta lập ma trận Q của S trong $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, rồi tính đa thức đặc trưng của nó :

$$\chi_Q(\lambda)=\det(Q-\lambda I_3)=\begin{pmatrix} a-\lambda & c & b\\ c & b-\lambda & a\\ b & a & c-\lambda\end{pmatrix}=(a+b+c-\lambda)\begin{pmatrix}1 & c & b\\ 1 & b-\lambda & a\\ 1 & a & c-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=-(\lambda-\sigma)(\lambda-\omega)(\lambda+\omega)$$

trong đó :

$$\sigma=a+b+c,\ \omega=|a+jb+j^2c|=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{1/2}$$

Theo bài tập 6.2.36, S là mặt tròn xoay khi và chỉ khi hai trong các số thực σ, ω, $-\omega$ bằng nhau và khác không (hoặc $\sigma=\omega=-\omega=0$). Ta có :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma=\omega\\ \text{hoặc}\\ \sigma=-\omega\end{array}\right. \Leftrightarrow \sigma^2=\omega^2\Leftrightarrow ab+bc+ca=0,$$

◊ **Trả lời** : S là tròn xoay khi và chỉ khi $ab+bc+ca=0$.

6.2.38 a) Một đường thẳng nằm ngang của $\mathcal{E}_3$ không thể gặp D và D', là hai đường thẳng nằm trong các mặt phẳng nằm ngang phân biệt.

Cho Δ là một đường thẳng không nằm ngang của $\mathcal{E}_3$ có HPTD :

$$\begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}, \quad (\alpha, \beta, p, q) \in \mathbf{R}^4.$$

Ta có :
$$\begin{cases} \Delta \cap D \neq \varnothing \\ \Delta \cap D' \neq \varnothing \\ \Delta \cap H \neq \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Bh + q = 0 \\ -\alpha h + p = 0 \\ pq = a^2 \end{cases}$$

Ta sẽ có một PTD của S bằng cách khử α, β, p, q trong :

$$\beta h + q = 0,\ -\alpha h + p = 0,\ pq = a^2,\ x = \alpha z + p,\ y = \beta z + q.$$

◊ **Trả lời** : $h^2xy + a^2(z^2 - h^2) = 0$.

b) Mặt cong S là một mặt bậc hai, và ma trận Q của S trong $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h^2}{2} & 0 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix},$$ vậy các trị riêng là $\frac{h^2}{2},\ -\frac{h^2}{2},\ a^2$.

Theo bài tập 6.2.36, S là tròn xoay khi và chỉ khi ít nhất hai trong các số thực $\frac{h^2}{2},\ -\frac{h^2}{2},\ a^2$ bằng nhau, tức là $\frac{h^2}{2} = a^2$.

Ta có thể kiểm chứng rằng, trong trường hợp đó, S là mặt tròn xoay, vì S nhận một PTD dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x - y)^2 - 2a^2 = 0.$$

◊ **Trả lời** : $h^2 = 2a^2$.

6.2.39 Mọi phương trình bậc hai đối xứng đối với x, y, z có dạng : $A\sigma_1^2 + B\sigma_2 + C\sigma_3 + D = 0$, trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các hàm đối xứng sơ cấp của x, y, z. Khi ký hiệu $S_2 = x^2 + y^2 + z^2$, vì: $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - S_2)$, nên phương trình sẽ là :

$$\left(A + \frac{1}{2}B\right)\sigma_1^2 - \frac{1}{2}S_2 + C\sigma_1 + D = 0$$

và như vậy mặt cong sẽ là một mặt bậc hai tròn xoay.

Trục của mặt đó là : $O + \mathbf{R}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

6.2.40 Chú ý rằng : $(x - 2y) + (2y - 3z) = -(3z - x)$.

◊ **Trả lời** : S là một mặt trụ eliptic.

6.2.41 a) ◊ **Trả lời** : S là một mặt trụ parabôlic, các đường sinh được định phương bởi $\vec{v}$ (1, -3, 2) và một đường chuẩn là parabol có phương trình :

$$\begin{cases} z = 0 \\ (x + y)^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

b) Mặt phẳng đối xứng P của S có phương của phương trình $x + y + z = 0$. Tại các điểm thuộc $P \cap S$, tiếp diện của S trực giao với P ; xác định các điểm M của S tại đó $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \in \vec{P}$.

◊ **Trả lời** : $x + y + z + \dfrac{2}{3} = 0.$

c) T trực giao với $\overrightarrow{\text{grad}}f(M)$ tại mọi điểm $M \in P \cap S$, và T chứa đường thẳng $P \cap S$.

◊ **Trả lời** : $30x - 6y - 24z + 13 = 0.$

6.4.42 Ta có thể chọn một hệ q.c.t.c.t. sao cho : $P = xOy$ và $O \in D$. Khi đó D có một HPTD

$\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases}$, trong đó $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, một vectơ chỉ phương của D là $\vec{u}\,(a, b, 1)$.

Với mọi điểm $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$ ta có $d(M, P) = |z|$ và :

$$d(M, D)^2 = \frac{\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1}((y - bz)^2 + (az - x)^2 + (bx - ay)^2)$$

Từ đó : $M \in S \Leftrightarrow (y - bz)^2 + (az - x)^2 + (bx - ay)^2 = (a^2 + b^2 + 1)z^2$

$\Leftrightarrow ((a^2 + b^2 + 1)(x^2 + y^2) - (ax + by + z)^2 = 0.$

◊ **Trả lời** : S là một mặt nón có đỉnh là điểm tạo nên $P \cap D$.

6.4.43 Các đường thẳng D và D' không đồng phẳng, có đường vuông góc chung Δ.

Ta xét hệ q.c.t.c.t. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ xác định bởi :

$$\begin{cases} O : \text{là trung điểm của } [HH'], \text{ trong đó } H \in D, H' \in D', (HH') = \Delta \\ \vec{k} \text{ định phương } \Delta \\ \vec{i} \text{ cộng tuyến với } \vec{u} + \vec{u}', \text{ trong đó } \vec{u}, \vec{u}' \text{ được chuẩn hóa và định phương} \\ \text{theo thứ tự } D, D'. \end{cases}$$

Như vậy : $D\begin{cases} y = mx \\ z = h \end{cases}$, $D'\begin{cases} y = -mx \\ z = -h \end{cases}$, trong đó $(m, h) \in \mathbb{R}^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Đường thẳng D đi qua $A(0, 0, k)$ và được định phương bởi $\vec{v}(1,m,0)$, suy ra với mọi điểm $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$:

$$d(M,D)^2 = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|^2}{\|v\|^2} = \frac{(-m(z-h))^2 + (z-h)^2 + (mx-y)^2}{1+m^2} = (z-h)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2}.$$

Tương tự : $d(M, D')^2 = (z+h)^2 + \dfrac{(y+mx)^2}{1+m^2}.$

Từ đó : $M \in S \Leftrightarrow (z-h)^2 + \dfrac{(y-mx)^2}{1+m^2} = (z+h)^2 + \dfrac{(y+mx)^2}{1+m^2} \Leftrightarrow 2mxy + (1+m^2)hz = 0.$

◊ **Trả lời** : S là một mặt parabôlôit hypebôlic.

6.2.44 Ta xét một mặt bậc hai bất kỳ S, có PTD :

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

Ta có : $\Gamma \subset S$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in \mathbf{R}^*, At^6 + 2Bt^2(t^3 - 1) + 2Ct^2(t^3 + 1) + D\frac{(t^3 - 1)^2}{t^2} + 2E\frac{t^6 - 1}{t^2} + F\frac{(t^3 + 1)^2}{t^2}$$

$$+ 2Gt^3 + 2H\frac{t^3 - 1}{t} + 2I\frac{t^3 + 1}{t} + J = 0)$$

$\Leftrightarrow (A = 0, 2(B + C) = 0, \ D + 2E + F = 0, 2G = 0, -2B + 2C + 2H + 2I = 0,$
$-2D + 2F = 0, J = 0, -2H + 2I = 0, D - 2E + F = 0)$

$\Leftrightarrow (A = D = E = F = G = J = 0, H = I = B, C = -B)$.

◊ **Trả lời** : Tồn tại một và chỉ một mặt bậc hai S chứa Γ. Một PTD của S là :

$$xy - xz + y + z = 0\ ,$$

và S là một parabôlôit hypebôlic.

6.2.45 Ta xét một mặt bậc hai tùy ý S, có PTD :

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

Ta có : $P \subset S \Leftrightarrow \left(\forall y \in \mathbf{R}, \quad A\dfrac{y^4}{4p^2} + B\dfrac{y^3}{p} + Dy^2 + G\dfrac{y^2}{p} + 2Hy + J = 0 \right)$

$\Leftrightarrow (A = B = H = J = 0, G = -Dp)$.

Như vậy, S có PTD :

$$2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 - 2Dpx + 2Iz = 0.$$

Rồi : $D \subset S \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R}, C(p + 2z)z + Dp^2 + 2Epz + Fz^2 - Dp(p + 2z) + 2Iz = 0)$

$\Leftrightarrow (2C + F = 0, Cp + Ep - Dp + I = 0) \Leftrightarrow (F = -2C, I = (-C + D - E)p)$

Vậy S có PTD :

$$2Cxz + Dy^2 + 2Eyz - 2Cz^2 - 2Dpx - 2(C - D + E)pz = 0.$$

• S tiếp xúc tại O với mặt phẳng yOz khi và chỉ khi $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi(0,0,0)$ cộng tuyến với $(1, 0, 0)$, trong đó ký hiệu ϕ là vế thứ nhất của phương trình trên đây. Vì $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi(0,0,0) = (-2Dp, 0, -2(C - D + E)p)$, nên điều kiện trên sẽ quy về : $E = D - C$.

Cuối cùng, S có PTD :

$$2Cxz + Dy^2 + 2(D - C)yz - 2Cz^2 - 2Dpx = 0,$$

hoặc : $$2C(xz - yz - z^2) + D(y^2 + 2yz + 2px) = 0.$$

Như vậy ta có một chùm tuyến tính các mặt bậc hai (không thuộc chương trình) có cơ sở là (S_1, S_2), trong đó S_1 là hợp của hai mặt phẳng $z = 0$, $x - y - z = 0$ và S_2 là mặt parabôlôit hypebôlic $y^2 + 2yz - 2px = 0$.

◊ **Trả lời** : Một (cặp) vô số mặt bậc hai, có PTD là :

$$2C(xz - yz - z^2) + D(y^2 + 2yz - 2px) = 0, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

6.2.46 Cách giải tương tự như ở bài tập 6.2.45.

◊ **Trả lời** : Các mặt bậc hai của PTD :

$$2Ehx^2 + 2Cxz + 2Eyz + Fz^2 - 2Ehy - Fhz = 0, (C, E, F) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$$

6.2.47 Giả sử $M(X, Y, Z) \in \mathcal{E}_3$; lập một hệ phương trình Descartes của đường tròn C_M có trục Δ và đi qua M :

$$\begin{cases} (x - X) + (z - Z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \end{cases}$$

Biểu thị quan hệ $C_M \cap D \neq \varnothing$ bằng cách khử (x, y, z) trong :

$$z = 0, y = x + 1, (x - X) + (z - Z) = 0, x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

◊ **Trả lời** : $x^2 + 4xz - y^2 + z^2 + 2x + 2z + 1 = 0$ (hyperbôlôit một tầng).

6.2.48 Cho $M(x, y, z) \in S$. Một PTD của tiếp diện Π với S tại M là :

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0.$$

Suy ra : $P\left(\frac{a^2}{x},0,0\right),\ Q\left(0,\frac{b^2}{y},0\right),\ R\left(0,0,\frac{c^2}{z}\right)$

Sau đó : $\overrightarrow{OP}.\vec{i}=\overrightarrow{OQ}.\vec{j}=\overrightarrow{OR}\vec{k} \Leftrightarrow \frac{a^2}{x}=\frac{b^2}{y}=\frac{c^2}{z}$

$$\Leftrightarrow (\exists\lambda\in\mathbf{R}^*,(x=\lambda a^2,y=\lambda b^2,z=\lambda c^2)).$$

Tiếp theo : $M\in S\Leftrightarrow \lambda^2a^2+\lambda^2b^2+\lambda^2c^2=1$

◊ **Trả lời** : Hai mặt phẳng có PTĐ : $x+y+z-\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0, \varepsilon\in\{-1,1\}$

6.2.49 a) ◊ **Trả lời** : S_1 và S_2 là những parabôlôit eliptic tròn xoay.

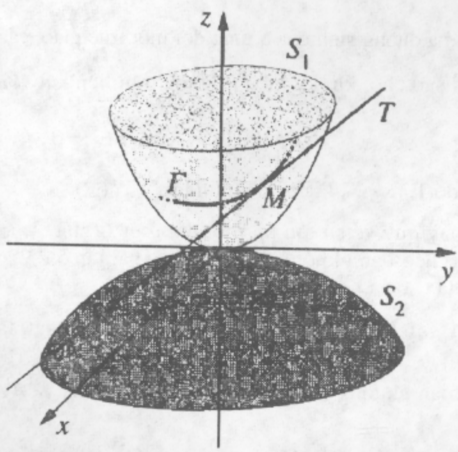
b) Ta có thể tìm Γ dưới dạng BDTS :

$x=\rho(\theta)\cos\theta,\ y=\rho(\theta)\sin\theta,$

$z=\frac{\rho^2(\theta)}{2p},$

trong đó $\rho=\mathbb{R}\to\mathbf{R}_+^*$ thuộc lớp C^1.

Một vectơ tiếp xúc tại $M(\theta)$ với Γ là $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$, từ đó một BDTS của tiếp tuyến $T(\theta)$, tại $M(\theta)$ với Γ (để cho gọn ta ký hiệu ρ thay vì $\rho(\theta)$) :



$$\begin{cases} X=\rho\cos\theta+\lambda(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)=(\rho+\lambda\rho')\cos\theta-\lambda\rho\sin\theta \\ Y=\rho\sin\theta+\lambda(\rho'\sin\theta-\rho\cos\theta)=(\rho+\lambda\rho')\sin\theta-\lambda\rho\cos\theta \\ Z=\frac{\rho^2}{2p}+\lambda\frac{\rho\rho'}{p}. \end{cases}$$

Đường thẳng $T(\theta)$ này tiếp xúc với S_2 khi và chỉ khi phương trình theo λ của các điểm thuộc $T(\theta)\cap S_2$:

$$(\rho+\lambda\rho')^2+\lambda^2\rho^2+2q\left(\frac{\rho^2}{2p}+\lambda\frac{\rho\rho}{p}\right)=0$$

có một nghiệm kép.

Phương trình bậc hai : $(\rho^2+\rho'^2)\lambda^2+2\rho\rho'\left(1+\frac{q}{p}\right)\lambda+\rho^2\left(1+\frac{q}{p}\right)=0$

có biệt thức (thu gọn) : $\Delta'=\rho^2\rho'^2\left(1+\frac{q}{p}\right)^2-\left(\rho^2+\rho'^2\right)\rho^2\left(1+\frac{q}{p}\right).$

Vậy điều kiện quy về : $\rho'^2 = \frac{p}{q}\rho^2$.

Vì ρ' liên tục trên $\mathbb{R}$ và vì ρ có các trị > 0, nên định lý các giá trị trung gian chứng tỏ rằng ρ' có dấu cố định (chặt), vậy $\rho' = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}\rho$, trong đó $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, rồi $\rho = \theta \to Ce^{\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}\theta}$, $C \in \mathbf{R}_-^*$.

◊ **Trả lời** : Các đường cong có BDTS : $x = Ce^{k\theta}\cos\theta$, $y = Ce^{k\theta}\sin\theta$, $z = \frac{C^2}{2p}e^{2k\theta}$, $C \in \mathbf{R}_+^*$ cố định, $k = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$ cố định, $\theta \in \mathbb{R}$ là tham số.

6.2.50 Ký hiệu $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng liên kết với S trong cơ sở $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Để tồn tại ba đường sinh của S từng đôi một trực giao, cần và đủ là tồn tại một c.s.t.c. $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho, khi ký hiệu R là ma trận liên kết với S trong cơ sở $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$, ta có :

$$\forall i \in \{1,2,3\} \qquad {}^t\mathrm{E}_i R \mathrm{E}_i = 0,$$

trong đó$(\mathrm{E}_i)_{1 \le i \le 3}$ là cơ sở chính tắc $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Điều này quy về sự tồn tại một ma trận Ω của $\mathbb{O}_3(\mathbb{R})$ sao cho $\Omega^t Q \Omega$ có tất cả các hạng tử đường chéo bằng không. Theo Tập 6, bài tập 5.2.22, điều kiện này tương đương với tr(Q) = 0, tức là : $A + D + F = 0$.

6.2.51 Cả hai mặt bậc hai Q_1 và Q_2 đều nhận 0 làm tâm đối xứng. Các ma trận của các dạng toàn phương liên kết với Q_1 và Q_2 là ${}^tAA$ và A^tA, trong đó : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. Vì ${}^tAA$ và A^tA có cùng đa thức đặc trưng (xem Tập 6, bài tập 2.2.12), nên cả hai mặt bậc hai Q_1 và Q_2 có cùng phương trình thu gọn (trong hai hệ quy chiếu trực chuẩn).

6.2.52 Ký hiệu $m(u)(\cos u, \sin u, u^2)$ và $\overrightarrow{G(u)}(-\sin u, \cos u, 2u)$ (vốn $\neq \vec{0}$), thì một BDTS của S là Φ: $(u, v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$, điều này chứng tỏ S là mặt kẻ.

• Vì với mọi (u, v) thuộc $\mathbb{R}^2$: $\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u}(u,v) = \overrightarrow{m'(u)} + v\overrightarrow{G'(u)} = \overrightarrow{G(u)} + v\overrightarrow{G'(u)}$, $\frac{\overrightarrow{\partial\Phi}}{\partial u}(u,v) = \overrightarrow{G(u)}$,

và rằng $(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$ độc lập , nên điểm $M(u, v)$ thuộc S là chính quy khi và khi $v \neq 0$.

Tại mọi điểm $M(u, v)$ ($v \neq 0$) của S, tiếp diện với S được định phương bởi $(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$, vậy không phụ thuộc vào v, điều này chứng tỏ S khả triển.

6.2.53 Ký hiệu $m(u)(3u, 3u^2, 0)$ và $\overrightarrow{G(u)}(1, 2u, u^3)$, một BDTS của S là :

$\phi : (u, v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$, điều này chứng tỏ S là mặt kẻ.

• Với mọi u thuộc $\mathbb{R}$ ta có : $\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4u & 2u & 2 \\ 0 & u^3 & 3u^2 \end{vmatrix} = 0$,

và như vậy S khả triển.

• Rõ ràng rằng : $\forall u \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{m'(u)} = 3\overrightarrow{G(u)} - u\overrightarrow{G'(u)}$,

từ đó, với các ký hiệu ở 6.2.52 : $\forall u \in \mathbb{R},\ \lambda(u) = 3,\ \mu(u) = -u$,

và gờ lùi có BDTS : $u \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(u, -\mu(u))$.

◊ **Trả lời** : Gờ lùi có BDTS : $x = 4u,\ y = 4u^2,\ z = u^4,\ u \in \mathbb{R}$.

6.2.54 a) • Vì u, v có những vai trò đối xứng, ta được một BDTS khác của mặt cong S đã đưa ra bằng ký hiệu $\sigma = u + v$ và $\pi = uv$: $x = \dfrac{\pi}{\sigma},\ y = \sigma^2 - 3\sigma u,\ z = \sigma^2 - 2\pi$.

Kí hiệu $m(\sigma)(0, \sigma^3, \sigma^2)$ và $\overrightarrow{G(\sigma)}\left(\dfrac{1}{\sigma}, -3\sigma, -2\right)$, S có BDTS $\Phi : (\sigma, \pi) \mapsto m(\sigma) + \pi\overrightarrow{G(\sigma)}$, vậy S là một mặt kẻ.

Thực vậy sự tồn tại của (u, v) được biểu thị, với (σ, π) đã cho bởi $\sigma^2 - 4\pi \geq 0$, vậy π chỉ vạch nên một nửa đường thẳng của $\mathbb{R}$, và như vậy S chỉ là một mặt kẻ "một nửa".

• Với mọi σ thuộc $\mathbb{R}$, ta có :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\overrightarrow{m'(\sigma)}, \overrightarrow{G(\sigma)}, \overrightarrow{G'(\sigma)}) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sigma} & -\dfrac{1}{\sigma^2} \\ 3\sigma^2 & -3\sigma & -3 \\ 2\sigma & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

vậy S là không khả triển.

b) • Trước tiên tìm một BDTS của S :

$$x^2z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(\exists u \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = yz\cos u \\ y = xz\cos u \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = y = 0 \\ \text{hoặc} \\ \exists u \in D,\quad z = \dfrac{1}{\cos u} \text{ và } y = x\tan u, \end{array}\right.$$

trong đó $D = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$

Vậy một BDTS của S sẽ là : $x = v,\ y = v\tan u,\ z = \dfrac{1}{\cos u}$.

Ký hiệu $m(u)\left(0, 0, \dfrac{1}{\cos u}\right)$ và $\overrightarrow{G(u)}(1, \tan u, 0)$, một BDTS của S là $(u, v) \mapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$ điều này chứng tỏ S là mặt kẻ.

• Với mọi (u, v) thuộc $D \times \mathbb{R}$, ta có :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tan u & \dfrac{1}{\cos^2 u} \\ \dfrac{\sin u}{\cos^2 u} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{\sin u}{\cos^2 u} \neq 0,$$

điều này chứng tỏ S không khả triển.

6.2.55 Một điểm $M(X, Y, Z)$ ở trên mặt trụ Σ ngoại tiếp S theo phương của đường thẳng D khi và chỉ khi đường thẳng D_M đi qua M và song song với D, tiếp xúc với S. Một BDTS của D_M là : $x = X + \lambda$; $y = Y + \lambda$; $z = Z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Đường thẳng D_M tiếp xúc với S khi và chỉ khi phương trình :

$$(X+\lambda)^2 + (Y+\lambda)^2 - (Z+\lambda)^2 = 0$$

có (ít nhất) một nghiệm kép, tức là:

$$(2X + 2Y - 1)^2 - 8(X^2 + Y^2 - Z) = 0.$$

◊ **Trả lời** : $4X^2 - 8XY + 4Y^2 + 4X + 4Y - 8Z - 1 = 0$.

6.2.56 Một điểm $M(X, Y, Z)$ ở trên mặt nón Σ đỉnh A và ngoại tiếp S khi và chỉ khi đường thẳng (AM) tiếp xúc S. Một BDTS của (AM) là :

$$x = -2 + \lambda(X+2), \quad y = -2 + \lambda(Y+2), \quad z = \lambda Z, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Một ĐKCĐ là phương trình $(\lambda(X+2) - 2)(\lambda(Y+2) - 2) + (\lambda(X+2) - 2)\lambda Z + (\lambda(Y+2) - 2)\lambda Z - 1 = 0$ có một nghiệp kép, tức là biệt thức của nó bằng không.

◊ **Trả lời** : $((X+2) + (Y+2) + 2Z)^2 - 3((X+2)(Y+2) + (X+2)Z + (Y+2)Z) = 0$.

6.2.57 Cách giải tương như với bài tập 6.2.49, *b*), bằng cách tìm Γ bằng một BDTS có dạng

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \varphi(t).$$

◊ **Trả lời** : Các đường cong có BDTS : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \varepsilon k a \operatorname{ch}\left(\frac{t}{k} + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$ cố định, $\varepsilon = \{-1, 1\}$ cố định, $t \in \mathbb{R}$ là tham số.

6.2.58 Ta có thể tìm Γ bằng một BDTS dạng : $x = t$, $y = t^2$, $z = \varphi(t)$, trong đó $\varphi : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, chưa biết (và I là khoảng chưa biết).

Mạt phẳng mật tiếp $\Pi(t)$ với Γ tại $M(t)$ là mặt phẳng đi qua $M(t)$ và được định phương bởi $\left(\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}, \overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}\right)$.

Hình chiếu vuông góc $m(t)$ của $M(t)$ lên $y'y$ có tọa độ $(0, t^2, 0)$. Vậy :

$$m(t) \in \Pi(t) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 2 \\ \varphi(t) & \varphi'(t) & \varphi''(t) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2\varphi''(t) - t\varphi'(t) + \varphi(t) = 0.$$

Để giải phương trình vi phân Euler này, ta thực hiện phép đổi biến xác định bởi $u = \ln|t|$, $t = \varepsilon e^u$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Kí hiệu $g(u) = \varphi(t)$, ta có : $\varphi'(t) = g'(u)\frac{1}{t}$ và $\varphi''(t) = g''(u)\frac{1}{t^2} - g'(u)\frac{1}{t^2}$.

Vậy, φ là nghiệm khi và chỉ khi : $g'' - 2g' + g = 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân này là $g : u \mapsto (\lambda u + \mu)e^u$, $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$, từ đó suy ra φ.

◊ **Trả lời** : Các đường cong có BDTS : $x = t$, $y = t^2$, $z = (\lambda \ln|t| + \mu)t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ cố định, $t \in \mathbb{R}^*$ là tham số.

6.2.59 I) 1) Cách giải giống như với bài tập 6.2.31.

S là tròn xoay và trục Δ của nó đi qua O và được định phương bởi $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

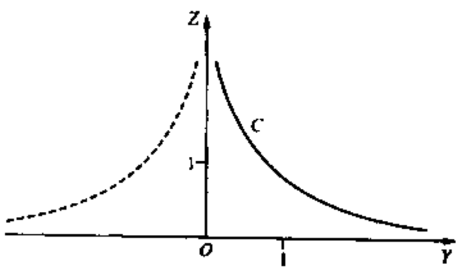
Giả sử $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ là hệ quy chiếu trực chuẩn thuận của $\mathcal{E}_3$ xác định bởi :

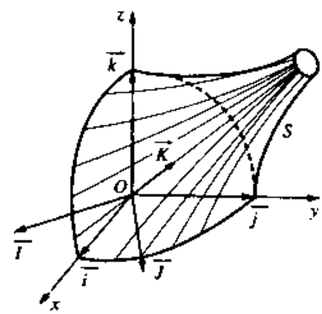
$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j}, \vec{k}),\ \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}),\ \vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}).$$

Một phương trình của S trong $\mathcal{R}'$ là : $(X^2 + Y^2)Z = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Ta sẽ được một kinh tuyến C của S bằng cách cắt S bởi (nửa) mặt phẳng có phương trình $X = 0$ (và $Y \geq 0$).

Ta được : C : $X = 0$, $(Y \geq 0)$, $Y^2Z = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.





2) a) Với mọi $M(x, y, z)$ thuộc $\mathcal{E}_3$, ký hiệu $A(M) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.

Ánh xạ $A : \underset{M(x,y,z) \mapsto A(M)}{\mathcal{E}_3 \to \mathbf{M}_3(\mathbb{R})}$ là một đẳng cấu $\mathbb{R}$ - không gian vectơ.

Chứng minh rằng : $\forall (M, M') \in \mathcal{E}_3^2$, $A(M)A(M') = A(P)$.

Như vậy : $(M, M') \in S^2 \Rightarrow \det(A(M)) = \det(A(M')) = 1 \Rightarrow \det(A(P)) = 1 \Rightarrow P \in S$.

b) • Rõ ràng là * là một luật hợp thành trong trong S, giao hoán, và nhận $E(1, 0, 0) \in S$ làm phần tử trung hòa. Vì phép nhân trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ có tính kết hợp và vì A là đơn ánh, nên có tính kết hợp trong S.

• Cho $M(x, y, z) \in S$; vậy $A(M) \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ và :

$$(A(M))^{-1} = \begin{pmatrix} x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - xz \\ y^2 - xz & z^2 - xy & x^2 - yz \end{pmatrix} = A(N).$$

trong đó $N(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$.

Hơn nữa : $\det(A(N)) = \det((A(M))^{-1}) = (\det(A(M)))^{-1} = 1$, vậy $N \in S$.

Như vậy M nhận N làm đối xứng đối với * trong S.

NHẬN XÉT :

Một cách chứng minh khác về sự tồn tại các phần tử đối xứng.

Cho $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{M} = \{xI_3 + yJ + zJ^2 \,;\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

• Chứng tỏ rằng $\mathcal{M}$ là một $\mathbb{R}$ - đại số (đối với các những luật thông thường) và rằng (I_3, J, J^2) là một cơ sở của $\mathbb{R}$ - không gian vectơ $\mathcal{M}$.

• Giả sử $A = xI_3 + yJ + zJ^2 \in \mathcal{M} \cap GL_3(\mathbb{R})$; chứng tỏ rằng ánh xạ :

$\begin{array}{c}\mathcal{M} \to \mathcal{M} \\ X \mapsto AX\end{array}$ tuyến tính và là đơn ánh. Từ đó suy ra rằng φ_A là song ánh và rằng tồn tại (ξ, ζ, η) $\in \mathbb{R}^3$ sao cho ta có $AB = I_3$ khi ký hiệu $B = \xi I_3 + \zeta J + \eta J^2$.

• Chứng tỏ rằng, nếu $A \in S$, thì $B \in S$.

• Suy ra rằng mọi phần tử của S có một đối xứng đối với $*$ trong S.

3) a) Ta có : $x + y + z = e^{2t}$, $\quad x + jz + j^2z = e^t u$, $\quad x + j^2y + jz = e^t\overline{u}$

từ đó $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + jy + j^2z)(x + j^2y + jz) = |u|^2 = 1$.

b) • Rõ ràng là ϕ là một C^∞ - vi phôi từ $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ vào S.

• Giả sử $(x, y, z) \in S$; ta có : $1 = f(x, y, z) = (x + y + z)|x + jy + j^2z|^2$, từ đó $x + y + z > 0$.

Vậy tồn tại $t \in \mathbb{R}$ duy nhất sao cho $x + y + z = e^{-2t}$,

Vì $\begin{cases} \overline{x + jy + j^2z} = x + j^2y + jz \\ |x + jy + j^2z|^2 = \dfrac{1}{x + y + z} e^{2t} \end{cases}$, nên tồn tại $u \in \mathbb{U}$ duy nhất sao cho $x + jy + j^2z = e^t u$.

Khi đó ta có : $x + y + z = e^{-2t}$, $x + jy + j^2z = e^t u$, $x + j^2y + jz = e^t\overline{u}$.

Điều này chứng tỏ rằng ϕ là song ánh.

• Ta vừa thấy : $t = -\dfrac{1}{2}\ln(x + y + z)$ và $\operatorname{Arg} u = \operatorname{Arg}(e^{-t}(x + jy + j^2z))\,[2\pi]$

Điều này chứng tỏ rằng ϕ^{-1} thuộc lớp C^∞ trên S.

• Giả sử $(t, u), (t', u') \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, $M(x, y, z) = \phi(t, u)$, $M'(x', y', z') = \phi(t', u')$, (X, Y, Z) các tọa độ của $M * M'$. Ta có :

$$\begin{cases} X + Y + Z = (x + y + z)(x' + y' + z') = e^{-2t}e^{-2t'} = e^{-2(t+t')} \\ X + jY + j^2Z = (x + jy + j^2z)(x' + jy' + j^2z') = e^t u e^{t'} u' = e^{t+t'} uu' \\ X + j^2Y + jZ = \overline{X + jY + j^2Z} = e^{t+t'}\overline{uu'} \end{cases}$$

Ta trang bị cho $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ luật - tích T (từ luật + của $\mathbb{R}$ và từ luật • của $\mathbb{U}$), tức là : $(t, u)\mathrm{T}(t', u') = (t + t', uu')$.

Ta đã chứng tỏ rằng $\forall (t, u), (t', u') \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, $\phi((t, u)\mathrm{T}(t', u')) = \phi(t, u) * \phi(t', u')$.

c) $M_1 = \phi(1, e^{i\frac{\pi}{3}})$ từ đó : $M_n = (\phi(1, e^{i\frac{\pi}{3}}))^{[n]} = \phi((1, e^{i\frac{\pi}{3}})^{[n]}) = \phi(n, e^{i\frac{n\pi}{3}})$, từ đó :

$$M_n\left(\frac{1 + 2e^{3n}\cos\dfrac{n\pi}{3}}{3e^{2n}}, \frac{1 + 2e^{3n}\cos\dfrac{(n-2)\pi}{3}}{3e^{2n}}, \frac{1 + 2e^{3n}\cos\dfrac{(n+2)\pi}{3}}{3e^{2n}}\right)$$

Bảng ký hiệu

Bảng thuật ngữ

N

P

Q

R

S

U

V

X

YZ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập và sửa bản in :
NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Biên tập tái bản :
TRẦN PHƯƠNG DUNG

Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

GIÁO TRÌNH TOÁN - TẬP 7
HÌNH HỌC
In 1500 bản, khổ 16x24cm, tại Trung tâm Công nghệ Thông tin Chế bản và In Nhà xuất bản Thế Giới. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản: 194-2006/CXB/4-323/GD cấp ngày 22-3-2006.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.

Jean-Marie Monier

HÌNH HỌC

Giáo trình và 400 bài tập có lời giải

Giáo trình Toán - Tập 7

Mục tiêu của bộ giáo trình Toán này là cung cấp cho sinh viên những năm đầu của các trường đại học khoa học và kỹ thuật một tài liệu học tập, tra cứu thông dụng và có hiệu quả. Với nhiều bài tập có lời giải, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh của lý thuyết, cuốn sách còn nhằm giúp cho người học rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.

8 934980 640142

Nội dung của tập 7 là chương trình Hình học các năm thứ nhất và thứ hai.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Giá: 48.000đ